УДК 512.7+515.1

 Вик. С. КУЛИКОВ

О ТЕОРЕМЕ ЛЕФШЕЦА ДЛЯ ДОПОЛНЕНИЯ К КРИВОЙ В $\mathbf{P}^2$

Пусть $\bar{E}$ – неприводимая плоская кривая над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ $\tilde{\nu}: E \to \bar{E} \subset \mathbf{P}^2$ – морфизм нормализации, и пусть $\bar{D}$ – произвольная кривая в $\mathbf{P}^2$, $\bar{E} \not\subset \bar{D}$. Центральным результатом является теорема о том, что если $\bar{E}$ и $\bar{D}$ пересекаются трансверсально, то $\tilde{\nu}_*: \pi_1(E \setminus \tilde{\nu}^{-1}(\bar{E} \cap \bar{D})) \to \pi(\mathbf{P}^2 \setminus \bar{D})$ является эпиморфизмом.

0. Пусть $X \subset \mathbf{P}^n$ – неособая проективная поверхность и $\bar{D} \subset X$ – кривая на X. Как хорошо известно, теорема Лефшеца о гиперплоском сечении утверждает, что для общего гиперплоского сечения $\bar{E} \subset X$ естественный гомоморфизм фундаментальных групп

$$i_*: \pi_1(\bar{E} \setminus (\bar{D} \cap \bar{E})) \to \pi_1(X \setminus \bar{D})$$

является эпиморфизмом.

М. Нори в [5] обобщил эту теорему Лефшеца на случай, когда $\bar{E} \subset X$ – нодальная кривая, т. е. кривая с простейшими двойными особыми точками. Один из его результатов состоит в следующем. Пусть $\nu: E \to \bar{E}$ – нормализация кривой $\bar{E}$, $i: \bar{E} \hookrightarrow X$ – вложение и $\tilde{\nu} = i \circ \nu: E \to X$. Теорема Нори утверждает, что если индекс самопересечения $(\bar{E}^2)_X > 2r$, где r – число особых точек нодальной кривой $\bar{E}$, и кривые $\bar{E}$ и $\bar{D}$ пересекаются трансверсально, то образ $\tilde{\nu}_* \pi_1(E \setminus \nu^{-1}(\bar{E} \cap \bar{D}))$ при гомоморфизме нормализации

$$\tilde{\nu}_*: \pi_1(E \setminus \nu^{-1}(\bar{E} \cap \bar{D})) \to \pi_1(X \setminus \bar{D})$$

есть подгруппа конечного индекса в $\pi_1(X \setminus \bar{D})$. Кроме того, в [5] приведен пример неособой поверхности X и нодальной кривой $\bar{E}$ с $r = {}^1/_2(\bar{E}^2)_X$ особыми точками, для которой образ $\tilde{\nu}_* \pi_1(E)$ является подгруппой бесконечного индекса в $\pi_1(X)$.

Из результатов Нори следует, что в общем случае для произвольной неприводимой кривой $\bar{E} \subset X$ индекс образа $G = \tilde{\nu}_* \pi_1(E \setminus \nu^{-1}(\bar{E} \cap \bar{D}))$ в $\pi_1(X \setminus \bar{D})$ должен зависеть от типа особых точек кривой $\bar{E}$, их числа и от индекса самопересечения кривой $\bar{E}$ на поверхности X.

Центральным результатом данной статьи является утверждение о том, что в случае $X = \mathbf{P}^2$ группа G не зависит ни от числа особых точек кривой $\bar{E}$, ни от их типа, т. е. имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\bar{E}$ и $\bar{D}$ такие кривые в* $\mathbf{P}^2$, *что*

i) *$\bar{E}$ – неприводимая кривая;*

ii) *$\bar{E}$ не является компонентой кривой $\bar{D}$;*

iii) *для каждой точки* $x \in \bar{E} \cap \bar{D}$ *кривые* $\bar{E}$ *и* $\bar{D}$ *неособы в этой точке и пересекаются в ней трансверсально.*

Тогда гомоморфизм нормализации

$$\tilde{\nu}_* : \pi_1(\tilde{E} \setminus \nu^{-1}(\bar{E} \cap \bar{D})) \to \pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus \bar{D})$$

является эпиморфизмом.

Следствие 1. *Пусть* $f: Y \to \mathbf{P}^2$ — *конечный морфизм нормальной поверхности* Y *на* $\mathbf{P}^2$, *неразветвленный вне кривой* $\bar{D} \subset \mathbf{P}^2$, *и пусть кривые* $\bar{D}$ *и* $\bar{E} \subset \mathbf{P}^2$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда* $f^{-1}(\bar{E})$ *является неприводимой кривой.*

Теорема 1 непосредственно следует из аналогичного утверждения (теорема 2 в п. 5) в аффинном случае (см. п. 6).

1. Пусть E — неприводимая кривая $\mathbf{C}^2$ и $D \subset \mathbf{C}^2$ — произвольная кривая, не содержащая E в качестве своей неприводимой компоненты. Пусть $\mathbf{P}^2$ — пополнение $\mathbf{C}^2$ до проективной плоскости, $L_\infty = \mathbf{P}^2 \setminus \mathbf{C}^2$, и пусть $\bar{E}$ и $\bar{D}$ — замыкания кривых E и D в $\mathbf{P}^2$.

Обозначим через $l_{o,x}$ — действительный луч в $\mathbf{C}^2$, выходящий из точки o и проходящий через точку $x \in \mathbf{C}^2$. Выберем в $\mathbf{C}^2$ точку o так, что o и кривая $C = D \cup E$ находятся в общем положении, т. е. выполнены следующие условия.

1) Число точек пересечения (без учета кратности) любого луча $l_{o,x}$ и римановой поверхности C не превосходит трех.

