УДК 512.7+515.1

 Вик. С. КУЛИКОВ

ОБОБЩЕННАЯ И ЛОКАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМЫ ЯКОБИАНА

В статье построен контрпример к обобщённой проблеме якобиана и дано положительное решение локального аналога классической проблемы якобиана. Рассмотрена связь между классической проблемой якобиана и некоторыми вопросами, связанными с алгеброй дифференцирований кольца многочленов.

Введение

Классическая проблема якобиана, сформулированная Кэллером в 1939 г. [3], состоит в следующем:

CJ_n. *Является ли изоморфизмом морфизм* $F\colon \mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ *аффинных пространств, заданный многочленами*

$$y_i=f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, \ldots, n, \tag{1}$$

и имеющий якобиан $\det J(F)=\det\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|$, *нигде не обращающийся в нуль?*

Условие «$\det J(F)$ нигде не обращается в нуль» равносильно условию

$$\det J(F)\equiv\mathrm{const}\neq 0, \tag{2}$$

а также означает, что F является этальным морфизмом.

Пусть $F\colon X\to Y$ удовлетворяет условию (2), где $X=Y=\mathbf{C}^n$. Тогда легко показать, что любая гиперповерхность в Y имеет непустое пересечение с образом $F(X)$, т. е. морфизм F является сюръективным отображением по модулю коразмерности 2.

Аффинное пространство $\mathbf{C}^n$ является односвязным многообразием. Поэтому естественным обобщением проблемы якобиана является следующая проблема (обобщенная проблема якобиана):

GJ_n. *Является ли бирациональным изоморфизмом этальный сюръективный по модулю коразмерности 2 морфизм* $F\colon X\to\mathbf{C}^n$ *односвязного алгебраического многообразия* X, $\dim_{\mathbf{C}} X=n$?

Пусть $D\subset\mathbf{C}^n$ — алгебраическая гиперповерхность (возможно, приводимая), и пусть y — неособая точка гиперповерхности D. Рассмотрим действительную плоскость Π, трансверсально пересекающую D в точке y. Пусть $C\subset\Pi$ — окружность малого радиуса с центром в точке y. Как хорошо известно (см., например, [4]), фундаментальная группа $\pi_1(\mathbf{C}^n\setminus D, o)$ порождается петлями γ следующего вида. Петля γ состоит из пути L, соединяющего точку o с некоторой точкой $y_1\in C$, обхода вокруг точки y по окружности C, и возврата в точку o по пути L в обратном направлении. Назовем такие петли γ (а также, соответствующие им элементы в $\pi_1(\mathbf{C}^n\backslash D)$) *геометрическими образующими.*

Теорема 1 из § 1 устанавливает эквивалентность между проблемой GJ_n и следующим вопросом о фундаментальных группах дополнения к кривым в $\mathbf{C}^2$.

FJ. Пусть $D\subset\mathbf{C}^2$ – кривая, и пусть G – подгруппа конечного индекса в $\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D, o)$, порожденная частью множества геометрических образующих. Верно ли, что в этом случае G совпадает с $\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D, o)$?

Параллельно проблеме FJ можно поставить аналогичный вопрос в локальном случае. Пусть $\Delta^2\subset\mathbf{C}^2$ – шар радиуса ε и $(D, o)\subset(\Delta^2, o)$ – росток кривой. Тогда для достаточно малого $\varepsilon>0$ фундаментальная группа $\pi_1(\Delta^2\backslash D)$ не зависит от ε. Локальная проблема якобиана состоит в следующем:

LJ. Пусть $(D, o)\subset(\Delta^2, o)$ – росток аналитической кривой, и пусть G – подгруппа конечного индекса в $\pi_1(\Delta^2\backslash D)$, порожденная частью множества геометрических образующих. Верно ли, что в этом случае G совпадает с $\pi_1(\Delta^2\backslash D)$?

Существование подгруппы конечного индекса d в $\pi_1(\Delta^2\backslash D)$, порожденной частью множества геометрических образующих, эквивалентно (теорема 2 в § 2) существованию голоморфного неразветвленного отображения $F: X\to\Delta^2$ степени d односвязной аналитической поверхности X на $\Delta^2\backslash o$.

В § 2 приведено доказательство того, что локальная проблема якобиана имеет положительное решение. В то же время в § 3 показано, что обобщенная проблема якобиана имеет отрицательное решение. В § 3 построен пример трехлистного неразветвленного морфизма односвязной поверхности X на $\mathbf{C}^2$, сюръективного по модулю коразмерности 2. Отметим, что для морфизма $F: \mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$, удовлетворяющего условию (2) и не являющегося изоморфизмом, степень $\deg F$ должна быть >3 (см. [9]).

Кроме того, в § 4 рассмотрена связь между проблемой якобиана и вопросом о совпадении полугруппы эндоморфизмов с нулевым ядром алгебры дифференцирований кольца многочленов с группой автоморфизмов этой алгебры (теорема 4), а также – между этой проблемой и вопросом о существовании глобальных решений для некоторого класса дифференциальных уравнений 1-го порядка с частными производными (теорема 5).

Обзор других результатов, связанных с проблемой якобиана, можно найти в [1].

§ 1. Обобщенная проблема якобиана и фундаментальная группа дополнения к кривой в $\mathbf{C}^2$

Пусть $F: X\to\mathbf{C}^n$ – этальный сюръективный вне коразмерности 2 морфизм односвязного многообразия X. Обозначим через $\mathbf{C}(X)$ поле рациональных функций на X. Морфизм F определяет вложение

$$F^*: \mathbf{C}(y_1, \dots, y_n)=\mathbf{C}(Y)\subsetneq\mathbf{C}(X)$$

поля рациональных функций на $Y=\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}(X)$, которое является расширением конечной степени d. Пусть $d>1$. Обозначим через R целое замыкание кольца многочленов $\mathbf{C}[y_1, \ldots, y_n]$ в поле $\mathbf{C}(X)$. Тогда $\overline{X} = \operatorname{Spec} R$ является нормальным алгебраическим многообразием и вложение $\mathbf{C}[y_1, \ldots, y_n] \subset R$ определяет конечный морфизм $\overline{F}\colon \overline{X} \to \mathbf{C}^n$, который может быть включен в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "F"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{F}"] \\ & \mathbf{C}^n \end{tikzcd}$$

Поскольку F — этальный морфизм, а $\overline{X}$ — нормальное многообразие, то бирациональный изоморфизм i является вложением. Из односвязности пространства $\mathbf{C}^n$ и условия $d>1$ следует, что $\overline{F}$ обязан быть разветвленным морфизмом. Пусть $S \subset \overline{X}$ — дивизор ветвления морфизма $\overline{F}$. Тогда $S \subset \overline{X} \setminus i(X)$, так как F — этальный морфизм. Алгебраическое многообразие $\overline{X} \setminus S$ является односвязным, поскольку любая петля в $\overline{X} \setminus S$ гомотопна петле, лежащей в $i(X)$, которое односвязно. Кроме того, ограничение $\overline{F}$ на $\overline{X} \setminus S$ является сюръективным морфизмом по модулю коразмерности 2. Поэтому в дальнейшем через X будет обозначаться многообразие $\overline{X} \setminus S$.

