

Вик. С. КУЛИКОВ

ВЫРОЖДЕНИЯ КЗ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ЭНРИКВЕСА

§ 1. Введение

Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ — семейство поверхностей над единичным диском $\Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$, т. е. π — собственный морфизм комплексного многообразия X , $\dim X = 3$, причем все слои $X_t = \pi^{-1}(t)$ предполагаются неособыми при $t \in \Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. Мы будем называть π вырождением, а слой $X_0 = \pi^{-1}(0)$ — вырожденным слоем. Вырождение π называется проективным, если π есть локализация проективного морфизма на проективную кривую.

Цель этой работы — описать вырожденные слои семейств КЗ поверхностей, когда X_t являются поверхностями с тривиальным каноническим классом $K_{X_t} = 0$ и с $q(X_t) = \dim H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$, а также семейств поверхностей Энриквеса, когда $q(X_t) = 0$, $2K_{X_t} = 0$, а $K_{X_t} \neq 0$.

Исследование вырождений началось с работы Кодаира ⁽⁵⁾, который описал вырождения эллиптических кривых. В случае кривых по каждому вырождению можно однозначно построить минимальное, вырожденный слой которого не содержит исключительных кривых 1-го рода (и. к. 1 рода), т. е. кривых $L \simeq \mathbb{P}^1$, $(L^2) = -1$. Поэтому при описании вырожденных слоев вырождений кривых можно ограничиться минимальными вырождениями. Вырождения поверхностей существенно отличаются от вырождений кривых уже тем, что для семейств поверхностей нет однозначно определенного семейством минимального вырожденного слоя. Здесь возможны нетривиальные перестройки вырожденного слоя, которые не изменяют числа компонент в этом слое.

Вырождение $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$ называется перестройкой вырождения $\pi: X \rightarrow \Delta$, если существует бимероморфное отображение $\psi: X \rightarrow X'$, биголоморфное вне точек слоев X_0 и X'_0 , такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \psi: X & \longrightarrow & X' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & \Delta & \end{array}$$

коммутативна.

В работе изучаются лишь хорошие вырождения $\pi: X \rightarrow \Delta$, т. е. такие, у которых вырожденный слой $X_0 = V_1 + \dots + V_n$ есть дивизор с нормаль-

ными пересечениями, все компоненты V_i которого есть гладкие поверхности, входящие в слой X_0 с кратностью 1. В силу теоремы Мамфорда о полустабильной редукции ⁽⁴⁾ можно добиться того, что после замены базы $t=s^N$ любое вырождение станет хорошим.

Пусть $\pi: Y \rightarrow \Delta$ — минимальное вырождение эллиптических кривых. Как показано в ⁽¹⁾, в этом случае канонический класс K_Y тривиален. Центральной теоремой работы является обобщение этого результата на случай вырождений поверхностей КЗ и Энриквеса.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ — хорошее проективное вырождение КЗ поверхностей ($m=1$) или поверхностей Энриквеса ($m=2$). Тогда существует такая перестройка $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$ вырождения π , что:

I. π_1 — хорошее вырождение,

II. $mK_{X'}$ тривиален.

Доказательству теоремы I посвящен § 4.

Каждому вырождению π , у которого вырожденный слой X_0 есть дивизор с нормальными пересечениями, можно сопоставить полиэдр $\Pi(X_0)$, вершинам которого соответствуют компоненты V_i слоя X_0 , ребрам соответствуют компоненты двойных кривых $C_{ij} = V_i \cap V_j$, двумерным граням — тройные точки вырождения $T_{ijk} = V_i \cap V_j \cap V_k$.

В § 3 доказываются классификационные теоремы вырождений поверхностей КЗ и Энриквеса.

ТЕОРЕМА II. Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ — хорошее вырождение КЗ поверхностей, полученное перестройкой из хорошего проективного вырождения, и пусть K_X тривиален. Тогда вырожденный слой X_0 вырождения π может быть одного из трех типов:

I. $X_0 = V_1$ — неособая КЗ поверхность.

II. $X_0 = V_1 + \dots + V_n$, поверхности V_1 и V_n — рациональные, а $V_2, \dots, V_{n-1}$ — линейчатые эллиптические ($q(V_i) = 1$). Двойные кривые $C_{1,2}, C_{2,3}, \dots, C_{n-1,n}$ — эллиптические. Полиэдр $\Pi(X_0)$ имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \text{---} & \cdot & \text{---} & \cdot & \dots & \cdot & \text{---} & \cdot \\ V_1 & & V_2 & & & & V_{n-1} & & V_n \end{array}$$

III. $X_0 = V_1 + \dots + V_n$, все поверхности V_i — рациональные, двойные кривые $C_{i,j}$ на каждой поверхности V_i являются рациональными кривыми и образуют цикл. $\Pi(X_0)$ есть триангуляция сферы S^2 на треугольники.

Эти три типа различаются с помощью монодромии T , действующей на $H^2(X, \mathbb{Z})$: I. $N=0$, т. е. $T = \text{id}$, II. $N \neq 0$, $N^2=0$, III. $N^2 \neq 0$, $N^3=0$, где $N = \ln T$.

ТЕОРЕМА III. Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ — хорошее вырождение поверхностей Энриквеса, полученное перестройкой из хорошего проективного вырождения, и пусть $2K_X$ тривиален. Тогда вырожденный слой вырождения π может быть одного из трех типов:

I. $X_0 = V_1$ — неособая поверхность Энриквеса.

II. $X_0 = V_1 + \dots + V_n$, все V_i — линейчатые эллиптические поверхности при $i > 1$, а V_1 — рациональная поверхность. Двойные кривые $C_{1,2}, C_{2,3}, \dots$

..., $C_{n-1, n}$ — эллиптические. Полиэдр $\Pi(X_0)$ имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \cdots & \bullet & \text{---} & \bullet \\ V_1 & & V_2 & & & & V_{n-1} & & V_n \end{array}$$

III. $X_0 = V_1 + \dots + V_n$, все V_i — рациональные поверхности, двойные кривые $C_{i, j}$ на каждой V_i являются рациональными кривыми и образуют цикл. Полиэдр $\Pi(X_0)$ есть триангуляция проективного пространства $\mathbf{RP}^2$ на треугольники.

Во всех случаях монодромия T тривиальна.

Как показано в ⁽⁶⁾, из теорем I и II следует эпиморфность отображения периодов для КЗ поверхностей.

Автор выражает свою глубокую признательность И. Р. Шафаревичу за поддержку и внимание к работе.

§ 2. Вспомогательные результаты

Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ — хорошее вырождение поверхностей, вырожденный слой которого $X_0 = V_1 + \dots + V_n$.

2.1. ЛЕММА. Пусть $C \subset V_1 \cap V_2$ — компонента двойной кривой хорошего вырождения. Тогда

$$(C^2)_{v_1} + (C^2)_{v_2} = -T_C,$$

где T_C — число тройных точек на кривой C , а $(C^2)_{v_i}$ — индекс самопересечения кривой C на поверхности V_i .

Доказательство. Дивизор $X_0 = V_1 + \dots + V_n$ есть дивизор функции на X . Поэтому $\deg \mathcal{O}_C(V_1 + \dots + V_n) = 0$. Для доказательства леммы осталось заметить, что $\deg \mathcal{O}_C(V_i) = (C^2)_{v_i}$ и $\sum' \deg \mathcal{O}_C(V_i) = T_C$, где $\sum'$ — сумма по всем $i > 2$.

2.2. Обозначим через $\chi(Y)$ эйлерову характеристику структурного пучка $\mathcal{O}_Y$ на многообразии Y .

ЛЕММА. Пусть T — число всех тройных точек хорошего вырождения π . Тогда

$$\chi(X_t) = \sum_{i=1}^n \chi(V_i) - \sum_{i < j} \chi(C_{i, j}) + T.$$

Доказательство. Известно ⁽⁷⁾, что $\chi(X_t) = \chi(X_0)$. Отсюда и из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_0} \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_{V_i} \rightarrow \bigoplus_{i < j} \mathcal{O}_{C_{i, j}} \rightarrow \bigoplus_{i < j < k} T_{i, j, k} \rightarrow 0$$

следует лемма.

2.3. Точные последовательности Клеменса — Шмида ⁽³⁾ (четная и нечетная) для хорошего проективного семейства поверхностей имеют вид:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X_t) \xrightarrow{\psi} H^0(X_0) \xrightarrow{\mu} H^2(X_0) \xrightarrow{\nu} H^2(X_t) \xrightarrow{N} H^2(X_t) \xrightarrow{\psi} H^2(X_0) \xrightarrow{\mu} H^4(X_0) \rightarrow \dots \\ 0 \rightarrow H^1(X_0) \xrightarrow{\nu} H^1(X_t) \xrightarrow{N} H^1(X_t) \xrightarrow{\psi} H^3(X_0) \xrightarrow{\mu} H^3(X_0) \xrightarrow{\nu} H^3(X_t) \xrightarrow{N} H^2(X_t) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

На членах этих последовательностей определена смешанная структура Ходжа ССХ $(^2)$, $(^0)$. При этом морфизмы $\psi, \mu, \nu, N = \ln T$ есть морфизмы ССХ типов: $(-2, -2)$, $(3, 3)$, $(0, 0)$, $(-1, -1)$.

Напомним, что ССХ на векторном пространстве $H = H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ состоит из двух фильтраций: возрастающей фильтрации W (весовой), определенной над $\mathbb{Q}$, и убывающей фильтрации Ходжа F , причем на $\text{Gr}_m^W = W_m/W_{m-1}$ фильтрация F индуцирует чистую структуру Ходжа веса m . Морфизм $\varphi: H \rightarrow \tilde{H}$ пространств, на которых введена ССХ, является морфизмом ССХ типа (r, r) , если $\varphi(W_k) \subset \tilde{W}_{k+2r}$ и $\varphi(F^p) \subset \tilde{F}^{p+r}$, при этом φ является строгим морфизмом, т. е. $\varphi(W_k) = \tilde{W}_{k+2r} \cap \text{Im } \varphi$.

2.4. $H^* = H^*(X_t)$ снабжается предельной ССХ. Для нее весовая фильтрация W определяется монодромией T следующими условиями:

- а) $H^m = W_{2m} \supset \dots \supset W_0 \supset 0$,
- б) $N = \ln T: H^m(X_t) \rightarrow H^m(H_t)$ есть морфизм ССХ типа $(-1, -1)$,
- в) $N^k: \text{Gr}_{m+k}^W \rightarrow \text{Gr}_{m-k}^W$ есть изоморфизм.

2.5. Для дивизора с нормальными пересечениями $Y = Y_1 + \dots + Y_n$ весовая фильтрация 0W на $H^*(Y)$ вычисляется с помощью спектральной последовательности $(^2)$

$$E_1^{pq} = H^q(Y^{(p+1)}, \mathbb{C}) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \mathbb{C}).$$

Эта спектральная последовательность вырождается в члене E_2 и

$$E_2^{pq} = E_{\infty}^{pq} = \text{Gr}_q^{{}^0W} H^{p+q}(Y, \mathbb{C}).$$

В случае поверхности $Y = X_0 = V_1 + \dots + V_n$ эта спектральная последовательность приводит к следующему результату:

- а) ${}^0W_0 H^m(X_0) \simeq H^m(\Pi(X_0))$;
- б) $H^1(N_0) = {}^0W_1 \supset {}^0W_0 \supset 0$ и

$$\text{Gr}_1^{{}^0W} H^1(X_0) = \text{Ker} \left(\bigoplus_i H^1(V_i) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^1(C_{i,j}) \right);$$

- в) $H^2(X_0) = {}^0W_2 \supset {}^0W_1 \supset {}^0W_0 \supset 0$ и

$$\text{Gr}_1^{{}^0W} H^2(X_0) = \text{Coker} \left(\bigoplus_i H^1(V_i) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^1(C_{i,j}) \right),$$

$$\text{Gr}_2^{{}^0W} H^2(X_0) = \text{Ker} \left(\bigoplus_i H^2(V_i) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^2(C_{i,j}) \right);$$

кроме того,

$$\text{Gr}_2^{{}^0W} H^3(X_0) = H_2^{2,0} \oplus H_2^{1,1} \oplus H_2^{0,2},$$

где $H_2^{2,0} = \bigoplus_{i=1}^n H^{2,0}(V_i)$. Обозначим

$$\text{ckh}^p = \dim \text{Coker} \left(\bigoplus H^p(V_i) \rightarrow \bigoplus H^p(C_{i,j}) \right)$$

и

$$\text{kh}^p = \dim \text{Ker} \left(\bigoplus H^p(V_i) \rightarrow \bigoplus H^p(C_{i,j}) \right).$$

2.6. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ — хорошее проективное вырождение КЗ поверхностей или поверхностей Энриквеса, тогда

$$h^1(\Pi(X_0)) = \dim H^1(\Pi(X_0)) = 0.$$

Доказательство. Применяя нечетную последовательность Клеменса — Шмида, имеем $H^1(X_0) = 0$. Отсюда и из предыдущего пункта вытекает следствие.

2.7. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ — хорошее проективное вырождение поверхностей, тогда

$$p_g(X_t) = \sum_{i=1}^n p_g(V_i) + \frac{1}{2} \text{ckh}^1 + h^2(\Pi(X_0)),$$

где $p_g(X_t) = \dim H^2(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ и $h^2(\Pi(X_0)) = \dim H^2(\Pi(X_0))$. При этом:

а) $N^2 = (\ln T)^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $h^2(\Pi(X_0)) = 0$,

б) $N = \ln T = 0$ тогда и только тогда, когда $h^2(\Pi(X_0)) = 0$ и $\text{ckh}^1 = 0$, где T — монодромия, действующая на $H^2(X_t, \mathbf{Z})$.