2) Существует лишь конечное число лучей $l_{o,x}$, пересекающих C ровно в трех точках.

3) Для почти всех точек $x \in C$, кроме точек, принадлежащих конечному числу вещественных алгебраических кривых, $l_{o,x} \cap C = \{x\}$.

4) Для каждой точки $s \in \operatorname{Sing} C$ пересечение $l_{o,s} \cap C = \{s\}$.

5) Если луч $l_{o,x}$ касается C в точке x, то $l_{o,x} \cap C = \{x\}$.

6) Если луч $l_{o,x}$ пересекает C в точках x и y, $x \neq y$, то касательные пространства $T_x C$ и $T_y C$ не параллельны.

7) Пучок комплексных прямых, проходящих через точку o, является пучком Лефшеца, т. е. для индекса пересечения $(L, \bar{C})_x$ каждой прямой L из пучка и кривой $\bar{C}$ в каждой точке $x \in L \cap \bar{C}$ выполнено условие

$$(L, \bar{C})_x \leqslant 2, \text{ если } x \text{ — неособая точка},$$

$$(L, \bar{C})_x = \mu_x, \text{ если } x \in \operatorname{Sing} \bar{C},$$

где μ_x — кратность особой точки x на кривой $\bar{C}$. Кроме того, прямые L из пучка, проходящие через точки $x \in \bar{C} \cap L_\infty$, пересекают трансверсально $\bar{C}$ в этих точках, если $x \notin \operatorname{Sing} \bar{C}$.

Согласно лемме 1 из [4] для кривой $C = E \cup D$ всегда найдется точка o, находящаяся с C в общем положении. Выберем в $\mathbf{C}^2$ систему координат так, что точка o является началом координат. Пусть $f(z_1, z_2) = 0$ — неприводимое уравнение кривой E в выбранной системе координат и $g(z_1, z_2) = 0$ — уравнение кривой D.

Для любого $\tau \in \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ обозначим через E_τ кривую в $\mathbf{C}^2$, заданную уравнением

$$f(\tau z_1, \tau z_2) = 0. \qquad (1)$$

2. В дальнейшем нам понадобятся некоторые факты об автоморфизмах $h_{t,p,q}:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ аффинной плоскости $\mathbf{C}^2$, определяемых линейными преобразованиями вида

$$\begin{cases} w_1=t^p z_1 \\ w_2=t^q z_2, \end{cases} \tag{2}$$

где $t\in\mathbf{C}^*$, p, $q\in\mathbf{Z}$.

Назовем автоморфизм $h:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ *автоморфизмом типа* (p, q), если найдутся такие координаты (z_1, z_2) в $\mathbf{C}^2$ и число $t\in\mathbf{C}^*$, что в этих координатах h задается линейным преобразованием (2). Такие координаты в дальнейшем будут называться *правильными координатами* для автоморфизма h.

Пусть $\sigma:X\to\mathbf{C}^2$ — σ-процесс с центром в точке $o=(0, 0)\in\mathbf{C}^2$. Обозначим $L_\sigma=\sigma^{-1}(o)$. Напомним, что поверхность X — это квазипроективная поверхность в $\mathbf{P}^1\times\mathbf{C}^2$, заданная в координатах $(y_1:y_2, z_1, z_2)$ уравнением

$$y_1z_2=y_2z_1,$$

а $\sigma=\mathrm{pr}_2|_X$, где $\mathrm{pr}_2:\mathbf{P}^1\times\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ — проекция. Поверхность X покрывается двумя открытыми картами $U_i=X\cap\{y_i\neq0\}$, $i=1, 2$, изоморфными $\mathbf{C}^2$ с координатами $x_i=z_i$, $x_j=y_j/y_i$, где $\{j\}=\{1, 2\}\setminus\{i\}$, и в этих координатах отображение $\sigma|_{U_i}$ задается уравнениями

$$\begin{cases} z_i=x_i \\ z_j=x_ix_j. \end{cases}$$

Имеет место следующая простая

ЛЕММА 1. *Пусть $\sigma:X\to\mathbf{C}^2$ — σ-процесс с центром в точке $o=(0, 0)$, являющейся началом координат правильной системы координат (z_1, z_2) для автоморфизма $h:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ типа (p, q). Тогда*

1) *автоморфизм h поднимается до автоморфизма $H:X\to X$ так, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H} & X \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathbf{C}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbf{C}^2 \end{array}$$

коммутативна;

2) *для карты $U_i\subset X$, определенной выше, $H(U_i)=U_i$ и в координатах (z_i, x_j) автоморфизм $H|_{U_i}$ есть автоморфизм типа (p_i, q_i), где $p_1=p$, $q_1=q-p$, $p_2=p-q$, $q_2=q$;*

3) $H(L_\sigma)=L_\sigma$;

4) *пусть $x\in L_\sigma$ — неподвижная точка автоморфизма H; тогда если $p\neq q$, то x — начало координат системы координат (x_i, x_j) в одной из карт U_i, $i=1, 2$.*

Доказательство этой леммы состоит в непосредственной проверке того, что $H=\mathscr{H}|_X$, где $\mathscr{H}$ — автоморфизм $\mathbf{P}^1\times\mathbf{C}^2$, определяемый линейным преобразованием

$$\begin{cases} v_1 = t^p y_1 \\ v_2 = t^q y_2 \\ w_1 = t^p z_1 \\ w_2 = t^q z_2, \end{cases}$$

удовлетворяет всем свойствам 1)—4).

