ВЫРОЖДЕНИЯ К3 ПОВЕРХНОСТЕЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ЭНРИКВЕСА

Вик. С. Куликов

1. Пусть π: $X \to \Delta$ — вырождение К3 поверхностей или поверхностей Энриквеса, т. е. π — собственный морфизм гладкого многообразия $X/\mathbf{C}$, $\dim X = 3$, на единичный диск $\Delta = \{|t| < 1\}$, а слой $X_t = \pi^{-1}(t)$ при $t \neq 0$ есть неособая К3 поверхность $(K_{X_t} = 0,\ q = h^1(O_{X_t}) = 0)$ или поверхность Энриквеса $(K_{X_t} \neq 0,\ 2K_{X_t} = 0,\ q = 0)$ [1].

Вырождение π назовем хорошим, если слой $X_0 = \pi^{-1}(0) = V_1 + \ldots + V_n$ есть дивизор с нормальными пересечениями, а компоненты V_i неособы и входят в слой X_0 с кратностью один. π называется проективным, если π есть локализация проективного морфизма на проективную кривую. Вырождение π': $X' \to \Delta$ называется перестройкой вырождения π, если π и π' совпадают над $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. Вырождение π — слабопроективное, если π есть перестройка проективного вырождения (мы, кроме того, будем предполагать, что хорошего проективного).

Каждому вырождению π, у которого слой X_0 есть дивизор с нормальными пересечениями, сопоставим полиэдр $\Pi(X_0)$, вершинам которого соответствуют компоненты слоя X_0, ребрам — компоненты двойных кривых $C_{ij} = V_i \cap V_j$, двумерным граням — тройные точки вырождения $t_{ijk} = V_i \cap V_j \cap V_k$.

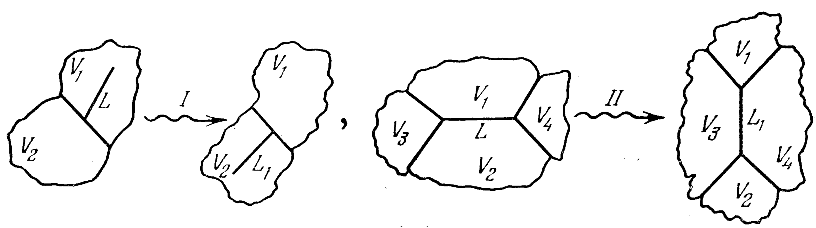
2. Лемма. *Пусть π: $X \to \Delta$ — вырождение К3 поверхностей $(m = 1)$ или поверхностей Энриквеса $(m = 2)$, а K_X — канонический класс многообразия X_n. Тогда mK_X составлен из компонент слоев, $mK_X = \sum_{i=1}^{n} r_i V_i$, $r_i \in \mathbf{Z}$.*

Если вырождение π — хорошее и все $r_i = r$ равны между собой, т. е. mK_X составлен из целых слоев, то m-канонический класс можно считать тривиальным, т. е. $mK_X = 0$.

3. Теорема. *Пусть π: $X \to \Delta$ — хорошее проективное вырождение поверхностей К3 или Энриквеса. Тогда существует перестройка π': $X' \to \Delta$ такая, что: 1) π' — хорошее, 2) $mK_{X'}$ тривиален.*

4. План доказательства. Пусть $mK_X = r_1V_1 + \ldots + r_nV_n$, $r = \min r_i$, а k — число компонент V_i таких, что $r_i > r$. Вырождение π' получается последовательностью перестроек π_i: $X^{(i)} \to \Delta$, при которых одна компонента V_i стягивается на кривую или в точку (образ дивизора при бимероморфном отображении корректно определен), а новых компонент не появляется. На каждом шаге $i = 1, \ldots, k$ выбирается одна из компонент V_i, которая будет стягиваться.

Важную роль при выполнении этих перестроек играют стандартные перестройки I и II. Перестройка I состоит в перекидывании исключительной кривой I рода на соседнюю компоненту, а перестройка II стягивает двойную кривую L, которая есть исключительная кривая I рода на каждой из компонент и на которой лежат две тройных точки (и раздувает тройные точки на L на соседних компонентах):



Компоненты V_3 и V_4 могут оказаться ветвями одной и той же компоненты и поэтому при перестройке II компоненты слоя могут приобрести двойные кривые самопересечения и стать особыми.