Доказательство. По определению ССХ на $H^2 = H^2(X_t)$ имеем $\dim F^i = \dim F_t^i$, где $\{F^i\}$ — предельная фильтрация Ходжа на H^2 , а $\{F_t^i\}$ — фильтрация Ходжа на $H^2(X_t)$. Следовательно, $p_g(X_t) = \dim F_t^2 = \dim F^2$. Далее, т. к. предельная фильтрация Ходжа индуцирует чистую СХ веса p на Gr_p^W , то при $p \leq 1$ $F^2 \cap W_p = 0$. Обозначим

$$F_q^p = F^p \cap W_q / F^p \cap W_{q-1}.$$

Тогда

$$\dim F^2 = \dim F_4^2 + \dim F_3^2 + \dim F_2^2, \quad (1)$$

Так как на Gr_4^W фильтрация F индуцирует чистую СХ веса 4, то $\bar{F}_4^3 \oplus F_4^2 = \text{Gr}_4^W$. Но $\bar{F}_4^3 = 0$, так как $F^3 = 0$. Следовательно,

$$\dim F_4^2 = \dim W_4 / W_3 = \dim W_0. \quad (2)$$

На Gr_3^W фильтрация F индуцирует чистую СХ веса 3. Следовательно, $\bar{F}_3^1 = \bar{F}_3^0 = \text{Gr}_3^W$, так как $F^3 = 0$. Отсюда получаем, что $F_3^2 \cap \bar{F}_3^1 = F_3^2$ и $F_3^1 \cap \bar{F}_3^2 = \bar{F}_3^2$. По определению СХ имеем $\text{Gr}_3^W = F_3^2 \oplus \bar{F}_3^2$, поэтому

$$\dim F_3^2 = \frac{1}{2} \dim W_3 / W_1 = \frac{1}{2} \dim W_1 / W_0. \quad (3)$$

Рассмотрим четную последовательность Клеменса — Шмида. Пусть 0W_i — фильтрация весов на $H^*(X_0)$. Так как v имеет тип $(0, 0)$, то $v({}^0W_i) \subset W_i$. Далее N — строгий морфизм типа $(-1, -1)$, поэтому $W_0 \subset \text{Ker } N$ и $W_1 \subset \text{Ker } N$. Отсюда и из точной последовательности получаем, что

$$v({}^0W_0) = W_0, \quad v({}^0W_1) = W_1. \quad (4)$$

Пространство $H_4(X_0)$ имеет вес -4 и концентрируется на $H_4^{-2,-2}$ (так как $H_4(X_0)$ двойственно $H^4(X_0)$). Поэтому $\mu(H_4(X_0)) \subset {}^0W_2$, так как μ имеет тип $(3, 3)$.

Далее, так как $\text{Im } \mu \cap {}^0W_1 = \mu({}^0W_{-5}) = 0$, то получаем следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow H^0(X_i) \rightarrow H_4(X_0) \xrightarrow{\mu} {}^0W_2/{}^0W_1. \quad (5)$$

Так как N имеет тип $(-1, -1)$, а ψ — тип $(-2, -2)$, то $N(W_2) \supset W_0$, $N(W_1) = 0$ и $\psi(W_0) = 0$, следовательно, точная последовательность (5) продолжается до точной последовательности

$$0 \rightarrow H^0 \rightarrow H_4(X_0) \rightarrow {}^0W_2/{}^0W_1 \xrightarrow{\nu} W_2/W_1 \xrightarrow{N} W_0 \rightarrow 0.$$

Из этой точной последовательности следует, что $\nu: {}^0F_2^2 \xrightarrow{\sim} F_2^2$, а из п. 2.5 получаем, что $\dim F_2^2 = \sum p_g(V_i)$. Имеем: $\text{Im } \mu \cap {}^0W_1 = 0$, поэтому из (4) следует, что

$$\nu: {}^0W_0 \xrightarrow{\sim} W_0, \quad \nu: {}^0W_1 \xrightarrow{\sim} W_1.$$

Отсюда, из (2) и (3) получаем, что

$$\dim F_3^2 = \frac{1}{2} \text{ckh}^1,$$

$$\dim F_4^2 = h^2(\Pi(X_0)),$$

и, следовательно,

$$p_g(X_i) = \sum p_g(V_i) + \frac{1}{2} \text{ckh}^1 + h^2(\Pi(X_0)).$$

Утверждение теоремы о монодромии вытекает из свойств предельной ССХ на $H^2 = H^2(X_i)$.

2.8. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ хорошее проективное вырождение КЗ поверхностей, тогда

$$\sum p_g(V_i) + \frac{1}{2} \text{ckh}^1 + h^2(\Pi(X_0)) = 1.$$

Монодромия T , действующая на $H^2(X_i)$, тривиальна тогда и только тогда, когда $\text{ckh}^1 = h^2(\Pi(X_0)) = 0$. $N^2 = (\ln T)^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $h^2(\Pi(X_0)) = 0$.

2.9. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ — хорошее проективное вырождение поверхностей Энриквеса, тогда

$$\sum p_g(V_i) = \text{ckh}^1 = h^2(\Pi(X_0)) = 0.$$

Монодромия T , действующая на $H^2(X_i)$, тривиальна всегда.

2.10. Замечание. Результаты следствий 2.8 и 2.9 можно получить, не пользуясь точностью последовательностей Клеменса — Шмида.

2.11. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ — хорошее проективное вырождение, и пусть $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$ — перестройка вырождения π такая, что X'_0 есть

дивизор с нормальными пересечениями. Тогда при $i < j$

$$\dim W_i(H^j(X_0)) = \dim W_i(H^j(X'_0)).$$

Доказательство. Пусть бимероморфное отображение $\psi: X \rightarrow X'$ задает перестройку. Так как π — проективное вырождение, то π есть локализация морфизма $\pi: \mathfrak{X} \rightarrow B$ проективных многообразий $\mathfrak{X}$ и B , $\dim \mathfrak{X} = 3$, $\dim B = 1$. Далее, так как π_1 есть перестройка вырождения π , то существуют многообразие $\mathfrak{X}'$, морфизм $\pi_1: \mathfrak{X}' \rightarrow B$ и бимероморфное отображение $\psi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \psi: \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathfrak{X}' \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \pi_1 & \\ & B & \end{array}$$

коммутативна. Согласно ⁽¹⁰⁾, мы можем разрешить точки неопределенности отображения ψ σ -процессами, при этом мы получим проективное многообразие $\mathfrak{X}''$ и голоморфные отображения $\psi_1: \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}$ и $\psi_2: \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}'$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{X}'' & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \pi^{-1}(B \setminus 0) = U & \subset & \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathfrak{X}' \supset U = \pi_1^{-1}(B \setminus 0) \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & B & & \end{array}$$

коммутативна. Мы можем считать, что $X'_0 = \psi_1^{-1} \circ \pi^{-1}(0)$ является дивизором с нормальными пересечениями. Так как $\mathfrak{X}''$ — проективное многообразие и $\psi_2: \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}'$ — голоморфное бимероморфное отображение, то на $H^*(\mathfrak{X}')$ есть чистая структура Ходжа.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^i(\mathfrak{X}', \mathbb{C}) & \rightarrow & H^i(X'_0, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\beta} & H_C^{i+1}(U, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^{i+1}(\mathfrak{X}', \mathbb{C}) \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \rightarrow & H^i(\mathfrak{X}'', \mathbb{C}) & \rightarrow & H^i(X''_0, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\beta} & H_C^{i+1}(U, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^{i+1}(\mathfrak{X}'', \mathbb{C}) \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & H^i(\mathfrak{X}, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^i(X_0, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\beta} & H_C^{i+1}(U, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^{i+1}(\mathfrak{X}, \mathbb{C}) \rightarrow \end{array}$$

в которой все строки точны.

На $H_C^i(U, \mathbb{C})$ есть ССХ, двойственная ССХ на $H^{6-i}(U, \mathbb{C})$ $\dim_{\mathbb{C}} U = 3$. Все морфизмы в этой диаграмме являются морфизмами ССХ ⁽²⁾. Отсюда и из того, что на $H^*(\mathfrak{X})$ и $H^*(\mathfrak{X}')$ ССХ является чистой структурой Ходжа, следует, что при $i < j$ отображения

$$\beta: W_i(H^j(X_0, \mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} W_i(H_C^{j+1}(U, \mathbb{C})),$$

$$\beta: W_i(H^j(X'_0, \mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} W_i(H_C^{j+1}(U, \mathbb{C}))$$

являются изоморфизмами.

2.12. В дальнейшем нам понадобятся некоторые факты о линейчатых поверхностях. Поверхность V назовем линейчатой, если существует морфизм $\tau: V \rightarrow C$ на кривую C , общий слой которого есть рациональная кривая R .

2.13. ЛЕММА (¹). Поверхность V есть линейчатая поверхность или $\mathbf{P}^2$ тогда и только тогда, когда $H^0(V, nK_V) = 0$ для любого $n > 0$.

2.14. Назовем неприводимую кривую $S \subset V$ n -сечением, если $(S, R)_V = n$, и сечением, если $(S, R)_V = 1$.

На рациональной линейчатой поверхности V , которая является относительно минимальной моделью, может существовать единственная неприводимая кривая S_n с $(S_n^2)_V < 0$, причем поверхность V однозначно характеризуется числом $n = -(S_n^2)_V > 0$ ($V = F_n$). На поверхности F_n группа $\text{Pic } F_n$ порождена двумя образующими: слоем R и сечением S_n . Канонический класс

$$K_{F_n} = -2S_n - (n+2)R.$$

2.15. Пусть V не является относительно минимальной моделью, тогда в слоях линейчатой поверхности V найдется и. к. I рода. Чтобы из V получить относительно минимальную модель $\bar{V}$, надо в слоях поверхности V стянуть все и. к. I рода. Отсюда следует, что граф вырождения рациональных кривых есть связное «дерево».

2.16. Пусть $\sigma: V' \rightarrow V$ — σ -процесс (σ стягивает и. к. I рода L в точку), тогда канонические классы на поверхностях V' и V связаны следующим образом: $\sigma_* K_{V'} = K_V$, $\sigma^* K_V + L = K_{V'}$.

2.17. Напомним еще формулу присоединения для кривых на поверхностях: арифметический род кривой C на поверхности V равен

$$g_a(C) = \frac{(C, C + K_V)_V}{2} + 1.$$

Следующие леммы легко следуют из вышесказанного о линейчатых поверхностях.

2.18. ЛЕММА. Пусть V — относительно минимальная линейчатая поверхность или $\mathbf{P}^2$, и пусть эффективный дивизор с нормальными пересечениями $N \in |-K_V|$. Тогда возможны следующие типы распадений дивизора N на неприводимые компоненты.

а) V — линейчатая иррегулярная поверхность ($q(V) \geq 1$):

1. $N = S_1 + S_2$, где S_i — сечения,

2. $N = S$, где S — 2-сечение,

3. $N = 2S + \sum r_i R_i$, S — сечение, R_i — слои,

причем в 1 и 2 V — эллиптическая ($q=1$) линейчатая поверхность.

б) $V = F_n$ — линейчатая рациональная поверхность:

1. $N = S_1 + S_2 + R_1 + R_2$, где S_i — сечения, R_i — слои и двойственный граф для N есть:



Рис. 1

2. $N = S_1 + S_2 + R$, S_i — сечения, R — слой и двойственный граф для N есть:



Рис. 2

3. $N = S_1 + S_2$, S_i — сечения и $(S_1, S_2)_V = 2$;

4. $N = S_1 + S_2 + 2R$, S_i — сечения, R — слой и

$$(S_1, S_2)_V = 0, \quad (S_1^2)_V + (S_2^2)_V = 0;$$

5. $N = 2S + \sum r_i R_i$, S — сечение и R_i — слои;

6. $N = C$, C — эллиптическая кривая.

в) $V = \mathbf{P}^2$:

1. $N = 3E$,

2. $N = E_1 + 2E_2$,

3. $N = E + Q$,

4. $N = E_1 + E_2 + E_3$,

5. $N = C$,

где E_i — прямые, Q — квадрака, C — кубика на $\mathbf{P}^2$.

2.19. ЛЕММА. Рассмотрим на линейчатой поверхности V дивизор $N = -2S + \sum \alpha_i F_i$ из канонического класса K_V , где S — сечение и F_i — компоненты слоев. Тогда $S \cup (\bigcup_{\alpha_i < 0} F_i)$ — связное множество.

2.20. ЛЕММА. Пусть на линейчатой поверхности V дивизор $N = -2F_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i$ принадлежит каноническому классу K_V , F_0 — сечение, а F_i — компоненты слоев, и пусть $\bigcup_{i=0}^n F_i$ есть связное множество. Тогда и. к. I рода в слое линейчатой поверхности V может быть одного из трех типов:

а) L не совпадает ни с одной F_i и существует единственная F_{i_0} такая, что $(L, F_i)_V = 0$ при $i \neq i_0$ и $(L, F_{i_0})_V = 1$;

б) L совпадает с одной из F_i (пусть $L = F_1$) и существуют две другие кривые F_{i_1} и F_{i_2} такие, что $(L, F_{i_1})_V = (L, F_{i_2})_V = 1$ и $(L, F_i)_V = 0$ при $i \neq 1, i \neq i_1, i \neq i_2$;

в) L совпадает с одной из F_i ($L = F_1$) и существует единственная кривая F_{i_0} такая, что $(L, F_{i_0})_V = 1$ и $(L, F_i)_V = 0$ при $i \neq 1, i \neq i_0$.

2.21. ЛЕММА. Пусть компонента слоя — кривая L пересекается по крайней мере с n другими компонентами слоя линейчатой поверхности V или пересекается с $n-1$ другими компонентами слоя и с сечением. Тогда $(L^2)_V \leq -(n-1)$.

§ 3. Вырождения поверхностей КЗ и Энриквеса

3.1. Пусть хорошее вырождение $\pi: X \rightarrow \Delta$ с вырожденным слоем $X_0 = V_1 + \dots + V_n$ есть перестройка хорошего проективного вырождения, и пусть общий слой X_t есть неособая КЗ поверхность ($m=1$) или поверхность Энриквеса ($m=2$). В дальнейшем рассматриваются только такие вырождения.

Из теорем 2.11 и следствий 2.6, 2.8 и 2.9 имеем:

а) если π — вырождение КЗ поверхностей, то

$$h^0(\Pi(X_0)) = 1, \quad h^1(\Pi(X_0)) = 0,$$

$$\sum p_g(V_i) + \frac{1}{2} \text{ckh}^1 + h^2(\Pi(X_0)) = 1;$$

б) если π — вырождение поверхностей Энриквеса, то

$$h^0(\Pi(X_0)) = 1, \quad h^1(\Pi(X_0)) = 0, \quad h^2(\Pi(X_0)) = 0,$$

$$\text{ckh}^1 = 0, \quad \sum p_g(V_i) = 0.$$

3.2. При любом t слой X_t является дивизором функции. Поэтому, так как при $t \neq 0$ слой X_t есть поверхность КЗ или Энриквеса, из формулы присоединения следует, что произвольный дивизор из mK_X высекает на X_t дивизор функции. Отсюда легко получить, что mK_X содержит дивизор, являющийся линейной комбинацией компонент вырожденного слоя X_0 :

$$mK_X = r_1 V_1 + \dots + r_n V_n. \quad (1)$$

По формуле присоединения имеем:

$$K_{V_i}^{\otimes m} = \mathcal{O}_{V_i} \left(\sum_{j \neq i} (r_j - r_i - m) V_j \right). \quad (2)$$

Запишем эту формулу в виде

$$mK_{V_i} = \sum_{j \neq i} (r_j - r_i - m) C_{i,j}. \quad (3)$$

3.3. Доказательство теоремы II. Тип I вырождений КЗ поверхностей соответствует случаю, когда вырожденный слой X_0 состоит из одной компоненты.