Рассмотрим автоморфизм $h_t : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ типа $(1, 1)$:

$$\begin{cases} w_1 = tz_1 \\ w_2 = tz_2. \end{cases} \tag{3}$$

Легко видеть, что

$$h_t(E_\tau) = E_{t^{-1}\tau}. \tag{4}$$

Замечание 1. Очевидно, что если

$$\tilde{z}_1 = a_{11} z_1 + a_{12} z_2,$$

$$\tilde{z}_2 = a_{21} z_1 + a_{22} z_2$$

— линейная замена правильной для автоморфизма h_t типа $(1, 1)$ системы координат, то координаты $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ также являются правильной системой координат для h_t.

Замечание 2. Автоморфизм h_t типа $(1, 1)$ продолжается до автоморфизма $\bar{h}_t : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$,

$$\bar{h}_t : (x_0 : x_1 : x_2) \to (x_0 : tx_1 : tx_2),$$

при этом каждая точка $x \in L_\infty = \mathbf{P}^2 \setminus \mathbf{C}^2 = \{x_0 = 0\}$ является неподвижной точкой автоморфизма $\bar{h}_t$.

Пусть $V_1 = \{x_1 \neq 0\}$ — аффинная карта в $\mathbf{P}^2$, $V_1 \simeq \mathbf{C}^2$ с координатами $y_1 = x_0/x_1$, $y_2 = x_2/x_1$. Очевидно, что $\bar{h}_t(V_1) = V_1$ и $\bar{h}_t|_{V_1}$ является автоморфизмом типа $(-1, 0)$.

3. Для кривой E существует такая последовательность σ-процессов

$$\eta_n : X_n \xrightarrow{\sigma_n} X_{n-1} \to \ldots \to X_1 \xrightarrow{\sigma_1} X_0 = \mathbf{P}^2 \tag{5}$$

с центрами в точках $a_i \in X_{i-1}$, что:

1) $a_i \in (\bigcap\limits_{\tau \in \mathbf{C}^*} \eta_{i-1}^{-1}(\bar{E}_\tau)) \cap \eta_{i-1}^*(A)$, где $\eta_{i-1} = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_{i-1}$, если $i \geqslant 1$, и $\eta_0 = \mathrm{id}$, $\eta_{i-1}^{-1}(\bar{E}_\tau)$ — собственный прообраз кривой $\bar{E}_\tau$, а $\eta_{i-1}^*(A)$ — полный прообраз множества $A = (\bigcap\limits_{\tau \in \mathbf{C}^*} \bar{E}_\tau) \cap L_\infty$;

2) $(\bigcap\limits_{\tau \in \mathbf{C}^*} \eta_n^{-1}(\bar{E}_\tau)) \cap \eta_n^*(L_\infty) = \varnothing$.

Действительно, в обозначениях п. 2 рассмотрим автоморфизм $h_t : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ типа $(1, 1)$, для которого система координат (z_1, z_2) на $\mathbf{C}^2$ является правильной. Автоморфизм h_t продолжается до автоморфизма $\bar{h}_t : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$. Сделав, если надо, линейную замену координат в $\mathbf{C}^2$, мы можем считать, что точка $a_1 \in A$, с центром в которой надо делать σ-процесс, имеет координаты $(0 : 1 : 0)$. В этом случае $a_1 \in V_1$ и V_1 изоморфно $\mathbf{C}^2$ с координатами (y_1, y_2), и в этих координатах $a_1 = (0, 0)$.

По замечаниям 1 и 2 в п. 2 ограничение $\bar{h}_t|_{V_1}$ является автоморфизмом типа $(-1, 0)$. По лемме 1 автоморфизм $\bar{h}_t$ поднимается до автоморфизма $H_{t,1}: X_1 \to X_1$, причем $H_{t,1}(\sigma_1^{-1}(\bar{E}_\tau)) = \sigma_1^{-1}(\bar{E}_{t^{-1}\tau})$. Поэтому если

$$\bigcap_{\tau \in C^*} \sigma_1^{-1}(\bar{E}_\tau) \cap \sigma_1^*(L_\infty)$$

содержит точку x, то x — неподвижная точка автоморфизма $H_{t,1}$. В этом случае из леммы 1 следует, что если $\sigma_2: X_2 \to X_1$ — σ-процесс с центром в $a_2 = x$, то автоморфизм $H_{t,1}$ поднимается до автоморфизма $H_{t,2}: X_2 \to X_2$. Продолжая эти рассуждения по индукции, получаем, что для любого i автоморфизм $\bar{h}_t$ поднимается до автоморфизма $H_{t,i}: X_i \to X_i$, причем $H_{t,i}(\eta_i^{-1}(\bar{E}_\tau)) = \eta_i^{-1}(\bar{E}_{t^{-1}\tau})$. Поэтому доказательство того, что последовательность σ-процессов (4) с центрами в точках, принадлежащих $(\bigcap_{\tau \in C^*} \eta_i^{-1}(\bar{E}_\tau)) \cap \eta_i^*(L_\infty)$, будет конечна, вытекает из следующих замечаний.

1) Пусть $a_i \in (\bigcap_{\tau \in C^*} \eta_{i-1}^{-1}(\bar{E}_\tau)) \cap \eta_{i-1}^*(L_\infty)$; тогда кратность $\mu_i(\tau)$ точки a_i на кривой $\eta_{i-1}^{-1}(\bar{E}_\tau)$ не зависит от τ, так как для любых $\tau_1, \tau_2 \in C^*$ кривые $\eta_{i-1}^{-1}(\bar{E}_{\tau_1})$ и $\eta_{i-1}^{-1}(\bar{E}_{\tau_2})$ могут быть переведены друг в друга автоморфизмом $H_{t,i-1}$, где $t = \tau_1 \cdot \tau_2^{-1}$.