Обозначим через $D = \overline{F}(S)$ образ дивизора ветвления, и пусть $L = F^{-1}(D)$. Из сюръективности следует, что $L \neq \varnothing$. Ограничение F на $X \setminus L$ является топологическим накрытием. Это накрытие определяет вложение

$$F_*\colon \pi_1(X \setminus L) \hookrightarrow \pi_1(\mathbf{C}^n \setminus D).$$

Причем образ $F_*(\pi_1(X \setminus L))$ является подгруппой конечного индекса, равного d, в $\pi_1(\mathbf{C}^n \setminus D)$.

ЛЕММА. *Пусть X односвязно и L — гиперповерхность в X. Тогда $\pi_1(X \setminus L)$ порождается геометрическими образующими — обходами вокруг гиперповерхности L.*

Доказательство. Рассмотрим любую замкнутую петлю γ в $X \setminus L$. Тогда $\gamma = 1$ как элемент группы $\pi_1(X)$, так как X односвязно, т. е. существует непрерывное отображение $f\colon \Delta \to X$ диска $\Delta = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| \leqslant 1\}$ такое, что $f(\partial\Delta) = \gamma$, где $\partial\Delta$ — граница диска Δ. Кроме того, мы можем выбрать отображение f таким образом, что $f(\Delta)$ и L пересекаются трансверсально. Пусть $\{x_1, \ldots, x_m\} = f^{-1}(f(\Delta) \cap L)$.

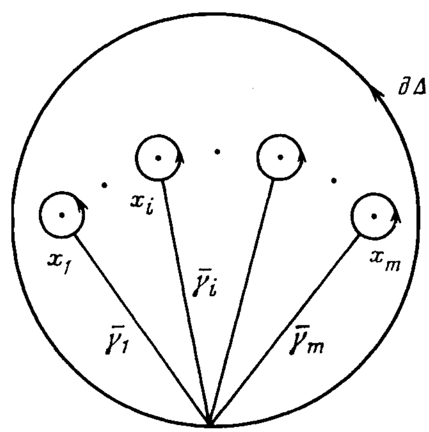

Рис. 1

Обозначим через $\bar{\gamma}_i$ геометрическую образующую в $\pi_1(\Delta\setminus\{x_1, \ldots, x_m\})$ — обход вокруг точки x_i (см. рис. 1). Тогда $\partial\Delta = \bar{\gamma}_m \ldots \bar{\gamma}_1$ как элемент в $\pi_1(\Delta\setminus\{x_1, \ldots, x_m\})$. Очевидно, петли $\gamma_i = f_i(\bar{\gamma}_i)$ — геометрические образующие в $\pi_1(X\setminus L)$ и $\gamma = \gamma_m \ldots \gamma_1$ как элемент в $\pi_1(X\setminus L)$. Лемма доказана.

Вернемся к вложению F_*: $\pi_1(X\setminus L) \hookrightarrow \pi_1(\mathbf{C}^n\setminus D)$. Поскольку гиперповерхность L не входит в дивизор ветвления морфизма F, то геометрическая образующая γ — обход вокруг гиперповерхности L, отображается в геометрическую образующую $F(\gamma)$ — обход вокруг гиперповерхности $F(L) \subset D$. Следовательно, группа $G = F_*(\pi_1(X\setminus L))$ есть подгруппа конечного индекса в $\pi_1(\mathbf{C}^n\setminus D)$, порожденная частью множества геометрических образующих.

Верно обратное утверждение, т. е. пусть $G \subset \pi_1(\mathbf{C}^n\setminus D)$ — подгруппа конечного индекса, равного d, порожденная частью множества геометрических образующих; тогда подгруппа G определяет односвязное алгебраическое многообразие X и этальный морфизм F: $X \to \mathbf{C}^n$ степени d, сюръективный по модулю коразмерности 2.

Действительно, подгруппа конечного индекса $G \subset \pi_1(\mathbf{C}^n\setminus D)$ определяет [2] нормальное многообразие $\bar{X}$ и конечный морфизм $\bar{F}$: $\bar{X} \to \mathbf{C}^n$ такой, что $\bar{F}$: $\bar{X}\setminus\bar{F}^{-1}(D) \to \mathbf{C}^n\setminus D$ — неразветвленное накрытие, отвечающее вложению $G \subset \pi_1(\mathbf{C}^n\setminus D, o)$. Выберем базисную точку $\bar{o} \in \bar{F}^{-1}(o) \subset \bar{X}\setminus\bar{F}^{-1}(D)$ так, что

$$\bar{F}_*(\pi_1(\bar{X}\setminus\bar{F}^{-1}(D), \bar{o})) = G.$$

Рассмотрим произвольную неособую точку $x \in D$. Пусть $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\} = \bar{F}^{-1}(x)$, и пусть s_i — кратность ветвления морфизма $\bar{F}$ в точке $\bar{x}_i$. Выберем достаточно маленькую окрестность U точки x так, что $\bar{F}^{-1}(U)$ есть несвязное объединение окрестностей $U_1, \ldots, U_k \subset \bar{X}$ точек $x_i \in U_i$. Пусть теперь геометрическая образующая γ состоит из пути l, соединяющего точку o с точкой $y \in U\setminus(D \cap U)$, обхода вдоль окружности $C \subset U\setminus(D \cap U)$ вокруг точки x, $y \in C$, и пути l^{-1}. Поскольку $\bar{F}$: $\bar{X}\setminus\bar{F}^{-1}(D) \to \mathbf{C}^n\setminus D$ — неразветвленное накрытие, то $\bar{F}^{-1}(l)$ есть несвязное объединение d путей $l_1, \ldots, l_d$, где $d = \deg \bar{F}$, соединяющих точки из $\bar{F}^{-1}(o)$ с точками $y_1, \ldots, y_d$. Пусть точка $\bar{o} \in \bar{F}^{-1}(o)$ соединена путем l_1 с точкой $y_1 \in U_1$. Очевидно, петля γ принадлежит $F_*(\pi_1(\bar{X}\setminus\bar{F}^{-1}(D), \bar{o})$ тогда и только тогда, когда точка $\bar{x}_1 \in U_1$ не является точкой ветвления $(s_1 = 1)$ морфизма $\bar{F}$. Более того, прообраз $\bar{\gamma} = \bar{F}_*^{-1}(\gamma)$ геометрической образующей $\gamma \in \bar{F}_*(\pi_1(\bar{X}\setminus\bar{F}^{-1}(D), \bar{o}))$ является геометрической образующей в $\pi_1(\bar{X}\setminus\bar{F}^{-1}(D), \bar{o})$.

