УДК 512.7

КУЛИКОВ Вик. С.

МИНИМАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Введение

Пусть K — конечнопорожденное поле над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Поле K может быть реализовано как поле рациональных функций $\mathbf{C}(X)$ некоторого неособого полного алгебраического многообразия X. Если степень трансцендентности $d = \deg \mathrm{Tr}\, K/\mathbf{C}$ поля K над $\mathbf{C}$ равна 1, то такое X определено однозначно с точностью до изоморфизма. В случае $d > 1$ для K существует уже бесконечно много не изоморфных между собой полных, неособых многообразий X с полем рациональных функций $\mathbf{C}(X) \simeq K$, которые называются моделями поля K. Говорят, что модель X' доминирует модель X, если существует бирациональное регулярное отображение $f: X' \to X$. Модель называется относительно минимальной моделью поля K, если она не доминирует никакой другой модели поля K, не изоморфной ей. Легко показать, что всякая модель доминирует некоторую относительно минимальную модель. Возникает вопрос о единственности относительно минимальной модели данного поля K, т. е. для каких K существует абсолютная минимальная модель? Данная статья является попыткой ответить на этот вопрос.

В дальнейшем моделью поля K мы будем называть пару (X, φ), где X — компактное, неособое комплексно-аналитическое многообразие размерности $d = \deg \mathrm{Tr}\, K/\mathbf{C}$ и $\varphi: \mathbf{C}(X) \xrightarrow{\sim} K$ — изоморфизм над $\mathbf{C}$ поля мероморфных на X функций и поля K. Любые две модели (X_1, φ_1) и (X_2, φ_2) поля K естественным образом бимероморфны и бимероморфное отображение $f_{1,2}: X_1 \to X_2$ определяется изоморфизмом $f^*_{1,2} = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ полей мероморфных функций $\mathbf{C}(X_1)$ и $\mathbf{C}(X_2)$.

Будем говорить, что точки $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ моделей X_1 и X_2 поля K *строго эквивалентны*, если либо $f_{1,2}$, либо $f_{2,1}$ являются голоморфными отображениями и при этом, соответственно, либо $f_{1,2}(x_1) = x_2$, либо $f_{2,1}(x_2) = x_1$. Распространим введенное понятие строгой эквивалентности до отношения эквивалентности. Точки $x \in X$ и $y \in Y$ моделей (X, φ), (Y, ψ) будем называть *r-эквивалентными* ($x \overset{r}{\sim} y$), если существует диаграмма

$$\begin{array}{ccc} x_2 \in X_2 \underset{f_{2,3}}{\text{——}} \dots & \text{——} & X_{n-1} \ni x_{n-1} \\ \Big| f_{1,2} & & \Big| f_{n-1,n} \\ x = x_1 \in X_1 = X & & Y = X_n \ni x_n = y \end{array}$$

в которой каждое $f_{i,i+1}$ определяет строгую эквивалентность точек $x_i \in X_i$ и $x_{i+1} \in X_{i+1}$. Диаграмму такого вида мы будем называть *перестройкой*, а n — *длиной* перестройки.

Очевидно, если для данного поля K существует абсолютная минимальная модель (X_0, φ_0), то для любых r-эквивалентных точек $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ их образы $f_{1,0}(x_1)$ и $f_{2,0}(x_2)$ совпадают в X_0.

Цель данной статьи — исследовать введенное выше понятие r-эквивалентности точек.

В первом параграфе статьи вводится понятие минимального объекта поля K, обобщающего понятие абсолютной минимальной модели поля K. Минимальный объект $(\mathscr{X}_K, \mathcal{O}_{\mathscr{X}_K})$ поля K является кольцованным пространством: топологическое пространство $\mathscr{X}_K$ как множество состоит из классов $\bar{x}$ r-эквивалентных точек моделей поля K, на $\mathscr{X}_K$ вводится топология Зарисского, ростки $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ пучка $\mathcal{O}_{\mathscr{X}_K}$ над точками $\bar{x}\in\mathscr{X}_K$ состоят из функций из K, голоморфных во всех точках класса $\bar{x}$.

Для неособой компактной кривой X минимальный объект поля $\mathbf{C}(X)$ совпадает с ней.

В случае поверхностей есть три возможности:

0) Если X — рациональная поверхность, то $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ — точка.

1) Если $\pi: X\to C$ — линейчатая иррациональная поверхность, т. е. π — морфизм на неособую кривую C рода $g(C)>0$ с общим слоем — рациональная кривая, то $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ совпадает с кривой C.

2) Если X отлична от поверхностей, рассмотренных выше, то $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}=X_0$, где X_0 — минимальная модель (в обычном смысле) поверхности X, т. е. X_0 — неособая полная поверхность, не содержащая исключительных кривых первого рода.

В трехмерном случае все обстоит уже гораздо хуже: минимальный объект $\mathscr{X}_K$ не обязательно является алгебраическим многообразием и, более того, естественное отображение $\pi_X: X\to\mathscr{X}_K$ алгебраической модели X на минимальный объект может быть даже не непрерывным отображением (см. пример 3.3).

Основным результатом статьи является теорема о том, что в трехмерном случае множества r-эквивалентных точек, лежащих на модели X, совпадают с максимальными связными объединениями рациональных кривых, лежащих на X, т. е. в трехмерном случае r-эквивалентность совпадает с R-эквивалентностью, введенной Ю. И. Маниным ([6]). Кроме того, описаны трехмерные модели X, для которых $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ являются алгебраическими многообразиями.

§ 1. Минимальный объект поля K

1.1. Пусть $\amalg X$ — несвязное объединение всех моделей поля K. Обозначим через $\mathscr{X}=\mathscr{X}_K=\amalg X/\{r\}$ фактор-множество по отношению r-эквивалентности. Класс эквивалентности точки $x\in X$ будем обозначать через $\bar{x}$ и называть *r-минимальной точкой поля K*. Мы введем на множестве $\mathscr{X}$ структуру кольцованного пространства $(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}})$ и будем называть его минимальным объектом поля K.

Пусть $\mathcal{O}_{X,x}$ — кольцо мероморфных на X функций, голоморфных в точке $x\in X$. Ввиду изоморфизма $\varphi: \mathbf{C}(X)\to K$ кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ вложено в K.

1.2. Определение. *Кольцом регулярных функций в r-минимальной точке $\bar{x}\in\mathscr{X}_K$ называется кольцо $\mathcal{O}_{\bar{x}}=\bigcap\limits_{x\in\bar{x}}\mathcal{O}_{X,x}$.*

1.3. Определение. *Следом r-минимальной точки $\bar{x}\in\mathscr{X}_K$ на модели X называется множество*

$$\mathrm{Tr}_X\bar{x}=\{x\in X\,|\,x\in\bar{x}\}.$$

Из теоремы Хиронаки следует, что $\mathrm{Tr}_X\bar{x}\neq\varnothing$ для любого $\bar{x}\in\mathscr{X}_K$ и любой модели X поля K. Таким образом, минимальный объект $\mathscr{X}$ получается из любой модели X отождествлением r-эквивалентных точек. Обозначим через $\pi_X: X \to \mathscr{X}_K$ естественное отображение, переводящее $x \in X$ в $\bar{x}$, содержащее x.