Пусть $X_0 = V_1 + \dots + V_n$, $n > 1$. По условию канонический класс $K_X = 0$, следовательно, все r_i в (3.2.1) равны между собой. Отсюда и из (3.2.3) получаем, что $\sum_{j \neq i} C_{i,j} \in |-K_{V_i}|$, т. е. все компоненты V_i слоя X_0 являются линейчатыми поверхностями.

Рассмотрим двойную кривую $C_{i,j}$ на компоненте V_i . Имеем:

$$2g(C_{i,j}) - 2 = (K_{V_i} + C_{i,j}, C_{i,j})_{V_i} = -T_{C_{i,j}},$$

и так как $T_{C_{i,j}} \geq 0$ и $g(C_{i,j}) \geq 0$, то возможны два случая:

а) $g(C_{i,j})=0$, т. е. $C_{i,j}$ — рациональная кривая и на $C_{i,j}$ лежат ровно две тройных точки;

б) $g(C_{i,j})=1$, т. е. $C_{i,j}$ — эллиптическая кривая и $C_{i,j}$ не пересекается с другими двойными кривыми.

В случае а) мы видим, что кривая $C_{i,j}$ пересекается с некоторой другой двойной кривой, которая, следовательно, также обязана быть рациональной кривой и на которой также лежат две тройных точки, и т. д.

Итак, каждая компонента V_i есть линейчатая поверхность и множество двойных кривых на V_i состоит из несвязного объединения конечного числа эллиптических кривых и конечного числа циклов рациональных кривых.

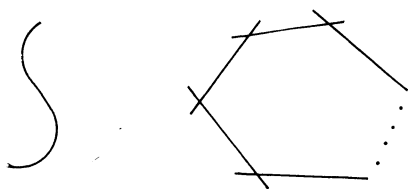


Рис. 3

Пусть $V = V_{i_0}$ — одна из компонент, и пусть $\varphi: V \rightarrow \bar{V}$ — отображение на относительно минимальную модель $\bar{V}$ (φ есть композиция σ -процессов). Из п. 2.16 имеем $\varphi_* N \in |-K_{\bar{V}}|$, где $N = \sum_j C_{i_0,j}$. Легко показать, что су-

ществует такое отображение φ , при котором $\varphi_* N$ есть дивизор с нормальными пересечениями, если N был дивизором с нормальными пересечениями. Заметим, что стягивание и. к. I рода L не может склеить различные компоненты связности дивизора $N = \sum_j C_{i_0,j} \in |-K_V|$. Действительно, так как $(L, K_V)_V = -1$, то $(L, N)_V = 1$, т. е. либо L есть компонента дивизора N , либо L просто пересекается лишь с одной компонентой дивизора N . Отсюда, из п. 2.16 и из леммы 2.18 следует, что возможны следующие случаи:

- а) V — линейчатая эллиптическая поверхность и
 1. $N = C_1 + C_2$, где C_i — два непересекающихся сечения,
 2. $N = C$ — 2-сечение.
- б) V — рациональная поверхность и
 1. $N = C$, C — эллиптическая кривая,
 2. $N = C_1 + \dots + C_p$, C_i — рациональные кривые и образуют цикл: $(C_1, C_2)_V = (C_2, C_3)_V = \dots = (C_{p-1}, C_p)_V = (C_p, C_1)_V = 1$.

Пусть на одной из V_i двойные кривые C_{ij} образуют цикл (случай 2б)). Так как все C_{ij} — рациональные кривые и $T_{C_{ij}} = 2$, то на соседних компонентах двойные кривые также образуют цикл. Следовательно, в силу связности слоя X_0 , на всех компонентах двойные кривые образуют цикл, а сами компоненты и двойные кривые есть рациональные поверхности и кривые. Отсюда получаем, что $\Pi(X_0)$ есть триангуляция некоторой компактной поверхности без края. Так как эйлеровы характеристики структурных пучков на рациональных многообразиях равны 1, то из

леммы 2.2 следует, что эйлерова характеристика $e(\Pi(X_0))=2$. Следовательно, $h^2(\Pi(X_0))=1$, так как $h^1(\Pi(X_0))=0$, и $\Pi(X_0)$ есть триангуляция сферы S^2 на треугольники, т. е. имеем вырождение типа III.

Рассмотрим последний возможный случай: все двойные кривые C_{ij} на компонентах V_i слоя X_0 есть эллиптические кривые, а компоненты есть линейчатые эллиптические или рациональные поверхности. Так как $T_{C_{ij}}=0$, то $\Pi(X_0)$ есть одномерный граф. Далее, так как $h^1(\Pi(X_0))=0$ и на любой компоненте V_i лежит не более двух двойных кривых, то $\Pi(X_0)$ есть простой путь:

$$\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \dots \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ V_1 \quad V_2 \qquad \qquad \qquad V_{n-1} \quad V_n$$

Эйлеровы характеристики структурных пучков на линейчатых эллиптических поверхностях и на эллиптических кривых равны нулю. Отсюда и из леммы 2.2 следует, что среди компонент слоя X_0 есть ровно две рациональные поверхности V_1 и V_n , т. е. имеем вырождение типа II.

Утверждение теоремы о монодромии T следует из теоремы 2.11, следствия 2.8 и того, что монодромия T есть инвариант перестройки.

3.4. П р и м е р ы. Пусть $F=0$, $\deg F=4$, — неособая поверхность в $\mathbb{P}^3$ и $Q_1=0$, $Q_2=0$ — две неособые квадрики, пересекающиеся трансверсально между собой и с $F=0$. Как известно, $F=0$ есть КЗ поверхность.

Эти квадрики и F определяют рациональное отображение

$$\mathbb{P}^3 \xrightarrow{(Q_1 \cdot Q_2 : F)} \mathbb{P}^1,$$

разрешая точки неопределенности которого, получим вырождение КЗ поверхностей типа II.

Если вместо квадратик взять четыре плоскости $P_i \subset \mathbb{P}^3$ в общем положении, то получим вырождение КЗ поверхностей типа III.

3.5. Доказательство теоремы III мы опускаем, так как оно почти дословно повторяет доказательство теоремы II.

§ 4. Доказательство теоремы I

4.1. Докажем теорему I в случае вырождений КЗ поверхностей. Для вырождений поверхностей Энриквеса доказательство аналогично.

Пусть $X_0 = V_1 + \dots + V_n$ есть вырожденный слой хорошего проективно-го вырождения КЗ поверхностей $\pi: X \rightarrow \Delta$, и пусть канонический класс $K_X = r_1 V_1 + \dots + r_n V_n$, $r = \min r_i$, а k — число компонент V_i таких, что $r_i > r$. Доказательство теоремы будет проводиться методом индукции. Вырождение π' получается последовательностью перестроек $\pi_i: X^{(i)} \rightarrow \Delta$, при которых одна компонента V_i с $r_i > r$ стягивается на кривую или в точку (образ дивизора при бимерноморфном отображении корректно определен), а новых компонент не появляется. На каждом шаге выбирается одна из компонент V_i , которая будет стягиваться.

Важную роль при построении этих перестроек играют перестройки I и II, а также локальные стягивания.

4.2. Перестройка I — перекидывание и. к. I рода на соседнюю компоненту (см. рис. 4).

Пусть V_1 и V_2 — две компоненты вырожденного слоя X_0 и $C \subset V_1 \cap V_2$ — двойная кривая. Пусть L_1 — и. к. I рода на V_1 , которая не проходит через тройные точки, пересекается с C лишь в одной точке P ($(L_1, C)_{V_1} = 1$) и не пересекается с другими двойными кривыми.

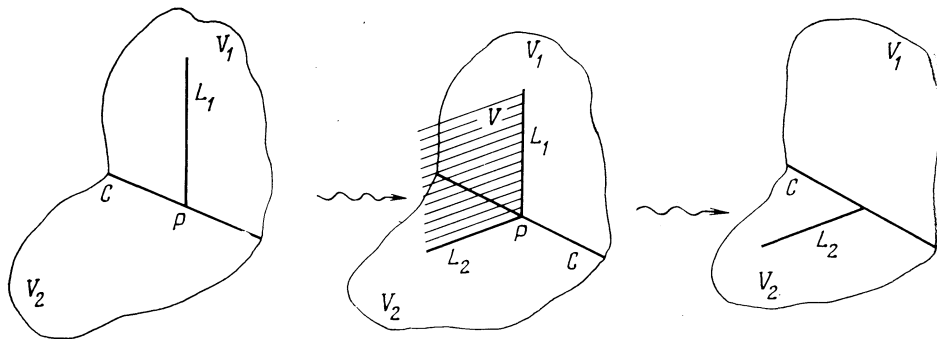


Рис. 4

Тогда существует перестройка π' такая, что X_0' отличается от X_0 только тем, что на V_1 и. к. I рода L_1 стянута в точку, а на V_2 точка P раздута в и. к. I рода L_2 . Чтобы получить эту перестройку, нужно сначала сделать σ -процесс с центром в кривой L_1 . При этом в X вклеится линейчатая поверхность V , V_1 не изменится (точнее, ее прообраз при σ -процессе), а на V_2 раздуется точка P и вклеится и. к. I рода L_2 . Поверхность V будет входить в вырожденный слой с кратностью 1. Так как на L_1 и L_2 будет лежать по одной тройной точке, то по лемме 2.1

$$(L_1^2)_{V_1} + (L_1^2)_V = -1, \quad (L_2^2)_{V_2} + (L_2^2)_V = -1.$$

Но $(L_1^2)_{V_1} = (L_2^2)_{V_2} = -1$, следовательно, $(L_1^2)_V = (L_2^2)_V = 0$ и поэтому $V = F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, т. е. мы можем рассмотреть линейчатую поверхность $V \rightarrow L_2$. Нормальное расслоение к V в X , равное $\mathcal{O}_V(V)$, ограниченное на слой L_1 , имеет степень -1 , так как

$$\mathcal{O}_V(V) = \mathcal{O}_V(-V_1 - V_2 - \dots) = \mathcal{O}_V(-L_1 - L_2).$$

Следовательно, V можно стянуть на L_2 вдоль L_1 ⁽⁸⁾.

4.3. Перестройка II. Пусть V_1 и V_2 — две компоненты слоя X_0 , пересекающиеся по кривой L , которая есть и. к. I рода на V_1 и V_2 . Тогда по лемме 2.1 на L лежит ровно две тройных точки, т. е. локально имеем следующую ситуацию: существуют компоненты V_3 и V_4 слоя X_0 , пересекающиеся с L в тройных точках кривой L . Пусть $C_{i,j}$ — кривые пересечения компонент V_i и V_j при $(i, j) \neq (1, 2)$ (см. рис. 5).

Тогда существует перестройка π' такая, что кривая L на V_1 и V_2 стягивается, а на V_3 и V_4 раздувается по точке и после этого V_3 и V_4 пересекаются по вклеенным в них кривым.

Чтобы получить эту перестройку, сделаем σ -процесс в X с центром в кривой L , при этом вклеится поверхность V , которая будет входить в

вырожденный слой с кратностью 2. Поверхности V_1 и V_2 не изменятся, а на V_3 и V_4 раздуется по точке и вклеятся и.к. I рода L_3 и L_4 . Слой X_0 после σ -процесса равен $X_0 = 2V + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \dots$. Вычислим $(L_i^2)_V$, где $L_i = V_i \cap V$:

$$(L_1^2)_V = (V_1, V_1, V)_X = (-2L_1 - C_{1,3} - C_{1,4}, L_1)_{V_1} = 0.$$

Аналогично, $(L_i^2)_V = 0$. Следовательно, $V = F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и нормальное расслоение к V в X есть

$$\mathcal{O}_V(V) = \mathcal{O}_V\left(-\frac{1}{2}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)\right) = \mathcal{O}_V(-L_1 - L_3).$$

Поэтому опять ограничение нормального расслоения к V в X на слой L_1 имеет степень -1 и V можно стянуть на L_3 вдоль L_1 .

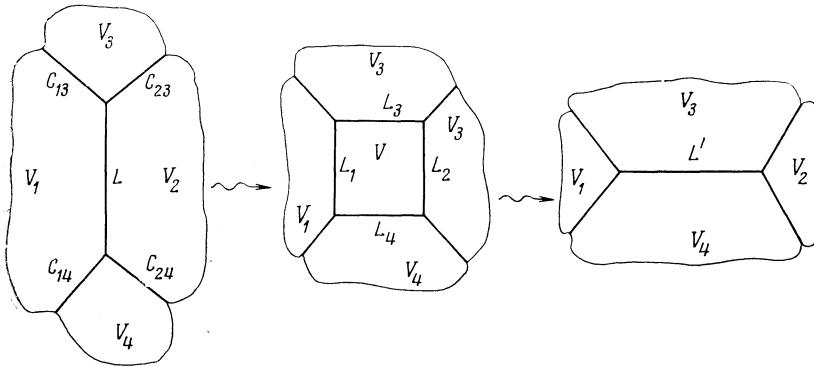


Рис. 5

4.4. З а м е ч а н и е. После перестроек II может нарушиться условие гладкости компонент V_i слоя X_0 , если компоненты V_3 и V_4 , участвовавшие в перестройке II, были ветвями одной компоненты. Но в любом случае дивизор X_0 останется локально дивизором с нормальными пересечениями.

Итак, после перестроек II компонента V_0 слоя X_0 может приобрести кривые самопересечения $C_1, \dots, C_p$. Пусть $\nu: \bar{V}_0 \rightarrow V_0$ — нормализация, тогда $\nu^{-1}(C_i)$ распадется на две неприводимые кривые. Эти кривые и прообразы $\nu^{-1}(C_{0,j})$ двойных кривых $C_{0,j} \subset V_0$ будем также называть двойными кривыми.

4.5. Локальное стягивание. Пусть компоненты V_1 и V_2 слоя X_0 пересекаются по кривой L , на которой лежит одна тройная точка, т. е. есть еще компонента V_3 , которая пересекается с V_1 и V_2 по кривым S_1 и S_2 , кривые S_1, S_2 и L имеют общую точку (см. рис. 6).

Пусть L — и.к. I рода на V_1 . Тогда по лемме 2.1 $(L^2)_{V_2} = 0$ и, следовательно, V_2 есть линейчатая поверхность со слоем L и сечением S_2 , так как $(L, S_2)_{V_2} = 1$. Нормальное расслоение к V_2 в X есть

$$\mathcal{O}_{V_2}(V_2) = \mathcal{O}_{V_2}\left(-\sum_{i \neq 2} V_i\right) = \mathcal{O}_{V_2}(-L - S_2 + \dots).$$

Следовательно, степень нормального расслоения к V_2 в X , ограниченного на слой L , равна $(L, -L - S_2 + \dots)_{V_2} = -1$.