2) Индексы пересечений

$$(\eta_{i-1}^{-1}(\bar{E}_{\tau_1}), \eta_{i-1}^{-1}(\bar{E}_{\tau_2}))_{X_{i-1}} \quad \text{и} \quad (\eta_i^{-1}(\bar{E}_{\tau_1}), \eta_i^{-1}(\bar{E}_{\tau_2}))_{X_i}$$

связаны соотношением

$$0 \leqslant (\eta_i^{-1}(\bar{E}_{\tau_1}), \eta_i^{-1}\bar{E}_{\tau_2}))_{X_i} = (\eta_{i-1}^{-1}(\bar{E}_{\tau_1}), \eta_{i-1}^{-1}(E_{\tau_2}))_{X_{i-1}} - \mu_i^2,$$

где $\mu_i = \mu_i(\tau)$.

Определение. Назовем кривую E *C^*-эквивариантной на бесконечности*, если последовательность σ-процессов (4) для кривой E удовлетворяет дополнительному условию:

3) кривые $\eta_n^{-1}(\bar{E}_\tau)$ являются гладкими в точках $\eta_n^{-1}(\bar{E}_\tau) \cap \eta_n^*(L_\infty)$ и трансверсально пересекают $\eta_n^*(L_\infty)$ в этих точках.

Замечание 3. Легко видеть, что если кривая $\bar{E}$ неособа в точках $x \in \bar{E} \cap L_\infty$, то E является C^*-эквивариантной на бесконечности.

4. Пусть $\tau \in C^*$ таково, что E_τ не является неприводимой компонентой кривой D. Тогда определено число

$$(E_\tau, D)_{C^2} = \sum_{x \in D \cap E_\tau} (E_\tau, D)_x,$$

где $(E_\tau, D)_x$ — индекс пересечения кривых E_τ и D в точке x.

Обозначим $T_D = \{\tau \in C^* | E_\tau \not\subset D\}$ и $M = \max_{\tau \in T_D} (E_\tau, D)_{C^2}$.

Пусть $T(E, D) = \{\tau \in C^* | (E_\tau, D)_{C^2} = M\}$ и $T_0(E, D)$ — подмножество тех $\tau \in T(E, D)$, для которых в каждой точке $x \in E_\tau \cap D$ индекс пересечения $(E_\tau, D)_x$ равен 1, т. е. для которых кривые E_τ и D неособы в каждой точке $x \in E_\tau \cap D$ и пересекаются в этих точках трансверсально.

ЛЕММА 2. 1) *$T(E, D)$ является непустым открытым по Зарисскому подмножеством в C^*.*

2) *Если точка o находится в общем положении с кривой $C=E\cup D$, то $T_0(E, D)$ является непустым открытым по Зарисскому подмножеством в $T(E, D)$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения 1) рассмотрим в произведении $\mathbf{P}^2\times\mathbf{C}^*=\mathscr{X}$ поверхности $\mathscr{D}=\bar{D}\times\mathbf{C}^*$, $\mathscr{L}=L_\infty\times\mathbf{C}^*$ и поверхность $\mathscr{E}$ — замыкание в $\mathscr{X}$ поверхности $\mathscr{E}_0\subset\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}^*$, заданной уравнением

$$f(\tau z_1, \tau z_2)=0.$$

Пусть $\mathscr{X}_i=X_i\times\mathbf{C}^*$ и $\bar{\sigma}_i=\sigma_i\times\mathrm{id}:\mathscr{X}_i\to\mathscr{X}_{i-1}$, где X_i — поверхности из последовательности σ-процессов (4) для кривой E. Легко видеть, что $\bar{\sigma}_i$ — моноидальное преобразование с центром в кривой $a_i\times\mathbf{C}^*$.

Обозначим $\bar{\eta}_n=\bar{\sigma}_1\circ\ldots\circ\bar{\sigma}_n$. Из свойств 1) и 2), которым удовлетворяет последовательность (4), следует, что $\mathscr{A}=\bar{\eta}_n^{-1}(\mathscr{D})\cap\bar{\eta}_n^{-1}(\mathscr{E})\cap\bar{\eta}_n^{*}(\mathscr{L})$ является конечным множеством.

Пусть

$$m=\min_{\tau\in T_D}\sum_{x\in L_\infty}(\bar{E}_\tau, \bar{D})_x=(\bar{E}, \bar{D})_{\mathbf{P}^2}-M.$$

Тогда

$$T(E, D)=\left\{\tau\in T_D\,\Big|\,\sum_{x\in L_\infty}(\bar{E}_\tau, \bar{D})_x=m\right\}.$$

Поэтому, очевидно, множество $T_D\setminus T(E, D)$ совпадает с множеством тех значений τ, для которых $\eta_n^{-1}(\bar{D})\cap\eta_n^{-1}(\bar{E}_\tau)\cap\eta_n^{*}(L_\infty)\neq\varnothing$. Следовательно, $T_D\setminus T(E, D)=T_D\cap p(\mathscr{A})$, где $p=\mathrm{pr}_2\circ\bar{\eta}_n$ и $\mathrm{pr}_2:\mathbf{P}^2\times\mathbf{C}^*\to\mathbf{C}^*$ — проекция.

Для доказательства утверждения 2) обозначим через $S=\mathscr{D}\cap\mathscr{E}$ кривую в $\mathscr{X}_n$ и рассмотрим ограничение $p|_S=q$ морфизма $p:\mathscr{X}_n\to\mathbf{C}^*$ на кривую S. Покажем, что степень $\deg q$ морфизма q равна M.