Для геометрической образующей $\gamma \in \bar{F}_*(\pi_1(\bar{X}\setminus\bar{F}^{-1}(D), \bar{o})$ обозначим через L_γ неприводимую компоненту дивизора $\bar{F}^{-1}(D)$, обходом вокруг которой является петля $\bar{\gamma}$. Дивизор L_γ не принадлежит дивизору ветвления морфизма $\bar{F}$. Пусть $L = \cup L_\gamma$, где объединение взято по всем геометрическим образующим $\gamma \in G$, и пусть S — объединение дополнительных к L компонент дивизора $\bar{F}^{-1}(D)$, $\bar{F}^{-1}(D) = L \cup S$. Пусть $X = \bar{X}\setminus S$.

Утверждение. *Многообразие X односвязно.*

Доказательство. Вложение $X\setminus L = \bar{X}\setminus\bar{F}^{-1}(D) \subset X = \bar{X}\setminus S$ индуцирует эпиморфизм групп

$$\pi_1(X\setminus L) \to \pi_1(\bar{X}\setminus S) \to 0.$$

Все геометрические образующие из $\pi_1(X\backslash L)$ лежат в ядре этого эпиморфизма. С другой стороны, $\pi_1(X\backslash L)=\pi_1(\overline{X}\backslash \overline{F}^{-1}(D))$ порождается геометрическими образующими. Следовательно, $\pi_1(X)=\pi_1(\overline{X}\backslash S)$ тривиальна.

Утверждение. F: $X\to\mathbf{C}^n$ *является этальным морфизмом, сюръективным по модулю коразмерности* 2.

Доказательство. Морфизм F является этальным по построению многообразия X. Сюръективность следует из того, что G является подгруппой конечного индекса в группе $\pi_1(\mathbf{C}^n\backslash D)$. Действительно, пусть $D_1, \ldots, D_k$ — неприводимые компоненты дивизора D. Известно (см., например, [4]), что все геометрические образующие, обходы вокруг неприводимой компоненты D_i, сопряжены друг другу в $\pi_1(\mathbf{C}^n\backslash D)$. С другой стороны, гомоморфизм $\pi_1(\mathbf{C}^n\backslash D)\to\mathbf{Z}^k$, переводящий

$$\gamma\to((\gamma, D_1), \ldots, (\gamma, D_k)),$$

где (γ, D_i) — индекс зацепления петли γ и гиперповерхности D_i, является эпиморфизмом. Следовательно, в подгруппе конечного индекса G, порожденной геометрическими образующими, для каждой компоненты D_i найдется геометрическая образующая $\gamma_i\in G$, являющаяся обходом вокруг гиперповерхности D_i. А это означает, что гиперповерхность L_{γ_i} накрывает гиперповерхность D_i.

Пусть, наконец, для гиперповерхности $D\subset\mathbf{C}^n$ существует подгруппа $G\subset\pi_1(\mathbf{C}^n\backslash D)$ конечного индекса, порожденная частью множества геометрических образующих. Тогда согласно теореме Лефшеца для общей плоскости $\mathbf{C}^2\subset\mathbf{C}^n$ это вложение индуцирует изоморфизм

$$\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash(\mathbf{C}^2\cap D))\simeq\pi_1(\mathbf{C}^n\backslash D).$$

Причем при этом изоморфизме геометрические образующие в $\pi_1(\mathbf{C}^n\backslash D)$ взаимно однозначно соответствуют геометрическим образующим в $\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash(\mathbf{C}^2\cap D))$.

Отсюда и из изложенного выше следует

ТЕОРЕМА 1. *Проблемы GJ_n и FJ эквивалентны.*

§ 2. Локальная проблема якобиана

Пусть $(\overline{X}, \bar{o})$ — росток аналитической поверхности и f: $(\overline{X}, \bar{o})\to(\Delta^2, o)$ — голоморфное конечное отображение степени d, разветвленное над ростком кривой $(D, o)\subset(\Delta^2, o)$, и пусть $S\subset\overline{X}$ — росток кривой, в точках которого отображение f не этально (имеет вырожденный дифференциал). Обозначим $X=\overline{X}\backslash S$.

Рассуждения, аналогичные приведенным в § 1, устанавливают справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Проблема LJ имеет положительное решение тогда и только тогда, когда росток любого этального голоморфного сюръективного над $\Delta^2\backslash o$ отображения f: $X\to\Delta^2$ односвязной аналитической поверхности X имеет степень, равную единице.*

В этом параграфе будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Проблема LJ имеет положительное решение.*

Доказательство. Пусть для ростка кривой $(D, o) \subset (\Delta^2, o)$ в группе $\pi_1(\Delta^2 \setminus D)$ имеется подгруппа конечного индекса, порожденная частью множества геометрических образующих. Согласно теореме 2 эта подгруппа G определяет росток аналитической поверхности $(\bar{X}, \bar{o})$ и аналитическое отображение f: $(\bar{X}, \bar{o}) \to (\Delta^2, o)$ степени $d = [\pi_1(\Delta^2 \setminus D) : G]$, разветвленное в кривой $S \subset \bar{X}$, $f(S) = D$, такое, что f: $X \to \Delta^2$ — этальное отображение на $\Delta^2 \setminus o$, где $X = \bar{X} \setminus S$ односвязно. Уменьшив диаметр шара Δ^2, мы можем считать, что f определено над окрестностью границы B шара Δ^2.

Как хорошо известно (см., например, [6, теорема 2.10]), пара (Δ^2, D) гомеоморфна паре, состоящей из конуса над B и конуса над $B \cap D$. В частности, вложение $(B, B \cap D) \subset (\Delta^2, D)$ индуцирует изоморфизм

$$\pi_1(B \setminus (B \cap D)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\Delta^2 \setminus D),$$

устанавливающий взаимно однозначное соответствие между множеством геометрических образующих этих групп.

Обозначим через $\bar{B} = f^{-1}(B)$ границу $\bar{X}$. Тогда

$$f\colon \bar{B} \setminus (\bar{B} \cap f^{-1}(D)) \to B \setminus (B \cap D)$$

является d-листным накрытием, определяемым подгруппой $G \subset \pi_1(B \setminus (B \cap D))$. Рассуждения, аналогичные приведенным в § 1, показывают, что $\bar{B} \setminus (\bar{B} \cap S)$ является односвязным многообразием. А так как $\pi_1(\bar{B} \setminus (\bar{B} \cap S)) \to \pi_1(\bar{B})$ — эпиморфизм, то $\bar{B}$ также является односвязным. В этом случае согласно теореме Мамфорда [7] поверхность $\bar{X}$ является неособой поверхностью. Кроме того, в этом случае $\bar{B}$ есть топологическая трехмерная сфера. Но тогда группа $\pi_1(\bar{B} \setminus (\bar{B} \cap S))$ является группой узла и может быть тривиальной только в случае, когда $S = \varnothing$. А это означает, что f: $\bar{X} \to \Delta^2$ является топологическим накрытием. Поскольку Δ^2 односвязно, то степень этого накрытия должна быть равна единице.