1.4. ЛЕММА. *Пусть X — модель поля K и $\bar{x} \in \mathscr{X}_K$. Тогда $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ совпадает с $\mathcal{O}_{\mathrm{Tr}_X \bar{x}}$ — кольцом мероморфных на X функций, голоморфных в каждой точке из $\mathrm{Tr}_X \bar{x}$.*

Доказательство. Очевидно, кольцо $\mathcal{O}_{\mathrm{Tr}_X \bar{x}}$ содержит $\mathcal{O}_{\bar{x}}$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим любую точку $y \in \bar{x}$, принадлежащую некоторой модели Y поля K. По теореме Хиронаки бимероморфное отображение $f: X \to Y$ может быть разрешено, т. е. существуют такая модель Z поля K и голоморфные отображения $g: Z \to X$ и $h: Z \to Y$, что $f = h \circ g^{-1}$. Согласно определению r-эквивалентности $g^{-1}(\mathrm{Tr}_X \bar{x}) = \mathrm{Tr}_Z \bar{x} = h^{-1}(\mathrm{Tr}_Y \bar{x})$. Следовательно, $\mathcal{O}_{\mathrm{Tr}_X \bar{x}} = \mathcal{O}_{\mathrm{Tr}_Z \bar{x}} = \mathcal{O}_{\mathrm{Tr}_Y \bar{x}}$, так как g и h — голоморфные бимероморфные отображения неособых компактных комплексно-аналитических пространств. В частности, любая функция из $\mathcal{O}_{\mathrm{Tr}_X \bar{x}}$ принадлежит $\mathcal{O}_{Y,y}$, если $y \in \bar{x}$.

1.5. Определение. *Пусть Y — любое подмножество компактного комплексно-аналитического многообразия Z. Точки z_1 и $z_2 \in Y$ называются аналитически связанными в Y, если найдется связное (быть может, приводимое) замкнутое подмногообразие $V \subset Z$ такое, что $z_1, z_2 \in V \subset Y$. Подмножество $Y \subset Z$ называется аналитически связным, если любые две точки $z_1, z_2 \in Y$ аналитически связаны в Y.*

1.6. ЛЕММА. *Пусть X — модель поля K и $\bar{x} \in \mathscr{X}_K$. Тогда след $\mathrm{Tr}_X \bar{x}$ аналитически связен в X.*

Доказательство. Для любых $x, y \in \mathrm{Tr}_X \bar{x}$ рассмотрим перестройку

$$\begin{array}{ccc} x_2 \in X_2 \overset{f_{2,3}}{\text{———}} \ldots \text{———} X_{n-1} \ni x_{n-1} \\ \Big| f_{1,2} \qquad\qquad\qquad \Big| f_{n-1,n} \\ x = x_1 \in X_1 = X \qquad X = X_n \ni x_n = y \end{array}$$

определяющую r-эквивалентность точек x и y. Очевидно, мы можем считать, что среди двух последовательных звеньев

$$X_{i-1} \overset{f_{i-1,i}}{\text{———}} X_i \overset{f_{i,i+1}}{\text{———}} X_{i+1}$$

перестройки стрелки отображений направлены в разные стороны, т. е. либо $f_{i-1,i}$ и $f_{i+1,i}$ — голоморфные отображения, либо $f_{i,i-1}$ и $f_{i,i+1}$ голоморфны. Действительно, если это не так, то можно уменьшить длину перестройки, исключив из нее модель X_i и рассмотрев композицию $f_{i-1,i+1} = f_{i,i+1} \circ f_{i-1,i}$, определяющую строгую эквивалентность точек x_{i-1} и x_{i+1}.

Для подмножества $M_1 \subset X_1$ определим его *образ $M_n \subset X_n$ относительно перестройки.* Множество M_1 определяет множество $M_2 \subset X_2$ следующим образом: если $f_{1,2}$ голоморфно, то $M_2 = f_{1,2}(M_1)$, если $f_{2,1}$ голоморфно, то $M_2 = f_{2,1}^{-1}(M_1)$. Аналогично можно определить $M_3 \subset X_3$ (являющееся образом или прообразом множества M_2) и т. д. В итоге получим множество $M_n \subset X_n$, которое будем называть образом множества M_1 относительно перестройки.

Пусть $T_i \subset \mathrm{Tr}_{X_i} \bar{x}$ — максимальное подмножество точек, аналитически связанных с x_i в $\mathrm{Tr}_{X_i} \bar{x}$. Нам надо доказать, что $T_1 = T_n$. Заметим, что, если $f_{i,i+1}: X_i \to X_{i+1}$ — голоморфное отображение, то $f_{i,i+1}^{-1}(T_{i+1}) = T_i$. Поэтому, переходя по звеньям перестройки, получим что $T_n \subset X_n$ является образом множества $T_1 \subset X_1$ относительно перестройки.

С другой стороны, если в нашей перестройке есть звено вида

$$X_{i-1} \xrightarrow[f_{i-1,i}]{} X_i \xleftarrow[f_{i+1,i}]{} X_{i+1},$$

в котором $f_{i-1,i}$ и $f_{i+1,i}$ — голоморфные отображения, то по теореме Хиронаки существуют модель $\tilde{X}_i$ и голоморфные отображения $\tilde{f}_{i,i-1} : \tilde{X}_i \to X_{i-1}$ и $\tilde{f}_{i,i+1} : \tilde{X}_i \to X_{i+1}$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{X}_i \arrow[dl, "\tilde{f}_{i,i-1}"'] \arrow[dr, "\tilde{f}_{i,i+1}"] & \\
X_{i-1} \arrow[dr, "f_{i-1,i}"'] & & X_{i+1} \arrow[dl, "f_{i+1,i}"] \\
& X_i &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Следователньо, $\tilde{f}_{i,i+1} \circ \tilde{f}^{-1}_{i,i-1}(T_{i-1}) = T_{i+1}$. Заменяя перестройку $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n$ перестройкой $X_1, \ldots, X_{i-1}, \tilde{X}_i, X_{i+1}, \ldots$ $\ldots, X_n$, получим, что образ множества T_1 относительно новой перестройки также совпадает с T_n.

В новой перестройке $X_1, \ldots, \tilde{X}_i, \ldots, X_n$ (если либо $i > 2$, либо $i < n-1$) можно уменьшить ее длину по крайней мере на 1, так как в этих случаях, соответственно, либо $f_{i-1,i-2} \circ \tilde{f}_{i,i-1}$ — голоморфное отображение, либо $f_{i+1,i+2} \circ \tilde{f}_{i,i+1}$ — голоморфное отображение. Применяя эту процедуру несколько раз, получим новую перестройку

$$X = X_1 \xleftarrow{f_{1,0}} X_0 \xrightarrow{f_{0,n}} X_n = X,$$

состоящую из двух звеньев. Так как на всех промежуточных шагах образ множества T_1 относительно перестройки совпадал с T_n, то и в этом случае $T_n = f_{0,n} \circ f^{-1}_{1,0}(T_1)$. Но $f_{0,n} \circ f^{-1}_{1,0}$ — тождественное отображение, следовательно, $T_1 = T_n$, т. е. $y \in T_n = T_1 \ni x$ и x и y аналитически связаны в $\mathrm{Tr}_X \bar{x}$.

1.7. ЛЕММА. $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ — *локальное целозамкнутое кольцо.*

Доказательство. Очевидно, $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ — целозамкнутое кольцо как пересечение целозамкнутых колец.

Покажем, что множество необратимых элементов в $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ является идеалом. Для этого докажем, что для любой $h \in \mathcal{O}_{\bar{x}} \subset K$ и любых x, y из $\bar{x}$ значения $h(x)$ и $h(y)$ совпадают. Пусть r-эквивалентность точек x и y определяется перестройкой длины n.

