

УДК 513.6

КУЛИКОВ ВИК. С.

РАЗЛОЖЕНИЕ БИРАЦИОНАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ВНЕ КОРАЗМЕРНОСТИ 2

Пусть $f: X \dashrightarrow Y$ — бирациональное отображение неособых полных алгебраических многообразий над полем k . Одной из важных проблем бирациональной геометрии является проблема о разложении f в произведение моноидальных преобразований с неособыми центрами (σ -процессов) и обратных к ним:

Существуют ли неособое полное многообразие Z и морфизмы η и τ , являющиеся произведениями σ -процессов и такие, что коммутативна диаграмма

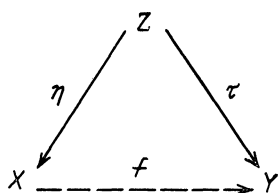


Рис. 1

В более слабой форме речь идет о разложимости f в произведение чередующихся композиций σ -процессов и обратных к ним.

В случае поверхностей положительное решение этой проблемы дает известная теорема Зарисского. В случае $\dim X > 2$ имеются некоторые частные решения этой проблемы (см. [1], [2], [3], [4]). Цель этой работы — доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если $f: X \dashrightarrow Y$ — бирациональное отображение неособых трехмерных проективных многообразий над алгебраически замкнутым полем k , $\text{char } k = 0$, то существуют морфизмы η и τ , являющиеся композициями σ -процессов*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \eta \downarrow & & \downarrow \tau \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

и такие, что бирациональные отображения $\tilde{f}$ и $\tilde{f}^{-1}$ являются изоморфизмами вне коразмерности 2 (не стягивают дивизоров) и множества их неопределенности состоят из объединений неособых рациональных кривых, пересекающихся трансверсально друг с другом.

Трансверсально пересекающиеся кривые в теореме 1 — это кривые $C_1 \subset X$ и $C_2 \subset X$ такие, что в любой точке $x \in C_1 \cap C_2$ размерность пересече-

ния касательных пространств

$$\dim(T_x(C_1) \cap T_x(C_2)) = 0.$$

Кроме того, в этой статье будет доказана теорема о том, что бирациональный морфизм трехмерных многообразий можно перестроить так, что обратное отображение полученного морфизма не определено лишь в изолированных точках.

ТЕОРЕМА 2.* Пусть $f: X \rightarrow Y$ — собственный бирациональный морфизм неособых алгебраических трехмерных многообразий над алгебраически замкнутым полем k , $\text{char } k = 0$, и пусть Y квазипроективно. Тогда существуют неособое многообразие Z и морфизм $g: Z \rightarrow Y$ такие, что:

- а) $g^{-1} \circ f$ — композиция σ -процессов и обратных к ним отображений,
- б) g^{-1} не определено лишь в изолированных точках.

Доказательство теоремы 2, основанное на технике перестроек I и II, разработанных в [5], будет изложено в § 4.

Несколько слов об обозначениях. Ниже буквами η и τ будут обозначаться композиции σ -процессов.

Если $f: X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение и $\eta: \tilde{X} \rightarrow X$, $\tau: \tilde{Y} \rightarrow Y$ — композиции σ -процессов, то $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ обозначает композицию $\tilde{f} = \tau^{-1} \circ f \circ \eta$, и если η — композиция p σ -процессов, а τ — композиция q σ -процессов, то отображение $\tilde{f}$ будем обозначать через $f_{p,q}$.

Для дивизора $D \subset X$ и кривой $C \subset X$ $(D, C)_x$ обозначает индекс пересечения дивизора D и кривой C в точке x .

$v_x(D)$ — кратность дивизора D в точке x .

m_x — максимальный идеал ростков регулярных функций в точке x , обращающихся в 0 в этой точке.

Автор выражает благодарность В. И. Данилову за полезные обсуждения результатов этой работы.

§ 1. Идея и план доказательства теоремы 1

1.1. Исключительный дивизор E_f . Пусть $f: X \dashrightarrow Y$ — бирациональное отображение неособых полных многообразий. Обозначим через $U_f \subset X$ и $U_{f^{-1}} \subset Y$ максимальные открытые подмножества в X и Y , на которых f , соответственно f^{-1} , являются морфизмами. Так как X и Y — полные многообразия, то замкнутые подмногообразия $S_f = X \setminus U_f$ и $S_{f^{-1}} = Y \setminus U_{f^{-1}}$, в которых f , соответственно f^{-1} , не определены, имеют коразмерность ≥ 2 . Поэтому имеет смысл говорить об образе $f(E) \subset Y$ подмногообразия $E \subset X$, $\text{codim}_x E = 1$, а именно, $f(E) = \overline{f(E \cap U_f)}$ (черта обозначает замыкание).

Пусть $E_f = \bigcup E_i$ — объединение тех неприводимых подмногообразий E_i в X , $\text{codim}_x E_i = 1$, для которых $\text{codim}_x f(E_i) \geq 2$. Тогда, очевидно, $f(E_i) \subset S_{f^{-1}}$. Для дальнейшего очень существенным обстоятельством является то, что если f — морфизм, то E_f можно рассматривать как дивизор, т. е. компонентам E_i естественным образом приписываются кратности.

* В. Сгаудер сообщил автору, что им также получен аналогичный результат.

Определение. Пусть f — бирациональный морфизм. Назовем исключительным дивизором морфизма f дивизор

$$E_f = (f^*\omega) - f^*((\omega)),$$

где ω — любая рациональная n -форма на Y ($\dim Y = n$), а (ω) — дивизор этой формы.

Легко видеть, что E_f не зависит от выбора формы ω , $E_f \geq 0$, $\text{Supp } E_f = \bigcup E_i$.

Свойства дивизора E_f .

1_E) Если $\sigma: X_1 \rightarrow X$ — σ -процесс с центром в B , $\text{codim}_X B = r$, то $E_\sigma = (r-1)E$, где $E = \sigma^{-1}(B)$.

2_E) Для композиции $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$$E_{g \circ f} = E_f + f^*E_g.$$

3_E) Если $E \subset E_f$ и $\text{codim}_X f(E) = r$, то ([1]) кратность E в E_f больше или равна $r-1$.

Из 2_E) и 3_E) следует

4_E) Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} E \subset E_h \subset X & \xrightarrow{f} & Y \supset f(E) \ni y \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ & Z & \end{array}$$

h и g — бирациональные морфизмы неособых многообразий, и пусть E — компонента дивизора E_h , $\text{codim}_X f(E) = r$. Тогда кратность E в E_h больше или равна $v_y(E_g) + r - 1$ для общей точки $y \in f(E)$.