§ 3. Контрпример к обобщенной проблеме якобиана

В этом параграфе мы построим пример этального сюръективного по модулю коразмерности 2 морфизма F: $X \to \mathbf{C}^2$ односвязной поверхности X, $\deg F = 3$. Для этого рассмотрим в $\mathbf{P}^2$ кривую $\bar{D}$, $\deg \bar{D} = 4$, имеющую три каспидальные особые точки. Выберем в $\mathbf{P}^2$ прямую L, трансверсально пересекающую кривую $\bar{D}$ в четырех точках. Обозначим $\mathbf{C}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus L$ и $D = \bar{D} \cap \mathbf{C}^2$.

Рассмотрим точную последовательность групп

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D) \xrightarrow{i} \pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus \bar{D}) \longrightarrow 1,$$

где i индуцировано вложением $\mathbf{C}^2 \setminus D \hookrightarrow \mathbf{P}^2 \setminus \bar{D}$. Поскольку L — неособая кривая, $(L^2)_{\mathbf{P}^2} = 1$ и L трансверсально пересекается с $\bar{D}$, то [8] ядро $K \simeq \mathbf{Z}$ содержится в центре группы $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D)$ и порождается обходом вокруг бесконечно удаленной прямой L. Кроме того, группа $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus \bar{D})$ является [10] конечной группой 12-го порядка и порождается двумя геометрическими образующими g_1 и g_2 с соотношениями

$$g_1^2 = g_2^2, \quad g_1^4 = 1, \quad (g_1 g_2)^3 = g_1^2.$$

Пусть $\bar{g}_1$ — геометрическая образующая в $\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D)$ — прообраз образующей $g_1\in\pi_1(\mathbf{P}^2\backslash D)$. Легко видеть, что подгруппа $G\subset\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D)$, порожденная элементом $\bar{g}_1$, содержит K и является подгруппой конечного индекса в $\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D)$, равного 3. Согласно результатам из § 1 подгруппа $G\subset\subset\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D)$ определяет этальный сюръективный по модулю коразмерности 2 морфизм F: $X\to\mathbf{C}^2$ степени 3 односвязного многообразия X.

Исследуем более подробно этот пример. Продолжим этот морфизм до конечного морфизма $\bar{F}$: $\bar{X}\to\mathbf{P}^2$ нормального многообразия $\bar{X}$. Морфизм $\bar{F}$ неразветвлен вне D, так как $K\subset G$ и K порождено геометрической образующей — обходом вокруг L. Пусть $Q=\bar{F}^{-1}(L)$ и $S=\bar{F}^{-1}(\bar{D})$. Тогда так как $\deg F=3$ и F — этальный сюръективный над D морфизм, то

$$\bar{F}^{-1}(\bar{D})=2S_1+S_2.$$

Покажем, что $\bar{X}$ является неособым многообразием. Действительно, $\bar{X}$ неособо вне точек $\bar{F}^{-1}(p_i)$, где p_i — особые точки кривой $\bar{D}$. Посмотрим, что происходит над особой точкой p_i. Для этого выберем в $\mathbf{C}^2$ окрестность Δ^2 точки p_i и в ней такие локальные координаты a и b, что $D\cap\Delta^2$ задается в Δ^2 уравнением

$$4a^3+27b^2=0.$$

Как хорошо известно (см., например, [5]), группа $\pi_1(\Delta^2\backslash(D\cap\Delta^2))$ порождается двумя геометрическими образующими α и β с соотношением

$$\alpha\beta\alpha=\beta\alpha\beta. \tag{3}$$

Естественные гомоморфизмы

$$\pi_1(\Delta^2\backslash(D\cap\Delta^2))\to\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D),$$

зависящие от пути, соединяющего базисные точки этих групп, переводят образующие α и β в элементы, сопряженные образующей $\bar{g}_1$. Поскольку D — кривая ветвления, то, очевидно, среди этих гомоморфизмов найдется такой гомоморфизм, что образ группы $\pi_1(\Delta^2\backslash(D\cap\Delta^2))$ не содержится в группе G. Зафиксируем этот гомоморфизм:

$$j\colon \pi_1(\Delta^2\backslash(D\cap\Delta^2))\to\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D).$$

Группа $\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D)$ действует на левых классах смежности подгруппы G. Это действие определяет гомоморфизм

$$r\colon \pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D)\to S_3$$

в симметрическую группу 3-го порядка S_3. Поскольку $\bar{F}$: $\bar{X}\to\mathbf{P}^2$ не является морфизмом Галуа, то r является эпиморфизмом. Следовательно,

$$r\cdot j\colon \pi_1(\Delta^2\backslash(D\cap\Delta^2))\to S_3$$

также является эпиморфизмом и $\bar{G}=(r\cdot j)^{-1}(G)$ является подгруппой индекса 3 в $\pi_1(\Delta^2\backslash(D\cap\Delta^2))$, причем $\bar{G}$ не есть нормальный делитель в $\pi_1(\Delta^2\backslash(D\cap\Delta^2))$.

Легко проверить, что с точностью до сопряжения в группе, порожденной элементами α и β с соотношением (3), существует единственная такая подгруппа $\bar{G}$ третьего порядка. А именно, $\bar{G}$ порождена элементом α и квадратами всех сопряженных с α элементов. Поэтому с точностью до изоморфизма существует единственное аналитическое отображение g: $Z\to\Delta^2$ степени 3, неразветвленное вне $D\cap\Delta^2$ и не являющееся отображением Галуа. Легко проверить, что в качестве такого отображения может быть взят росток отображения π: $Z\to\mathbf{C}^2$ поверхности Z, заданной в $\mathbf{C}^3$ уравнением

$$x^3+ax+b=0,$$

а π есть проекция $\mathbf{C}^3$ на плоскость $\mathbf{C}^2$ с координатами a, b. Отметим, что Z является неособой поверхностью. Следовательно, для каждого $i=1, 2, 3$ прообраз $\bar{F}^{-1}(p_i)$ есть одна точка $q_i\in\bar{X}$ и в этой точке $\bar{X}$ неособо. Легко проверить, что в этом случае кривые S_1 и S_2 имеют касание второго порядка в каждой из этих точек q_i. Других точек пересечения, кроме q_i, у кривых S_1 и S_2 нет.