В случае $n=1$, т. е. $x \in X$ и $y \in Y$ строго эквивалентны, пусть, для определенности $f : X \to Y$ — голоморфное отображение. Тогда $x \in f^{-1}(y) \subset \subset \mathrm{Tr}_X \bar{x}$ по определению перестройки. Отображение f индуцировано отождествлением полей $\mathbf{C}(X)$ и $\mathbf{C}(Y)$ с полем K. Следовательно, $h = h_X \in \in \mathbf{C}(X)$ совпадает с $f^* h_Y$ — прообразом функции $h_Y \in \mathbf{C}(Y)$. Кроме того, f — собственное отображение неособых многообразий, $h_X \in \mathcal{O}_{\mathrm{Tr}_X \bar{x}}$ и $f^{-1}(y) \subset \mathrm{Tr}_X \bar{x}$, поэтому h_Y голоморфно в точке y и $h(x) = h_X(x) = f^* h_Y(x) = = h_Y(f(x)) = h_Y(y) = h(y)$.

В случае $n>1$ пусть $x=x_1\in X_1$ и $y=x_n\in X_n$. Тогда по доказанному $h(x_1)=h(x_2)=\ldots=h(x_n)$, где x_i — точки, участвующие в определении перестройки.

Итак, $h(x)=h(y)$ для любых x и $y\in\bar{x}$. Если $h(x)\neq 0$ для некоторой $x\in\bar{x}$, то h обратима в $\mathcal{O}_{\bar{x}}$. Следовательно, множество необратимых элементов в $\mathcal{O}_{\bar{x}}$

$$m_{\bar{x}}=\{h\in\mathcal{O}_{\bar{x}}\,|\,h(x)=0 \text{ для любой } x\in\bar{x}\}$$

является идеалом.

1.8. Введем на $\mathscr{X}_K$ топологию. Пусть A — конечнопорожденное над $\mathbf{C}$ подкольцо поля K. Обозначим $U_A=\{\bar{x}\in\mathscr{X}_K\,|\,A\subset\mathcal{O}_{\bar{x}}\}$. Возьмем совокупность множеств вида U_A в качестве базы открытых множеств на $\mathscr{X}_K$. Легко видеть, что пересечение конечного числа базисных множеств снова будет базисным множеством и что $U_{\mathbf{C}}=\mathscr{X}_K$. Следовательно, наш выбор открытых множеств действительно определяет топологию на $\mathscr{X}_K$.

1.9. Основное определение. *Кольцованное пространство* $(\mathscr{X}_K,\mathcal{O}_{\mathscr{X}_K})$ *называется минимальным объектом поля* K, *где* $\mathscr{X}_K$ — *топологическое пространство, определенное в* 1.8, *а* $\mathcal{O}_{\mathscr{X}_K}$ — *пучок колец, сечения которого над открытым множеством* $U\subset\mathscr{X}_K$ *равны по определению*

$$\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathscr{X}_K})=\bigcap_{\bar{x}\in U}\mathcal{O}_{\bar{x}}.$$

1.10. Предложение. 1) *Пусть* X — *неособая полная кривая, тогда* $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}=X$.

2) *Пусть* X — *рациональная поверхность, тогда* $X_{\mathbf{C}(X)}$ — *точка.*

3) *Пусть* X — *иррациональная линейчатая поверхность, т. е. существует морфизм* $\pi\colon X\to C$ *на неособую кривую* C *рода* $g(C)>0$ *с общим слоем — рациональная кривая. Тогда* $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}=C$.

4) *Пусть* X — *поверхность, не являющаяся рациональной или линейчатой поверхностью. Тогда* $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ *совпадает с минимальной моделью поверхности* X.

Доказательство. 1) следует из единственности неособой полной кривой с данным полем рациональных функций.

Пусть $\pi\colon X\to C$ — линейчатая поверхность и L_0 — невырожденный слой над точкой $o\in C$. Покажем, что все точки слоя L_o r-эквивалентны между собой. Пусть $x,y\in L_o$. Выберем точку $z\in L_o$, не совпадающую с x и y. Пусть $f_1\colon X_1\to X$ — моноидальное преобразование с центром в z и $\bar{L}_o$ — собственный прообраз кривой L_o. Тогда $(\bar{L}_o^2)_{X_1}=-1$. Следовательно, существует моноидальное преобразование $f_2\colon X_1\to X_2$, стягивающее $\bar{L}_o$. Пусть $x_1=f_1^{-1}(x)$, $x_2=f_1^{-1}(y)$ и $x_3=f_2(x_1)=f_2(x_2)$. R-эквивалентность точек x и y задается перестройкой

$$(X,x)\xleftarrow{f_1}(X_1,x_1)\xrightarrow{f_2}(X_2,x_3)\xleftarrow{f_2}(X_1,x_2)\xrightarrow{f_1}(X,y).$$

2) следует из того, что рациональная поверхность X бирационально изоморфна квадрике $Q=\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$, на которой есть две различные структуры линейчатой поверхности.

3) следует из того, что на относительно минимальной модели линейчатой поверхности все слои невырождены и любое бирациональное отображение иррациональной линейчатой поверхности сохраняет структуру линейчатой поверхности.

4) следует из того, что в этом случае существует абсолютная минимальная модель X_0, которую доминирует любая бирационально изоморфная ей модель X ([1]).

1.11. Из предыдущего пункта видно, что для алгебраических моделей X, $\dim_{\mathbf{C}} X \leqslant 2$, минимальный объект $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ является алгебраическим многообразием, а естественное отображение $\pi_X : X \to \mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ является морфизмом. К сожалению, если $\dim_{\mathbf{C}} X > 2$, то уже не всегда $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ — алгебраическое многообразие и, более того, $\pi_X : X \to \mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ не всегда является непрерывным отображением. В § 3 мы опишем те трехмерные модели X, минимальные объекты которых являются алгебраическими многообразиями, и приведем пример, когда это не так.

§ 2. След r-минимальной точки трехмерного многообразия

В дальнейшем $\dim_{\mathbf{C}} X = 3$.

2.1. ЛЕММА. *Пусть $L \simeq \mathbf{P}^1$ — неособая рациональная кривая, лежащая в неособом многообразии X, и пусть нормальное расслоение кривой L в X $N_{X/L} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$. Тогда все точки кривой L r-эквивалентны в X.*

Доказательство. Пусть $f : Z \to X$ — моноидальное преобразование с центром в L, $f^{-1}(L) = V$. Как хорошо известно, в случае $N_{X/L} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$ поверхность $V \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, т. е. на V есть две структуры линейчатой поверхности, одна из которых совпадает с $f|_V : V \to L \simeq \mathbf{P}^1$, а относительно другой структуры слои первой структуры являются сечениями. Пусть L_1 — слой первой линейчатой структуры и L_2 — слой второй структуры. Нормальное расслоение $N_{Z/V} = \mathcal{O}_V(-L_1 - L_2)$ и по критерию Мойшезона V может быть стянута на кривую вдоль слоя L_2 в категории алгебраических пространств, т. е. существует моноидальное преобразование $g : Z \to Y$ неособого алгебраического пространства Y с центром в рациональной кривой $L_3 \subset Y$, причем $g^{-1}(L_3) = V$ и L_2 является слоем отображения g.

Пусть x_1 и x_5 — произвольные точки на $L \subset X$. Обозначим через $x_2 = f^{-1}(x_1) \cap L_2$, $x_4 = f^{-1}(x_5) \cap L_2$ и $x_3 = g(L_2)$. Тогда перестройка

$$(X, x_1) \xleftarrow{f} (Z, x_2) \xrightarrow{g} (Y, x_3) \xleftarrow{g} (Z, x_4) \xrightarrow{f} (X, x_5)$$

определяет r-эквивалентность точек x_1 и x_5.