Очевидно, что для $\tau\in T(E, D)$ прообраз $q^{-1}(\tau)$ совпадает с пересечением $D\cap E_\tau$. Кроме того, легко видеть, что из свойств 2), 4) и 6) общего положения, которым удовлетворяют точка o и кривая $C=E\cup D$, вытекает, что для всех $\tau\in\mathbf{R}_+=\{\tau\in\mathbf{C}\,|\,\mathrm{Im}\,\tau=0,\ \mathrm{Re}\,\tau>0\}$ кривые E_τ и D пересекаются трансверсально в каждой точке из $D\cap E_\tau$. Следовательно, для $\tau\in T(E, D)\cap\mathbf{R}_+$

$$\#q^{-1}(\tau)=(E_\tau, D)_{\mathbf{C}^2}=M.$$

Пусть $B\subset\mathbf{C}^*$ — множество точек, над которыми морфизм q разветвлен. Из вышеизложенного следует, что $T_0(E, D)=T(E, D)\setminus B$ — непустое открытое по Зарисскому подмножество в $T(E, D)$.

5. Обозначим через $\nu_\tau:E_\tau^n\to E_\tau$ морфизм нормализации и $\bar{\nu}_\tau=i_\tau\circ\nu_\tau:E_\tau^n\to\mathbf{C}^2$, где $i_\tau:E_\tau\subsetneq\mathbf{C}^2$ — вложение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть кривые E, D и точка o в $\mathbf{C}^2$ таковы, что:*

1) *точка o находится в общем положении с кривой $E\cup D$;*

2) *E — неприводимая кривая, $E\not\subset D$;*

3) *E является $\mathbf{C}^*$-эквивариантной на бесконечности.*

Тогда если для любой неприводимой компоненты D_i кривой D индекс *пересечения* $(E, D_i)_{\mathbf{C}^2}>0$, *то гомоморфизм нормализации*

$$\tilde{\nu}_{\tau*}:\pi_1(E_\tau^n\setminus\nu^{-1}(E_\tau\cap D))\to\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)$$

является эпиморфизмом для всех $\tau\in T_0(E, D)$.

Аналогично следствию 1 из теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть E и $D\subset\mathbf{C}^2$ удовлетворяют условиям теоремы 2, и пусть $f: Y\to\mathbf{C}^2$ — конечный морфизм нормальной поверхности Y, неразветвленный вне D. Тогда для любого $\tau\in T_0(E, D)$ кривая $f^{-1}(E_\tau)$ неприводима.*

Приведенные ниже примеры показывают, что если для $\mathbf{C}^*$-эквивариантной на бесконечности кривой E и кривой D не выполнено одно из условий теоремы 2, то гомоморфизм нормализации уже не обязан быть эпиморфизмом.

Пример 1. Пусть E и D — параллельные прямые в $\mathbf{C}^2$, $E\neq D$. Тогда, очевидно, $1\in T_0(E, D)$, а гомоморфизм $\tilde{\nu}_{1*}$ является вложением тривиальной группы в группу, изоморфную $\mathbf{Z}$.

Пример 2. Пусть $\bar{D}$ — кривая в $\mathbf{P}^2$ с тремя каспидальными особыми точками, $\deg\bar{D}=4$, и пусть L_∞ и $\bar{E}$ — прямые, проходящие через одну из особых точек кривой $\bar{D}$ — точку x, причем $(\bar{E}, \bar{D})_x=3$. Пусть $\mathbf{C}^2=\mathbf{P}^2\setminus L_\infty$. Имеем

$$(D, E)_{\mathbf{C}^2}=1<\max_{\tau\in T_D}(D, E_\tau)_{\mathbf{C}^2}=2,$$

т. е. $1\notin T_0(E, D)$. В нашем случае $E\setminus(E\cap D)$ есть действительная плоскость без одной точки, поэтому $\pi_1(E\setminus(E\cap D))\simeq\mathbf{Z}$.

С другой стороны, известно [6], что $\pi_1(\mathbf{P}^2\setminus\bar{D})$ — некоммутативная группа. Поэтому $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)$ также является некоммутативной группой, так как естественный гомоморфизм $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)\to\pi_1(\mathbf{P}^2\setminus\bar{D})$ является эпиморфизмом. Следовательно, гомоморфизм нормализации $\tilde{\nu}_{1*}:\pi_1(E\setminus(E\cap D))\to\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)$ не является эпиморфизмом.

6. Покажем, что из теоремы 2 следует теорема 1. Действительно, для кривых $\bar{E}$ и $\bar{D}\subset\mathbf{P}^2$, удовлетворяющих условиям теоремы 1, выберем прямую $L_\infty\subset\mathbf{P}^2$, пересекающую кривую $\bar{C}=\bar{E}\cup\bar{D}$ в $\deg\bar{D}+\deg\bar{E}$ различных точках. Пусть $\mathbf{C}^2=\mathbf{P}^2\setminus L_\infty$, и пусть $D=\bar{D}\cap\mathbf{C}^2$, $E=\bar{E}\cap\mathbf{C}^2$. Выберем в $\mathbf{C}^2$ точку o, находящуюся с кривой $C=E\cup D$ в общем положении.

В силу выбора прямой L_∞ индекс пересечения

$$(E, D)_{\mathbf{C}^2}=\deg\bar{E}\cdot\deg\bar{D}$$

максимален. Следовательно, $1\in T_0(E, D)$.

Согласно замечанию 3 в п. 3 кривая E является $\mathbf{C}^*$-эквивариантной на бесконечности. Следовательно, по теореме 2 гомоморфизм нормализации

$$\tilde{\nu}_{1*}:\pi_1(E^n\setminus\nu^{-1}(E\cap D))\to\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)$$

является эпиморфизмом. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\bar{E}\setminus\nu^{-1}(\bar{E}\cap\bar{D})) & \xrightarrow{\tilde{\nu}_*} & \pi_1(\mathbf{P}^2\setminus\bar{D})\\
\alpha\uparrow & & \uparrow\beta\\
\pi_1(E^n\setminus\nu^{-1}(E\cap D)) & \xrightarrow[\tilde{\nu}_{1*}]{} & \pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)
\end{array}$$

естественные гомоморфизмы α и β, индуцированные вложениями, также являются эпиморфизмами. Следовательно, $\tilde{\nu}_*$ должен быть эпиморфизмом.