Вычислим индексы самопересечения кривых S_1 и S_2 на $\bar{X}$. Для этого рассмотрим подгруппу N индекса 2 в $G=\pi_1(\bar{X}\setminus(S_1\cup S_2\cup Q))$ – ядро эпиморфизма

$$r\colon \pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)\to S_3.$$

Подгруппа N определяет шестилистное накрытие $\bar{\varphi}$: $Y\to\mathbf{P}^2$, которое пропускается через двулистное накрытие φ: $Y\to\bar{X}$, разветвленное над S_2, так, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & & \bar{X} \arrow[dl, "\bar{F}"] \\ & \mathbf{P}^2 & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Так как S_2 – неособая кривая, то Y – неособое многообразие. Пусть $\varphi^{-1}(S_2)=2\bar{S}_2$. Кривая S_1 касается кривой S_2 в точках q_i, поэтому $\varphi^{-1}(S_1)$ распадается на две кривых:

$$\varphi^{-1}(S_1)=\bar{S}_1\cup\tilde{S}_1.$$

Три кривые $\bar{S}_1$, $\tilde{S}_1$ и $\bar{S}_2$ пересекают друг друга в трех точках $\varphi^{-1}(q_i)$ и имеют в этих точках трансверсальное пересечение. Кроме того, группа S_3 действует на Y и переводит кривые $\bar{S}_1$, $\tilde{S}_1$ и $\bar{S}_2$ друг в друга. Поэтому

$$(\bar{S}_1^2)_Y=(\tilde{S}_1^2)_Y=(\bar{S}_2)_Y.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 6\cdot 16&=(\bar{\varphi}^{-1}(\bar{D}),\ \bar{\varphi}^{-1}(\bar{D}))_Y=\\ &=(2\bar{S}_1+2\tilde{S}_1+2\bar{S}_2,\ 2\bar{S}_1+2\tilde{S}_1+2\bar{S}_2)_Y=8\cdot 9+12(\bar{S}_1^2)_Y, \end{aligned}$$

т. е.

$$(\bar{S}_1^2)_Y=(\tilde{S}_1^2)_Y=(\bar{S}_2^2)_Y=2,$$
$$(\bar{S}_1+\tilde{S}_1,\ \bar{S}_1+\tilde{S}_1)_Y=10.$$

Поэтому

$$(S_1^2)_{\bar{X}}={}^1/_2(\varphi^{-1}(S_1),\ \varphi^{-1}(S_1))_Y=5,$$
$$(S_2^2)_{\bar{X}}={}^1/_2(\varphi^{-1}(S_2),\ \varphi^{-1}(S_2))_Y=4.$$

Отметим, что S_i являются неособыми рациональными кривыми. Следовательно, так как $(S_i^2)_{\overline{X}}>0$, то по критерию Кастельнуово $\overline{X}$ — рациональная поверхность.

Вычислим топологическую эйлерову характеристику $e(\overline{X})$. Для этого заметим, что $e(\overline{D}\setminus\cup p_i)=2-3=-1$ и $e(\mathbf{P}^2\setminus\overline{D})=3-2=1$. Поэтому

$$e(\overline{X})=3e(\mathbf{P}^2\setminus\overline{D})+2e(\overline{D}\setminus\cup p_i)+3=4.$$

А так как при σ-процессе, σ: $\overline{Z}\to Z$, эйлеровы характеристики $e(\overline{Z})$ и $e(Z)$ поверхностей $\overline{Z}$ и Z связаны соотношением $e(\overline{Z})=e(Z)+1$, то рациональная поверхность $\overline{X}$ должна быть изоморфна одной из относительно минимальных моделей F_n, $n\in\mathbf{N}$.

Покажем, что $\overline{X}\simeq F_1$. Для этого найдем на $\overline{X}$ исключительную кривую первого рода. Из формул Плюккера для двойственных кривых на $\mathbf{P}^2$ следует, что кривая $\overline{D}$ имеет единственную бикасательную E. Поскольку E односвязно и не имеет других точек пересечения с $\overline{D}$, кроме двух точек касания, то $\overline{F}^{-1}(E)$ распадается на три кривых E_1, E_2 и E_3. Так как $(E^2)_{\mathbf{P}^2}=1>0$, то кривые E_1, E_2 и E_3 образуют связное множество, а так как они могут пересекаться только в двух точках, лежащих на S_1 (прообразах точек касания), то с точностью до нумерации

$$(E_1, E_2)_{\overline{X}}=(E_1, E_3)_{\overline{X}}=1, \quad (E_2, E_3)_{\overline{X}}=0,$$
$$(E_1, S_2)_{\overline{X}}=0, \quad (E_2, S_2)_{\overline{X}}=(E_3, S_2)_{\overline{X}}=2,$$
$$(E_1, S_1)_{\overline{X}}=2, \quad (E_2, S_1)_{\overline{X}}=(E_3, S_1)_{\overline{X}}=1.$$

Рассматривая прообразы $\varphi^{-1}(E_i)$, легко получить, что

$$(E_1^2)_{\overline{X}}=-1, \quad (E_2^2)_{\overline{X}}=(E_3^2)_{\overline{X}}=0.$$

Следовательно, E_1 — исключительная кривая первого рода, а $\overline{X}$ есть $\overline{\mathbf{P}}^2$, где $\overline{\mathbf{P}}^2$ — проективная плоскость с одной раздутой точкой $x\in\mathbf{P}^2$.

Прообраз $\overline{F}^{-1}(L)$ общей прямой $L\subset\mathbf{P}^2$ имеет индекс самопересечения

$$(\overline{F}^{-1}(L), \overline{F}^{-1}(L))_{\overline{X}}=3$$

и, кроме того,

$$(\overline{F}^{-1}(L), E_1)_{\overline{X}}=1.$$

Поэтому, стянув кривую E_1 в точку $x\in\mathbf{P}^2$, получим рациональное отображение $\tilde{F}$: $\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$, задаваемое квадриками, проходящими через точку x. Так как $(S_1^2)_{\overline{X}}=5$ и S_1 пересекается с E_1 в двух точках, то кривая ветвления $\tilde{S}$ отображения $\tilde{F}$ есть кубика на $\mathbf{P}^2$ с одной особой двойной точкой — точкой x.

Прообразы Q_1, Q_2, Q_3 трех прямых L_1, L_2 и L_3, проходящих через две из трех особых точек кривой $\overline{D}$, касаются кривой S_1 в прообразах этих точек. Поэтому отображение $\tilde{F}$: $\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ задается тремя квадриками, проходящими через точку x и еще через две из трех точек q_1, q_2, q_3, лежащих на $\tilde{S}$ и касающихся $\tilde{S}$ в этих точках. Наше многообразие X превращается при этом в

$$X=\overline{\mathbf{P}}^2\setminus(\tilde{S}\cup Q),$$

где Q — общая квадрика из семейства, порожденного квадриками Q_1, Q_2, Q_3.