Пусть U — произвольная окрестность кривой L в X такая, что если $x \in V_2 \cap U$, то слой на V_2 , проходящий через точку x , неособый и целиком содержится в U . Тогда ⁽⁸⁾ в окрестности U мы можем стянуть $V_2 \cap U$ на

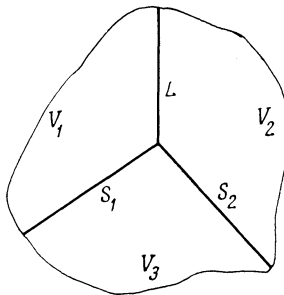


Рис. 6

$S_2 \cap U$, т. е. существует такая окрестность U' и морфизм $\sigma: U \rightarrow U'$, что $S = \sigma(V_2 \cap U)$ — кривая в U' и $\sigma: U \rightarrow U'$ есть σ -процесс с центром в этой кривой.

4.6. Пусть V — такая компонента слоя X_0 , что:

а) V — линейчатая поверхность,

б) множество двойных кривых на V состоит из одного сечения на V и компонент слоев.

Тогда легко проверить, что степень нормального расслоения к V в X , ограниченного на общий слой L линейчатой поверхности V , равна -1 . Следовательно, если V — относительно минимальная модель, то V можно стянуть на сечение. Ниже будет доказано, что если V удовлетворяет также условию

в) двойные кривые, лежащие на V , образуют связное множество, то после конечного числа перестроек I и II, локальных стягиваний и преобразований, обратных к локальным стягиваниям, компоненту V можно будет стянуть на кривую.

4.7. Пусть компонента слоя X_0 — поверхность V изоморфна $\mathbb{P}^2$, и пусть на этой компоненте лежит лишь одна двойная кривая — прямая на $\mathbb{P}^2$. Тогда легко проверить, что V удовлетворяет критерию Кодaira стягиваемости подмногообразия в точку.

4.8. Предложение. Пусть π — хорошее вырождение КЗ поверхностей, и пусть $K_x \neq 0$. Тогда найдется компонента V слоя X_0 , у которой двойные кривые образуют связное множество и такая, что либо

а) V есть компонента из п. 4.7, либо

б) быть может, после конечного числа перестроек I и II нормализация $\bar{V}$ имеет такую структуру линейчатой поверхности, что множество двойных кривых на ней состоит из одного сечения и компонент слоев.

4.8.1. При доказательстве этого предложения важную роль играет следующая очевидная

ЛЕММА. Пусть Π — связный полиэдр, $h^1(\Pi) = 0$, $a \in \Pi$ — вершина и $St_a = \{\text{замыкание всех симплексов, содержащих в замыкании вершину } a\}$ — звезда вершины a . Тогда число компонент связности множества $\Pi \setminus a$ равно числу компонент связности множества $St_a \setminus a$.

4.8.2. Предположим, что среди компонент слоя X_0 уже нет компонент, удовлетворяющих пункту а) предложения.

Среди компонент слоя X_0 выберем все такие компоненты, что после конечного числа перестроек I и II они будут удовлетворять пункту б) предложения, но двойные кривые на которых не образуют связного множества. Назовем такие компоненты отмеченными. Покажем, что число отмеченных компонент строго меньше числа всех компонент, удовлетворяющих пункту б) предложения.

4.8.3. Рассмотрим отмеченную компоненту V_1 и соответствующую ей вершину $a_1 \in \Pi(X_0)$. По определению отмеченной компоненты двойные кривые на V_1 не образуют связного множества. Это означает, что найдутся такие двойные кривые C_1 и C_2 на V_1 , что нельзя выбрать цепочку из двойных кривых, концы которой есть C_1 и C_2 , и две любые соседние кривые из этой цепочки имеют общую тройную точку. На языке полиэдра $\Pi(X_0)$ это означает следующее. Если мы возьмем St_{a_1} , то $St_{a_1} \setminus a_1$ распадется на конечное число компонент связности, равное числу компонент связности множества двойных кривых на поверхности V_1 . В силу леммы 4.8.1 это число равно числу компонент связности множества $\Pi(X_0) \setminus a_1$, так как $h^1(\Pi(X_0)) = 0$. Обозначим эти компоненты через $K_1, \dots, K_s$. Компактифицируем полиэдры K_i , присоединив к ним вершины

a_{1i} . Получим замкнутый полиэдр $\Pi' = \prod_{i=1}^s K_i$.

Вспомним, что после перестроек I и II нормализация $\bar{V}_1$ имеет структуру линейчатой поверхности, на которой двойные кривые состоят из одного сечения и компонент слоев и не образуют связного множества. Ту двойную кривую (или тройную точку) на V_1 , после перестроек I и II прообраз которой при нормализации есть сечение на $\bar{V}_1$ (из раздутья которой получилась кривая, прообраз которой при нормализации есть сечение на $\bar{V}_1$), будем называть сечением. На полиэдре $\Pi(X_0)$ сечению соответствует ребро или грань, будем это ребро или грань также называть сечением. Возьмем ту компоненту связности полиэдра Π' , которая содержит сечение, пусть это компонента K_1 . Построим полиэдр Π'' , присоединив к полиэдру Π' s ребер, соединяющих вершину $a_{11} \in K_1$ с вершинами a_{1i} ($i > 1$), и эти ребра будем называть новыми. Зададим еще на новых ребрах направление от вершины a_{11} к вершинам a_{1i} , $i > 1$. Очевидно, построенный полиэдр Π'' гомотопически эквивалентен полиэдру $\Pi(X_0)$.

На полиэдре Π'' отмеченной компоненте V_2 соответствует вершина a_2 . Прделаем с полиэдром Π'' , содержащим вершину a_2 , то же, что мы только что прделали с полиэдром $\Pi(X_0)$, содержащим вершину a_1 . Получим новый полиэдр, который мы опять обозначим через Π'' и который

гомотопически эквивалентен полиэдру $\Pi(X_0)$, и т. д. Прделав эту операцию для всех вершин, соответствующих отмеченным компонентам, в итоге получим полиэдр, который опять обозначим через Π'' .

Полиэдр $\Pi(X_0)$ получается из полиэдра Π'' , если стянуть все новые ребра в точки. Новые ребра не являются границей никаких двумерных граней. Если выкинуть эти новые ребра, то полиэдр $\Pi'' \setminus \{\text{новые ребра}\}$ распадется на конечное число компонент связности $K_1, \dots, K_t$. Каждой вершине $a_j \in K_i$ соответствует некоторая компонента V_j слоя X_0 . По построению, если V_j — неотмеченная компонента, то вместе с a_j компоненте K_i принадлежат и все ребра, соответствующие всем двойным кривым на V_j . Если же V_j — отмеченная компонента, то ей соответствуют несколько вершин $a_{j1}, \dots, a_{jp}$, лежащих на разных компонентах связности K_i . Число этих вершин равно числу компонент связности множества двойных кривых на V_j . Два ребра, соответствующие двойным кривым на отмеченной компоненте V_j , лежат на одной компоненте K_i тогда и только тогда, когда они принадлежат одной компоненте связности множества двойных кривых на V_j . Сечение на V_j принадлежит одной из компонент K_{i_0} (пусть $a_{j1} \in K_{i_0}$), тогда вершина a_{j1} соединена новыми ребрами с вершинами a_{ji} , $i > 1$, и новые ребра имеют направление от a_{j1} к a_{ji} .

Построим по полиэдру Π'' граф Γ . Вершинами графа Γ будут компоненты связности полиэдра $\Pi'' \setminus \{\text{новые ребра}\}$, а ребрами — новые ребра полиэдра Π'' .

Очевидно, $h^1(\Gamma) = 0$, т. е. Γ есть ориентированное дерево. Следовательно, существует вершина графа a , из которой нет выхода. Возьмем соответствующую этой вершине компоненту связности полиэдра $\Pi'' \setminus \{\text{новые ребра}\}$, пусть это K_1 .

Компоненту V_i , удовлетворяющую предложению, будем искать среди компонент, для которых соответствующие им вершины принадлежат K_1 .

4.8.4. Пусть $a_1, \dots, a_p$ — все вершины полиэдра K_1 , и пусть $a_1, \dots, a_q$ соответствуют отмеченным компонентам V слоя X_0 .

Покажем, что не все вершины полиэдра K_1 отмеченные. Для этого покажем, что

$$r_i < \max_{a_j \in K_1} r_j, \quad i \leq q, \quad (*)$$

где, как всегда r_j — кратности, с которыми компоненты V_j входят в канонический класс $K_X = r_1 V_1 + \dots + r_p V_p + \dots$. Действительно, пусть $C_{i1}, \dots, C_{is}$ — двойные кривые на V_i , соответствующие которым ребра принадлежат K_1 . По определению отмеченных компонент и полиэдра K_1 кривые C_{ij} ($1 \leq j \leq s$) и сечение лежат в разных компонентах связности множества двойных кривых на V_i . Следовательно, по лемме 2.19 не все кривые C_{ij} , $1 \leq j \leq s$, входят в канонический дивизор K_{V_i} из формулы (3.2.3) с отрицательной кратностью, т. е. выполнено неравенство (*).

4.8.5. Возьмем все компоненты V_i , для которых выполнены следующие два условия: а) $r_i = \max_{a_i \in K_1} r_i$, б) существует компонента $V_{m(i)}$, которая

пересекается с V_l и $r_{m(l)} < r_l$. Тогда в формулу для канонического класса

$$K_{V_l} = \sum_{i \neq l} (r_i - r_l - 1) C_{l,i} = \sum_{i \neq l} \alpha_{l,i} C_{l,i}$$

все двойные кривые $C_{l,i}$ входят с отрицательной кратностью и существует двойная кривая $C_{l,m(l)}$, входящая в канонический класс с кратностью ≤ -2 . Следовательно, все такие V_l есть линейчатые поверхности. Пусть $\varphi: V_l \rightarrow \bar{V}_l$ — морфизм на относительно минимальную модель (φ есть композиция σ -процессов). В лемме 2.18 нами уже описаны все возможные типы распадений дивизора $N \in |-K_{\bar{V}_l}|$ на относительно минимальной модели. Имеем $N = \sum \alpha_i \varphi_* C_{l,i} \in |-K_{\bar{V}_l}|$ и дивизор $\sum \alpha_i C_{l,i}$ получился из дивизора N на $\bar{V}_l$ раздутием конечного числа точек, причем раздутия были такие, что канонический дивизор на V_l , полученный из $-N$, равен $-\sum \alpha_i C_{l,i}$ и в нем есть компонента, входящая с кратностью ≤ -2 . Отсюда следует, что дивизор N на относительно минимальной модели $\bar{V}_l$ может быть одного из типов: 3а), 4б), 5б), 1в), 2в) леммы 2.18.

4.8.6. Поверхность типа 1в) есть компонента из п. 4.7.

В случаях 3а) и 5б) поверхности V_l являются линейчатыми поверхностями, а двойные кривые на поверхностях этих типов состоят из одного сечения и компонент слоев и образуют связное множество (лемма 2.19).

В случае 4б) на поверхности V_l двойные кривые состоят из двух сечений и компонент одного слоя. При этом на V_l может быть еще несколько неминимальных слоев, компоненты которых не являются двойными кривыми. Из (3.2.2) следует, что такие слои, в которые не входят двойные кривые, могут быть лишь следующего вида: эти слои состоят из компонент $L_1, \dots, L_s$, образующих «цепочку», т. е. $(L_1, L_2)_{V_l} = (L_2, L_3)_{V_l} = \dots = (L_{s-1}, L_s)_{V_l} = 1$, $(L_1^2)_{V_l} = (L_s^2)_{V_l} = -1$, $(L_j^2)_{V_l} = -2$ при $2 \leq j \leq s-1$ и $(L_1, S_1)_{V_l} = (L_s, S_2)_{V_l} = 1$, где S_1, S_2 — сечения.

Рассмотрим слой, в который входят двойные кривые в качестве компонент. Возьмем граф, соответствующий всем двойным кривым на V_l (каждой двойной кривой сопоставим ребро графа, два ребра пересекаются, если пересекаются кривые). На этом графе выберем минимальный путь по ребрам, соединяющим ребра — сечения, и кривые, входящие в этот путь, будем называть компонентами «пути». Все остальные двойные кривые — компоненты слоя будем называть компонентами «деревьев».

4.8.7. Если среди компонент V_l есть компонента типа 3а) или 5б), то предложение доказано. Поэтому мы будем предполагать, что все компоненты V_l , входящие в K_X с максимальной кратностью, есть типа 4б) или 2в).

Пусть на одной из компонент типа 4б) (пусть на компоненте V_1) есть «дерево». Заметим, что и для компонент типа 4б) верна лемма 2.20 об и.к. I рода в вырожденном слое на линейчатой поверхности. Следовательно, так как есть «дерево», то после конечного числа перестроек I и II с центрами в и.к. I рода в этом слое найдется компонента «дере-

ва» — двойная кривая L такая, что L есть и.к. I рода и $T_L=1$. Отсюда и из п. 4.5 следует, что на V_2 (V_2 — та компонента, которая пересекается с V_1 по кривой L) кривая L есть целый слой и L пересекается с сечением S на V_2 , т. е. образует с S связное множество. Но ребро, соответствующее кривой L , принадлежит K_1 , поэтому компонента V_2 не может быть отмеченной, т. е. в этом случае предложение доказано.

4.8.8. Пусть на всех компонентах V_i типа 4б) нет «деревьев». Заметим, что на компонентах типа 4б) оба сечения S_1 и S_2 входят в (3.2.2) с кратностью -1 , а все компоненты «пути» входят с кратностью ≤ -2 . Следовательно, V_i пересекается по S_1 и S_2 с компонентами, входящими в K_X с максимальной кратностью, которые опять обязаны быть компонентами типа 4б) или 2в). Переходя от компоненты V_{i_1} к компоненте V_{i_2} , которая пересекается с V_{i_1} по сечению S на V_{i_1} (если V_{i_2} есть компонента типа 4б), то S есть сечение и на V_{i_2}), затем от V_{i_2} к V_{i_3} и т. д., либо мы снова попадем на компоненту V_{i_1} , либо на некотором шаге попадем на компоненту $V_{i_k} = P^2$ типа 2в), на которой есть две двойных кривых — прямые E_1 и E_2 и $K_{P^2} = -E_1 - 2E_2$. Компонента $V_{i_{k+1}}$ пересекается с V_{i_k} по кривой E_1 .