2.2. ТЕОРЕМА. *Пусть $L \subset X$ — рациональная (быть может, особая) кривая, лежащая на трехмерной модели X. Тогда все точки кривой L r-эквивалентны между собой в X.*

Доказательство. По определению r-эквивалентности, любая точка r-эквивалентна любой точке из своего прообраза при голоморфном бимероморфном отображении. Поэтому если мы покажем, что существует такое голоморфное бимероморфное отображение $f : Y \to X$ и кривая $L' \subset Y$, изоморфная $\mathbf{P}^1$ и такая, что

1) $f(L') = L$,

2) $N_{Y/L'} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$,

то все точки кривой L будут r-эквивалентны между собой в X.

Приступим к построению отображения f. На каждом шаге построения мы будем строить голоморфные бимероморфные отображения $f_i : X_i \to X_{i-1}$ и выбирать рациональные кривые $L_i \subset X_i$ такие, что $f_i(L_i) =$

$=L_{i-1}$ (здесь $L_0=L$ и $X_0=X$). Кривая L_n будет иметь нужное нам нормальное расслоение.

Шаг 1. Разрешим особые точки кривой L последовательностью моноидальных преобразований $f_1: X_1 \to X$ с центрами в этих точках. Кривая L_1 совпадает с собственным прообразом кривой L.

Шаг 2. По лемме Чао для алгебраических пространств существует голоморфное бимероморфное отображение $f_2: X_2 \to X_1$ неособого проективного многообразия X_2. Если $\dim_{\mathbf{C}} f_2^{-1}(x)=0$ для общей точки x кривой L_1, то в качестве L_2 возьмем кривую, накрывающую L_1. Очевидно, L_2 — рациональная кривая ввиду теоремы о связности слоев бимероморфного голоморфного отображения неособых пространств. Пусть $\dim_{\mathbf{C}} f_2^{-1}(x)=1$ для общей точки $x \in L_1$. Покажем, что существует неособая рациональная кривая $L_2 \in X_2$, накрывающая L_1. Действительно, по теореме Хиронаки мы можем разрешить точки неопределенности обратного отображения $f_2^{-1}: X_1 \to X_2$ последовательностью моноидальных преобразований с неособыми центрами. Так как f_2^{-1} неопределено в точках кривой L_1, то на каком-то шаге разрешения мы должны раздуть собственный прообраз кривой L_1. При раздутии вклеится рациональная поверхность V', которая накрывает кривую L_1. Следовательно, ее образ V в X_2 не может быть точкой и f_2 отображает V на L_1. Если $\dim_{\mathbf{C}} V=1$, то V — искомая кривая. Если $\dim_{\mathbf{C}} V=2$, то в качестве L_2 можно взять образ любого сечения линейчатой над L_1 поверхности V', в общей точке которого определено отображение в X_2.

Шаг 3. Выберем гиперплоское сечение E_1 проективного многообразия X_2, содержащее L_2, и другое сечение E_2 той же степени, не содержащее L_2. Гиперплоские сечения E_1 и E_2 определяют рациональное отображение $\varphi_2: X_2 \to \mathbf{P}^1$. Пусть $f_3: X_3 \to X_2$ — композиция моноидальных преобразований с неособыми центрами, разрешающая точки неопределенности отображения φ_2. Кривая L_3 есть собственный прообраз кривой L_2.

Итак, кривая L_3 лежит в слое S_3 морфизма $\varphi_3: X_3 \to \mathbf{P}^1$. Все следующие $f_i: X_i \to X_{i-1}$ являются композициями моноидальных преобразований с неособыми центрами, лежащими в слоях морфизма $\varphi_{i-1}=\varphi_3 \circ f_4 \circ \ldots \circ f_{i-1}$. Прообраз слоя S_3 будем обозначать через $S_i \subset X_i$.

Шаг 4. $f_4: X_4 \to X_3$ — моноидальное преобразование с центром в L_3, а $V=f_4^{-1}(L_3)$ является неособой линейчатой над L_3 поверхностью, т. е. расслоена над L_3 со слоями, изоморфными $\mathbf{P}^1$. Выберем такое сечение L_4 линейчатой поверхности V, что индекс самопересечения $(L_4^2)_V=n \geqslant 0$ и L_4 не лежит на других компонентах слоя S_4.

Шаг 5. Выберем $n+1$ точку на кривой L_4. Пусть $f_5: X_5 \to X_4$ — композиция моноидальных преобразований с центрами в этих точках и L_5 — собственный прообраз кривой L_4, а V' — собственный прообраз поверхности V. Хорошо известно, что композиция моноидальных преобразований f_5 индуцирует морфизм $f_5': V' \to V$, являющийся также композицией $n+1$ моноидального преобразования на V с центрами в этих точках. Каждое моноидальное преобразование неособой поверхности с центром в замкнутой точке x понижает на единицу индекс самопересечения неособой кривой, лежащей на поверхности и проходящей через x. Следовательно, $(L_4^2)_{V'}=-1$.

Шаг 6. Пусть $f_6: X_6 \to X_5$ — моноидальное преобразование с центром в кривой L_5, V_1 — собственный прообраз поверхности V', $V_2=f_6^{-1}(L_5)$. Так как $L_5 \subset V'$, то $f_6|_V$; $V_1 \to V'$ — изоморфизм и V_1 пересекается трансверсально с V_2 вдоль кривой $(f_6|_{V_1})^{-1}(L_5)$. Обозначим $L_6=(f_6|_{V_1})^{-1}(L_5)=V_1\cap V_2$. Поверхности V_1 и V_2 лежат в слое S_6 морфизма $\varphi_6: X_6\to\mathbf{P}^1$ и L_6 не лежит на других компонентах слоя S_6.

Пусть $k=(L_6^2)_{V_2}$. Тогда нормальное расслоение $N_{X_6/L_6}=\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)\oplus\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(k)$. Действительно, $L_6\subset V_i\subset X_6$, $i=1, 2$. Поэтому N_{V_i/L_6} вложены в N_{X_6/L_6}. Ввиду трансверсальности пересечения V_1 и V_2 вдоль неособой кривой L_6 естественный гомоморфизм $N_{V_1/L_6}\oplus N_{V_2/L_6}\to N_{X_6/L_6}$ локально тривиальных расслоений ранга 2 является вложением в каждой точке кривой L_6, а значит, и изоморфизмом. Но $N_{V_1/L_6}\simeq\mathcal{O}_{L_6}\otimes\mathcal{O}_{V_1}(L_6)$ и так как $(L_6^2)_{V_1}=-1$, то $N_{V_1/L_6}\simeq\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$. Аналогично, $N_{V_2/L_6}\simeq\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(k)$.

Шаг 7. Если $(L_6^2)_{V_2}\geqslant 0$, то выберем неособую кривую $L\subset V_1$, трансверсально пересекающую L_6 и такую, что $(L_6, L)_{V_1}>(L_6^2)_{V_2}$. Сделаем моноидальное преобразование $f_7: X_7\to X_6$ с центром в кривой L. Обозначим через L_7 собственный прообраз кривой L_6, а через V_1 и V_2 вновь обозначим собственные прообразы старых поверхностей V_1, $V_2\subset X_6$. Так как старые V_1 и V_2 пересекались трансверсально, а $L\subset V_1$ трансверсально пересекалась с L_6, то $f_7|_{V_2}$ является композицией $(L_6, L)_{V_1}$ моноидальных преобразований с центрами в точках пересечения кривых L и L_6. Следовательно, $(L_7^2)_{V_2}<0$. Кроме того, $(L_7^2)_{V_1}=-1$, так как $f_7|_{V_1}$ — изоморфизм. Слой $S_7=\sum\alpha_iV_i$, где V_1 и V_2 — рассмотренные выше поверхности, V_1 и V_2 неособы и трансверсально пересекаются вдоль L_7. Кривая L_7 не лежит на других компонентах слоя S_7.