7. Доказательство теоремы 2 вытекает из следующих трех лемм.

ЛЕММА 3. *В условиях теоремы 2 для любых* $\tau_1, \tau_2 \in T_0(E, D)$ *существуют* C^∞*-диффеоморфизмы* $h(\tau_1, \tau_2): \mathbf{C}^2\setminus D \to \mathbf{C}^2\setminus D$ *и* $g(\tau_1, \tau_2): E_{\tau_1}{}^n\setminus \nu_{\tau_1}{}^{-1}(E_{\tau_1}\cap D) \to E_{\tau_2}{}^n\setminus \nu_{\tau_2}{}^{-1}(E_{\tau_2}\cap D)$ *такие, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
E_{\tau_1}{}^n \setminus \nu_{\tau_1}^{-1}(E_{\tau_1}\cap D) & \xrightarrow{g(\tau_1, \tau_2)} & E_{\tau_2}{}^n \setminus \nu_{\tau_2}^{-1}(E_{\tau_2}\cap D) \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{\nu}_{\tau_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\nu}_{\tau_2}} \\
\mathbf{C}^2 \setminus D & \xrightarrow{h(\tau_1, \tau_2)} & \mathbf{C}^2 \setminus D
\end{array}$$

коммутативна.

ЛЕММА 4. *В условиях теоремы 2 для любого* $\tau \in T_0(E, D)$ *гомоморфизм*

$$i_{\tau*}: \pi_1(E_\tau\setminus(E_\tau\cap D)) \to \pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D),$$

индуцированный вложением $i_\tau: E_\tau\setminus(E_\tau\cap D) \to \mathbf{C}^2\setminus D$, *является эпиморфизмом.*

ЛЕММА 5. *В условиях теоремы 2 для* $\tau \in T_0(E, D)\cap \mathbf{R}_+$, $\tau \gg 1$, *имеет место равенство*

$$\tilde{\nu}_{\tau*}\pi_1(E_\tau{}^n\setminus \nu_\tau{}^{-1}(E_\tau\cap D)) = i_{\tau*}\pi_1(E_\tau\setminus(E_\tau\cap D)).$$

Доказательству этих лемм посвящены пп. 8—11.

Замечание 4. Легко видеть, что приведенные ниже доказательства лемм 3 и 5 нигде не используют условие $\mathbf{C}^*$-эквивариантности на бесконечности кривой E, т. е. леммы 3 и 5 справедливы и без этого условия.

8. Множество $T_0(E, D)$ является связным множеством. Поэтому для доказательства леммы 3 достаточно показать, что для любой точки $\tau_0 \in T_0(E, D)$ найдется такой диск $\Delta_\delta(\tau_0) = \{\tau \in \mathbf{C} \mid |\tau - \tau_0| < \delta\} \subset T_0(E, D)$, что для любого $\tau \in \Delta_\delta(\tau_0)$ существуют требуемые диффеоморфизмы $h(\tau_0, \tau)$ и $g(\tau_0, \tau)$.

В обозначениях п. 4 многообразие $\mathscr{X}_n$ по своему определению является тривиальным расслоением над $\mathbf{C}^*$. Обозначим эту тривиализацию через $\varphi: \mathscr{X}_n \xrightarrow{\sim} X_n \times \mathbf{C}^*$. Наряду с этой тривиализацией существует еще одна тривиализация многообразия $\mathscr{X}_n$. А именно, в $\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}^* = \mathscr{X}^0$ с координатами z_1, z_2, τ положим

$$w_1 = \tau z_1, \quad w_2 = \tau z_2, \quad t = \tau.$$

Координаты w_1, w_2, t определяют новую тривиализацию $\psi_0: \mathscr{X}^0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^2\times\mathbf{C}^*$, которая по лемме 1 продолжается до тривиализации $\psi: \mathscr{X}_n \xrightarrow{\sim} X_n \times \mathbf{C}^*$. Для этой тривиализации имеем

$$\psi|_{\mathscr{E}}: \mathscr{E} \simeq \eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0}) \times \mathbf{C}^* \hookrightarrow X_n \times \mathbf{C}^*.$$

Обозначим $\tilde{\mathscr{X}}_n = p^{-1}(T_0(E, D))$, где $p: \mathscr{X}_n \to \mathbf{C}^*$ — проекция. Пусть $Y = p^{-1}(\tau_0) \simeq X_n$, и пусть $\tilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E}\cap\tilde{\mathscr{X}}_n$, $\tilde{\mathscr{D}} = \mathscr{D}\cap\tilde{\mathscr{X}}_n$. По определению множества $T_0(E, D)$ дивизоры $\tilde{\mathscr{D}}$ и $\tilde{\mathscr{E}}$ пересекаются трансверсально и $\tilde{\mathscr{E}}\cap\tilde{\mathscr{D}} \subset$

$\subset \tilde{\mathscr{X}}_n \cap \mathscr{X}^0 \simeq \mathbf{C}^2 \times T_0(E, D)$, а ограничение $p|_{\tilde{\mathscr{E}} \cap \tilde{\mathscr{D}}}: \tilde{\mathscr{E}} \cap \tilde{\mathscr{D}} \to T_0(E, D)$ морфизма p на кривую $\tilde{\mathscr{E}} \cap \tilde{\mathscr{D}}$ является локальным изоморфизмом. В координатах z_1, z_2, τ в $\tilde{\mathscr{X}}_n \cap \mathscr{X}^0$ дивизоры $\tilde{\mathscr{E}}$ и $\tilde{\mathscr{D}}$ задаются уравнениями $f(\tau z_1, \tau z_2) = 0$ и $g(z_1, z_2) = 0$ соответственно.