Итак, предполагая, что все компоненты V_i , которые входят в K_X с максимальной кратностью, есть типа 4б) без «деревьев» или типа 2в), получаем, что взаимное расположение этих компонент может быть двух типов:

α) Цепочка компонент $V_1, V_2, \dots, V_p, V_{p+1}$, где V_1 и V_{p+1} — типа 2в), а все остальные компоненты типа 4б). Компоненты V_i и V_{i+1} при $2 \leq i \leq p-1$ пересекаются по сечению на V_i и V_{i+1} , а V_1 пересекается с V_2 (V_{p+1} с V_p) по кривой, которая есть сечение на V_2 (V_p) и которая входит в $K_{V_i} = K_{P^2}$ ($K_{V_{p+1}} = K_{P^2}$) с кратностью -1 .

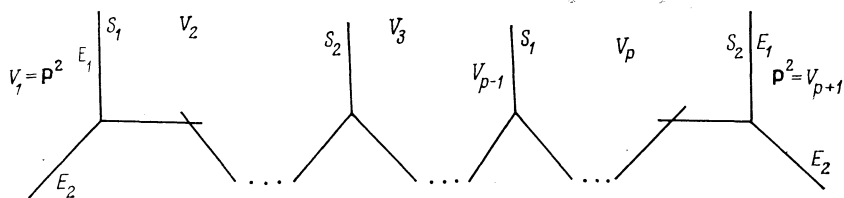


Рис. 7

β) Цикл компонент $V_1, V_2, \dots, V_p$, где все V_i есть компоненты типа 4б) и $C_{1,2}, \dots, C_{p-1,p}, C_{p,1}$ являются сечениями на каждой из компонент (см. рис. 8).

4.8.9. Покажем, что все V_i типа 4б) не могут быть одновременно относительно минимальными моделями.

Действительно, пусть все V_i являются относительно минимальными моделями. Тогда на каждой V_i типа 4б) $(S_1^2)_{V_i} + (S_2^2)_{V_i} = 0$. Следовательно, в случае α)

$$\sum_{2 \leq i \leq p} [(S_1^2)_{V_i} + (S_2^2)_{V_i}] + (E_1^2)_{V_1} + (E_2^2)_{V_{p+1}} = 2$$

и в случае β)

$$\sum_{1 \leq i \leq p} [(S_1^2)_{V_i} + (S_2^2)_{V_i}] = 0.$$

Но, с другой стороны, по лемме 2.1 те же суммы равны $-p < 0$.

4.8.10. Пусть V_i — компонента типа 4б) — не относительно минимальная линейчатая поверхность. Тогда на V_i есть несколько не минимальных слоев: «цепочек», компоненты которых не являются двойными кривыми, и «путь», все компоненты которого — двойные кривые.

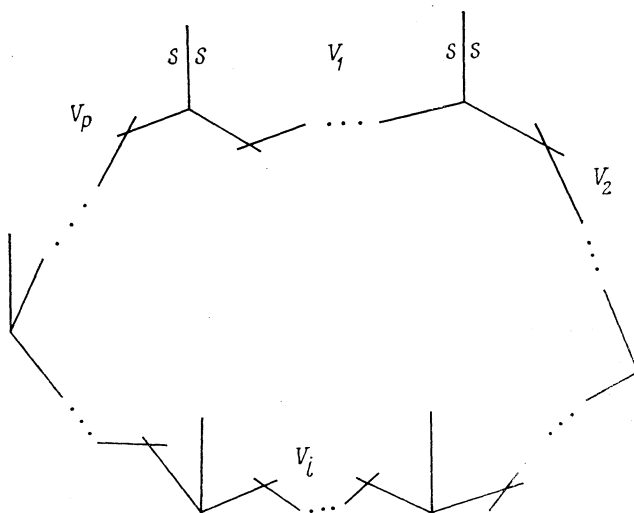


Рис. 8

Перестройками I из «цепочки» мы можем сделать минимальный слой, перекидывая и.к. I рода на соседнюю компоненту V_{i-1} или V_{i+1} .

Аналогично, мы можем сделать слой из двойных кривых минимальным перестройками II.

4.8.11. Докажем предложение в случае, когда мы имеем «цепочку» компонент. Если на некоторой V_i типа 4б) есть «цепочка», тогда после перестройки I с центром в и.к. I рода — компоненте этой «цепочки» будем иметь «цепочку» на компоненте V_{i-1} , на одном из концов которой лежит и.к. I рода, полученная перестройкой I. Сделав перестройку I с центром в и.к. I рода — другом конце этой «цепочки» на V_{i-1} , получим «цепочку» на V_{i-2} и т. д. После конечного числа таких перестроек мы добьемся того, что на $V_1 = \mathbb{P}^2$ раздуется точка, лежащая на E_1 . Компонента V_1 станет изоморфна F_1 , у которой двойными кривыми являются E_1 , $(E_1^3)_{F_1} = 0$, и E_2 , т. е. V_1 удовлетворяет условиям предложения.

Пусть на некоторой компоненте V_i типа 4б) без «деревьев» есть не минимальный «путь». Так как «путь» не минимален и нет «деревьев», то найдется компонента этого «пути» — кривая L , которая является и.к. I на V_i , на которой лежат две тройные точки. Сделаем перестройку II с центром в этой кривой. Если L не пересекалась с сечениями S_1, S_2 на V_i , то после перестройки II на V_i стянется кривая L , а другие компо-

ненты V_j ($j \neq i$) из цепочки не изменятся. Если L пересекается с сечением S_i (пусть $S_i = V_i \cap V_{i-1}$), то после перестройки II на V_{i-1} раздуется тройная точка и число компонент «пути» на V_{i-1} увеличится на единицу. Сделав несколько перестроек II, компонента V_i станет относительно минимальной моделью. После этого минимизируем компоненту V_{i-1} и т. д. В итоге мы добьемся того, что на $V_1 = P^2$ раздуется тройная точка пересечения кривых E_1 и E_2 , вклеится кривая L . Получим поверхность F_1 , у которой двойные кривые есть L , E_1 и E_2 , причем $(E_1^2)_{F_1} = (E_2^2)_{F_1} = 0$ и L есть сечение, т. е. эта поверхность удовлетворяет предложению.

4.8.12. Докажем предложение в случае, когда мы имеем цикл компонент. Как и в предыдущем пункте, делая конечное число перестроек I и II, мы можем добиться того, что все компоненты, кроме V_1 , станут относительно минимальными моделями. Кроме того, можно добиться того, что матрица индексов пересечений компонент слоя — «пути» на V_1 будет иметь тот же вид, что и в случае слоя — «цепочки», т. е. на концах «пути» лежат и.к. I рода, а все другие компоненты «пути» являются «—2» кривыми.

Покажем, что компонента V_2 этого цикла есть искомая компонента. На V_2 двойные кривые состоят из двух сечений S_1 и S_2 и слоя F . Имеем $(F^2)_{V_2} = 0$ и $(S_1^2)_{V_2} + (S_2^2)_{V_2} = 0$. Если бы $(S_1^2)_{V_2} = 0$, то V_2 была бы изоморфна квадрике F_0 и мы могли бы рассмотреть линейчатую поверхность V_2 со слоями S_i и сечением F . Добьемся перестройками I (если на V_1 есть не минимальная «цепочка») или перестройками II (если на V_1 не минимален «путь»), чтобы $(S_1^2)_{V_2} = 0$. Для этого заметим, что и.к. I рода на V_1 , которая принадлежит «цепочке» или «пути», перестройками I или II можно перегнуть по всему циклу компонент $V_1, V_2, \dots, V_p, V_1$. Действительно, пусть у нас есть «цепочка» (случай «пути» аналогичен), тогда после перестройки I и.к. I рода на V_1 стянется, а на V_2 раздуется точка и появится не минимальный слой, состоящий из двух компонент F_1 — раздутой кривой и F_2 — прообраза старого слоя — также и.к. I рода. Делая перестройку I с центром в F_2 , получим, что компонента V_2 станет относительно минимальной моделью, но V_3 уже не будет минимальной моделью и т. д. Таким способом мы перегоняем и.к. I рода по всему циклу. Очевидно, что после конечного числа таких перегонки в нужном направлении мы можем добиться того, что $(S_1^2)_{V_2}$ станет равным нулю на V_2 , так как каждая такая перегонка делает элементарное преобразование на линейчатой поверхности V_2 . Тем самым предложение доказано.

4.9. Возьмем компоненту V_1 , существование которой гарантирует предыдущее предложение, и сделаем несколько перестроек I и II, если это необходимо, чтобы нормализация $\bar{V}_1$ поверхности V_1 стала линейчатой, множество двойных кривых на $\bar{V}_1$ состояло из одного сечения S и компонент слоев и было бы связным.

4.9.1. Компонента V_1 может самопересекаться по некоторым своим двойным кривым C_{11} . Прообраз $v^{-1}(C_{11}) = \bar{C}_{11}$ каждой неприводимой ком-

поненты самопересечения C_{11} распадается на две неприводимые кривые. Заметим, что и в этом случае имеет место формула (3.2.2), т. е.

$$K_{\bar{V}_1} = \sum_{j \neq 1} (r_j - r_1 - 1) \bar{C}_{1j} - \sum_{C_{11}} \bar{C}_{11}.$$

4.9.2. Посмотрим, какие кривые самопересечения может иметь V_1 . Во-первых, среди кривых самопересечения не может быть сечения S . Действительно, так как среди всех кривых $\bar{C}_{ij}$ ($j \geq 1$) есть лишь одно сечение, то оно должно входить в $K_{\bar{V}_1}$ с кратностью -2 , так как $-(K_{\bar{V}_1}, F)_{\bar{V}_1} = 2$, где F — слой линейчатой поверхности $\bar{V}_1$. Следовательно, поверхность V_1 может лишь самопересекаться по кривым — компонентам слоев на $\bar{V}_1$.

Во-вторых, пусть C — неприводимая кривая самопересечения поверхности V_1 , тогда C — гладкая кривая. Действительно, если точка $x \in C$ есть особая точка кривой C , то, так как дивизор X_0 в X есть дивизор с нормальными пересечениями, точка x обязана быть тройной точкой вырождения. Следовательно, около точки x имеем три компоненты V' , V'' , V''' вырожденного слоя X_0 , которые пересекаются по кривым C_1 , C_2 , C_3 .

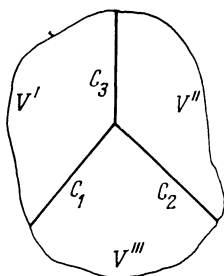


Рис. 9

Пусть C_1 и C_2 — две ветви кривой C (x — особая точка кривой C). Тогда, так как C — кривая самопересечения, все компоненты V' , V'' , V''' есть ветви одной и той же компоненты V_1 . Следовательно, на нормализации $\bar{V}_1$ прообраз кривой C_1 , лежащей на ветви V''' , имеет особую точку. Но, с другой стороны, кривая $\bar{C}_1$ есть компонента слоя — неособая кривая на линейчатой поверхности $\bar{V}_1$.

Далее, пусть C — неприводимая кривая самопересечения поверхности V_1 , тогда существует такая окрестность U этой кривой в X , что в U поверхность $V_1 \cap U$ распадается на две неприводимые гладкие компоненты V' и V'' и $C = V' \cap V''$. По лемме 2.1

$$(C^2)_{V'} + (C^2)_{V''} = -T_C. \quad (1)$$

Индексы самопересечений кривых $\bar{C}_i$ на $\bar{V}_1$ ($v^{-1}(C) = C_1 \cup C_2$) равны

$$(C_1^2)_{\bar{V}_1} = (C^2)_{V'}, \quad (C_2^2)_{\bar{V}_1} = (C^2)_{V''}. \quad (2)$$

Так как на кривой C лежит T_c тройных точек, то кривая C_1 (соответственно C_2) лежит в некотором слое на $\bar{V}_1$ и пересекается с T_c другими компонентами слоя, либо пересекается с сечением и с T_c-1 другими компонентами слоя. Следовательно, по лемме 2.21

$$(C_i^2)_{\bar{V}_1} \leq -(T_c - 1). \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует, что $T_c \leq 2$, т. е. возможны два случая:

- а) $T_c = 2$ и $(C^2)_{V'} = (C^2)_{V''} = -1$,
- б) $T_c = 1$ и $(C^2)_{V'} = -1$, $(C^2)_{V''} = 0$.

4.10. Стягивание компоненты V_1 . Как отмечалось выше, если бы V_1 была относительно минимальной линейчатой поверхностью, то мы могли бы стянуть V_1 на сечение S . Но, V_1 не обязана быть относительно минимальной моделью, т. е. на $\bar{V}_1$ могут быть не минимальные слои, в которых обязательно найдется и.к. I рода. Рассмотрим такой слой и его образ F на V_1 .

4.10.1. Некоторые из компонент слоя F на V_1 могут быть особыми кривыми. Сделаем их гладкими следующим способом. Пусть неприводимая кривая C слоя F имеет особую точку x , тогда, так как на $\bar{V}_1$ двойные кривые образуют связное множество, кривая C обязана быть двойной кривой и точка x есть тройная точка. Следовательно, около точки x имеем три компоненты V' , V'' и V''' , пересекающиеся по кривым C_1 , C_2 , C_3 .

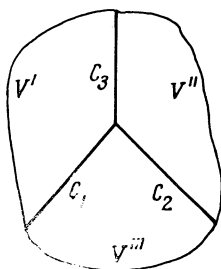


Рис. 10

Пусть C_1 и C_2 — ветви кривой C . Тогда V' и V'' — две ветви поверхности V , а V''' не является ветвью поверхности V , так как кривая C не является кривой самопересечения и ветви кривой C лежат на ветвях поверхности V_1 . Отсюда следует, что кривая C_3 есть кривая самопересечения компоненты V_1 и на $\bar{V}_1$ кривые $\bar{C}_1$, $\bar{C}_{31}$, $\bar{C}_{32}$ ($v^{-1}(C_3) = \bar{C}_{31} \cup \bar{C}_{32}$) лежат в одном слое. Поэтому $(\bar{C}_{31}^2)_{\bar{V}_1} \leq -1$ и $(\bar{C}_{32}^2)_{\bar{V}_1} \leq -1$, а из п. 4.9 следует, что $T_{C_3} = 2$ и $(C_3^2)_{V'} = (C_3^2)_{V''} = -1$. Сделав перестройку II с центром в кривой C_3 , мы разрешим особую точку $x \in C$.