Поверхность V_i, которая стягивается на i-м шаге, является линейчатой, но может быть не минимальной. Перестройками I и II добиваемся того, что двойные кривые на V_i состоят из одного сечения S_i и компонент слоев линейчатой поверхности V_i. Если бы V_i была минимальной, то V_i стягивалась бы на S_i. Такое стягивание существует, если выкинуть не минимальные слои [2]—это локальное стягивание. Последовательностью перестроек I и II и локальных стягиваний компонент, отличных от V_i, не минимальные слои на V_i можно сделать минимальными. Затем V_i можно стянуть на S_i, сделать обратные к локальным стягиваниям преобразования — локальные раздутия — в обратном порядке и тогда все (без V_i) можно склеить в $X^{(i+1)}$.

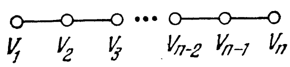
При промежуточных перестройках на $X^{(i)}$ могут появиться особенности: после перестроек II центры локальных раздутий могут приобрести особенности, раздувая эти центры, $X^{(i)}$ станет особым. Тем не менее после последней перестройки $X^{(k)}$ будет неособым и слой $X_0^{(k)}$ — дивизором с нормальными пересечениями, все компоненты которого неособы.

5. Замечание. Для поиска стягиваемой компоненты в доказательстве существенно используется то, что $h^1(X_t) = 0$. По-видимому, теорема верна и без этого условия для вырождений поверхностей с $mK_{X_t} = 0$ при некотором целом m.

6. Теорема. *Пусть* π: $X \to \Delta$ — *хорошее слабопроективное вырождение К3 поверхностей и пусть* K_X *тривиален. Тогда вырожденный слой этого вырождения может быть одного из трех типов.*

I. X_0 — *неособая К3 поверхность.*

II. $X_0 = V_1 + \ldots + V_n$. *Поверхности* V_1 *и* V_n — *рациональные,* $V_2, \ldots, V_{n-1}$ — *линейчатые эллиптические* ($q(V_i) = 1$). *Кривые* $V_1 \cap V_2, \ldots, V_{n-1} \cap V_n$ — *эллиптические. Полиэдр* $\Pi(X_0)$ *имеет вид*



III. $X_0 = V_1 + \ldots + V_n$. *Все* V_i — *рациональные поверхности, двойные кривые* C_{ij} *на каждой* V_i — *рациональные и образуют цикл.* $\Pi(X_0)$ *есть триангуляция сферы* S^2 *на треугольники.*

Эти три случая различаются с помощью монодромии T, *действующей на* $H^2(X_t, \mathbf{Z})$. *Пусть* $N = \ln T$, *тогда*: I. $N = 0$, *т. е.* $T = \mathrm{Id}$, II. $N \neq 0$, $N^2 = 0$, III. $N^2 \neq 0$, $N^3 = 0$.

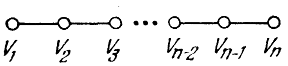
7. Примеры. Пусть F_t: $\mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}^1$ — пучок гиперповерхностей четвертой степени. Общий слой $F_t = 0$ — неособая квартика — К3 поверхность.

Если F_0 — две квадрики, соответственно четыре плоскости, общего положения, то, разрешая точки неопределенности, получим вырождение типа II, соответственно типа III.

8. Теорема. *Пусть* π: $X \to \Delta$ — *хорошее слабопроективное вырождение поверхностей Энриквеса, и пусть* $2K_X$ *тривиален. Тогда вырожденный слой* X_0 *может быть одного из трех типов*:

I. X_0 — *неособая поверхность Энриквеса.*

II. $X_0 = V_1 + \ldots + V_n$, V_1 — *рациональная поверхность, а* V_i *при* $i > 1$ — *линейчатые эллиптические поверхности. Двойные кривые* C_{ij} — *эллиптические кривые. Полиэдр* $\Pi(X_0)$ *имеет вид*



III. $X_0 = V_1 + \ldots + V_n$, *все* V_i — *рациональные поверхности. Двойные кривые* C_{ij} *на* V_i — *рациональные кривые и образуют цикл. Полиэдр* $\Pi(X_0)$ *есть триангуляция* $\mathbf{RP}^2$ *на треугольники.*

Причем во всех случаях монодромия T *тривиальна.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Р. Шафаревич и др., Алгебраические поверхности, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова 75, М., «Наука», 1965.

[2] S. Nakano, On the inverse of monoidal transformation, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 6:3 (1971), 483—502.

Поступило в Правление общества 26 ноября 1976 г.