СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 44, № 5, 1980

УДК 513.6

ВИК. С. КУЛИКОВ

О ПЕРЕСТРОЙКЕ ВЫРОЖДЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ С $\varkappa=0$

1. Цель данной статьи — обобщить основную теорему из ([1]) о перестройке проективных вырождений поверхностей типа $K3$ на случай вырождений поверхностей размерности Кодаиры $\varkappa=0$ (не обязательно алгебраических).

2. Пусть U и $\widetilde{U}$ — трехмерные комплексно-аналитические пространства. Будем говорить, что U и $\widetilde{U}$ связаны элементарным преобразованием, если существует σ-процесс $\sigma\colon \widetilde{U}\to U$ с центром в $L\subset U$, $\dim L\leqslant 1$, $L\not\subset \operatorname{Sing} U$, где $\operatorname{Sing} U$ — множество особых точек пространства U. Пространства U и $\widetilde{U}$ *σ-связаны*, если существует последовательность пространств $U_1, \ldots, U_p$ такая, что $U=U_1$, $\widetilde{U}=U_p$, пространства U_i и U_{i+1} связаны элементарным преобразованием $\sigma_i\colon U_i\to U_{i+1}$ или $\sigma_i\colon U_{i+1}\to U_i$. Пространство $\widetilde{X}$ назовем *элементарной перестройкой* пространства X, если существуют открытые покрытия $U_1\cup U_2=X$ и $\widetilde{U}_1\cup\widetilde{U}_2=\widetilde{X}$ такие, что U_1 и $\widetilde{U}_1$, U_2 и $\widetilde{U}_2$ σ-связаны. *Перестройка* — это композиция элементарных перестроек.

Вырождение $\pi_1\colon X^1\to\Delta$ называется перестройкой вырождения $\pi\colon X\to\Delta$, если X^1 является перестройкой пространства X и все σ_i определены над диском $\Delta=\{t\in\mathbf{C}\mid |t|<1\}$, а центры раздутий L_i лежат в вырожденном слое.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\pi\colon X\to\Delta$ — хорошее* ([1]) *вырождение поверхностей с тривиальным m-каноническим классом, $X_0=V_1+\cdots+V_n$ — вырожденный слой, и пусть m-канонический класс $mK_X\sim r_1V_1+\cdots+r_nV_n$. Кроме того, пусть*

а) $r_i\equiv r_j \bmod m$,

б) *если V_j — поверхность типа* VII_0 ([4]), *то* $r_j=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$.

Тогда существует такая перестройка $\pi_1\colon X^1\to\Delta$ вырождения π, что:

1. π_1 — *хорошее вырождение,*
2. mK_{X^1} *тривиален.*

В частном случае вырождений поверхностей с тривиальным каноническим классом имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1′. *Пусть $\pi\colon X\to\Delta$ — хорошее вырождение поверхностей с тривиальным каноническим классом, $X_0=V_1+\cdots+V_n$ — вырожденный слой, и пусть канонический класс $K_X\sim r_1V_1+\cdots+r_nV_n$. Перестройка $\pi_1\colon X^1\to\Delta$ вырождения π, удовлетворяющая условиям*

1. π_1 — *хорошее вырождение,*

2. K_{X^1} *тривиален,*

существует тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

б) *если* V_j — *поверхность типа* VII_0, *то* $r_j = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$.

3. В случае проективных вырождений поверхностей типа $K3$ теорема 1 была доказана в ([1]). Кроме того, доказательство существования перестройки вырождения поверхностей с тривиальным каноническим классом, вырожденный слой которого состоит из алгебраических компонент, недавно появилось в ([3]). Доказательство в ([3]) основано на идеях статьи ([1]) и отличается от ([1]) применением другой стратегии стягивания компонент вырожденного слоя, входящих в K_X с неминимальными кратностями r_i.

В этой статье мы покажем, как надо изменить доказательство в ([1]) (и одновременно упростить его), чтобы получить сформулированные выше теоремы. За всеми определениями и обозначениями мы отсылаем читателя к статье ([1]).

4. Необходимость условия б) теорем для существования перестройки очевидна и следует из свойств σ-процесса.