В качестве примера такого отображения можно взять отображение $\tilde{F}$: $\mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$, задаваемое квадриками

$$Q_i = 3x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3, \quad i=1, 2, 3.$$

Базисной точкой этого отображения будет точка $x=(1:1:1)$, а кривая ветвления $\tilde{S}$ задается уравнением

$$\sum_{i\neq j} x_i^2 x_j - 6x_1x_2x_3 = 0,$$

ее образ (кривая $\bar{D}$) задается уравнением

$$\sum_{i\neq j} u_i^2 u_j^2 - 2 \sum_{i\neq j\neq k\neq i} u_i^2 u_j u_k = 0.$$

§ 4. Проблема якобиана и дифференцирования кольца многочленов

4.1. Обозначим через Diff_n алгебру дифференцирований кольца многочленов $\mathbf{C}[X]=\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Напомним, что Diff_n есть свободный модуль над $\mathbf{C}[X]$ с образующими $\frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$\mathrm{Diff}_n = \mathbf{C}[X]\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}[X]\frac{\partial}{\partial x_n},$$

и операцией умножения $[\ ,\ ]$, где дифференцирование $[\alpha, \beta]$ действует на $f\in\mathbf{C}[X]$ по правилу

$$[\alpha, \beta]f = \alpha(\beta f) - \beta(\alpha f).$$

Алгебра Diff_n естественным образом вкладывается в алгебру дифференцирований $\mathrm{Diff}_{(n)}$ поля рациональных функций $\mathbf{C}(X)$. Алгебра $\mathrm{Diff}_{(n)}$ как векторное пространство над $\mathbf{C}(X)$ имеет размерность, равную n. Обозначим через Aut_n группу автоморфизмов алгебры Ли Diff_n и через End_n — полугруппу эндоморфизмов алгебры Diff_n с нулевыми ядрами.

$$\mathrm{Aut}_n \subset \mathrm{End}_n.$$

ТЕОРЕМА 4. *Классическая проблема CJ_n имеет положительное решение тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}_n = \mathrm{End}_n.$$

Доказательство. Пусть $F: X=\mathbf{C}^n \to Y=\mathbf{C}^n$ — морфизм, заданный многочленами

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, \ldots, n,$$

и имеющий якобиан

$$\det J(F) \equiv \mathrm{const} \neq 0.$$

Рассмотрим вложение $F^*: \mathbf{C}[y_1, \ldots, y_n] \hookrightarrow \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Так как $\det J(F) \equiv \mathrm{const}\neq 0$, то дифференцирования $\frac{\partial}{\partial y_i}$ кольца $\mathbf{C}[y_1, \ldots, y_n]$ продолжаются до дифференцирований

$$\frac{\partial}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{4}$$

кольца многочленов $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, где $p_{ij}(x)$ — элементы матрицы $P=[J(F)^{-1}]^t$ (t — транспонирование). Поэтому отображение F индуцирует эндоморфизм φ_F алгебры Diff_n,

$$\varphi_F: h(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\to h(y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad i=1, \ldots, n,$$

где $y_i=f_i(x)$, $\frac{\partial}{\partial y_i}$ определены формулой (4) и $h(x)\in\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Обозначим через $\mathrm{End}\,\mathbf{C}[X]$ полугруппу, образованную отображениями $F:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ с $\det J(F)\equiv\mathrm{const}\neq 0$ и операцией умножения — композицией морфизмов. Полугруппа $\mathrm{End}\,\mathbf{C}[X]$ содержит в качестве подгруппы группу всех изоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\mathbf{C}[X]$. Легко видеть, что отображение

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathrm{End}\,\mathbf{C}[X] & \to & \mathrm{End}_n \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Aut}\,\mathbf{C}[X] & & \mathrm{Aut}_n \end{array} \tag{5}$$

переводящее $F\in\mathrm{End}\,\mathbf{C}[X]$ в $\varphi_F\in\mathrm{End}_n$, является гомоморфизмом, и $\varphi(\mathrm{Aut}\,\mathbf{C}[X])\subset\mathrm{Aut}_n$. Поэтому для доказательства теоремы 4 достаточно доказать, что гомоморфизм (5) является изоморфизмом.

Очевидно, что φ является вложением. Проверим эпиморфность гомоморфизма φ. Для этого рассмотрим произвольный эндоморфизм $\alpha\in\mathrm{End}_n$. Введем обозначения

$$\alpha\left(x^b\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=u^b\frac{\partial}{\partial u_i},$$

в частности,

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial u_i},$$

где $b=(b_1, \ldots, b_n)$ — мультииндекс и $x^b=x_1^{b_1}\ldots x_n^{b_n}$.

Для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что $u_j\frac{\partial}{\partial u_i}=f_j(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial u_i}$, где $f_j\in\mathbf{C}[X]$, и, во-вторых, что

$$\det\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|$$

нигде не обращается в нуль. В этом случае $\alpha=\varphi_F$ для F, задаваемого многочленами $f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Утверждение 1. *Дифференцирования* $\frac{\partial}{\partial u_i}=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ *линейно независимы над* $\mathbf{C}(X)$.

Доказательство. Выберем из системы дифференцирований $\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}, i=1, \ldots, n\right\}$ максимальную $\mathbf{C}(X)$-линейно независимую подсистему. Пусть это $\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_k}$. Пусть $k<n$. Обозначим

$$D_i = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_i} & \text{при } i=1,\ldots,k, \\ u_i \frac{\partial}{\partial u_i} & \text{при } i=k+1,\ldots,n. \end{cases}$$

Отметим, что для всех i и j

$$[D_i, D_j]=0, \tag{6}$$

так как α — эндоморфизм алгебры Diff_n.

Покажем, что $D_1, \ldots, D_n$ линейно независимы над $\mathbf{C}(X)$. Действительно, если это не так, то один из D_s, $s>k$, линейно выражается через линейно независимые дифференцирования $D_1, \ldots, D_{s-1}$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial u_s} = \sum_{i\leqslant k} A_i(x) D_i, \quad D_s = \sum_{i<s} B_i(x) D_i.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_s}, D_s\right] = \left[\frac{\partial}{\partial u_s}, u_s\frac{\partial}{\partial u_s}\right] = \frac{\partial}{\partial u_s}, \tag{7}$$

с другой стороны,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_s}, D_s\right] = \left[\sum_{i\leqslant k} A_i D_i, \sum_{j<s} B_j D_j\right] = \sum_{i,j} (A_i D_i(B_j) D_j - B_j D_j(A_i) D_i). \tag{8}$$

Но $[D_j, D_s] = \sum_{i<s} D_j(B_i) D_i = 0$ в силу (6), т. е. $D_j(B_i)=0$ при любых $i<s$, $j<s$, так как $\{D_1, \ldots, D_{s-1}\}$ — линейно независимая система. Аналогично, $D_j(A_i)=0$ для любых $i\leqslant k$ и $j<s$. Но тогда из (7) и (8) следует, что $\frac{\partial}{\partial u_s}=0$, что невозможно, так как α — эндоморфизм с нулевым ядром.