Для вычисления нормального расслоения кривой $L_i\subset X_i$ нам понадобятся следующие две леммы.

2.3. ЛЕММА. *Пусть $\varphi: X\to\mathbf{P}^1$ — морфизм неособого полного трехмерного алгебраического многообразия X на прямую $\mathbf{P}^1$, и пусть в слое $S=\sum\alpha_iV_i$ этого морфизма неособая кривая $L=V_1\cap V_2$ не лежит на других компонентах слоя S. Предположим, что V_1 и V_2 неособы и пересекаются трансверсально друг с другом. Тогда*

$$\alpha_2(L^2)_{V_1}+\alpha_1(L^2)_{V_2}=-\sum_{i\geqslant 3}\alpha_i(L, V_i)_X.$$

Доказательство. Индекс пересечения $(L, S)_X=0$, так как S — слой морфизма. Следовательно,

$$\alpha_1(L, V_1)_X+\alpha_2(L, V_2)_X=-\sum_{i\geqslant 3}\alpha_i(L, V_i)_X.$$

Но $(L, V_1)_X=(V_1, V_2, V_1)_X=(L^2)_{V_2}$, так как $V_1\cap V_2=L$ и V_1 с V_2 пересекается трансверсально. Аналогично, $(L, V_2)_X=(L^2)_{V_1}$.

2.4. ЛЕММА. *Пусть $f: X'\to X$ — моноидальное преобразование с центром в неособой кривой $L\subset X$, L' — сечение линейчатой над L поверхности $V'=f^{-1}(L)$. Пусть D — поверхность в X, не содержащая L, и D' — ее собственный прообраз. Тогда*

$$(L, D)_X=(L', D')_{X'}.$$

Доказательство. Пусть $x\in L\subset X$ и сечение L' проходит через $x'\in f^{-1}(x)$. Сравним индексы пересечения поверхностей D и D' с кривыми L и L' (соотв. в точках x и x'). Мы можем выбрать такие локальные параметры v_1, v_2, v_3 в точке x и u_1, u_2, u_3 в x', что $f: X'\to X$ в окрестностях точек x и x' задается уравнениями $v_1=u_1$, $v_2=u_1\cdot u_2$, $v_3=u_3$. При этом $v_1=v_2=0$ будут локальными уравнениями кривой $L\subset X$, а $u_1=0$ —

локальное уравнение поверхности V' и слой $f^{-1}(x)$ задается уравнениями $u_1=0$ и $u_2=0$.

Пусть D в окрестности точки x задается уравнением $h(v_1, v_2, v_3)=0$. Тогда в локальном кольце $\mathcal{O}^{\text{ан}}_{X,x}$ функция h может быть представлена в виде $h=v_1g_1(v_1, v_2, v_3)+v_2g_2(v_1, v_2, v_3)+v_3{}^k\cdot r(v_1, v_2, v_3)$, где $g_i, r\in \mathcal{O}^{\text{ан}}_{X,x}$ и $r\notin m_x$, а $k=(L, D)_x$ — индекс пересечения L и D в точке x. В окрестности точки x' поверхность D' задается уравнением

$$u_1\cdot g_1(u_1, u_1u_2, u_3)+u_1\cdot u_2\cdot g_2(u_1, u_1u_2, u_3)+u_3^k r(u_1, u_1u_2, u_3)=0.$$

Ограничение дивизора D' на V' задается уравнением $u_3{}^k=0$, так как $r\notin m_x$. Следовательно, в окрестности слоя $f^{-1}(x)$ пересечение $(D', V')_{x'}$ равно $k\cdot f^{-1}(x)$. Слой $f^{-1}(x)$ пересекается с сечением L' трансверсально в одной точке, поэтому $(L', D')_{x'}=k$ и лемма доказана.

Шаг 8. Итак, на X_7 есть две поверхности V_1 и V_2, пересекающиеся трансверсально вдоль кривой $L_7=V_1\cap V_2$, $(L_7{}^2)_{V_1}=-1$, $(L_7{}^2)_{V_2}=-p<0$. Если $p=1$, то теорема доказана. Пусть $p>1$. Чтобы понизить p на единицу, сделаем моноидальное преобразование $f_8: X_8\to X_7$ с центром в кривой L_7. Пусть $f_8{}^{-1}(L_7)=V$. Обозначим вновь через V_1 собственный прообраз старой V_1 (изоморфный новой V_1, так как f_8 раздувает дивизор, лежащий на старой $V_1\subset X_7$). Пусть $L_8=V_1\cap V$. Тогда L_8 — неособая кривая, $f_8|_{V_1}(L_8)=L_7$, $f_8|_{V_1}$ — изоморфизм и поэтому $(L_8{}^2)_{V_1}=-1$. Кроме того, V_1 и V пересекаются трансверсально вдоль L_8, L_8 не лежит на других компонентах слоя S_8, отличных от V_1 и V, и не пересекается с собственным прообразом старой поверхности $V_2\subset X_7$. Так как слой S_7 имел кратность $\alpha_1+\alpha_2$ вдоль кривой L_7, то $S_8=(\alpha_1+\alpha_2)V+\sum \alpha_iV_i$. По лемме 2.3

$$(\alpha_1+\alpha_2)(L_8^2)_{V_1}+\alpha_1(L_8^2)_V=-\sum_{i\geqslant 2}\alpha_i(L_8, V_i)_{X_8}$$

и

$$\alpha_2(L_7^2)_{V_1}+\alpha_1(L_7^2)_{V_2}=-\sum_{i\geqslant 3}\alpha_i(L_7, V_i)_{X_7}.$$

По лемме 2.4 правые части этих равенств совпадают, так как L_8 не пересекается с прообразом старой V_2. Следовательно,

$$(\alpha_1+\alpha_2)(L_8^2)_{V_1}+\alpha_1(L_8^2)_V=\alpha_2(L_7^2)_{V_1}+\alpha_1(L_7^2)_{V_2}.$$

Но $(L_8{}^2)_{V_1}=(L_7{}^2)_{V_1}=-1$. Поэтому $(L_8{}^2)_V-1=(L_7{}^2)_{V_2}$, т. е. мы повысили индекс самопересечения кривой L_i на соседней с V_1 компоненте слоя S_i, пересекающейся с V_1 вдоль кривой L_i. А так как $(L_7{}^2)_{V_2}=-p<0$, то после аналогичных раздутий $f_9, \ldots, f_{p+6}$ раздутию f_8 мы получим нужную нам кривую L_{p+6}, нормальное расслоение которой в X_{p+6} есть $N_{X_{p+6}/L_{p+6}}\simeq$ $\simeq\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$. Теорема доказана.

2.5. Усилим лемму 1.6. Для этого введем следующее

Определение. *Пусть Y — подмножество модели X. Точки $x_1, x_2\in Y$ называются рационально связанными в Y, если существует конечная последовательность рациональных (быть может, особых) кривых $L_1, \ldots$ $\ldots, L_n$, соединяющая x_1 и x_2 в Y, т. е. такая, что*

а) $L_i\subset Y$,

б) $x_1\in L_1$, $x_2\in L_n$,

в) $L_i\cap L_{i+1}\neq\varnothing$.