5. Напомним, что доказательство теоремы в ([1]) проводилось индукцией по числу компонент слоя X_0, входящих в K_X с кратностью, больше минимальной. На каждом шаге мы искали компоненту V, нормализация $\overline{V}$ которой (быть может, после перестроек I и II ([1])) есть линейчатая поверхность, а множество двойных кривых на $\overline{V}$ связно и состоит из одного сечения и компонент слоев. Затем эту компоненту стягивали. Заметим, что в процессе стягивания компоненты V мы вообще не использовали того, что π — проективное вырождение поверхностей типа $K3$. Мы использовали это только для поиска стягиваемой компоненты и при этом учитывали лишь следующие три факта, вытекающие из того, что π есть проективное вырождение поверхностей типа $K3$:

1. Канонический класс K_X содержит дивизор $r_1V_1+\cdots+r_nV_n$. Это следствие тривиальности канонического класса на поверхностях типа $K3$.

2. $h^1(\Pi(X_0))=0$, где $\Pi(X_0)$ — полиэдр вырождения.

3. Если V_j — компонента слоя X_0, входящая в K_X с максимальной кратностью (причем r_j — строгий локальный максимум), то V_j — линейчатая поверхность или $V_j\simeq\mathbf{P}^2$.

6. Та часть доказательства теоремы в ([1]), в которой используется тривиальность канонического класса на поверхностях типа $K3$, практически без изменения переносится на случай вырождений поверхностей с тривиальным m-каноническим классом. Мы должны лишь всюду вместо канонического класса рассматривать m-канонический класс. Именно, все утверждения из § 2 в ([1]), касающиеся канонического дивизора N, остаются справедливыми для дивизора N такого, что $N'=mN$ есть m-канонический дивизор. Эти утверждения применялись в ([1]) к дивизору N_i на линейчатой поверхности V_i, равному

$$N_i = (K_X + V_i)\cdot V_i = \sum_{j\neq i}(r_j - r_i - 1)\,C_{i,j}, \tag{1}$$

где $C_{i,j}=V_i\cap V_j$ — двойные кривые на поверхности V_i. Теперь m-канонический дивизор

$$N_i' = (mK_X + mV_i)\cdot V_i = \sum_{j\neq i}(r_j - r_i - m)\,C_{i,j} \tag{2}$$

кратен дивизору N_i, $N_i'=mN_i$, так как $r_j-r_i\equiv 0 \bmod m$, и утверждения § 2 справедливы для дивизора N_i. Поэтому все утверждения из ([1]) о взаимном расположении двойных кривых на линейчатых поверхностях V_i слоя X_0 без изменения переносятся на случай вырождений поверхностей с тривиальным m-каноническим классом.

7. Отметим, что условие $h^1(\Pi(X_0))=0$ использовалось для поиска среди компонент V_i, удовлетворяющих условию:

($*$) *на нормализации $\overline{V}_i$ имеется линейчатая структура и относительно этой структуры множество двойных кривых на $\overline{V}_i$ состоит из одного сечения и компонент слоев,*

компоненты V_{i_0} со связным множеством двойных кривых. При поиске компоненты V_i, удовлетворяющей условию ($*$), не использовалось условие $h^1(\Pi(X_0))=0$. В том месте доказательства мы использовали только линейчатость компонент, которые входят в K_X с максимальной кратностью. Из формулы (2) следует, что такие компоненты имеют размерность Кодаиры $\varkappa=-1$, а из классификации поверхностей и условия б) теоремы следует, что они должны быть линейчатыми поверхностями.

8. Покажем, как надо изменить доказательство в ([1]), чтобы в нем не использовалось условие $h^1(\Pi(X_0))=0$.

Во-первых, не нужно вводить понятие отмеченной компоненты, разбивать полиэдр $\Pi(X_0)$ на компоненты $K_1, \ldots, K_s$ и выбирать среди них компоненту K_1, из которой нет выхода (т. е. п.п. 4.8.1—4.8.4 и п. 4.16.1 в ([1]) являются лишними). Именно для поиска такой компоненты K_1 и использовалось условие $h^1(\Pi(X_0))=0$.

Надо сразу найти компоненту V_1 слоя X_0, удовлетворяющую условию ($*$). Если m-канонический класс вырождения не тривиален, то такая компонента существует. Будем стягивать эту компоненту V_1.