1.2. Редукция к случаю бирационального отображения расслоений на поверхности. С технической точки зрения удобно и можно считать, что отображение $f: X \rightarrow Y$ включено в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \psi \searrow & & \swarrow \varphi \\ & Z & \\ & \downarrow g & \\ & \mathbf{P}^1 & \end{array} \quad (\Upsilon)$$

где ψ и φ — бирациональные морфизмы на неособое проективное многообразие Z , расслоенное на поверхности над проективной прямой $\mathbf{P}^1$. Действительно, для произвольного f возьмем любое отображение $\bar{g}: Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ и разрешим его точки неопределенности последовательно σ -процессами $\tau: \tilde{Y} \rightarrow Y$, а затем разрешим точки неопределенности отображения $\tau^{-1} \circ f$, $\tilde{f}: \tilde{X} \xrightarrow{\eta} X \xrightarrow{\tau^{-1} \circ f} \tilde{Y}$. Получаем:

$$\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{Y} \xrightarrow{g} \mathbf{P}^1,$$

а это и есть диаграмма вида (Υ) , в которой $\varphi = \text{id}$.

Определим исключительные дивизоры $E(f) \subset E_\psi$ и $E(f^{-1}) \subset E_\psi$. Пусть $E_\psi = \sum_{i \in I} r_i E_i$ и $E_\psi = \sum_{j \in J} s_j E'_j$, и пусть

$$I' = \{i \in I \mid \text{codim}_Y f(E_i) \geq 2\}, \\ J' = \{j \in J \mid \text{codim}_X f^{-1}(E'_j) \geq 2\}.$$

Положим

$$E(f) = \sum_{i \in I'} r_i E_i, \quad E(f^{-1}) = \sum_{j \in J'} s_j E'_j.$$

1.3. Для доказательства первого утверждения теоремы 1 достаточно доказать, что существуют такие $\eta: \tilde{X} \rightarrow X$ и $\tau: \tilde{Y} \rightarrow Y$, что $\tilde{f}$ и $\tilde{f}^{-1}$ не имеют исключительных дивизоров, т. е. $E(\tilde{f}) = 0$ и $E(\tilde{f}^{-1}) = 0$. Тогда $\tilde{f}$ и $\tilde{f}^{-1}$ ничего не стягивают в коразмерности 1 и поэтому являются изоморфизмами вне коразмерности 2. Для доказательства достаточно показать существование таких η и τ , что исключительные дивизоры

$$E(\tilde{f}) = \sum_{i \in \tilde{I}'} \tilde{r}_i \tilde{E}_i \quad \text{и} \quad E(\tilde{f}^{-1}) = \sum_{j \in \tilde{J}'} \tilde{s}_j \tilde{E}'_j$$

удовлетворяют следующему условию:

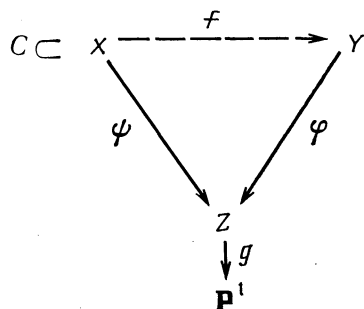
$$*) \quad \tilde{m} = \max_{i \in \tilde{I}', j \in \tilde{J}'} \{\tilde{r}_i, \tilde{s}_j\} \leq m = \max_{i \in I', j \in J'} \{r_i, s_j\}$$

и число компонент, входящих в $E(\tilde{f})$ и $E(\tilde{f}^{-1})$ с кратностью $\tilde{m}$, строго меньше числа компонент в $E(f)$ и $E(f^{-1})$ с кратностями m .

1.4. Моноидальные преобразования, не меняющие числа и кратности компонент, входящих в дивизоры $E(f)$ и $E(f^{-1})$. Пусть L — кривая на X , $L \not\subset S_f$ и $L \not\subset E(f)$, тогда отображение f индуцирует бирациональный морфизм $S_L: (L \cap U_f) \rightarrow f(L \cap U_f)$. Обозначим замыкание $\tilde{f}(L \cap U_f)$ в Y через M . Пусть L и M — неособые кривые. Сделаем σ -процессы с центрами в кривых L и M : $\eta: \tilde{X} \rightarrow X$, $\tau: \tilde{Y} \rightarrow Y$. Тогда $E(\tilde{f})$ совпадает с собственным прообразом $\eta^{-1}(E(f))$ дивизора $E(f)$ и $E(\tilde{f}^{-1})$ совпадает с $\tau^{-1}(E(f^{-1}))$, так как в общих точках дивизоров $\eta^{-1}(L)$ и $\tau^{-1}(M)$ отображения $\tilde{f}$ и $\tilde{f}^{-1}$ являются изоморфизмами, т. е. такие моноидальные преобразования не меняют числа компонент и их кратности, с которыми эти компоненты входят в исключительные дивизоры $E(f)$ и $E(f^{-1})$. Назовем такую пару σ -процессов η и τ *E-стабильными σ -процессами*.

1.5. Построение отображений η и τ , удовлетворяющих условию *), основано на следующей теореме о разрешении особых точек кривой, доказательство которой приведено в §§ 2 и 3.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в коммутативной диаграмме



ψ и φ — бирациональные морфизмы проективных трехмерных неособых многообразий, g — морфизм на $\mathbb{P}^1$, а C — кривая на X . Тогда существуют морфизмы $\eta: \tilde{X} \rightarrow X$ и $\tau: \tilde{Y} \rightarrow Y$, являющиеся последовательностями E -стабильных σ -процессов с центрами в кривых, такие, что собственный прообраз $\eta^{-1}(C)$ кривой C является неособой кривой.

1.6. Покажем, как из теоремы 3 следует доказательство первого утверждения теоремы 1. Пусть поверхность E_1 входит в $E(f)$ с максимальной кратностью $r_1 = m$. Образ $f(E_1) = C_1$ является либо кривой, либо точкой. По теореме 3, сделав, если надо, несколько E -стабильных σ -процессов на X и Y с центрами в кривых, мы можем считать, что C_1 — неособое подмногообразие в Y . Поэтому мы можем сделать моноидальное преобразование $\tau_1: Y_1 \rightarrow Y$ с неособым центром C_1 . По свойству 4_E) кратность s дивизора E_φ в общей точке подмногообразия C_1 меньше или равна $r_1 - \text{codim}_Y C_1 - 1 > s$. По свойствам 1_E) и 2_E) кратность t поверхности $E = \tau_1^{-1}(C_1)$ в дивизоре $E_{\varphi \circ \tau_1}$ равна $t = s + \text{codim}_Y C_1 - 1 > s$ и образ $C_2 = (\tau_1^{-1} \circ f)(E_1) \subset E$. Поэтому кратность дивизора $E_{\varphi \circ \tau_1}$ в общей точке подмногообразия C_2 больше или равна t , но меньше или равна $r_1 = m$ и эта кратность равна r_1 тогда и только тогда, когда $r_1 = t$ и в этом случае $C_2 = E$. Следовательно, сделав конечное число моноидальных преобразований $\tau: \tilde{Y} \rightarrow Y$ с центрами в образе поверхности E_1 , мы добьемся того, что E_1 будет отображаться на поверхность (как только r_1 станет равна t). Поэтому E_1 и $\tilde{f}(E_1)$ уже не будут входить в исключительные дивизоры $E(\tilde{f})$ и $E(\tilde{f}^{-1})$ соответственно, кроме того, в дивизоры $E(\tilde{f})$ и $E(\tilde{f}^{-1})$ не будут входить исключительные компоненты E -стабильных σ -процессов, которые мы делали на X и Y , чтобы разрешить особые точки кривых — образов поверхности E_1 . Кратности всех остальных компонент дивизора E_τ , с которыми эти компоненты входят в $E(\tilde{f}^{-1})$, будут строго меньше $r_1 = m$. Тем самым существование η и τ , удовлетворяющих условию *), доказано.