Подмножество Y называется рационально связным в X, если любые две точки $x_1, x_2 \in Y$ рационально связаны в Y.

2.6. Предложение. *Пусть X — модель и $\bar{x}$ — r-минимальная точка поля K. Тогда любые две точки $x_1, x_2 \in \mathrm{Tr}_X\bar{x}$ рационально связаны в $\mathrm{Tr}_X\bar{x}$.*

2.7. ЛЕММА. *Пусть $f : X_1 \to X$ — бимероморфное голоморфное отображение моделей поля K, и пусть $Y \subset X$ — рационально связное подмножество в X. Тогда $f^{-1}(Y)$ рационально связно в X_1.*

Доказательство леммы 2.7. Из теоремы Хиронаки следует, что существует диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X_1 \arrow[rr, "f"] & & X \end{tikzcd}$$

в которой h — композиция моноидальных преобразований с неособыми центрами. Заметим, что образ $g(L)$ любой рациональной кривой L есть рациональная кривая, либо точка. Поэтому образ рационально связного множества является рационально связным. А так как $g(h^{-1}(Y)) = f^{-1}(Y)$, то достаточно доказать, что $h^{-1}(Y)$ рационально связно. Для этого достаточно доказать, что прообраз рационально связного множества при моноидальном преобразовании с неособым центром является рационально связным.

Пусть $h : Z \to X$ — моноидальное преобразование с неособым центром $C \subset X$. Рациональная связность прообраза $h^{-1}(Y)$ рационально связного множества $Y \subset X$ очевидна ввиду того, что:

а) Прообраз $h^{-1}(x)$ замкнутой точки $x \in C$ при моноидальном преобразовании h есть проективное пространство, которое, очевидно, рационально связно.

б) Прообраз $h^{-1}(L)$ рациональной кривой $L \subset C$ есть рациональное многообразие (проективизация нормального расслоения), которое также рационально связно.

Доказательство предложения 2.6. Образ при голоморфном бимероморфном отображении $f_{i,i+1} : X_i \to X_{i+1}$ рационально связного множества будет рационально связным. Отсюда и из леммы 2.7, заменяя слова «аналитически связно» в доказательстве леммы 1.6 на слова «рационально связно», получим доказательство предложения 2.6.

2.8. Определение. *Пусть $x \in X$. Максимальное подмножество R_x в X точек, рационально связанных с точкой x, называется рациональным замыканием точки x в X.*

Следствием теоремы 2.2 и предложения 2.6 является следующая

2.9. ТЕОРЕМА. *Пусть X — модель и $\bar{x}$ — r-минимальная точка поля K. Тогда для любой $x \in \mathrm{Tr}_X\bar{x}$ $\mathrm{Tr}_X\bar{x} = R_x$.*

§ 3. Минимальные объекты трехмерных алгебраических многообразий

3.1. Согласно теореме 2.9 понятия r-эквивалентности и рационального замыкания точки очень близки друг к другу. Поэтому в дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Предложение. *Если все точки неособой поверхности S рационально связаны между собой, то S — рациональная поверхность.*

Доказательство. Согласно критерию Кастельнуово — Энриквеса ([1]) нам достаточно доказать, что иррегулярность $q(S)$ и все кратные роды $P_n(S)$ при $n>0$ поверхности S равны 0.

Покажем прежде всего, что если все точки поверхности S рационально связаны между собой, то на S лежит несчетное множество рациональных кривых. Действительно, пусть $C\subset S$ — произвольная кривая рода $g(C)>0$. Как множество кривая C состоит из континуума точек. С другой стороны, через любую точку кривой C проходит рациональная кривая, не совпадающая с C и поэтому пересекающая C в конечном числе точек. Следовательно, рациональных кривых, лежащих на S, есть несчетное множество.

Покажем, что иррегулярность $q(S)$ поверхности S равна нулю. Действительно, если $q(S)>0$, то образ поверхности S при отображении Альбанезе есть кривая или поверхность, лежащая в абелевом многообразии, и в этих случаях все точки поверхности S не могут быть рационально связанными между собой.

Докажем, что при $n>0$ все кратные роды $P_n(S)=0$. Для этого нам достаточно найти линейчатую поверхность, накрывающую S. Так как $q(S)=0$, то группа Пикара $\operatorname{Pic} S$ является подмодулем конечно порожденного над $\mathbf{Z}$ модуля $H^2(S, \mathbf{Z})$. Поэтому найдется такая линейная система $|C|$ на S, в которой несчетное подмножество элементов C_λ являются рациональными кривыми. Если общий элемент системы $|C|$ рационален, то по лемме Нетера [1] S— рациональная поверхность.

Пусть род общего элемента из $|C|$ больше нуля. Рассмотрим $Z\subset S\times\mathbf{P}^{\dim|C|}$ — подмногообразие, определяющее линейную эквивалентность кривых $C_\lambda\in|C|$, $\lambda\in\mathbf{P}^{\dim|C|}=Y$, $q(p^{-1}(\lambda))=C_\lambda\in|C|$, где $p=\mathrm{pr}_2|_Z$ и $q=\mathrm{pr}_1|_Z$. Покажем, что существует такое подмногообразие $V\subset Y$, $\dim V\geqslant 1$, что для любого $\lambda\in V$ прообраз $p^{-1}(\lambda)$ есть рациональная кривая. Для доказательства существования такого V достаточно показать, что если $g(C_\lambda)>0$ для общего слоя $C_\lambda\simeq p^{-1}(\lambda)$, то найдется подмногообразие $Y_1\subset Y$ такое, что $\dim Y_1<\dim Y$ и над несчетным множеством точек $\lambda\in Y_1$ слои C_λ являются рациональными кривыми.

Представим подмногообразие $\operatorname{sing} Z$ особых точек многообразия Z в виде $\operatorname{sing} Z=Z^1\cup Z^0$, $Z^0\cap Z^1=\varnothing$, где Z^1 — объединение всех подмногообразий $D_i\subset\operatorname{sing} Z$, для которых $\dim D_i=\dim p(D_i)+1$. Очевидно, $p(Z^1)\neq Y$. В случае, когда несчетное множество рациональных кривых C_λ принадлежит Z^1, в качестве Y_1 можно взять $p(Z^1)$. Пусть в Z^1 лежит не более чем счетное множество рациональных кривых C_λ. Тогда несчетное множество рациональных кривых C_λ лежит в $Z\setminus Z^1$. Пусть $\nu\colon \tilde{Z}\to Z$ — нормализация и $\tilde{p}=p\circ\nu$. Рациональные кривые C_λ, не принадлежащие Z^1, пересекаются с $\operatorname{sing} Z$ лишь в конечном числе точек. Поэтому несчетное множество слоев морфизма $\tilde{p}$ являются рациональными кривыми. Если несчетное множество рациональных слоев морфизма $\tilde{p}$ пересекается с $\operatorname{sing}\tilde{Z}$, то в качестве Y_1 можно взять $\tilde{p}(\operatorname{sing}\tilde{Z})$. Если с $\operatorname{sing}\tilde{Z}$ пересекается не более чем счетное множество рациональных слоев морфизма $\tilde{p}$, то несчетное число слоев морфизма $\tilde{p}\colon \tilde{Z}\setminus\operatorname{sing}\tilde{Z}\to Y\setminus\tilde{p}(\operatorname{sing}\tilde{Z})$ являются рациональными кривыми и поэтому являются вырожденными слоями. Следовательно, в качестве Y_1 можно взять замыкание в Y подмногообразия в $Y\setminus\tilde{p}(\operatorname{sing}\tilde{Z})$, над точками которого морфизм $\tilde{p}$: $\tilde{Z}\setminus\operatorname{sing}\tilde{Z}\to Y\setminus\tilde{p}(\operatorname{sing}\tilde{Z})$ не гладок.