Итак, $D_1, \ldots, D_n$ является базисом в $\mathrm{Diff}_{(n)}$. Рассмотрим дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial u_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k} A_i(x) D_i$$

и

$$u_{k+1}^m \frac{\partial}{\partial u_{k+1}} = \sum_{i=1}^{n} A_{m,i}(x) D_i, \quad m>0.$$

Имеем

$$\left[u_{k+1}\frac{\partial}{\partial u_{k+1}}, u_{k+1}^m \frac{\partial}{\partial u_{k+1}}\right] = (m-1) u_{k+1}^m \frac{\partial}{\partial u_{k+1}},$$

$$\left[D_i, u_{k+1}^m \frac{\partial}{\partial u_{k+1}}\right] = 0$$

при $i \neq k+1$, т. е.

$$D_i(A_{m,j})=0, \quad i\neq k+1, \quad D_{k+1}(A_{m,j})=(m-1)A_{m,j}, \tag{9}$$

где $A_j=A_{0,j}$ при $m=0$. Но тогда, с одной стороны,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_{k+1}}, u_{k+1}^m \frac{\partial}{\partial u_{k+1}}\right] = m u_{k+1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial u_{k+1}}.$$

А с другой стороны, применяя (9),

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_{k+1}}, u_{k+1}^m \frac{\partial}{\partial u_{k+1}}\right] = \left[\sum_{i=1}^{k} A_i D_i, \sum_{j=1}^{n} A_{m,j} D_j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (A_i D_i (A_{m,j}) D_j - A_{m,j} D_j (A_i) D_i) = \sum_{i=1}^{k} A_{m,k+1} A_i D_i,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{k} A_{m,k+1} A_i D_i = m \sum_{i=1}^{n} A_{m-1,i} D_i.$$

Следовательно, $A_{m-1,k+1}=0$ для всех $m>2$. Но тогда $A_{m,k+1}=0$ при $m>3$ и $u_{k+1}^{m-1}\dfrac{\partial}{\partial u_{k+1}}=0$. Полученное противоречие доказывает $\mathbf{C}(X)$-линейную независимость дифференцирований $\dfrac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial u_n}$.

Утверждение 2. $u_i^m \dfrac{\partial}{\partial u_j} = f_i^m(x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial}{\partial u_j}$, *где $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ — рациональные функции от $x_1, \ldots, x_n$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$u_i \frac{\partial}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ijk}(x) \frac{\partial}{\partial u_k} = \sum a_{ijk} D_k.$$

Из $\left[\dfrac{\partial}{\partial u_r}, u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j}\right]=0$ при $r\neq i$ и $\left[\dfrac{\partial}{\partial u_i}, u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j}\right]=\dfrac{\partial}{\partial u_j}$ следует, что

$$D_r(a_{ijk})=0 \quad \text{при} \quad r\neq i,$$
$$D_r(a_{rjk})=0 \quad \text{при} \quad j\neq k,$$
$$D_r(a_{rkk})=1.$$

Имеем $\left[u_i \dfrac{\partial}{\partial u_i}, u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j}\right] = u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j}$ при $i\neq j$. Следовательно,

$$\left[\sum_s a_{iis} D_s, \sum_l a_{ijl} D_l\right] = \sum_{s,l} (a_{iis} D_s (a_{ijl}) D_l - a_{ijl} D_l (a_{iis}) D_s) =$$

$$= a_{iii}\frac{\partial}{\partial u_j} - a_{iji}\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_k a_{ijk}\frac{\partial}{\partial u_k},$$

т. е. для всех i и j

$$a_{ijj}=a_{iii}, \quad a_{ijk}=0 \quad \text{при} \quad k\neq j.$$

Обозначим a_{iii} через $f_i(x_1, \ldots, x_n)$. Итак, $u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j} = f_i(x)\dfrac{\partial}{\partial u_j}$.

Доказательство того, что для всех k имеет место равенство

$$f_i^k(x)\frac{\partial}{\partial u_j}=u_i^k\frac{\partial}{\partial u_j},$$

может быть проведено индукцией по k с применением аргументов, аналогичных тем, которые были использованы в случае $k=1$, а потому оно будет опущено.

Утверждение 3. $f_i(x)\in\mathbf{C}[X]$.

Доказательство. Дифференцирования $\frac{\partial}{\partial u_j}\in \mathrm{Diff}_n$. Следовательно, они могут быть однозначно представлены в виде

$$\frac{\partial}{\partial u_j}=\sum_{k=1}^{n}B_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

где $B_{jk}(x)$ — многочлены.

Пусть $f_i(x)=\frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$, где $P_i(x)$ и $Q_i(x)$ — два взаимно простых многочлена. Тогда

$$u_i^m\frac{\partial}{\partial u_j}=\sum_k\frac{P_i^m(x)B_{jk}(x)}{Q_i^m(x)}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\in \mathrm{Diff}_n.$$

Следовательно, для любого $m>0$ многочлен $P_i^m(x)B_{jk}(x)$ делится на $Q_i^m(x)$. Поскольку $P_i(x)$ и $Q_i(x)$ взаимно просты, то $Q_i(x)=\mathrm{const}$.

Утверждение 4. $\det\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|$ *нигде не обращается в нуль.*

Доказательство. Имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_i},u_j\frac{\partial}{\partial u_j}\right]=\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial u_j},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Но $u_i\frac{\partial}{\partial u_j}=f_i(x)\frac{\partial}{\partial u_j}$, поэтому

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_i},u_j\frac{\partial}{\partial u_j}\right]=\frac{\partial}{\partial u_i}(f_j(x))\frac{\partial}{\partial u_j},\ \text{т. е.}\ \frac{\partial}{\partial u_i}(f_j(x))=\delta_{ij}.$$

Пусть $\frac{\partial}{\partial u_i}=\sum_k p_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(f_j(x))=\sum_k p_{ik}(x)\frac{\partial f_j}{\partial x_k}.$$

Поэтому многочленная матрица $\|p_{ik}\|^t$ является обратной матрицей к матрице $\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|$. Следовательно, $\det\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|\equiv\mathrm{const}\neq 0$. Тем самым теорема 4 полностью доказана.

4.2. Приведем еще одно, эквивалентное классической проблеме якобиана, утверждение, связанное с дифференцированиями кольца многочленов.

Обозначим через $J_n(\tau)$ множество дифференцирований

$$D=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_i a_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

где $a_i(t, x)\in\mathbf{C}[t, x_1, \ldots, x_n]$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\equiv 0, \tag{10}$$

и таких, что дифференциальное уравнение

$$Df=0, \tag{11}$$

$$f|_{t=\tau}=g(x_1, \ldots, x_n), \tag{12}$$

имеет глобальное решение на всем $\mathbf{C}^{n+1}$ при любых начальных условиях (12), причем если $g\in\mathbf{C}[X]$, то соответствующее решение $f\in\mathbf{C}[t, x]$.

ТЕОРЕМА 5. *Классическая проблема якобиана CJ_n имеет положительное решение тогда и только тогда, когда $J_n(0)=J_n(1)$.*

Доказательство. Модуль Diff_m двойствен $\mathbf{C}[X]$-модулю 1-дифференциальных форм $\mathscr{E}_1[\mathbf{C}^m]$ на $\mathbf{C}^m$:

$$\mathscr{E}_1[\mathbf{C}^m]=\mathbf{C}[X]dx_1\oplus\ldots\oplus\mathbf{C}[X]dx_m$$

и двойственность задается спариванием $\langle\ ,\ \rangle$, определяемым на $\xi=\sum f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\omega=\sum g_i dx_i$ по правилу

$$\langle\xi,\omega\rangle=\sum f_i g_i.$$

Модуль $\mathscr{E}_{m-1}[\mathbf{C}^m]$ $(m-1)$-дифференциальных форм на $\mathbf{C}^m$ также двойствен модулю $\mathscr{E}_1[\mathbf{C}^m]$, и эта двойственность задается внешним произведением

$$\wedge: \mathscr{E}_1[\mathbf{C}^m]\otimes\mathscr{E}_{m-1}[\mathbf{C}^m]\to\mathbf{C}[X]dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

Эти двойственности определяют естественный изоморфизм

$$\mathrm{Diff}_m\simeq\mathscr{E}_{m-1}[\mathbf{C}^m].$$

В дальнейшем соответствующую при этом изоморфизме дифференцированию D $(m-1)$-форму мы также будем обозначать через D.