1.7. Докажем теперь, что существуют такие $\eta: \tilde{X} \rightarrow X$ и $\tau: \tilde{Y} \rightarrow Y$, что $S_{\tilde{f}}$ и $S_{\tilde{f}^{-1}}$ состоят из неособых кривых, пересекающихся трансверсально друг с другом.

Пусть $\eta_1: X_1 \rightarrow X$ — моноидальное преобразование с центром в неособой кривой $L \subset X$, $L \not\subset S_f$. Тогда подмногообразие $S_{f \circ \eta_1}$ в X_1 точек неопределенности отображения $f \circ \eta_1$ состоит из собственного прообраза $\eta_1^{-1}(S_f)$ и конечного числа слоев морфизма η_1 — неособых рациональных кривых. Поэтому по теореме 3 существуют такие η и τ , что $S_{\tilde{f}}$ и $S_{\tilde{f}^{-1}}$ составлены из неособых кривых.

Докажем утверждение о трансверсальности пересечения. Пусть $\eta_1: X_1 \rightarrow X$ — σ -процесс с центром в неособой кривой L , $L \not\subset S_f$, и пусть $C \subset X$ — неособая кривая и $x \in L \cap C$. Тогда, как легко видеть, кривая $\eta_1^{-1}(x)$ трансверсально пересекается с собственным прообразом $\eta_1^{-1}(C)$ кривой C . Применяя еще раз теорему 3 к кривым S_f и $S_{f^{-1}}$, получим, что существуют такие $\eta: \tilde{X} \rightarrow X$ и $\tau: \tilde{Y} \rightarrow Y$, что $S_{\tilde{f}}$ и $S_{\tilde{f}^{-1}}$ состоят из неособых кривых, пересекающихся трансверсально друг с другом.

1.8. Завершает доказательство теоремы 1 следующая

ЛЕММА. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — бирациональное отображение трех-

мерных неособых полных многообразий такое, что $E(f^{-1})=0$. Тогда S_f является объединением рациональных кривых.

Доказательство. Пусть Γ — график f , и пусть p_1 и

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ & \cap & \\ \text{pr}_1 \downarrow & X \times_k Y & \downarrow \text{pr}_2 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

p_2 — ограничение проекций pr_1 и pr_2 на Γ .

Покажем сначала, что $P \in S_f$ не может быть изолированной точкой S_f . Действительно, если P — изолированная точка, то $\dim p_2(p_1^{-1}(P)) \leq 1$, так как $E(f^{-1})=0$. Следовательно, $\dim p_1^{-1}(P) \leq 1$, так как $p_1^{-1}(P) \subset P \times_k p_2(p_1^{-1}(P))$. Но X — неособое многообразие, а p_1 — такой бирациональный морфизм, что p_1^{-1} регулярен в $V \setminus P$, где V — некоторая окрестность точки P . Следовательно (теорема 2 на стр. 148 в [8]), p_1^{-1} регулярен в точке P , а значит, и $f = p_2 \circ p_1^{-1}$ регулярен в точке P .

Пусть $C \subset S_f$ — кривая на X . Тогда $\dim p_1^{-1}(C) = 2$, так как иначе в общей точке $\xi \in C$ отображение p_1^{-1} определено ([8]) и $C \not\subset S_f$. Пусть $V \subset p_1^{-1}(C)$ — неприводимая компонента, отображающаяся на C . Легко видеть, что $p_1: V \rightarrow C$ — линейчатая поверхность, т. е. общий слой $p_1^{-1}(\xi)$ является рациональной (может быть особой) кривой. С другой стороны, $p_2(V)$ — кривая ($p_2(V)$ не может быть точкой Q , так как иначе поверхность V содержится в кривой $C \times_k Q$, и $p_2(V)$ не может быть поверхностью, так как $E(f^{-1})=0$), а $p_2: V \rightarrow p_2(V)$ — линейчатая поверхность. Следовательно, V имеет две различные структуры линейчатой поверхности, поэтому V бирационально изоморфна $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и, следовательно, C — рациональная кривая.

§ 2. Существование кривой с заданными особенностями

Доказательство теоремы 3 будет использовать теорему о существовании кривой с заданными особенностями.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — бирациональный морфизм неособых проективных трехмерных многообразий над алгебраически замкнутым полем k , $\text{char } k = 0$. Пусть x — замкнутая точка в X и $v \in T_x(X)$ — касательный вектор, $v \neq 0$. Тогда существует такая кривая $\gamma \subset X$, что

- i) $E_f \cap \gamma = x$ или пусто,
- ii) γ неособа в точке x и направление кривой γ в x совпадает с v .

Доказательство. В доказательстве теоремы 4 важную роль играют следующие леммы.

2.1. ЛЕММА. Пусть Z — неособое многообразие, $\dim Z = 3$, и z — особая точка кривой $C \subset Z$. Тогда существует последовательность σ -процессов с центрами в кривых, разрешающая особую точку кривой C . Более того, центр каждого σ -процесса может быть выбран почти произвольно: этот центр должен быть трансверсален к конечному числу поверхностей.

2.2. ЛЕММА. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — бирациональный морфизм неособых многообразий, $\dim Y = 3$, исключительный дивизор которого $E_f = \sum r_i E_i$, и пусть $f(E_i) = y$ — замкнутая точка на Y . Пусть $\tau_i: Y_i \rightarrow Y_{i-1}$ — σ -процес-

сы с центрами в кривых $L_i \subset Y_{i-1}$ ($Y_0 = Y$) таких, что $L_i \cap f_{0, i-1}(E_1) \neq \emptyset$. Тогда $\dim f_{0, r_1}(E_1) \geq 1$.

2.3. Доказательство леммы 2.1 основано на следующих хорошо известных фактах.

2.3.1. Если кривая C лежит на неособой поверхности S , то σ -процессы на S с центрами в особых точках кривой C разрешают эти особые точки.

2.3.2. Моноидальное преобразование с центром в неособой кривой L , трансверсально пересекающей неособую поверхность S , индуцирует на S σ -процесс с центром в $L \cap S$.

2.3.3. В формальной окрестности $V = \text{спес } k[[z_1, z_2, z_3]]$ для любой неприводимой кривой $C \subset V$ существует неособая поверхность $S = \{y_1 = 0\}$ такая, что если y_1, y_2, y_3 — координаты на V , то проекция $\pi: V \rightarrow \text{спес } k[[y_2, y_3]] \simeq S$ индуцирует бирациональный морфизм $\pi: C \rightarrow \pi(C)$. Если $\pi(C)$ — неособая кривая, то C — неособая кривая.