Пусть x_i — точка из $Y \cap (\tilde{\mathscr{E}} \cap \tilde{\mathscr{D}})$, $1 \leq i \leq M = (E_{\tau_0}, D)_{\mathbf{C}^2}$. Обозначим $u = f(\tau z_1, \tau z_2)$ и $v = g(z_1, z_2)$. Тогда функции u, v, τ являются локальными координатами в некоторой окрестности $U_i \subset \tilde{\mathscr{X}}_n$, содержащей точку x_i. Мы можем считать, что

$$U_i \simeq \Delta_i^3 = \{(u, v, \tau) \in \mathbf{C}^3 \mid |u| < \varepsilon_i, |v| < \varepsilon_i, |\tau - \tau_0| < \delta_i\}.$$

Обозначим этот биголоморфный изоморфизм через $\varphi_i: U_i \xrightarrow{\sim} \Delta_i^3 = \Delta_{\varepsilon_i}^2 \times \Delta_{\delta_i}$. Ограничение $p|_{U_i}$ совпадает с $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_i$, где $\mathrm{pr}_2: \Delta_i^3 = \Delta_{\varepsilon_i}^2 \times \Delta_{\delta_i} \to \Delta_{\delta_i}$ — проекция на второй сомножитель. Обозначим $V_i = \varphi_i^{-1}(\Delta_{1/2}^3)$, где

$$\Delta_{1/2}^3 = \{(u, v, \tau) \in \Delta_i^3 \mid |u| < {}^1/_2\varepsilon_i, |v| < {}^1/_2\varepsilon_i, |\tau - \tau_0| < {}^1/_2\delta_i\}.$$

Выберем в $\tilde{\mathscr{X}}_n$ открытое множество U_{M+1} такое, что

а) $U_{M+1} \cap (\bigcup_{i=1}^{M} \bar{V}_i) = \varnothing$, где $\bar{V}_i$ — замыкания построенных выше открытых множеств V_i;

б) $U_{M+1} \cap \mathscr{D} = \varnothing$;

в) $\eta_n^{-1}(E_{\tau_0}) \setminus (\eta_n^{-1}(E_{\tau_0}) \cap (\bigcup_{i=1}^{M} U_i)) \subset U_{M+1}$.

Очевидно, такое множество U_{M+1} существует. Более того, мы можем считать, что

$$\varphi_{M+1} = \psi|_{U_{M+1}}: U_{M+1} \xrightarrow{\sim} (U_{M+1} \cap Y) \times \Delta \subset X_n \times \mathbf{C}^*,$$

где Δ — некоторый диск с центром в точке τ_0 радиуса δ_{M+1}.

Выберем в $\tilde{\mathscr{X}}_n$ открытое, компактно вложенное в U_{M+1} (уменьшив, если надо, δ_{M+1}) подмножество V_{M+1} такое, что

1) все особые точки кривой $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})$ и точки $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0}) \cap \mathscr{L}$ лежат в V_{M+1};

2) замыкание $\bar{V}_{M+1}$ не пересекается с $\bigcup_{i=1}^{M} \bar{U}_i$;

3) $\varphi_{M+1}|_{V_{M+1}} \xrightarrow{\sim} (V_{M+1} \cap Y) \times \Delta_{1/2}$, где $\Delta_{1/2}$ — диск радиуса ${}^1/_2\delta_{M+1}$.

Наконец, мы можем выбрать открытое множество $U_{M+2} \subset \tilde{\mathscr{X}}_n$ такое, что

а) $U_{M+2} \cap (\bigcup_{i=1}^{M+1} \bar{V}_i) = \varnothing$;

б) $\varphi_{M+2} = \varphi|_{U_{M+2}}: U_{M+2} \xrightarrow{\sim} (U_{M+2} \cap Y) \times \Delta \subset X_n \times \mathbf{C}^*$, где Δ — некоторый диск с центром в точке τ_0 радиуса δ_{M+2};

в) $Y \subset \bigcup_{i=1}^{M+2} U_i$.

Выберем в $\tilde{\mathscr{X}}_n$ открытое, компактно вложенное в U_{M+2} подмножество V_{M+2} (уменьшив, если надо, δ_{M+2}) такое, что

1) V_{M+2} содержит все особые точки кривой $(\mathscr{D}\bigcup\mathscr{L})\bigcap Y\setminus(\bigcup\limits_{i=1}^{M+1}\overline{V}_i)$;

2) $V_{M+2}\bigcap(\bigcup\limits_{i=1}^{M+1}\overline{U}_i)=\varnothing$;

3) $\varphi_{M+2}|_{V_{M+2}}: V_{M+2}\to(V_{M+2}\cap Y)\times\Delta_{1/2}$, где $\Delta_{1/2}$ — диск радиуса $^1/_2\delta_{M+2}$.

Уменьшив определенные выше множества U_i (соответственно V_i), мы можем считать, что $\delta_i=2\delta$ для $1\leqslant i\leqslant M+2$. Пусть τ_1 удовлетворяет неравенству $|\tau_1-\tau_0|<\delta$.

Отметим, что определенные выше тривиализации

$$\varphi_i: U_i \xrightarrow{\sim} (U_i\bigcap Y)\times\Delta_{2\delta},\quad 1\leqslant i\leqslant M+2,$$

определяют биголоморфные отображения

$$\hbar_i(\tau_0,\ \tau_1): V_i\bigcap p^{-1}(\tau_0)\xrightarrow{\sim} V_i\bigcap p^{-1}(\tau_1)$$

такие, что $\hbar_i(\tau_0,\ \tau_1)|_{C_{\tau_0}}: C_{\tau_0}\xrightarrow{\sim} C_{\tau_1}$ являются биголоморфными отображениями соответственно для $C_\tau=V_i\cap(\mathscr{D}\cup\mathscr{L})\cap p^{-1}(\tau)$, либо для $C_\tau= =V_i\cap\eta_n^{-1}(\bar{E}_\tau)$.