4.10.2. Избавимся от кривых самопересечения типа а) из п. 4.9.2 перестройками II. Пусть в обозначениях п. 4.3 кривая L есть кривая самопересечения компоненты V_1 , т. е. V_1 и V_2 являются ветвями компоненты V_1 . Перестройка II не уничтожит самопересечения на поверхности V_1 только в том случае, если V_3 и V_4 являются ветвями компоненты V_1 , но

тогда все кривые есть кривые самопересечения — компоненты слоев на V_1 . На ветви V_1 кривые L , $C_{1,3}$ и $C_{1,4}$ принадлежат одному слою и $(\bar{C}_{1,3}, \bar{L})_{\bar{V}_1} = (\bar{L}, \bar{C}_{1,4})_{\bar{V}_1} = 1$. Кроме того, $(C_{1,3}^2) \geq -1$, $(C_{1,4}^2) \geq -1$ и $(L^2) = -1$ в силу п. 4.9.2, чего не может быть.

В дальнейшем предполагаем, что все компоненты слоя F являются гладкими кривыми и нет самопересечений типа а) из п. 4.9.2.

4.10.3. Если слой F не минимален, то обязательно найдется в этом слое и.к. I рода L , которая обязана быть одного из следующих типов (лемма 2.20):

- а) можно сделать перестройку I с центром в кривой L ,
- б) можно сделать перестройку II с центром в кривой L ,
- в) кривая L не есть кривая самопересечения и удовлетворяет условиям п. 4.5,

г) кривая L является кривой самопересечения типа б) из п. 4.9.2.

В случае г) около кривой L поверхность V_1 распадается на две ветви V' и V'' , на одной из которых кривая L является и.к. I рода (принадлежит слою F), а на другой кривая L есть невырожденный слой, т. е. и в этом случае имеет место п. 4.5, и мы можем стянуть ветвь компоненты V_1 , на которой кривая L есть невырожденный слой.

4.10.4. Посмотрим, когда перестройка I не уменьшает числа компонент в слоях поверхности V_1 . В обозначениях п. 4.2 это возможно лишь в том случае, когда V_1 и V_2 есть ветви компоненты V_1 . Следовательно, кривая C есть кривая самопересечения. Но тогда C лежит в вырожденном слое на ветви V_1 и согласно п. 4.9.2 либо $T_c = 1$, либо $T_c = 2$. Случай $T_c = 2$ не возможен по лемме 2.21, так как в противном случае $(C^2)_{V_1} = -1$ и кривая C пересекается с L и еще с двумя другими компонентами слоя или с компонентой слоя и сечением.

Случай $T_c = 1$ возможен. Так как на ветви V_1 слой не минимален, $L \subset V_1$, то $(C^2)_{V_1} = -1$ и $(C^2)_{V_2} = 0$. Следовательно, на ветви V_1 слой $F = L + C$ и кривые S_1 и S_2 есть ветви сечения S на линейчатой поверхности $\bar{V}_1$ ($S_i = V_i \cap V_3$, $i = 1, 2$, $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \subset C$).

Согласно п. 4.5 мы можем выбрать достаточно малую окрестность U слоя $F = L + C$, в которой стягивается V_2 на S_2 . После стягивания ветви V_2 в полученной окрестности U' мы можем стянуть V_1 на S_1 (быть может, немного уменьшив окрестность U).

4.10.5. Посмотрим, когда перестройка II не уменьшает числа компонент в вырожденном слое поверхности V_1 . В обозначениях п. 4.3 пусть V_1 — ветвь компоненты V_1 , тогда перестройка II с центром в кривой L не уменьшает числа компонент вырожденного слоя F на $\bar{V}_1$ лишь в случаях, когда либо V_3 , либо V_4 , либо обе они есть ветви компоненты V_1 .

Случай, когда V_3 и V_4 являются ветвями компоненты V_1 , не возможен, так как в этом случае кривые $C_{1,3}$ и $C_{1,4}$ есть кривые самопересечения компоненты V_1 , а на ветви V_1 кривые $C_{1,3}$, L , $C_{1,4}$ принадлежат одному слою и $(L^2)_{V_1} = -1$, $(C_{1,3}^2)_{V_1} \geq -1$, $(C_{1,4}^2)_{V_1} \geq -1$, $(C_{1,4}, L)_{V_1} = 1$ в силу п. 4.9.2, что невозможно.

Пусть V_3 (или V_4) является ветвью компоненты V_1 . В этом случае C_{13} является кривой самопересечения. Так как на ветви V_1 кривая L является компонентой вырожденного слоя F , то из леммы 2.21 и из п. 4.9.2 следует, что $T_{C_{1,3}} = 1$, $(C_{1,3}^2)_{V_1} = -1$ и $(C_{1,3}^2)_{V_3} = 0$, т. е. на ветви V_3 кривая C_{13} является слоем, а кривая C_{32} — сечением, а на ветви V_1 слой $F = L + C_{1,3}$ и $C_{1,4}$ есть сечение. Но так как на поверхности $\bar{V}_1$ есть лишь одно сечение, то V_2 и V_4 являются ветвями одной компоненты.

Как и в предыдущем пункте, в некоторой окрестности U слоя F мы можем стянуть обе ветви V_1 и V_3 компоненты V_1 на сечение S .

4.10.6. Итак, если перестройка I или II не уменьшает числа компонент в вырожденном слое F на поверхности V_1 , то найдется окрестность $U \subset X$, содержащая слой F , в которой мы можем стянуть $V_1 \cap U$ на сечение S . Поэтому будем считать такой слой также минимальным.

Заметим, что если на поверхности V_1 все слои минимальны в этом или в обычном смысле, то существует глобальное стягивание поверхности V_1 на сечение S . Действительно, в этом случае поверхность V_1 можно покрыть открытыми множествами $U_i \subset X$, в каждом из которых $V_1^i = V_1 \cap U_i$ стягивается на сечение, и, очевидно, в пересечениях $U_i \cap U_j$ эти стягивания согласованы, поэтому ясно, что поверхность V_1 можно стянуть и во всем X .

4.10.7. Пусть $\bar{F}$ — вырожденный слой компоненты $\bar{V}$, который не минимален в смысле предыдущего пункта. Опишем перестройку многообразия X , делающую этот слой минимальным.

Сделаем сперва перестройки I и II с центрами в кривых этого слоя, если это возможно, при этом число компонент в вырожденном F слое уменьшится. После таких перестроек мы можем считать, что слой $\bar{F} = \bar{L}_1 + \dots + \bar{L}_s$, причем кривые $\bar{L}_i$ занумерованы в том порядке, в котором их надо стягивать, чтобы сделать слой $\bar{F}$ на $\bar{V}_1$ минимальным (т. е. $\bar{L}_1$ есть и. к. I рода, после стягивания $\bar{L}_1$, кривая $\bar{L}_2$ будет и. к. I рода и т. д.). Пусть, далее, кривые $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_j, j \leq s-1$, таковы, что:

- а) $\bar{L}_i$ при $i \leq j$ являются двойными кривыми;
- б) после стягивания кривых $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{i-1}$ на поверхности $\bar{V}_1$ кривая $\bar{L}_i$ пересекается лишь с одной другой двойной кривой при $i \leq j$;
- в) после стягивания кривых $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_j$ на $\bar{V}_1$ кривая $\bar{L}_{j+1}$ пересекается с двумя другими двойными кривыми, если $\bar{L}_{j+1}$ есть двойная кривая, или пересекается лишь с одной двойной кривой, если $\bar{L}_{j+1}$ сама не является двойной кривой;
- г) кривые $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_k$ при $k \leq j$ являются кривыми самопересечения, а $\bar{L}_i$ при $i > k$ не являются кривыми самопересечения.

4.10.8. Покроем многообразие X двумя картами: U_1 — некоторая достаточно малая окрестность слоя F и $U_2 = X \setminus \bigcup_{i=1}^s L_i$, причем окрестность U_1 выбираем настолько малой, что бы все последующие локальные стягивания были бы возможны. Обозначим $W = U_1 \cap U_2$, т. е. $W = U_1 \setminus \bigcup_{i=1}^s L_i$.

Пусть V_{i+1} — пересечение компоненты слоя X_0 с окрестностью U_1 , которая пересекается с V_i по кривой L_i . Различные V_i могут оказаться разными ветвями одной компоненты слоя X_0 , но мы будем предполагать, что окрестность U_1 так мала, что все V_i — гладкие поверхности в U_1 .

Согласно п. 4.5 в окрестности U_1 мы можем стянуть V_2 на кривую S_2 , которая лежит на некоторой поверхности V_i или на поверхности V_0 (V_0 — та компонента, которая пересекается с V_1 по сечению на V_1). Заметим, что из рассмотренного выше следует, что поверхность V_i , на которую стянулась V_2 , не может быть ветвью компоненты V_1 . Получим комплексное многообразие U_1^1 и $\sigma_1: U_1 \rightarrow U_1^1$, стягивающее V_2 на кривую S_2 .

Так как $U_1 \subset X$, то $\pi|_{U_1}: U_1 \rightarrow \Delta$ является вырождением поверхностей с вырожденным слоем $X_0 \cap U_1 = V_0 + V_1 + \dots + V_{s+1}$, следовательно, это вырождение индуцирует вырождение $\pi: U_1^1 \rightarrow \Delta$ с вырожденным слоем $V_0 + V_1 + V_3 + \dots + V_{s+1}$. Поэтому для компактных неособых двойных кривых в этом слое мы можем применить лемму 2.1 и п. 4.5. Отсюда и из условий, которым удовлетворяет слой F , следует, что в открытом множестве U_1^1 мы можем стянуть поверхность V_3 на кривую, лежащую на некоторой поверхности V_i , которая не является ветвью компоненты V_1 , если $2 \leq j$. Получим $\sigma_2: U_1^1 \rightarrow U_1^2$. Продолжая процесс, последовательно стягиваем поверхности V_i при $i \leq j+1$ на кривые, не лежащие на ветвях компоненты V_1 . В итоге получим многообразие U_1^j , в котором лежит образ поверхности V_1 и кривой L_{j+1} .

Обозначим $W^i = \sigma_i(W^{i-1}) \subset U_1^i$. Заметим, что $W^j \cap L_{j+1} = \emptyset$ и образ поверхности V_{j+1} при отображении $\sigma_i: U_1^{i-1} \rightarrow U_1^i$, кроме одной точки, принадлежит W_i .

Пусть $j+1 \neq s$. Тогда L_{j+1} является и. к. I рода на образе поверхности V_1 при отображении $\sigma_i \circ \sigma_{i-1} \circ \dots \circ \sigma_1$ и либо L_{j+1} — двойная кривая с $T_{L_{j+1}} = 2$, либо L_{j+1} не является двойной кривой и просто пересекается с единственной двойной кривой. Сделаем перестройку II или I с центром в этой кривой L_{j+1} . Получим многообразие $\tilde{U}_1^j$, в котором есть открытое подмножество $\tilde{W}^j$, изоморфное W^j (изоморфизм устанавливает мероморфное отображение — перестройка II или I, которая не определена в точках кривой L_{j+1} , $L_{j+1} \cap W^j = \emptyset$). В $\tilde{W}^j$ есть кривая S_{j+1} (образ при изоморфизме $W^j \xrightarrow{\sim} \tilde{W}^j$), на которую стягивалась V_{j+1} . Замкнем кривую S_{j+1} в $\tilde{U}_1^j$ и сделаем σ -процесс с центром в этой кривой в $\tilde{U}_1^j$:

$$\sigma_j: \tilde{U}_1^{j-1} \rightarrow \tilde{U}_1^j.$$

При этом $\tilde{W}^{j-1} = \sigma_j^{-1}(\tilde{W}^j)$ станет изоморфной множеству W^{j-1} . Следовательно, в W^{j-1} можно найти кривую S_j (образ при изоморфизме $W^{j-1} \xrightarrow{\sim} \tilde{W}^{j-1}$), на которую стягивалась поверхность V_j . Поступаем с этой кривой так же, как поступили с кривой S_{j+1} и т. д. В итоге получим открытое множество $\tilde{U}_1$ и в нем открытое подмножество $\tilde{W}$, которое изоморфно W . Склеим открытые множества $\tilde{U}_1$ и U_2 по открытым в них подмножествам $\tilde{W}$ и W . После склейки получим новое вырождение поверхностей, являющееся перестройкой старого вырождения. При этом на поверхности

V_1 (образе старой поверхности V_1 при этой перестройке) число компонент вырожденных слоев будет строго меньше числа компонент вырожденных слоев на старой поверхности V_1 . Действительно, во-первых, кривая L_{j+1} стягивается на V_1 при перестройке. Затем, пусть $S_{i_1}, \dots, S_{i_p}$ — те кривые в U_1^j , на которые стягивались V_{i_j} и которые пересекаются с L_{j+1} в U_1^j . Эти кривые $S_{i_1}, \dots, S_{i_p}$ лежат на некоторой компоненте V_r , не являющейся ветвью компоненты V_1 , и не проходят через тройные точки на L_{j+1} и пересекаются с поверхностью V_1 лишь по точкам, лежащим на L_{j+1} . Следовательно, после перестройки II или I замыкание образов кривых $S_{i_1}, \dots, S_{i_p}$ в $\tilde{U}_1^j$ уже не будут пересекаться с образом поверхности V_1 .

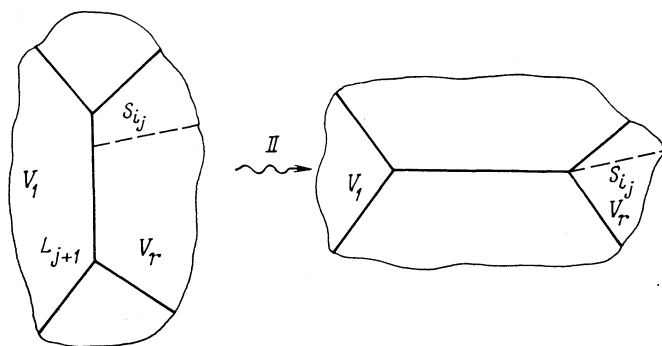


Рис. 11

Заметим, что после перестройки вблизи слоя на поверхности V_1 , который мы минимизируем, вырожденный слой X_0 останется локально дивизором с нормальными пересечениями. Поэтому если полученный слой на V_1 не минимален, то мы опять можем провести перестройку, описанную выше.