2.3.4. Пусть $\tau: V_1 \rightarrow V = \text{спес } k[[y_1, y_2, y_3]]$ — σ -процесс с центром в кривой $L = \{y_2 = y_3 = 0\}$, а $\sigma: S_1 \rightarrow S = \text{спес } k[[y_2, y_3]]$ — σ -процесс с центром в точке $\{y_2 = y_3 = 0\}$. Тогда существует изоморфизм $\phi_1: V_1 \rightarrow L \times S_1$ такой, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\phi_1} & L \times S_1 \\ \tau \downarrow & & \downarrow \text{id} \times \sigma \\ V & \xrightarrow{\phi} & L \times S \end{array}$$

где ϕ — естественный изоморфизм $V \simeq \text{спес } k[[y_1]] \times \text{спес } k[[y_2, y_3]]$.

Детали доказательства леммы 2.1 мы опускаем.

2.4. Доказательство леммы 2.2. Обозначим через τ композицию σ -процессов τ_i , $E_\tau = \sum a_i E_{\tau_i}$. Если $f_{0, r_1}(E_1) = y_{r_1} \in Y_{r_1}$ — замкнутая точка на Y_{r_1} , то $f_{0, r_1}(E_1) \in \bigcap_{i=1}^{r_1} E_{\tau_i}$, так как в этом случае для любого i $f_{0, i}(E_1) \in L_{i+1}$ — центру $i+1$ -ого раздутья. Следовательно, кратность дивизора E_τ в точке y_{r_1} больше или равна r_1 , но r_1 — кратность поверхности E_1 в дивизоре E_f , и мы получаем противоречие со свойством 4_Б).

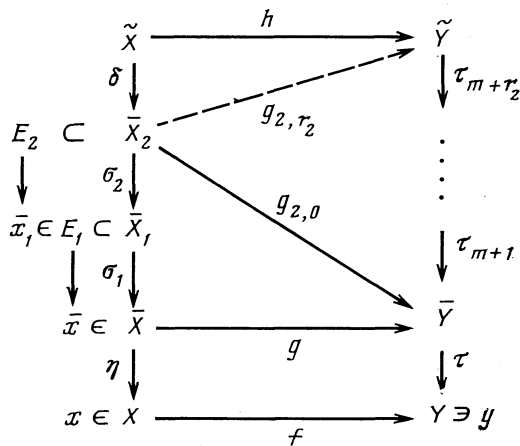
2.5. Вернемся к доказательству теоремы 4. Пусть γ_1 — какая-либо кривая, удовлетворяющая условию ii) теоремы, и пусть $C_1 = f(\gamma_1)$. Согласно лемме 2.1 существует последовательность σ -процессов

$$\tau: \bar{Y} = Y_m \xrightarrow{\tau_m} Y_{m-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{\tau_1} Y_0 = Y$$

с центрами в кривых $L_i \subset Y_{i-1}$, разрешающая особую точку $y = f(x)$ кривой C_1 . Так как Y проективно, то $\bar{Y}$ — также проективное многообразие и, кроме того, мы можем считать, что $S^{\tau^{-1}} \cap S_{j-1} = x$ или пусто. Пусть $\eta: \bar{X} \rightarrow X$ — разрешение неопределенностей отображения $\tau^{-1} \circ f = f_{0, m}$ (η — композиция σ -процессов). Обозначим через $\bar{\gamma}_1 = \eta^{-1}(\gamma_1) \subset \bar{X}$ собственный прообраз кривой γ_1 , через $\bar{C}_1 = \tau^{-1}(C_1)$ — собственный прообраз кривой C_1 , и пусть $g = \tau^{-1} \circ f \circ \eta$. Пусть $\bar{x} = \eta_{\gamma_1}^{-1}(x) \in \bar{\gamma}_1 \subset \bar{X}$ и $\bar{y} \in g(\bar{x}) \in \bar{C}_1 \subset \bar{Y}$, где $\eta_{\gamma_1} = \eta|_{\gamma_1}$.

Для доказательства теоремы сделаем еще несколько моноидальных преобразований с неособыми центрами. Изобразим эти моноидальные

преобразования на следующей коммутативной диаграмме.



где:

1) $\sigma_1: \bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}$ — σ -процесс с центром в $\bar{x}$, $\sigma_1^{-1}(x) = E_1$, а $\sigma_2: \bar{X}_2 \rightarrow \bar{X}_1$ — σ -процесс с центром в точке пересечения $\bar{x}_1$ поверхности E_1 с собственным прообразом кривой $\bar{\gamma}_1$, $\sigma_2^{-1}(\bar{x}_1) = E_2$;

2) τ_{m+i} — σ -процессы с центрами в кривых такие, что $\dim g_{2,r_2}(E_2) = 1$ (r_2 — кратность поверхности E_2 в дивизоре $E_{g_{2,0}}$) и $S_{\tilde{\tau}^{-1}} \cap S_{j^{-1}} = y$ или пусто, где $\tilde{\tau}: \tilde{Y} \rightarrow Y$ — композиция всех τ_i ;

3) δ — последовательность σ -процессов, разрешающая точки неопределенности отображения $g_{2,r_2}: \bar{X}_2 \rightarrow \tilde{Y}$ и $h = g_{2,r_2} \circ \delta$.

Обозначим $\tilde{L} = g_{2,r_2}(E_2) \subset \tilde{Y}$. Тогда кривая $\tilde{L} \subset \tilde{\tau}^{-1}(y)$. По теореме Данилова [1] над общей точкой кривой $\tilde{L}$ морфизм h разлагается в композицию моноидальных преобразований ε_i с центрами в неособых кривых: $h = \varepsilon_n \circ \dots \circ \varepsilon_1$. Так как $g_{2,r_2}(E_2) = \tilde{L}$, то собственный прообраз $\delta^{-1}(E_2)$ является исключительным дивизором одного из этих моноидальных преобразований.

Выберем точку $\tilde{y} \in \tilde{L}$ такую, что:

а) $\dim h^{-1}(\tilde{y}) = 1$,

б) существует точка $\tilde{x} \in \delta^{-1}(E_2) \cap h^{-1}(\tilde{y})$ такая, что $\tilde{x}$ — неособая точка дивизоров $E_{\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \delta}$, red и $E_{h, \text{red}}$,

в) над точкой $\tilde{y}$ центр каждого раздутия ε_i ($i > 1$) является сечением на линейчатой поверхности — исключительном дивизоре одного из предыдущих раздутий ε_{i-h} .

Зафиксируем точку $\tilde{x}$, удовлетворяющую условию б), и росток кривой $\tilde{\gamma}_2$ такой, что $\tilde{\gamma}_2$ пересекает трансверсально $\delta^{-1}(E_2)$ в точке $\tilde{x}$.

