ЭПИМОРФНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЯ ПЕРИОДОВ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА К3

Вик. С. Куликов

1. Пусть $V/\mathbf{C}$ — неособая алгебраическая поверхность типа К3, т. е. поверхность с тривиальным каноническим классом $K_V = 0$ и иррегулярностью $q = h^1(V, O_V) = 0$. Для поверхности V $H^2(V, \mathbf{Z})$ не имеет кручения и $rkH^2(V, \mathbf{Z}) = 22$.

Назовем евклидовой решеткой свободный модуль конечного ранга над $\mathbf{Z}$, в котором определена невырожденная билинейная форма со значениями в $\mathbf{Z}$. Евклидова решетка E — четная, если $x^2 \equiv 0(2)$ для всех $x \in E$, и унимодулярная, если ее определитель Грамма равен ± 1. Если V — поверхность типа К3, то $H_V = H_2(V, \mathbf{Z})$ — четная унимодулярная решетка и сигнатура квадратичной формы на $H_V \otimes \mathbf{R}$ равна (3, 19) [1]. Как известно [7], все такие решетки изоморфны. Зафиксируем такую решетку E и в ней вектор $l \in E$. Пусть $H = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(E, \mathbf{C}) = E^*$. Скалярному произведению в E соответствует скалярное произведение в H. Пусть

$$\mathbf{P}^{21} = \mathbf{P}(H) \supset K_{20} = \{\mathbf{C}\omega \in \mathbf{P}^{21}\colon \omega^2 = 0\} \quad \text{и} \quad K_{20}^0 = \{\mathbf{C}\omega\colon \omega\cdot\overline{\omega} > 0\}.$$

Элемент $l \in E$ определяет гиперплоскость $l = \{\mathbf{C}\omega \in \mathbf{P}^{21}\colon \omega(l) = 0\}$. Обозначим через $\check{D}_l = K_{20} \cap l$ и $D_l = K_{20}^0 \cap l$. Пусть $\widetilde{V} = (V, \varphi, \xi)$ — отмеченная К3 поверхность типа l [8], т. е. V — поверхность типа К3, $\varphi\colon H_2(V, \mathbf{Z}) \to E$ — изоморфизм решеток, $\xi \in H_V$ — класс, соответствующий очень обильному дивизору на V, такой, что $\varphi(\xi) = l$. Каждая отмеченная К3 поверхность типа l определяет точку $\tau(\widetilde{V}) \in D_l$ следующим образом. На поверхности типа К3 существует единственная с точностью до умножения на константу голоморфная форма $\omega \in H_V^{2,0} \subset H^2(V, \mathbf{C})$. Композиция

$$E \xrightarrow{\varphi^{-1}} H_V \xrightarrow{\omega} \mathbf{C}$$

определяет точку в $K_{20} \subset \mathbf{P}^{21} = \mathbf{P}(H)$; так как ξ — алгебраический класс, то $\omega(\xi) = 0$; следовательно, эта точка лежит в $D_l = K_{20}^0 \cap l$. Получаем отображение периодов τ из множества отмеченных К3 поверхностей типа l в D_l. Как доказано в [8], существует эффективно параметризованное семейство отмеченных К3 поверхностей типа l: $X \to S$, $\dim S = 19$, отображение периодов $\tau\colon S \to D_l$ однозначно и $\tau(S)$ есть открытое всюду плотное множество в D_l.

Цель этой заметки — доказать следующую теорему.

2. Теорема. *Для любой точки $x \in D_l$ существует такая отмеченная К3 поверхность $\widetilde{V}_x = (V_x, \varphi, \xi)$ типа l, что $\tau(\widetilde{V}_x) = x$. При этом класс $\xi \in H_2(V_x, \mathbf{Z})$ соответствует обильному по модулю «—2 кривых» классу дивизоров на V_x.*

3. Доказательство. Пусть V — отмеченная К3 поверхность типа l и $F = O_V(1)$ — очень обильный пучок, соответствующий классу $\xi \in H_2(V, \mathbf{Z})$. Пусть $P(k) = a_2k^2 + a_1k + a_0 = \chi(O(k))$ — многочлен Гильберта, а $\mathbf{P}^n \times T \subset Z \to T$ — схема Гильберта с многочленом Гильберта $P(k)$. Для открытого в T множества слои $Z_t \subset \mathbf{P}^n$ являются неособыми К3 поверхностями типа l. Итак, получаем семейство неособых отмеченных К3 поверхностей типа l, обозначим его снова через $Z \to T$, T — квазипроективное многообразие. Для этого семейства определено отображение периодов [3]

$$\Phi_T\colon T \to D_l/\Gamma_l,$$

где Γ_l — арифметическая группа преобразований E, сохраняющая квадратичную форму и оставляющая инвариантным вектор $l \in E$. Из [8] следует, что $\Phi_T(T)$ всюду плотно в D_l/Γ_l. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \overline{Z} & \supset & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{T} & \supset & T \end{array}$$