Пусть, наконец, $j = s + 1$. Тогда в окрестности U_1^j поверхность V_1 станет минимальной, кривая L_{j+1} будет целым слоем и мы сможем стянуть поверхность V_1 на сечение S_1 , лежащее на V_0 . Получим открытое множество U_1^{j+1} и $\sigma_{j+1}: U_1^j \rightarrow U_1^{j+1}$. В U_1^{j+1} лежит открытое множество $W^{j+1} = \sigma_{j+1} \circ \dots \circ \sigma_1(W)$. Напомним, что на каждом шаге стягивания $\sigma_i: U_1^{i-1} \rightarrow U_1^i$ поверхность V_{i+1} стягивалась на сечение S_{i+1} , которое пересекалось с образом поверхности V_1 при стягивании лишь по точке, лежащей на вырожденном слое поверхности V_1 . Следовательно, образы всех сечений S_i и сечение S_1 не пересекаются в W^{j+1} , но пересекаются в U_1^{j+1} . Отсюда получаем, что, раздувая сечения S_i в обратном порядке к тому, как они получались при стягиваниях, а затем раздувая S_1 , мы получим окрестность $\tilde{U}_1$, в которой лежит открытое множество $\tilde{W}$, которое изоморфно W (так как σ -процессы с центрами, которые не пересекаются, коммутируют). Поэтому мы можем склеить $\tilde{U}_1$ с U_2 по изоморфным открытым множествам $\tilde{W}$ и W и получить перестройку вырождения $\pi: X \rightarrow \Delta$, у которой на образе поверхности V_1 образ слоя F уже минимален в

том смысле, что все ветви поверхности V_1 в окрестности $\bar{U}_1$ при ее получении раздувались последними и, следовательно, могут быть стянуты.

Отсюда следует, что после конечного числа таких перестроек мы можем стянуть компоненту V_1 на кривую. В этом и заключается первый шаг перестройки.

4.11. Посмотрим, что за вырождение мы получили. Во-первых, ясно, что вырожденный слой этого вырождения $\pi_1: X^{(1)} \rightarrow \Delta$ состоит из $n-1$ компоненты, каждая из которых входит в вырожденный слой $X_0^{(1)}$ с кратностью один.

Во-вторых, аналитическое пространство $X^{(1)}$ уже не обязано быть гладким и, если оно есть гладкое многообразие, то дивизор $X_0^{(1)}$ не обязан быть дивизором с нормальными пересечениями. Назовем точки пространства $X^{(1)}$ особыми, если в этих точках пространство $X^{(1)}$ имеет особенности или если вблизи них вырожденный слой $X_0^{(1)}$ не является дивизором с нормальными пересечениями.

4.11.1. Покажем, откуда возникли эти особенности. С вырождением $\pi: X \rightarrow \Delta$ мы делали следующую перестройку. Брали некоторую окрестность $U_1 \subset X$ и в ней стягивали некоторые поверхности. Получили окрестность $U_1^j \supset W_0^j$. Затем делали перестройки I или II, или стягивали еще поверхность V_1 . Получили окрестность $\bar{U}_1^j$, которая была гладкой и в которой вырожденный слой был дивизором с нормальными пересечениями. Затем в окрестности $\bar{U}_1^j$ брали кривые, на которые стягивались поверхности. Эти кривые S_i могли пересекаться или даже иметь особые точки (в $\bar{W}^j$ все кривые S_i — гладкие, не пересекаются и множество $\{[\text{замыкание } S_i \text{ в } \bar{U}_1^j] \setminus \bar{W}^j \cap S_i\}$ есть одна точка. А затем все эти кривые $S_i \subset \bar{U}_1^j$ раздували в обратном порядке. За счет этих раздутий мы как раз и могли получить все особенности вырождения $\pi_1: X^{(1)} \rightarrow \Delta$.

4.11.2. Итак, нами получено вырождение $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$, которое удовлетворяет следующим условиям:

I. X' можно покрыть картами $U_1, \dots, U_s$ такими, что

а) $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i > 1$, $j > 1$;

б) все особенности X' лежат в $U_2 \cup \dots \cup U_s$.

II. Для каждого $i \geq 2$ существует последовательность σ -процессов с центрами в кривых S_p

$$U_i \xrightarrow{\sigma_1} U_i^1 \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_{j(i)}} U_i^{j(i)}$$

такая, что

а) при каждом σ -процессе стягивается некоторая компонента V_p слоя X_0' на кривую S_p пересечения компоненты V_p с некоторой другой компонентой V_q слоя X_0' и кривая S_p не лежит на других компонентах, кроме V_p и V_q ;

б) $U_i^{j(i)}$ — гладкое многообразие и в $U_i^{j(i)}$ дивизор, $\sigma_{j(i)} \circ \dots \circ \sigma_1(X_0')$ есть дивизор с нормальными пересечениями, а $U_i^{j(i)-1}$ имеет особенности;

в) все особенности пространства X' , лежащие в U_i , содержатся в $\sigma_1^{-1} \circ \dots \circ \sigma_{j(i)}^{-1}(x) = O_i$, где x — точка, $x \in U_i^{j(i)}$.

III. Пусть C — неприводимая кривая самопересечения компоненты V слоя X'_0 , и пусть вблизи почти всех точек кривой C слой X'_0 есть локально дивизор с нормальными пересечениями, тогда $v^{-1}(C)$ распадается на две неприводимые компоненты, где $v: \bar{V} \rightarrow V$ — нормализация поверхности V .

4.12. Пусть $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$ имеет особенности, которые описаны выше. Предположим еще, что компонента V слоя X'_0 пересекается с некоторой U_i при $i \geq 2$, и пусть V_j — ветвь компоненты V в окрестности U_i , которая стягивается при $\sigma_j: U_i^{j-1} \rightarrow U_i^j$. Назовем ветвь V_j последней локально раздувавшейся ветвью, если σ -процессы $\sigma_{r+1}: U_i^r \rightarrow U_i^{r+1}$ не стягивают поверхности V_{r+1} на кривые, лежащие на V_j при $r+1 < j$.

Пусть ветвь V_j поверхности V в окрестности U_i есть последняя локально раздувавшаяся ветвь. Покажем, что в этом случае существует такая перестройка вырождения $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$, что ветвь V_j компоненты V уже стягивается первым σ -процессом. Действительно, возьмем U_i^j и в ней раздуем кривые S_r , $r < j$, а затем кривую S_j . Ясно, что при этом мы получим окрестность $\bar{U}_i$, которая будет изоморфна U_i вне множеств особенностей из них, поэтому $\bar{U}_i$ можно склеить с U_1 .

4.13. Согласно ⁽¹⁰⁾, мы можем σ -процессами с центрами в особенностях пространства X' разрешить все особенности на X' . Пусть $\sigma: \bar{X}' \rightarrow X'$ — разрешение особенностей. Тогда композиция $\pi_1 \circ \sigma: \bar{X}' \rightarrow X$ является перестройкой вырождения $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$. Сделав еще несколько σ -процессов, мы можем считать, что $\bar{X}'$ является гладким многообразием, слой $\bar{X}'_0$ есть дивизор с нормальными пересечениями, компоненты которого являются гладкими поверхностями, но входят в слой $\bar{X}'_0$ с разными кратностями.

Назовем компоненту V слоя $\bar{X}'_0$ новой, если $\sigma(V)$ — кривая или точка, и новую компоненту назовем особой новой компонентой, если $\sigma(V) \subset O_i$, $i \geq 2$.

Мы будем предполагать еще, что разрешение особенностей $\sigma: \bar{X}' \rightarrow X'$ минимально в том смысле, что для любой новой компоненты V ее образ $\sigma(V)$ лежит в множестве $\bigcup_{i=2}^s O_i$, либо в множестве пересечений или самопересечений компонент слоя X'_0 .

4.14. ЛЕММА. Пусть вырождение $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$ удовлетворяет условиям из п. 4.11.2 и $\sigma: \bar{X}' \rightarrow X'$ — разрешение особенностей. Пусть $\bar{V}$ — старая (т. е. не новая) компонента слоя $\bar{X}'_0$ такая, что:

- $\bar{V}$ — линейчатая поверхность,
- двойные кривые на $\bar{V}$ состоят из одного сечения и компонент слоев,
- двойные кривые на $\bar{V}$ образуют связное множество,
- существует окрестность U_i ($i \geq 2$) и ветвь компоненты $V = \sigma(\bar{V})$, которая является последней локально раздувавшейся ветвью, причем $S = \sigma(\bar{S})$ есть сечение при этом раздутии,
- на V никакие кривые локально не раздувались в U_i ($i \geq 2$).

Тогда существует такая перестройка вырождения $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$, которая не увеличивает числа компонент в вырожденном слое и после которой

поверхность V (вернее, ее образ при перестройке) можно стянуть на кривую. После этого стягивания получится вырождение, удовлетворяющее условиям из п. 4.11.2.

4.14.1. Условие г) леммы гарантирует нам, что если в некоторых окрестностях U_i ($i \geq 2$) (быть может, в одной) локально раздувалось несколько ветвей поверхности V , то при всех этих раздутиях кривая S была сечением. Действительно, если на $\tilde{V}$ есть две структуры линейчатой поверхности, то слои из разных структур обязаны пересекаться. Но так как $U_i \cap U_j$ при $i \neq j$, $i > 1$, $j > 1$ и в каждой U_i поверхность V распадается на неприводимые компоненты — ветви, которые стягиваются при $\sigma_j: U_i^{j-1} \rightarrow U_i^j$, то прообразы слоев этих линейных структур не пересекаются на $\tilde{V}$.

4.14.2. Условие д) гарантирует нам, что все ветви поверхности V , которые стягиваются при $\sigma_j: U_i^{j-1} \rightarrow U_i^j$, есть последние локально раздувавшиеся ветви. В силу п. 4.12 мы можем считать, что все такие ветви стягиваются первыми σ -процессами.

4.14.3. Пусть на V есть вырожденный слой $\tilde{F} = \tilde{L}_1 + \dots + \tilde{L}_t$ и пусть $\sigma(\tilde{F}) = L_1 + \dots + L_t = F$. Если слой F не пересекается с особенностями пространства X' , то мы полностью находимся в ситуации, которая была рассмотрена в п. 4.10, и, следовательно, можем минимизировать этот слой.

4.14.4. Пусть слой $F = L_1 + \dots + L_t$ пересекается с особенностями пространства X' . Рассмотрим окрестность U_i ($i \geq 2$). Некоторые из кривых $L_1, \dots, L_t$ (пусть $L_1, \dots, L_k$, $k \leq t$) стягиваются при $\delta_j: U_i^{j-1} \rightarrow U_i^j$, т. е. L_j ($j \leq k$) являются слоями поверхностей V_j , стягивающихся при $\delta_j: U_i^{j-1} \rightarrow U_i^j$.

Покажем, что можно выбрать такую окрестность $U \subset X'$ слоя $F = L_1 + \dots + L_t$, что а) $U_i \subset U$ при $i \geq 2$ (быть может, немного уменьшив окрестность U_i), б) если ветвь V_j стягивается при $\delta_j: U_i^{j-1} \rightarrow U_i^j$, то она стягивается и в окрестности U . Для этого достаточно показать, что существует такая окрестность $U \subset X'$ слоя F , содержащая окрестности U_i , что все поверхности V_j , которые стягиваются в U_i , замкнуты в U .

Построим такую окрестность U . Пусть $V_1, \dots, V_{j(i)}$ — поверхности в U_i , которые стягиваются при $\sigma_j: U_i^{j-1} \rightarrow U_i^j$, они замкнуты в U_i . В силу условия д) леммы кривые L_s при $s > k$ пересекаются с $V_1 \cup \dots \cup V_{j(i)}$ по конечному числу точек $x_1, \dots, x_p$, лежащих в U_i . Уменьшив немного окрестность U_i так, чтобы она все еще удовлетворяла условиям из п. 4.11.2, мы можем предположить, что кривые L_s при $s > k$ пересекаются с замыканиями поверхностей V_j в пространстве X' лишь по тем же точкам $x_1, \dots, x_p$. Пусть $x \in L_{k+1} \cup \dots \cup L_t$, сопоставим ей окрестность U_x . Если $x \in \{x_1, \dots, x_p\}$, то $U_x = U_i$, а если $x \notin \{x_1, \dots, x_p\}$, то положим $U_x = X' \setminus \{\text{замыкание поверхностей } V_j \text{ в } X'\}$. Очевидно,

$$U = \bigcup_{x \in L_{k+1} \cup \dots \cup L_t} U_x$$

есть искомая окрестность.

4.14.5. Покроем пространство X' двумя картами U и $U_1 = X' \setminus ((\bigcup_{i=1}^t L_i) \cup \bigcup_{i \geq 2} (U O_i))$. Пусть $W = U \cap U_1$. По построению окрестности U в U можно стянуть все поверхности V_j , которые стягиваются в окрестностях U_i . Пусть

$$U \xrightarrow{\sigma_1} U' \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_p} U^p$$

— последовательность этих стягиваний. При этом

$$W \xrightarrow{\sigma_1} W^1 \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_p} W^p$$

и каждое $\sigma_i: W^{i-1} \rightarrow W^i$ есть σ -процесс в неособом многообразии с центром в неособой кривой S_i . Открытое множество U^p — уже неособое многообразие. На U^p определено отображение $\pi: U^p \rightarrow \Delta$, индуцированное отображением $\pi_1: X' \rightarrow \Delta$, нулевой слой которого является локально дивизором с нормальными пересечениями и равен $\sigma_p \circ \dots \circ \sigma_1(X'_0 \cap U)$. Среди компонент этого слоя есть несколько образов компоненты V и одна из ветвей — образов компоненты V содержит полный слой — образ слоя F , который мы минимизируем, т. е. мы полностью находимся в ситуации, описанной в п. 4.10, поэтому мы можем минимизировать слой F тем же способом, что и в п. 4.10, надо лишь все время после перестроек I и II восстанавливать не окрестность $\tilde{U}^p$, а окрестность $\tilde{U}$. Лемма доказана.

4.15. Доказательство теоремы I будем проводить методом индукции. Пусть $X_0 = V_1 + \dots + V_n$ — вырожденный слой хорошего проективного вырождения $\pi: X \rightarrow \Delta$, и пусть $K_X = \sum r_i V_i$, $r_i \neq \text{const}$. Обозначим через k число тех r_i , которые больше $\min r_i$. Пусть существует такая последовательность перестроек $\pi_1: X^{(1)} \xrightarrow{i} \Delta$, ..., $\pi_s: X^{(s)} \xrightarrow{i} \Delta$ ($s \geq k$), что вырождение π_i получено из вырождения π_{i-1} перестройкой, описанной в п. 4.10 и в доказательстве леммы 4.14. Тогда найдется вырождение $\pi_{s+1}: X^{(s+1)} \rightarrow \Delta$, которое получено из вырождения π_s перестройкой в п. 4.10 или в доказательстве леммы 4.14.

Для доказательства этого утверждения нам надо найти компоненту V слоя $X_0^{(s)}$, которая удовлетворяет либо условиям п. 4.10, либо условиям леммы 4.14.

4.16. Нахождение компоненты V . Пусть $\sigma: \tilde{X}^{(s)} \rightarrow X^{(s)}$ — разрешение особенностей. Тогда по теореме 2.11 $h^1(\Pi(\tilde{X}_0^{(s)})) = 0$.