Покажем, что $\tilde{C}_2 = h(\tilde{\gamma}_2)$ — неособая кривая в точке $\tilde{y}$. В силу условия б), $\tilde{x} \notin E_\delta$ и поэтому δ является изоморфизмом некоторых окрестностей гочек $\tilde{x}$ и $\delta(\tilde{x}) = \bar{x}_2 \in E_2 \subset \bar{X}_2$. Кроме того, из б) следует, что $\delta(\tilde{x})$ не принадлежит собственному прообразу $\sigma_2^{-1}(E_1)$ поверхности E_1 . Поэтому $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \delta(\tilde{\gamma}_2) = \bar{\gamma}_2$ является ростком неособой кривой, касающейся кривой $\bar{\gamma}_1$ в точке $\bar{x}$, а так как $C_1 = g(\bar{\gamma}_1)$ — неособая кривая в точке $\bar{y}$, то на касательном пространстве $T_{\bar{x}}(\bar{\gamma}_1) = T_{\bar{x}}(\bar{\gamma}_2) \subset T_{\bar{x}}(\bar{X})$ морфизм $g_*: T_{\bar{x}}(\bar{\gamma}_1) \rightarrow$

$\rightarrow T_{\tilde{y}}(\tilde{Y})$ является вложением. Поэтому $\tilde{C}_2 = g(\tilde{\gamma}_2)$ — неособая кривая в точке $\tilde{y}$. А так как ограничение на кривую $\tilde{C}_2$ морфизма $\tau_{m+1} \circ \dots \circ \tau_{m+r_2} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ является бирациональным морфизмом на неособую кривую $\tilde{C}_2$, то $\tilde{C}_2$ — неособая кривая. Более того, так как $\tilde{\gamma}_2$ пересекает $\delta^{-1}(E_2)$ трансверсально, то $\tilde{C}_2$ и $\tilde{L} = h(\delta^{-1}(E_2))$ пересекаются трансверсально в точке $\tilde{y}$.

Теперь мы в состоянии построить кривую γ , удовлетворяющую условиям теоремы 4. Для этого выберем в точке $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ локальные координаты y_1, y_2, y_3 так, что $y_1 = y_2 = 0$ — уравнения кривой $\tilde{L}$, а $y_2 = y_3 = 0$ — уравнения кривой $\tilde{C}_2$. Пусть $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(1)$ — очень обильный пучок на проективном многообразии $\tilde{Y}$. Очевидно, существуют такие натуральные числа p, q и сечения $s_1 \in H^0(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(p))$, $s_2 \in H^0(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(q))$, что:

i) Поверхность $s_1 = 0$ неособа в точке $\tilde{y}$ и касается ростка поверхности, заданного уравнением $y_2 + y_1^{n+2} = 0$ с кратностью больше, чем $n+2$, т. е. $y_2 + y_1^{n+2} - s_1 \in m_{\tilde{y}}^{n+3}$ (n — число моноидальных преобразований $\varepsilon_i : h = \varepsilon_n \circ \dots \circ \varepsilon_1$).

ii) Ни одна компонента кривых $\tilde{\tau}^{-1}(S_{f-1})$ и $\tilde{\tau}^{-1}(y)$ не лежит на поверхности $s_1 = 0$.

iii) Поверхность $s_2 = 0$ неособа в точке $\tilde{y}$ и касается ростка поверхности $y_3 = 0$ с кратностью больше $n+2$.

iiii) Пересечение $\{s_1 = 0\} \cap \{s_2 = 0\} \cap \{\tilde{\tau}^{-1}(S_{f-1}) \cup \tilde{\tau}^{-1}(y)\} = \tilde{y}$.

Обозначим $\tilde{C} = \{s_1 = 0\} \cap \{s_2 = 0\}$, и пусть $\tilde{\gamma} = h^{-1}(\tilde{C})$, $\bar{\gamma} = g_{0,r_2}^{-1}(\tilde{C})$, $\gamma = f_{0,m+r_2}^{-1}(\tilde{C})$ — собственные прообразы кривой $\tilde{C}$.

Покажем, что кривая γ удовлетворяет условиям теоремы 4. Действительно, из i) и iii) следует, что кривая $\tilde{C}$ неособа в точке $\tilde{y}$, а из iv) следует, что γ пересекается с E_f лишь в одной точке. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $\tilde{\gamma}$ неособа в точке $\tilde{x}$ и касается кривой $\tilde{\gamma}_2$ в этой точке. Действительно, в этом случае так как γ_2 неособа в точке x и $T_{\tilde{x}}(\tilde{\gamma}) = T_{\tilde{x}}(\tilde{\gamma}_2)$, а $(\eta \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \delta)_* : T_{\tilde{x}}(\tilde{\gamma}_2) \rightarrow T_x(X)$ — морфизм, то $\gamma = \eta \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \delta(\tilde{\gamma})$ неособа в точке x и кривая γ касается кривой γ_2 , поэтому кривая γ имеет направление v в точке x .

Итак, чтобы завершить доказательство теоремы, покажем, что $\tilde{\gamma}_2$ и $\tilde{\gamma}$ касаются друг друга в точке $\tilde{x}$. По построению кривой $\tilde{C}$ в окрестности точки $\tilde{y}$ кривая $\tilde{C}$ задается уравнениями

$$y_2 + y_1^{n+2} + H_{n+3}(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

$$y_3 + G_{n+3}(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

где $H_{n+3}, G_{n+3} \in m_{\tilde{y}}^{n+3}$. Кривые $\tilde{C}_2$ и $\tilde{C}$ лежат на неособой поверхности S :

$$\frac{G_{n+3}(y_1, 0, 0)}{y_1^{n+2} + H_{n+3}(y_1, 0, 0)}(y_2 + y_1^{n+2} + H_{n+3}(y_1, y_2, y_3)) - (y_3 + G_{n+3}(y_1, y_2, y_3)) = 0.$$

Эта поверхность трансверсально пересекается с кривой $\tilde{L} = \{y_1 = y_2 = 0\}$ в точке $\tilde{y}$, а кривые $\tilde{C}_2$ и $\tilde{C}$ касаются друг друга на поверхности S с кратностью больше $n+1$. Каждое из моноидальных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ в силу условия в) выбора точки $\tilde{y}$ индуцирует σ -процесс на поверхности

5. После n σ -процессов на S прообразы кривых $\tilde{C}_2$ и $\tilde{C}$ будут все еще касаться друг друга на прообразе поверхности S и поэтому $\tilde{\gamma}_2$ и $\tilde{\gamma}$ касаются в точке x . Теорема 4 доказана.

2.6. З а м е ч а н и е. Очевидно, теорема 4 верна при дополнительном условии

iii) $\gamma \cap C = x$ или пусто для любой заранее фиксированной кривой $C \subset X$.