Для доказательства предложения осталось заметить, что если L — любая кривая, лежащая в V, то $p^{-1}(L)$ — линейчатая поверхность и q: $p^{-1}(L)\to S$ — накрытие, так как разные слои $p^{-1}(\lambda)$ отображаются в различные элементы $C_\lambda\in|C|$. Все кратные роды линейчатой поверхности равны нулю, следовательно, все кратные роды поверхности S $P_n(S)=0$ при $n>0$. Предложение доказано.

3.2. Очевидно, необходимым условием того, чтобы минимальный объект $\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ модели X был алгебраическим многообразием, является условие:

$*$) *Для всех r-минимальных точек $\bar{x}\in\mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ поля частных колец $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ совпадают между собой.*

В случае выполнения условия $*$) обозначим через $\mathbf{C}(\mathscr{X})$ поле частных кольца $\mathcal{O}_{\bar{x}}$, $\bar{x}\in\mathscr{X}$.

К сожалению, условие $*$) выполнено не всегда.

3.3 Пример. Исследуем минимальный объект модели $X=S\times C$, где S — поверхность типа К3, на которой лежит бесконечное множество рациональных кривых, а C — кривая рода $g(C)>0$. Поверхность типа К3 с бесконечным числом рациональных кривых существует (см., например, [2]). Заметим, что из доказательства предложения 3.1 и того, что $q(S)=0$, следует, что на S лежит лишь счетное множество рациональных кривых. Обозначим их через L_i, $i\in\mathbf{N}$, и пусть $R=\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}}L_i$. Тогда $R=\bigcup R_\alpha$, где R_α — рациональное замыкание точки $\alpha\in S$ и объединение берется по тем α, для которых R_α содержит кривую. Заметим, что $R\neq S$.

Покажем, что число различных R_α конечно. Действительно, рациональные кривые являются ненулевыми циклами конечнопорожденной решетки $H_2(S, \mathbf{Z})$ с невырожденной формой пересечения. Следовательно, если различных R_α — счетное число, то, выбирая кривые $L_{\alpha_i}\subset R_{\alpha_i}$, получим, что для некоторого n кривые $L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_n}$ линейно зависимы над $\mathbf{Z}$. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n}a_iL_{\alpha_i}=0$, $a_i\in\mathbf{Z}$ и не все $a_i=0$. Перенося члены с отрицательными a_i в другую часть равенства, получим, что $\{1, \ldots, n\}=N_1\bigcup N_2$, $N_1\bigcap N_2=\varnothing$ и $\sum\limits_{i\in N_1}b_iL_{\alpha_i}=\sum\limits_{i\in N_2}b_iL_{\alpha_i}$, где $b_i=\pm a_i$. Рациональные кривые из различных R_α не пересекаются между собой. Следовательно, $(L_{\alpha_i}, L_{\alpha_j})_S=0$ при $i\neq j$. Поэтому $(L^2)_S=0$ для $L=\sum\limits_{i\in N_1}b_iL_{\alpha_i}$, т. е. L определяет пучок эллиптических кривых на S ([1]). Применяя еще раз условие $(L_{\alpha_i}, L_{\alpha_j})_S=0$ при $i\neq j$, получим, что все L_{α_j} лежат в вырожденных слоях пучка $|L|$. Но таких слоев — конечное число. Следовательно, различных R_α — конечное число.

Пусть R_{α_0} состоит из бесконечного числа рациональных кривых. Исследуем это $R_{\alpha_0}=R_0$. Покажем, что существует такой дивизор $D=\sum\limits_{L_i\subset R_0}a_iL_i$, где $a_i\geqslant 0$ и почти все $a_i=0$, что $(D^2)_S>0$. Используя бесконечность кривых $L_i\subset R_0$, при помощи рассуждений, аналогичных приведенным выше, можно показать, что найдется дивизор $D_1=\sum\limits_{i=1}^{n}b_iL_i$,

$L_i \subset R_0$, такой, что D_1 определяет подвижную линейную систему без неподвижных компонент. Следовательно, $(D_1^2)_S \geqslant 0$. Если $(D_1^2)_S > 0$, то $D = D_1$. Если $(D_1^2)_S = 0$, то $\bar{R}_0 = R_0 \setminus \{$компоненты вырожденных слоев пучка $|D_1|\}$ состоит из бесконечного числа кривых и поэтому опять можно найти дивизор $D_2 = \sum_{L_i \subset \bar{R}_0} b_i L_i$ такой, что $(D_2^2)_S \geqslant 0$. Так как кривые $L_i \subset \bar{R}_0$ не лежат в вырожденных слоях пучка $|D_1|$, то $(D_1, D_2)_S > 0$. Следовательно, индекс самопересечения дивизора $D = D_1 + D_2$ равен $(D^2)_S = (D_1^2)_S + 2(D_1, D_2)_S + (D_2^2)_S > 0$. В качестве следствия получаем, что дивизор D на S является обильным по модулю «2-кривых» дивизором ([1]). Поэтому любая рациональная на S и регулярная во всех точках дивизора $D = \sum a_i L_i$ функция является константой на всем S.

На модели $X = S \times C$ рациональное замыкание R_x точки x имеет один из двух типов:

1) $R_x = x$, если проекция на S $\mathrm{pr}_S(x) \notin R$,

2) если $\mathrm{pr}_S(x)$ принадлежит некоторому R_α, то

$$R_x = \mathrm{pr}_S^{-1}(R_\alpha) \cap \mathrm{pr}_C^{-1}(\mathrm{pr}_C(x)).$$

Действительно, любое R_x проектируется на C в точку, так как $g(C) > 0$. Поэтому R_x лежит в слое проекции pr_C, изоморфном поверхности S, и либо есть точка, либо совпадает с некоторым R_α. Отсюда следует, что если $R_x = x$, то поле частных кольца $\mathcal{O}_{\bar{x}}$, $x \in \bar{x}$, совпадает с $\mathbf{C}(S \times C)$.

Пусть $o \in C$ и $S_o = \mathrm{pr}_C^{-1}(o)$. Рассмотрим $x \in \mathrm{pr}_S^{-1}(R_{\alpha_0}) \cap S_o = R_x$. Тогда любая функция из $\mathcal{O}_{\bar{x}}$, $x \in \bar{x}$, должна быть регулярна на $\mathrm{pr}_S^{-1}(R_{\alpha_0}) \cap S_o$. В частности, она должна быть регулярна на $\mathrm{pr}_S^{-1}(D) \cap S_o$. Но любая рациональная на S_o и регулярная в точках дивизора D функция является константой на S_o. Следовательно, поле частных кольца $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ изоморфно $\mathrm{pr}_C^*(\mathbf{C}(C)) \not\approx \mathbf{C}(X)$ и условие $*$) для модели $X = S \times C$ не выполнено. Кроме того, отсюда видно, что естественная проекция $\pi_X \colon X \to \mathscr{X}$ в нашем примере не является непрерывным отображением в топологии Зарисского. Действительно, пусть $x \in X$ — точка типа 1), и пусть $f \in \mathrm{pr}_S^*(\mathbf{C}(S)) \subset \mathbf{C}(X)$ — функция, регулярная в x и $f \neq \mathrm{const}$ на D. Рассмотрим открытое множество $U_f = \{\bar{x} \in \mathscr{X} \mid f \in \mathcal{O}_{\bar{x}}\}$. Так как $f \neq \mathrm{const}$ на D, то точки $\bar{x}$, представители x которых лежат в $\mathrm{pr}_S^{-1}(R_{\alpha_0})$, не принадлежат U_f. Следовательно, $\pi_X^{-1}(U_f)$ лежит в дополнении к счетному числу поверхностей $\mathrm{pr}_S^{-1}(L_i)$ прообразов кривых $L_i \subset R_{\alpha_0}$ и поэтому не является открытым множеством на X в топологии Зарисского.