— компактификация семейства $Z \to T$ такая, что $\overline{Z}$ и $\overline{T}$ — проективные многообразия и $\bar{Z}\setminus Z$ и $\bar{T}\setminus T$ суть дивизоры с нормальными пересечениями (мы так всегда можем сделать согласно теореме Хиронаки, так как Z и T квазипроективны). Из [2] следует, что отображение периодов Φ_T: $T \to D_l/\Gamma_l$ продолжается до голоморфного отображения $\Phi_{\bar{T}}$: $\bar{T} \to \overline{D_l/\Gamma_l}$, где $\overline{D_l/\Gamma_l}$ — компактификация Бейли — Бореля пространства D_l/Γ_l; так как $\bar{T}$ компактно и $\Phi_T(T)$ всюду плотно в D_l/Γ_l, то $\Phi_{\bar{T}}$: $\bar{T} \to \overline{D_l/\Gamma_l}$ есть отображение на все $\overline{D_l/\Gamma_l}$. Пусть $\tilde{x}$ — образ точки x при отображении $D_l \to D_l/\Gamma_l$. Возьмем произвольную гладкую кривую $S \subset \bar{T}$, проходящую через точку $y \in \Phi_{\bar{T}}^{-1}(\tilde{x}) \subset \bar{T}$ и такую, что $S \not\subset \bar{T}\setminus T$. Пусть $\mathfrak{X} \to S$ — обратный образ семейства $\bar{Z} \to \bar{T}$ для вложения $S \subset \bar{T}$. Очевидно, ограничение отображения периодов Φ_T на $S \cap T$ совпадает с отображением периодов

$$\Phi_{S\cap T}\colon\ S\cap T \to D_l/\Gamma_l,$$

которое продолжается до голоморфного отображения

$$\Phi_S\colon\ S \to \overline{D_l/\Gamma_l},$$

причем $\Phi_S(y) = \tilde{x}$. Пусть $\Delta = \{|\,t\,| < 1\} \subset S$ — достаточно малая окрестность точки y, и пусть π: $X \to \Delta$ — ограничение семейства $\mathfrak{X} \to S$ на $\Delta \subset S$; так как $\Phi_S(y) = \tilde{x} \in D_l/\Gamma_l$, то, согласно теореме 4 из [4], монодромия T на $H_2(V, \mathbf{Z})$ для семейства π: $X\setminus X_0 \to \Delta\setminus\{0\}$ конечна, т. е. для некоторого натурального числа n $T^n = \mathrm{id}$. Делая, если надо, конечное накрытие базы и применяя теорему Мамфорда о полустабильной редукции [6], мы можем считать, что π: $X \to \Delta$ — хорошее проективное вырождение [5] и $T = \mathrm{id}$. Согласно теореме 3 из [5] существует такая перестройка π': $X' \to \Delta$ вырождения π: $X \to \Delta$, что π': $X' \to \Delta^-$ — хорошее слабопроективное вырождение и канонический класс $K_{X'}$ многообразия X' тривиален. Из теоремы 6 в [5] следует, что $\pi^{-1}(0) = X_0'$ — неособая К3 поверхность. Очевидно, периоды поверхности X_0' совпадают с $x \in D_l$. Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Р. Шафаревич и др., Алгебраические поверхности, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **75**, М., «Наука», 1965.

[2] W. L. Baily, Jr., and A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math. (2), **84** (1960), 442—528.

[3] P. Griffith, Periods of integrals on algebraic manifolds, I, II, Amer. J. Math. **90** (1968), 568—626.

[4] П. Гриффитс, Деформации комплексных структур, УМН **24**:4 (148) (1969).

[5] В. С. Куликов, Вырождения К3 поверхностей и поверхностей Энриквеса, УМН **32**:3 (1977).

[6] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal embeddings, I, Lecture Notes **339** (1973).

[7] Ж. П. Серр, Курс арифметики, М., «Мир», 1972.

[8] И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа К3, Изв. АН, сер. матем. **35** (1971), 530—572.

Поступило в Правление общества 26 ноября 1976 г.