§ 3. Доказательство теоремы 3

3.1. Пусть в обозначениях теоремы 3 в коммутативной диаграмме (Y) на X лежит кривая L , удовлетворяющая следующим условиям:

а) $L \cap S_f = x$ состоит из одной точки (или пусто, если $S_f = \emptyset$),

б) $L \cap E(f) = x$ или пусто,

в) L неособа в точке x ,

г) пусть $g \circ \psi(x) = \alpha \in \mathbf{P}^1$ и $R_\alpha = \psi^{-1} \circ g^{-1}(\alpha)$ — слой, тогда $(R_\alpha, L)_x = v_x(R_\alpha)$.

Рассмотрим ограничение $f_L = f|_L : L \rightarrow Y$. Так как $L \cap S_f = x$ — неособая точка кривой L , то f_L — морфизм, а так как $L \cap E(f) = x$ или пусто, то $f_L : L \setminus x \rightarrow f(L \setminus x) = M \setminus y$ — изоморфизм ($y = f_L(x)$).

Доказательство теоремы 3 будет проводиться индукцией, основанной на следующей лемме.

3.2. ЛЕММА. Кратность $v_x(R_\alpha) \geq v_y(R'_\alpha)$, а если y — особая точка кривой M , то $v_x(R_\alpha) > v_y(R'_\alpha)$, где $R'_\alpha = \varphi^{-1} \circ g^{-1}(\alpha)$.

3.3. Доказательство. Разрешим особую точку y кривой M σ -процессами на Y с центрами в точках:

$$\sigma : Y_k \xrightarrow{\sigma_k} \dots \xrightarrow{\sigma_1} Y_0 = Y.$$

Пусть E_i — исключительный дивизор i -ого σ -процесса, и пусть $M' \subset Y_k$ — собственный прообраз кривой M . Предположим, что число σ -процессов минимально, т. е. M' касается поверхности E_k в точке $y_k \in Y_k$. Пусть $R_\alpha'' = \sigma^*(R'_\alpha) = \sum a_i E_i + \sigma^{-1}(R'_\alpha)$. Тогда $a_i \geq v_y(R'_\alpha)$. Следовательно,

$$(R_\alpha'', M')_{y_k} \geq a_k (E_k, M')_{y_k} > a_k \geq v_y(R'_\alpha).$$

Морфизмы $g \circ \psi$ и $g \circ \psi \circ \sigma$ индуцируют один и тот же морфизм кривой L на $\mathbf{P}^1$ (ввиду изоморфизма $\sigma^{-1} \circ f_L : L \rightarrow M'$ и $\sigma^{-1} \circ f_L(x) = y_k$). Следовательно,

$$v_x(R_\alpha) = (R_\alpha, L)_x = (R_\alpha'', M')_{y_k} > v_y(R'_\alpha)$$

и лемма доказана.

3.4. Выберем локальные координаты x_1, x_2, x_3 в точке x так, что

$$x_1^n + x_2 G_{n-1}(x_1, x_2, x_3) + x_3 H_{n-1}(x_1, x_2, x_3) + F_{n+1}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

является уравнением слоя R_α в точке x , где $G_{n-1}, H_{n-1} \in m_x^{n-1}$, а $F_{n+1} \in m_x^{n+1}$, и пусть S — поверхность, заданная уравнением $x_1 = 0$.

ЛЕММА. Для любой неособой кривой L , трансверсально пересекающей поверхность S в точке x :

а) $(R_\alpha, L)_x = v_x(R_\alpha)$,

б) пусть $\eta : X_1 \rightarrow X$ — σ -процесс с центром в L , тогда

$$v_{x'}(\eta^*(R_\alpha)) = v_x(R_\alpha)$$

для любой точки $x' \in \eta^{-1}(x)$.

Доказательство этой леммы очевидно и поэтому будет опущено.

3.5. Доказательство теоремы 3 будет проводиться индукцией по $n = v_x(R_\alpha)$.

Пусть $n=1$ и m — число моноидальных преобразований с центрами в неособых кривых, достаточное для разрешения особой точки x кривой $C \subset X$. Шаг за шагом мы будем выбирать кривые $L_1, \dots, L_p$, удовлетворяющие условиям теоремы 3. Для этого зафиксируем направление $v \in T_x(X)$ такое, что любая кривая L , имеющая направление v в точке x , удовлетворяет следующим условиям:

- i) $(R_\alpha, L)_x = v_x(R_\alpha) = 1$,
- ii) моноидальное преобразование η_1 с центром в L допустимо, т. е. η_1 может быть включено в последовательность из m σ -процессов $\eta_1, \dots, \eta_m$ с центрами в кривых, разрешающих особую точку x кривой C .

По леммам 2.2 и 3.3 такое направление v существует. По теореме 4 существует кривая L , имеющая направление v в точке x и такая, что $L \cap \{E_\psi \cup S_f\} = x$. Имеем:

$$X \setminus \{E_\psi \cup S_f\} \xrightarrow{\psi} Z \setminus \{S_{\psi^{-1}} \cup S_{\varphi^{-1}} \cup \psi(S_f)\} \xrightarrow{\varphi^{-1}} Y \setminus \{E_\varphi \cup S_{f^{-1}}\}.$$

Z — проективное многообразие, а $\{S_{\psi^{-1}} \cup C_{\varphi^{-1}} \cup \psi(S_f)\}$ — кривая, поэтому если $L \setminus x$ имеет особые точки, то они могут быть разрешены σ -процессами с центрами в неособых кривых $L_1, \dots, L_k \subset X$ таких, что $\psi(L_i) \subset \subset Z \setminus \{S_{\psi^{-1}} \cup S_{\varphi^{-1}} \cup \psi(S_f)\}$. А так как $n=1$, то по лемме 3.2 кривая $M = f_L(L)$ неособа в точке $y = f_L(x)$. Сделаем $k+1$ моноидальных преобразований на X и Y с центрами в неособых кривых $L_1, \dots, L_k, L_{k+1} = L$ и $M_1 = f(L_1), \dots, M_k = f(L_k), M_{k+1} = M$. Так как L_i не проходит через точку x при $i \leq k$, то по лемме 3.4 $v_{x'}(R_\alpha'') = 1$ для любого $x' \in \in \eta_{k+1}^{-1} \circ \dots \circ \eta_1^{-1}(x)$ и, кроме того, для разрешения особой точки прообраза кривой C достаточно сделать $m-1$ моноидальных преобразований с центрами в неособых кривых. Тем самым случай $n=1$ разобран.

Пусть $n = v_x(R_\alpha) > 1$, и пусть m — число σ -процессов с центрами в кривых, достаточное для разрешения особой точки x кривой C . Опять выберем допустимую кривую $L \subset X$ такую, что

- i) $(R_\alpha, L)_x = v_x(R_\alpha)$,
- ii) $L \cap \{E_\psi \cup S_f\} = x$.

Как и выше, в случае $n=1$, мы можем разрешить особые точки кривой $L \setminus x$ σ -процессами с центрами в кривых, лежащих в $X \setminus \{E_\psi \cup S_f\}$, и поэтому можем считать, что $L \setminus x$ — неособая кривая.