3.4. В дальнейшем предполагаем, что условие $*$) выполнено. Выясним, когда минимальный объект $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ модели X является алгебраическим многообразием.

Определение. *Пусть x — нормальная особая точка многообразия X и $p \colon X' \to X$ — какое-нибудь разрешение особенностей. Особенность $x \in X$ называется квазирациональной особенностью, если $p^{-1}(x)$ рационально связно в X'.*

Согласно лемме 2.7 понятие квазирациональности особенности не зависит от разрешения.

3.5. ТЕОРЕМА. *Минимальный объект $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathbf{C}(X)}$ трехмерной модели X является алгебраическим многообразием тогда и только тогда, когда X есть многообразие одного из следующих типов:*

0) *Все точки $x \in X$ рационально связаны между собой. В этом случае $\mathscr{X}$ — точка.*

1) *X может быть расслоено над неособой кривой C на рациональные поверхности и расслоение $\pi\colon X\to C$ не имеет рациональных квазисечений. В этом случае $\mathscr{X}=C$.*

2) *X является расслоением на коники над алгебраической поверхностью S, имеющей лишь квазирациональные особенности, и на S нет рациональных кривых. В этом случае $\mathscr{X}=S$.*

3) *X бимероморфна алгебраическому многообразию X_0, имеющему лишь квазирациональные особенности, и на X_0 нет рациональных кривых. В этом случае $\mathscr{X}=X_0$.*

Доказательство. Достаточность условий 0) и 3) сразу следует из теоремы 2.9.

Из доказательства теоремы 3.1.3 в [4] о вырожденных слоях вырождения рациональных поверхностей и из леммы 2.7 о рациональной связности прообраза рационально связного множества следует рациональная связность вырожденного слоя вырождения рациональных поверхностей. Отсюда и из теоремы 2.9 следует достаточность условия 1).

Для расслоения на коники $\pi\colon X\to S$ согласно теореме 1.13 в [3] существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{q} & X \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S_1 & \xrightarrow[p]{} & S \end{array}$$

в которой X_1, S_1 — неособые полные многообразия, p — бирациональный морфизм, q — бирациональное отображение и $\pi_1\colon X_1\to S_1$ — плоское расслоение на коники. Так как на S нет рациональных кривых и все особенности многообразия S квазирациональны, а $\pi_1\colon X_1\to S_1$ — плоское расслоение на коники, то рациональное замыкание R_x точки $x\in X_1$ совпадает с прообразом $\pi_1^{-1}(p^{-1}(\pi_1\circ p(x)))$. Отсюда и из теоремы 2.9 следует достаточность условия 2).

Необходимость. Пусть $d_{\mathscr{X}}=\deg\operatorname{Tr}\mathbf{C}(\mathscr{X})/\mathbf{C}$. Тогда $0\leqslant d_{\mathscr{X}}\leqslant 3$.

Случай $d_{\mathscr{X}}=0$ тривиален.

В случае $d_{\mathscr{X}}\geqslant 0$ заметим, что $\mathbf{C}(\mathscr{X})\subset\mathbf{C}(X)$, и поэтому существует рациональное отображение $\pi\colon X\to\mathscr{X}$. Из определения структуры кольцованного пространства $(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}})$ следует, что для алгебраического X это π совпадает с естественным отображением факторизации $\pi_X\colon X\to\mathscr{X}$ по отношению r-эквивалентности и является морфизмом. Согласно теореме 2.9 все слои морфизма π являются рационально связными многообразиями.

Пусть $\bar{x}\in\mathscr{X}$ — особая точка многообразия $\mathscr{X}$. Покажем, что $\bar{x}$ — квазирациональная особая точка. Действительно, пусть $p\colon\widetilde{\mathscr{X}}\to\mathscr{X}$ и $\tau\colon X_1\to X\times_{\mathscr{X}}\widetilde{\mathscr{X}}$ — разрешения особенностей многообразий $\mathscr{X}$ и $X\times_{\mathscr{X}}\widetilde{\mathscr{X}}$. Обозначим $\tau_1=\mathrm{pr}_1\circ\tau$, $\tau_2=\mathrm{pr}_2\circ\tau$. Любые две точки x_1, $x_2\in\tau_2^{-1}(p^{-1}(\bar{x}))=\operatorname{Tr}_{X_1}\bar{x}$ рационально связаны в $\operatorname{Tr}_{X_1}\bar{x}$. Следовательно, любые две точки из $p^{-1}(\bar{x})$ также рационально связаны и поэтому $\bar{x}$ — квазирациональная особая точка (напомним, что $\bar{x}$ — нормальная точка многообразия $\mathscr{X}$ ввиду леммы 1.7).

Случай $d_{\mathscr{X}}=1$. Согласно лемме 1.7 все кольца $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ целозамкнуты и поэтому $\mathscr{X}$ является неособой кривой. Общий слой морфизма π является рациональной поверхностью ввиду предложения 3.1.

Случай $d_{\mathscr{X}}=2$. В этом случае общий слой одномерен и согласно теореме 2.9 является рациональной кривой. Покажем, что на $\mathscr{X}$ нет рациональных кривых. Действительно, если бы на $\mathscr{X}$ была рациональная кривая L, то $\pi^{-1}(L)$ — рациональная линейчатая поверхность, все точки которой рационально связаны между собой, и по теореме 2.9 эта поверхность должна отображаться в точку.

Случай $d_{\mathscr{X}}=3$. Ввиду рациональной связности слоев морфизма π, π: $X\to\mathscr{X}$ является бирациональным отображением для любой алгебраической модели X. Необходимость условия, что на $\mathscr{X}$ нет рациональных кривых, следует из теоремы 2.9.

3.6. Очевидно, все четыре типа многообразий из теоремы 3.5 существуют. В качестве примера многообразий типа 3) можно взять любое разветвленное накрытие абелева многообразия.

В качестве следствия из теоремы 2.9 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Минимальный объект трехмерного унирационального многообразия есть точка.*

3.7. В заключение напомним гипотезу, принадлежащую Севери ([5]).

Гипотеза. *Минимальный объект модели X есть точка тогда и только тогда, когда X — унирациональное многообразие.*

Литература

1. *Шафаревич И. Р.* и др. Алгебраические поверхности. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 75. М.: Наука, 1965.
2. *Никулин В. В.* О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения. Итоги науки и техники, ВИНИТИ, сер. Совр. пробл. матем., 1981, т. 18, с. 3—114.
3. *Саркисов В. Г.* О структурах расслоений на коники. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1982, т. 46, № 2, с. 371—408.
4. *Persson U.* On degenerations of algebraic surfaces. — Memoirs of the Am. Math. Soc., 1977, v. 11, № 189, p. 1—144.
5. *Roth L.* On a conjecture of Severi.— Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. fis.-mat. Ser. 8, 1969, v. 47, № 5, p. 245—248.
6. *Манин Ю. И.* Кубические формы. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию
15.V.1984