Пусть $D\in J_n(0)$. Легко видеть, что условие (10) означает замкнутость соответствующей этому дифференцированию n-формы. Обозначим через $f_i(t, x)$ решения соответствующей дифференцированию D задачи (11) с начальными условиями $f_i|_{t=0}=x_i$.

Покажем, что отображение $F_D: \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^{n+1}$, заданное многочленами

$$y_i = f_i(t, x), \quad T = t$$

имеет якобиан $\det J(F_D) \equiv 1$. Имеем

$$df_i \wedge D = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$dt \wedge D = dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

так как $D(f_i) = 0$ и $D(t) = 1$. Легко видеть, что $f_i = x_i + tF_i(t, x)$, где $F_i(t, x) \in \mathbf{C}[t, x]$. Отсюда легко получить, что $dt \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_n = J dt \wedge \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \neq 0$, так как $J|_{t=0} \equiv 1$. Следовательно, $t, f_1, \ldots, f_n$ алгебраически независимы.

Рассмотрим дифференциальную форму $D_1 = df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ и соответствующее ей дифференцирование. Имеем

$$(JD - D_1)(t) = 0, \quad (JD - D_1)(f_i) = 0.$$

Следовательно, $JD = D_1$, так как $t, f_1, \ldots, f_n$ алгебраически независимы. Имеем

$$dD_1 = dJ \wedge D = 0,$$

поскольку D — замкнутая форма. Поэтому J является многочленом от $f_1, \ldots, f_n$. А так как $J|_{t=0} \equiv 1$, то $J \equiv 1$, т. е.

$$dt \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_n = dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Следовательно, каждое дифференцирование $D \in J_n(0)$ определяет отображение $F_D: \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^{n+1}$ с якобианом $\det J(F_D) \equiv 1$.

Обратно, пусть отображение $F: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, заданное многочленами $y_i = f_i(x)$, имеет якобиан $\det J(F) \equiv \mathrm{const} \neq 0$. Сделав линейную замену координат в одном из $\mathbf{C}^n$, можем считать, что

$$f_i(x) = x_i + \bar{f}_i(x),$$

где $\bar{f}_i(x)$ не содержат однородных форм нулевой и первой степени.

По отображению F построим отображение $F_t: \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^{n+1}$, заданное

$$y_i = x_i + \frac{\bar{f}_i(tx_1, \ldots, tx_n)}{t}, \quad T = t.$$

Легко проверить, что $\det J(F_t) \equiv 1$. Отметим, что ограничение F_t на гиперплоскость $t = 1$ совпадает с F. Сопоставим отображению F_t дифференцирование $\frac{\partial}{\partial T}$. Соответствующая этому дифференцированию n-форма D имеет вид:

$$D=dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n.$$

Отсюда легко видеть, что $D\in J_n(0)$ и что F_D совпадает с F_t.

Для доказательства теоремы 5 осталось заметить, что если для дифференцирования $D\in J_n(0)$ морфизм $F_D:\mathbf{C}^{n+1}\to\mathbf{C}^{n+1}$ является изоморфизмом, то D превращается в дифференцирование $\frac{\partial}{\partial T}$ по координате T в системе координат $(T, y_1, \ldots, y_n)$, и поэтому задача (11) с любыми начальными условиями (12) имеет решение.

Если $F_D:\mathbf{C}^{n+1}\to\mathbf{C}^{n+1}$ имеет степень $d>1$, то при некотором $T=T_0$ ограничение $F=F_D|_{T=T_0}$ имеет ту же степень d. Построим по F дифференцирование $\tilde{D}$, для которого $F_{\tilde{D}}$ совпадает с F_t, и возьмем любую функцию $g(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbf{C}[X]\setminus F^*\mathbf{C}[y]$. Такая функция найдется, так как степень расширения $[\mathbf{C}[X]:F^*\mathbf{C}[Y]]=d>1$.

Покажем, что не существует глобального решения уравнения

$$\tilde{D}(f)=0$$

с начальными условиями

$$f|_{t=1}=g(x_1, \ldots, x_n). \qquad (13)$$

Действительно, предположим, что многочлен $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ является решением задачи (11) с начальными условиями (13). Тогда эта функция является решением задачи (11) с начальными условиями

$$f|_{t=0}=f(0, x_1, \ldots, x_n). \qquad (14)$$

С другой стороны, если F_t задано многочленами

$$y_i=x_i+\frac{\bar{f}_i(tx)}{t}, \quad T=t,$$

то легко видеть, что для задачи (11) с начальными условиями (14) решением является функция $f=f(0, y_1, \ldots, y_n)$. Следовательно,

$$f(t, x_1, \ldots, x_n)\equiv f\left(0, x_1+\frac{\bar{f}_1(tx)}{t}, \ldots, x_n+\frac{\bar{f}_n(tx)}{t}\right),$$

т. е.

$$g(x_1, \ldots, x_n)\equiv f(0, x_1+\bar{f}(x), \ldots, x_n+\bar{f}_n(x))\in F^*\mathbf{C}[Y].$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 5.

Список литературы

1. *Bass H., Connell E. H., Wright D.* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7, № 2. P. 287–330.
2. *Grauert H., Remmert R.* Komplexe Raume // Math. Ann. 1958. V. 136. P. 245–318.
3. *Keller O.-H.,* Ganre Cremona-Transformationen // Monatsh. Math. und Phis. 1939. Bd. 47. S. 299–306.
4. *Куликов Вик. С.* Фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в $\mathbf{C}^n$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, № 2. С. 407–428.

5. *Libgober A.* Fundamental groups of the complements to plane singular curves // Pros. of Simp. in Pure Math. 1987. V. 46. P. 29–45.
6. *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
7. *Мамфорд Д.* Топология нормальных особенностей алгебраической поверхности и критерий простоты // Математика. 1966. Т. 10, № 6. С. 3–24.
8. *Nori M. V.* Zariski's conjecture and related problems // Ann. Seient Ec. Norm. Sup. 4[e] série. 1983. T. 16. P. 305–344.
9. *Оревков С. Ю.* О трехлистных полиномиальных отображениях C^2 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 6. С. 1231–1240.
10. *Zariski O.* Algebraic Surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

МИИТ
Москва, ул. Образцова, 15

Поступила в редакцию
23.IV.1991