Если $y = f_L(x)$ — особая точка кривой $M = f_L(L) \subset Y$, то по лемме 3.2 $v_y(R_\alpha') < v_x(R_\alpha) = n$. Следовательно, по предположению индукции особая точка y кривой M может быть разрешена последовательностью $\tau_1, \dots, \tau_k$ σ -процессов с центрами в кривых $M_1, \dots, M_k \subset Y$, причем:

- а) центр каждого раздутья неособ и трансверсально пересекается со слоем над точкой $\alpha \in \mathbb{P}^1$,
- б) моноидальные преобразования η_i с центрами в кривых $L_1 = f^{-1}(M_1), \dots, L_k = f^{-1}(M_k)$ также являются σ -процессами.

Так как центр каждого раздутья τ_i неособ и трансверсально пересекается со слоем над точкой α , $v_y(R_\alpha') < v_x(R_\alpha)$, то по лемме 3.2 кривые $L_1, \dots, L_k$ не проходят через точку x . Следовательно, после раздутья

$\tau_1, \dots, \tau_k$ на Y и $\eta_1, \dots, \eta_k$ на X мы можем сделать σ -процессы τ_{k+1} и η_{k+1} с центрами в кривых — прообразах кривых M и L . После этих раздутий по лемме 3.4 кратность слоя над точкой $\alpha \in \mathbf{P}^1$ в точке пересечения прообраза кривой C с этим слоем не изменится и будет равна n . Кроме того, для разрешения особых точек прообраза кривой C достаточно сделать уже $m-1$ σ -процессов с центрами в кривых и тем самым теорема 3 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

4.1. Доказательство теоремы 2 основано на следующем. Если $L \subset S_{j-1}$ — кривая, то над общей точкой кривой L морфизм f раскладывается в композицию моноидальных преобразований $\eta_n \circ \dots \circ \eta_1$ с центрами в кривых. И проблема состоит в том, что исключительная поверхность E_1 первого стягивания η_1 может иметь вырожденные слои и поэтому не может быть стянута глобально. Используя технику перестроек I и II из [5], мы покажем, что существует последовательность моноидальных преобразований и обратных к ним с центрами в $f^{-1}(\bigcup y_i)$ (y_i — конечное число замкнутых точек на Y), в результате которой E_1 уже не имеет вырожденных слоев.

4.2. Для доказательства теоремы 2 выберем поверхность $D \subset Y$ такую, что

i) $S_{j-1} \subset D$,

ii) D неособа в общих точках всех кривых $L_i \subset S_{j-1}$.

Пусть $E = f^*(D) = \sum_{i>0} a_i E_i + E_0$, где $E_0 = f^{-1}(D)$. Согласно [7], мы можем предположить (осуществив, если надо, конечное число σ -процессов), что E удовлетворяет условию

iii) E_{red} — дивизор с нормальными пересечениями и все E_i — неособые подмногообразия.

Назовем кривую $C_{i,j} = E_i \cap E_j$ *двойной кривой* и точку $T_{i,j,k} = E_i \cap E_j \cap E_k$ — *тройной точкой*.

4.3. Пусть $L \subset S_{j-1}$ — кривая, тогда согласно [1] над общей точкой кривой L морфизм f раскладывается в композицию моноидальных преобразований $f = \tau_n \circ \dots \circ \tau_1$ с центрами в неособых кривых. Пусть E_1 — поверхность, стягиваемая первым σ -процессом τ_1 . Тогда E_1 — линейчатая поверхность, общий слой R которой является рациональной кривой, и ограничение нормального расслоения к E_1 в X на слой R имеет степень, равную -1 .

4.4. Из условия ii), наложенного на D , следует, что двойные кривые, лежащие на E_1 , состоят из компонент слоев и одного или двух сечений S_1, S_2 линейчатой поверхности E_1 . Более того, если на E_1 лежат две двойные кривые S_1 и S_2 — сечения на линейчатой поверхности E_1 , то $E_2 \neq E_3$, где E_2 и E_3 — компоненты дивизора E , пересекающиеся с E_1 вдоль S_1 и S_2 .

4.5. Если E_1 — относительно минимальная линейчатая поверхность, то ([6]) E_1 может быть стянута на кривую при помощи моноидального преобразования $\tau_1: X \rightarrow X_1$ и в этом случае $f_1 = f \circ \tau_1^{-1}: X_1 \rightarrow Y$ — морфизм. Действительно, пусть $\mathcal{L}$ — очень обильный пучок на Y , и пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in H^0(Y, \mathcal{L})$ — два таких сечения, что $\{\gamma_1 = 0\} \cap \{\gamma_2 = 0\} \cap L = \emptyset$. Тогда

$f^*(\gamma_1=0)$ и $f^*(\gamma_2=0)$ пересекаются с E_1 вдоль слоев на E_1 и $f^*(\gamma_1=0) \cap f^*(\gamma_2=0) \cap E_1 = \emptyset$. Следовательно, линейная система $|f_1^*(\mathcal{L})|$ не имеет базисных точек, т. е. f_1 — морфизм.

Из 4.4 следует, что $f_1^*(D)$ удовлетворяет условию iii) из п. 4.2 после, быть может, конечного числа моноидальных преобразований $\tau: X_n \rightarrow X_1$ таких, что $S_{\tau^{-1}}$ — объединение конечного числа замкнутых точек (тех точек, в которых $f_1^*(D)$ не является дивизором с нормальными пересечениями). Такими точками могут быть лишь точки $\tau(S_1 \cap S_2)$, где S_1 и S_2 — сечения — двойные кривые на E_1).

4.6. Пусть $F = \alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_k L_k$ — вырожденный слой линейчатой поверхности E . Тогда $f(F) = y$ — замкнутая точка на Y . В силу п. 4.5 теорема 2 будет доказана, если мы покажем, что существует последовательность раздутий и сжатий $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2^{-1} \circ \dots \circ \tau_r: X' \rightarrow X$ с центрами, лежащими в $f^{-1}(y)$ и такими, что:

а) число компонент слоя $F' \subset \sigma^{-1}(E_1)$ строго меньше числа компонент слоя F ,

б) $\sigma^*(E)$ удовлетворяет условию iii) из п. 4.2.

4.7. ЛЕММА. Пусть $F = \alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_k L_k$ — вырожденный слой линейчатой поверхности E_1 . Тогда

- i) двойственный граф Γ слоя F является связным деревом;
- ii) среди компонент слоя F найдется исключительная кривая первого рода L_1 , т. е. $(L_1^2)_{E_1} = -1$, $L_1 \simeq \mathbf{P}^1$;
- iii) пусть α_1 — кратность исключительной кривой первого рода L_1 в слое F , тогда если $\alpha_1 = 1$, то найдется по крайней мере еще одна исключительная кривая первого рода, лежащая в слое F ;
- iiii) пусть t_{L_1} — число ребер, выходящих в графе Γ из вершины L_1 — исключительной кривой первого рода, тогда если $\alpha_1 = 1$, то $t_{L_1} = 1$, и если $\alpha_1 > 1$, то $t_{L_1} \leq 2$.