Если кратность r_1, с которой V_1 входит в m-канонический класс вырождения, максимальна, то множество двойных кривых на V_1 связно (лемма 2.19 § 2 ([1])) и мы можем стянуть V_1 на ее сечение так же, как это делается в ([1]).

Пусть выбранная нами V_1 входит в m-канонический класс вырождения с немаксимальной кратностью. Если V_1 не пересекается с особым множеством O_i (п. 4.11.2 в ([1])), то вначале раздуем несколько кривых — компонент слоев на V_1 для того, чтобы множество двойных кривых на V_1 стало связным. А если V_1 является последней локально раздувавшейся компонентой, то раздувать компоненты слоев на V_1, не являющиеся двойными кривыми, мы будем не на X', а в открытых множествах U^p (см. п. 4.14.5). После таких раздутий W^p не изменится и мы можем восстановить вырождение, в котором компонента V_1 уже имеет связное множество двойных кривых. После таких раздутий вклеятся линейчатые поверхности, которые будут входить в m-канонический класс вырождения с кратностью r_1+m, где r_1 — кратность, с которой V_1 входит в m-канонический класс вырождения. Будем считать эти вклеенные компоненты также *старыми*. После всех таких раздутий мы можем стянуть V_1 на свое сечение.

9. Для завершения доказательства рассмотрим следующую игру. Пусть мы имеем «*колоду*», состоящую из конечного числа *карточек*, на которых написаны числа, сравнимые между собой по модулю m, и пусть R — максимум этих чисел, а r — минимум. На каждом шаге игры мы выбираем карточку K_i из «колоды» с числом $r_i>r$ и поступаем с ней следующим образом:

а) если $r_i=R$, то мы просто выкидываем карточку K_i из «колоды»,

б) если $r_i<R$, то мы выкидываем карточку K_i из «колоды» и добавляем в «колоду» конечное число карточек с числами, равными r_i+m.

Утверждение. *Описанная выше игра конечна, т. е. после конечного числа шагов игры в «колоде» останутся лишь карточки с числами, равными r.*

10. Сопоставим старым компонентам вырожденного слоя карточки из «колоды» с числами, равными кратностям, с которыми эти компоненты входят в m-канонический класс вырождения. Применяя утверждение, получим, что после конечного числа шагов (перестроек) мы придем к вырождению, у которого кратности, с которыми компоненты вырожденного слоя входят в m-канонический класс вырождения, равны между собой. А это и означает, что m-канонический класс такого вырождения тривиален. Доказательство того, что в итоге получилось хорошее вырождение, переносится из ([1]) без изменения.

11. Дополнение. Исправления к статье ([1]). Пользуясь случаем, хочу исправить неточности моей статьи ([1]).

Часть теоремы 1, касающаяся вырождений поверхностей Энриквеса, в том виде, как она сформулирована в ([1]), неверна (см. пример вырождений поверхностей Энриквеса в ([2])). На самом деле в ([1]) доказана часть теоремы 1 настоящей статьи в случае вырождений поверхностей Энриквеса.

В формулировке леммы 2.18 пропущен случай 7б) $N=S+R$, где S — 2-сечение, а R — слой.

В п. 4.13 после предложения, заканчивающегося на 20 строке снизу (стр. 1036), пропущено предложение: «Кроме того, будем считать, что $\sigma^{-1}(O_i)$ является дивизором для любого $i>0$».

На стр. 1036 в 18 строке снизу слово «новую» является лишним.

В формулировке леммы 4.14 на стр. 1036 в последней строке перед словом «компонент» пропущено слово «старых».

Поступило
29.I.1980

Литература

1. **Куликов В. С.**, Вырождения поверхностей типа $K3$ и поверхностей Энриквеса, Изв. АН СССР. Сер. матем., 41 (1977), 1008—1042.
2. **Persson V.**, On degeneration of algebraic surfaces, Memoirs Amer. Math. Soc., 189 (1977), 123—124.
3. **Persson V.** and **Pinkham H.**, Degenerations of surfaces with trivial canonical bundle, Proceedings of the Angers «Journées de géométrie Algébrique», 1979.
4. **Kodaira K.**, On the structure of compact complex analytic surfaces, Amer. Journal of Math., vol. 86 (1964), 751—798, vol. 88 (1966), 682—721, vol. 90 (1968), 55—83, 1048—1065.