4.16.1. Назовем старую компоненту $\tilde{V}$ слоя $\tilde{X}_0^{(s)}$ отмеченной компонентой, если двойные кривые на $\tilde{V}$ не образуют связного множества и либо $\tilde{V}$ удовлетворяет условиям а), б), г) леммы 4.14, либо конечным числом перестроек I и II компоненту $V = \sigma(\tilde{V})$ в некоторой окрестности $U \subset X^{(s)}$ можно сделать линейчатой поверхностью так, что е) среди двойных кривых поверхности V в U есть лишь одно сечение, ж) в окрестности U содержится полный слой линейчатой поверхности V .

Заметим, что на нормализации $\bar{V}$ переустройкам I и II соответствуют раздутия неособых точек или стягивания и. к. I рода, которые не могут склеить разные компоненты связности множества прообразов двойных кривых в одну компоненту. Поэтому имеет смысл говорить о компоненте связности множества двойных кривых на поверхности $\bar{V}$, содержащей сечение. Следовательно, мы можем применить конструкцию из п. 4.8.3, т. е. по отмеченным вершинам разобьем полиэдр $\Pi(\bar{X}_0^{(s)})$ на полиэдры $K_1, \dots, K_p$, построим полиэдры Π', Π'' и ориентированный граф Γ , затем найдем полиэдр K_1 , из которого нет выхода. Нужную нам компоненту $\bar{V}$ будем искать среди вершин полиэдра K_1 .

4.16.2. Пусть K_1 содержит вершину, соответствующую особой новой компоненте слоя $\bar{X}_0^{(s)}$. Заметим, что так как пространство $X^{(s)}$ удовлетворяет условиям из п. 4.11.2, то отсюда легко показать, что особые новые компоненты, которые отображаются в O_i при фиксированном i отображением $\sigma: \bar{X}^{(s)} \rightarrow X^{(s)}$, образуют связное множество. Отсюда следует, что соответствующие всем таким особым новым компонентам вершины принадлежат K_1 , если хоть одна из них принадлежит K_1 . Рассмотрим старую компоненту V , которая локально последней раздувалась в окрестности U_i . Слой, который получился при раздутии, и сечение, которое раздувалось (вернее их прообразы на $\bar{V}$), лежат в одной компоненте связности множества двойных кривых на $\bar{V}$. А так как поверхность $\bar{V}$ по компонентам этого слоя пересекается с новыми особыми компонентами слоя $\bar{X}_0^{(s)}$, то $\bar{V}$ не может быть отмеченной компонентой. Следовательно, все такие компоненты удовлетворяют всем условиям 4.14, кроме, быть может, условия д). Выберем среди всех таких компонент ту, которая входит в $K_{X^{(s)}}$ с максимальной кратностью. Тогда выбранная компонента будет удовлетворять и условию д) леммы 4.14, так как если компонента V_1 получалась локальным раздутием кривой, лежащей на некоторой другой компоненте V_2 , то $r_1 = r_2 + 1$.

4.16.3. Пусть K_1 не содержит вершин, соответствующих особым новым компонентам. Это означает, что вблизи двойных кривых на $X_0^{(s)}$ образов двойных кривых, ребра которых принадлежат K_1 , слой $X_0^{(s)}$ есть локально дивизор с нормальными пересечениями.

Возьмем все старые компоненты $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_p$ слоя $\bar{X}_0^{(s)}$, которые соответствуют не отмеченным вершинам в полиэдре K_1 , и рассмотрим дивизор $V_1 + \dots + V_p$ в $X^{(s)}$. Тогда вблизи $V_1 + \dots + V_p$ дивизор $X_0^{(s)}$ есть локально дивизор с нормальными пересечениями. Поверхности $V_1, \dots, V_p$ пересекаются между собой и еще с отмеченными компонентами слоя $X_0^{(s)}$, причем $V_1, \dots, V_p$ пересекаются с отмеченными поверхностями по компонентам слоев на отмеченных поверхностях, которые не образуют связных множеств с сечениями. Так как $X_0^{(s)}$ вблизи $V_1 + \dots + V_p$ есть локально дивизор с нормальными пересечениями, то для компонент слоя $X_0^{(s)}$ вблизи $V_1 + \dots + V_p$ имеет место формула из п. 4.9.1 для канонического класса на нормализации. Из этой формулы и из леммы 2.19 следует, что $p \geq 1$ и

что кратности r_i , с которыми отмеченные компоненты входят в $K_{X^{(s)}}$ (отмеченные компоненты, пересекающиеся с дивизором $V_1 + \dots + V_p$), меньше $\max_{1 \leq i \leq p} r_i$.

4.16.4. Как и в доказательстве предложения 4.8, выберем среди компонент $V_1, \dots, V_p$ все компоненты, которые входят в $K_{X^{(s)}}$ с максимальной кратностью. Тогда нормализация каждой из выбранных компонент будет одного из следующих типов: 1в), 2в), 3а), 4б), 5б) (см. п. 4.8). Если среди этих компонент есть компонента одного из типов: 1в), 3а) или 5б), то это как раз та компонента, которую мы ищем.

Пусть все компоненты, которые входят в $K_{X^{(s)}}$ с максимальной кратностью, есть компоненты типа 4б) и 2в).

4.16.5. Рассмотрим случай, когда на компонентах типа 4б) нет «деревьев». Как и в доказательстве предложения 4.8, можно показать, что в этом случае компоненты типа 4б) и 2в) образуют либо цепочку компонент, либо цикл компонент, который может состоять и из одной компоненты, самопересекающейся по сечениям.

Пусть у нас есть цикл или цепочка, состоящие более чем из одной компоненты, т. е. компоненты не самопересекаются по сечениям. В этом случае все компоненты являются гладкими поверхностями, так как компонента может самопересекаться лишь по кривым, прообразы которых на нормализации входят в канонический класс с кратностями, равными единице (см. п. 4.9.1), а на поверхностях типа 4б) без «деревьев» такими кривыми являются лишь сечения. Поэтому мы полностью находимся в ситуации, которая уже рассматривалась в п. 4.8.

Пусть цикл состоит из одной компоненты V типа 4б) без «деревьев», т. е. на нормализации $\bar{V}$ поверхности V двойные кривые состоят из двух сечений S_1 и S_2 и компонент одного слоя, а поверхность V самопересекается по кривой S , которая является образом кривых S_1 и S_2 при отображении нормализации $\bar{V} \rightarrow V$. По тем же соображениям, что и выше, поверхность V не имеет других самопересечений, кроме кривой S , и кривая S является гладкой кривой. Следовательно, если на поверхности V двойная кривая имеет особую точку, то на $\bar{V}$ прообраз этой кривой обязан быть слоем и особая точка на этой кривой является тройной точкой, лежащей на кривой S .

Сделав несколько перестроек Π с центрами в кривых, лежащих на V , которые не пересекаются с кривой S , мы можем считать, что все не минимальные слои на $\bar{V}$ состоят из цепочек рациональных кривых $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_k$ таких, что

$$(S_1, \bar{L}_1)_{\bar{V}} = (\bar{L}_1, \bar{L}_2)_{\bar{V}} = \dots = (\bar{L}_{k-1}, \bar{L}_k)_{\bar{V}} = (\bar{L}_k, S_2)_{\bar{V}} = 1,$$

$$(\bar{L}_1^2)_{\bar{V}} = (\bar{L}_k^2)_{\bar{V}} = -1, \quad (\bar{L}_i^2)_{\bar{V}} = -2 \text{ при } 2 \leq i \leq k-1.$$

Так как $T_S = 1$, то по лемме 2.1 имеем:

$$(S_1^2)_{\bar{V}} + (S_2^2)_{\bar{V}} = -1.$$

Стянув на поверхности $\bar{V}$ все и. к. I рода, лежащие в слоях, мы получим относительно минимальную модель $\bar{V}_m$, на которой образы кривых S_1 и S_2 будут сечениями, и

$$(S_1^2)_{\bar{V}_m} + (S_2^2)_{\bar{V}_m} = 0, \quad (S_i^2)_{\bar{V}_m} = (S_i^2)_{\bar{V}} + k_i,$$

где k_i — число стянутых и. к. I рода, пересекавшихся с кривой S_i . Отсюда следует, что на $\bar{V}$ может быть лишь один не минимальный слой, который состоит из двух компонент $\bar{L}_1, \bar{L}_2$ и $(\bar{L}_1^2)_{\bar{V}} = -1, (\bar{L}_2^2)_{\bar{V}} = -1, (\bar{L}_1, \bar{L}_2)_{\bar{V}} = 1$.

Возможны два случая: либо L_1 и L_2 есть двойные кривые, либо L_1 и L_2 — не двойные кривые. В обоих случаях, перегоняя перестройками I или II и. к. I рода по циклу в нужном направлении нужное число раз, мы можем добиться того, что индексы самопересечений кривых S_1 и S_2 станут равными $(S_1^2)_{\bar{V}} = -1, (S_2^2)_{\bar{V}} = 0$. После этого поверхность V можно стянуть на кривую. Действительно, если L_i — двойные кривые, то $\bar{V}$ — линейчатая поверхность со слоями S_2 и $S_1 + \bar{L}_1$ и сечением $\bar{L}_2$; если L_i — не двойные кривые, то $\bar{V}$ — линейчатая поверхность со слоями S_2 и $\bar{L}_1 + S_1$ и сечением — двойной кривой — старым слоем поверхности $\bar{V}$.

4.16.6. Пусть, наконец, среди компонент, входящих в $K_{X(s)}$ с максимальной кратностью, есть компонента V типа 4б) с «деревом». Как и в п. 4.8.7, в этом случае нам достаточно найти двойную кривую L с $T_L = 1$ и такую, что после конечного числа перестроек I и II кривая L станет и. к. I рода. Единственное препятствие, которое может помешать нам найти такую кривую L , состоит в том, что поверхность V может иметь самопересечения и поэтому не обязательно образ $L_1 \subset V$ двойной кривой $\bar{L}_1 \subset \bar{V}$ ($\bar{V}$ — нормализация поверхности V) с $T_{\bar{L}_1} = 2$ и $(\bar{L}_1^2)_{\bar{V}} = -1$ будет гладкой кривой на V . Но так как вблизи поверхности V слой $X_0^{(s)}$ является дивизором с нормальными пересечениями, то кривая L_1 может иметь лишь одну особую точку — образы тройных точек, лежащих на $\bar{L}_1$. Поступая как и в п. 4.10.1, мы можем разрешить эту особую точку, если она не лежит одновременно и на образе $S \subset V$ одного из сечений $\bar{S} \subset \bar{V}$. Но в этом случае кривая S является кривой самопересечения поверхности V , а кривая $\bar{L}_1$ является компонентой «пути» и $(\bar{L}_1, \bar{S})_{\bar{V}} = 1$, поэтому $\bar{L}_1$ обязана пересекаться с некоторой кривой $\bar{L}_2$ — компонентой «пути», на которой $T_{\bar{L}_2} \geq 2$ (так как $T_{\bar{L}_1} = 2$ и на $\bar{V}$ есть «дерево»). А этого не может быть, так как на V образы кривых $\bar{S}$ и $\bar{L}_2$ обязаны совпадать (тройные точки, лежащие на $\bar{L}_1$, склеиваются на V), но, с другой стороны, $T_{\bar{S}} \neq T_{\bar{L}_2}$.

4.17. Завершение доказательства теоремы I. Нам осталось показать, что после стягивания всех компонент слоя X_0 , которые входили в K_X с кратностями $r_i > \min_i r_i$, мы получим хорошее вырождение $\pi_h: X^{(h)} \rightarrow \Delta$.

Для этого заметим, что никакая компонента V , у которой кратность $r = \min_i r_i$, не участвовала в локальных стягиваниях. Действительно, если поверхность V_1 получилась раздутием кривой, лежащей на поверхности V_2 , то $r_1 = r_2 + 1$. Отсюда следует, что $X^{(h)}$ — гладкое многообразие, а вырожденный слой $X_0^{(h)}$ является дивизором с нормальными пересечениями.

Покажем, что все компоненты слоя $X_0^{(k)}$ являются гладкими поверхностями. Действительно, мы могли испортить гладкость компоненты V , у которой кратность $r = \min_i r_i$, только перестройками II. Но заметим, что в процессе доказательства перестройки II делались нами лишь с центрами в кривых L , которые лежали на компонентах V_j , кратности которых $r_j > \min_i r_i$. Покажем, что такая перестройка не может сделать поверхность V особой поверхностью. В обозначениях п. 4.3 поверхность V может стать особой поверхностью лишь в случае, когда поверхности V_3 и V_4 были ветвями компоненты V . Канонический класс $K_X = r_1 V_1 + r_2 V_2 + r_3 V_3 + r_4 V_4 + \dots$, $r_1 > \min_i r_i$, и канонический класс на поверхности V_1 равен

$$K_{V_1} = (r_3 - r_1 - 1)C_{13} + (r_4 - r_1 - 1)C_{14} + (r_2 - r_1 - 1)L + \dots$$

Имеем:

$$(L^2)_{V_1} = -1, \quad (L, K_{V_1})_{V_1} = -1,$$

следовательно, $r_2 + r_1 = r_3 + r_4$, что невозможно, так как $r_1 > r_3 = r_4 = \min_i r_i$.

Тем самым теорема I доказана

Поступило
14.II.1977

Литература

- ¹ Алгебраические поверхности, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 75, «Наука», 1965.
- ² Deligne P., Théorie de Hodge. II and III, Publ. Math. IHES, 40 (1971), 5—58 and 44 (1974), 5—77.
- ³ Griffiths P., Schmid W., Recent development in Hodge theory: a discussion of techniques and results. Proceedings of the International Colloquium on Discrete Subgroups of Lie Groups, Bombay, Oxford University Press, 1973.
- ⁴ Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B., Toroidal embeddings, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 339 (1973).
- ⁵ Кодaira К., О компактных аналитических поверхностях, «Математика», 6:6 (1962), 3—17.
- ⁶ Куликов В. С., Эпиморфность отображения периодов для поверхностей типа $K3$, Успехи матем. наук, т. 32, вып. 4 (1977).
- ⁷ Мамфорд Д., Абелевы многообразия, М., «Мир», 1971.
- ⁸ Nakano S., On the inverse of monoidal transformation, Publ. RIMS, Kyoto Univ., vol. 6, № 3 (1971), 483—502.
- ⁹ Steenbrink J., Limits of Hodge structures, Inv. math., 31 (1976), 229—257.
- ¹⁰ Хиронака Х., Разрешение особенностей алгебраических многообразий над полями характеристики нуль, «Математика», 9:6 (1965), 2—70.