Доказательство этой леммы мы опускаем.

4.8. Раздув, если надо, кривые слоя F , мы можем считать, что все компоненты слоя F являются двойными кривыми. Пусть T_L — число тройных точек, лежащих на двойной кривой L . Используя утверждения iii) и iv) леммы 4.7, легко показать, что найдется такая исключительная кривая L_1 слоя F , что

$$T_{L_1} \geq 2. \quad (1)$$

Покажем, что существует перестройка σ , удовлетворяющая п. 4.6, такая, что слой $F' \subset \sigma^{-1}(E_1)$ получен из слоя F стягиванием исключительной кривой L_1 , на которой $T_{L_1} \leq 2$.

4.9. ЛЕММА. Пусть дивизор $E = \sum a_i E_i$ является слоем морфизма $g: X \rightarrow \mathbf{A}^1$ неособого многообразия X , $\dim X = 3$, на аффинную прямую $\mathbf{A}^1$, и пусть полная кривая L является двойной кривой, $L = E_1 \cap E_2$, а E_{red} — дивизором с нормальными пересечениями. Тогда

$$a_1 (L^2)_{E_2} + a_2 (L^2)_{E_1} = -T,$$

где $T = \sum_{i \geq 2} a_i (E_i, L)_X$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.1 из [5].

4.10. Пусть E_2 — компонента дивизора E , пересекающаяся с E_1 вдоль кривой L_1 . Пусть $(L_1^2)_{E_2} = e$. Мы можем считать, что $e \geq -1$. Действительно, сделаем σ -процесс $\tau: X_1 \rightarrow X$ с центром в L_1 , $\tau^{-1}(L_1) = E_{L_1}$, $\tau^{-1}(E_i) = E_i'$. Тогда $\tau^*(E) = \sum a_i E_i' + (a_1 + a_2) E_{L_1}$. В окрестности кривой L дивизор E является главным дивизором ($E = f^*(h=0)$, где $h=0$ — локальное уравнение дивизора D в окрестности точки $f(F)$). Следовательно, по лемме 4.9 (напомним, что $(L_1^2)_{E_1} = -1$)

$$\begin{aligned} a_1(L_1^2)_{E_2} - a_2 &= -T, \\ a_1(L_1^2)_{E_{L_1}} - (a_1 + a_2) &= -T \end{aligned}$$

и поэтому $(L_1^2)_{E_2} < (L_1^2)_{E_{L_1}}$, так как $a_1 > 0$. Следовательно, после нескольких σ -процессов в X с центром в $L_1 \subset E_1$ мы получим, что индекс самопересечения кривой L_1 на другой компоненте дивизора E , проходящей через L_1 , больше или равен -1 . Эти σ -процессы не увеличивают числа компонент слоя F , так как центры этих σ -процессов являются дивизорами на поверхности E_1 .

4.11. Мы можем считать, что $(L_1^2)_{E_2} = -1$, где $E_2 \cap E_1 = L_1$. Действительно, пусть L_2 — компонента слоя F на E_1 , пересекающаяся с выбранной нами исключительной кривой L_1 . Так как E_{red} — дивизор с нормальными пересечениями, то L_2 пересекается с E_2 трансверсально. Поэтому σ -процесс в X с центром в L_2 индуцирует на E_2 σ -процесс с центром в точке $L_2 \cap E_2$. В силу п. 4.10 $(L_1^2)_{E_2} \geq -1$, следовательно, сделав конечное число σ -процессов с центром в $L_2 \subset E_1 \subset X$, мы понизим индекс самопересечения $(L_1^2)_{E_2} = e$ до -1 .

Применяя лемму 4.9, мы получим, что

$$a_1 + a_2 = T, \quad (2)$$

где $E = \sum a_i E_i$.

4.12. Сделаем σ -процесс $\tau: X_1 \rightarrow X$ с центром в L_1 , $\tau^{-1}(L_1) = V$. Тогда $\tau^*(E) = (a_1 + a_2)V + \sum a_i E_i$. Поверхность V — линейчатая поверхность и $F_x = \tau^{-1}(x)$ — слой, где $x \in L_1 \subset X$. По лемме 4.9

$$-(a_1 + a_2) + a_1(L_1^2)_V = -T. \quad (3)$$

Отсюда и из (2) следует, что $(L_1^2)_V = 0$ и линейчатая поверхность V имеет вторую структуру линейчатой поверхности, для которой L_1 является слоем. Следовательно, $V \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Дивизор $\tau^*(E)$ является главным дивизором в окрестности поверхности V , поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_V((a_1 + a_2)V) &= \mathcal{O}_V\left(-\sum a_i E_i\right) = \mathcal{O}_V\left(-a_1 L_1 - a_2 L_1' - \sum_{i \geq 2} a_i (E_i, L_1)_X F_x\right) = \\ &= \mathcal{O}_V(-(a_1 + a_2)L_1 - T F_x), \end{aligned}$$

где $L' = V \cap E_2$. Из (2) и (3) следует, что $\mathcal{O}_V(V) \simeq \mathcal{O}_V(-L_1 - F_x)$. Следовательно ([6]), мы можем стянуть V вдоль L_1 на сечение F_x . Обозначим этот σ -процесс через $\sigma: X_1 \rightarrow X_2$, тогда σ индуцирует на E_1 стягивание исключительной кривой L_1 в точку. Кроме того, так как $T_{L_1} \leq 2$, то $\sigma_* \tau^*(E)$ является дивизором с нормальными пересечениями. Так как $f(L_1)$ — точка, то $f' = f \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ — морфизм. Тем самым теорема 2 доказана.

Литература

1. Данилов В. И. Декомпозиция некоторых бирациональных морфизмов.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1980, т. 44, № 2, с. 465—477.
2. Crauder B. Birational morphisms of smooth algebraic 3-folds collapsing three surfaces to a point. Preprint, 1980.
3. Crauder B. Birational morphisms of smooth algebraic 3-folds collapsing a divisor with no triple points to a point. Preprint, 1980.
4. Schaps M. Birational morphisms factorizable by two monoidal transformations.— Math. Annal., 1976, v. 222, p. 23—28.
5. Куликов В. С. Вырождения $K3$ поверхностей.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977, т. 41, № 5, с. 1008—1042.
6. Nakano S. On the inverse of monoidal transformations.— Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1970/71, v. 6, p. 483—502.
7. Hironaka H. Resolutions of singularities over fields of characteristic zero. I.— Ann. of Math. (2), 1964, v. 79, p. 109—203.
8. Шафарович И. Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию
8.XII.1981

Технический редактор Т. И. Васильева

Сдано в набор 04.05.82	Подписано к печати 10.06.82	Формат бумаги 70×108 ¹ / ₁₆		
Высокая печать	Усл. печ. л. 19,6	Усл. кр.-отт. 34,2 тыс.	Уч.-изд. л. 16,8	Бум. л. 7,0
	Тираж 1732 экз.	Зак. 4142		

Издательство «Наука». 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10