Обозначим через $\lambda=\{\tau\in\mathbf{C}|\tau=t\tau_1+(1-t)\tau_0,\quad t\in[0,\ 1]\}$ отрезок в $T_0(E,\ D)$, соединяющий точки τ_0 и τ_1. Пусть $Z=p^{-1}(\lambda)$, и пусть $\dfrac{\partial}{\partial t}$ — векторное поле на λ — дифференцирование по t. Тривиализации $\varphi_i: U_i\xrightarrow{\sim}(U_i\cap Y)\times\Delta_{2\delta}$ позволяют однозначно поднять векторное поле $\dfrac{\partial}{\partial t}$ до векторных полей $\dfrac{\partial}{\partial T_i}$ на $U_i\cap Z$. Имеем $p_*\left(\dfrac{\partial}{\partial T_i}\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}$; кроме того, если $x\in U_i$ — неособая точка многообразия $Z\cap(\mathscr{E}\cup\mathscr{D}\cup\mathscr{L})$, то $\dfrac{\partial}{\partial T_i}(x)$ лежит в касательном пространстве к этому многообразию.

Пусть ρ_i — разбиение единицы в $U=\bigcup\limits_{i=1}^{M+2}U_i$, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{1\leqslant i\leqslant M+2}$, т. е.

1) все ρ_i являются C^∞-гладкими функциями в U;
2) $\rho_i>0$ на U_i и $\rho_i\equiv0$ на $U\setminus U_i$;
3) $\rho_i|_{V_i}\equiv1$;
4) $\sum\limits_{i=1}^{M+2}\rho_i\equiv1$.

Рассмотрим гладкое векторное поле $\dfrac{\partial}{\partial T}$ на Z такое, что $\dfrac{\partial}{\partial T}(x)= =\sum\rho_i(x)\dfrac{\partial}{\partial T_i}(x)$ в каждой точке $x\in Z$, где суммирование производится по тем i, для которых $x\in U_i$. Очевидно, в каждой точке $x\in Z$ выполнено равенство $p_*\left(\dfrac{\partial}{\partial T}(x)\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}(p(x))$. Следовательно, интегральные линии векторного поля $\dfrac{\partial}{\partial T}$ определяют C^∞-диффеоморфизм $h(\tau_0,\ \tau_1): :p^{-1}(\tau_0)\xrightarrow{\sim}p^{-1}(\tau_1)$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $h(\tau_0, \tau_1)|_{V_i \cap p^{-1}(\tau_0)} = \tilde{h}_i(\tau_0, \tau_1)$;

б) $h(\tau_0, \tau_1)((\mathscr{D} \cup \mathscr{L}) \cap p^{-1}(\tau_0)) = (\mathscr{D} \cup \mathscr{L}) \cap p^{-1}(\tau_1)$;

в) $h(\tau_0, \tau_1)(\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})) = \eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_1})$.

Пусть $\tilde{g}(\tau_0, \tau_1) = h(\tau_0, \tau_1)|_{\eta_n^{-1}(\bar{E}\tau_0)}$ — диффеоморфизм кривой $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})$ на кривую $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_1})$. Тогда, так как $h(\tau_0, \tau_1)|_{V_{M+1} \cap p^{-1}(\tau_0)}$ — биголоморфное отображение и все особые точки кривой $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})$ лежат в V_{M+1}, то $\tilde{g}(\tau_0, \tau_1)$ поднимается до диффеоморфизма $g(\tau_0, \tau_1): \bar{E}_{\tau_0}{}^n \xrightarrow{\sim} \bar{E}_{\tau_1}{}^n$. Леммма 3 доказана.

9. Пусть $f: B \to C$ — морфизм гладкой поверхности B на гладкую кривую C. Скажем, что f является *почти гладким* морфизмом, если на каждом слое $f^{-1}(c)$ найдется точка, в которой f является гладким морфизмом.

Для доказательства леммы 4 нам понадобится следующая

ЛЕММА 6. *Пусть $f: B \to C$ — собственный морфизм гладкой поверхности B на гладкую кривую C со связными слоями. Пусть $D \subset B$ — произвольная кривая такая, что $\tilde{f} = f|_{B \setminus D}: B \setminus D \to C$ является почти гладким морфизмом, и пусть $F_0 = f^{-1}(c_0)$ такой слой, что F_0 и D не имеют общих компонент, и такой, что для любой точки $x \in D \cap F_0$:*

а) *морфизм f является гладким в точке x;*

б) *кривая D_{red} неособа в точке x и пересекается с F_0 трансверсально в этой точке.*

Тогда последовательность

$$\pi_1(F_0 \setminus (D \cap F_0)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B \setminus D) \xrightarrow{\tilde{f}_*} \pi_1(C) \to 1$$

является точной.

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [5, лемма 1.5]), что для общего слоя $F = f^{-1}(c)$ морфизма f и кривой D, удовлетворяющих условиям леммы 6, последовательность

$$\pi_1(F \setminus (D \cap F)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B \setminus D) \xrightarrow{\tilde{f}_*} \pi_1(C) \to 1 \tag{6}$$

является точной. Кроме того, если $\sigma: \tilde{B} \to B$ — σ-процесс с центром в точке, то $\sigma_*: \pi_1(\tilde{B}) \to \pi_1(B)$ является изоморфизмом. Следовательно, сделав, если надо, несколько σ-процессов с центрами в точках x, $x \in D$, мы можем считать, что слой F_0 является (неприведенным) дивизором с нормальными пересечениями.

Пусть $F_0 = \sum R_i + \sum n_j S_j$ — разложение дивизора F_0 на неприводимые компоненты, где $R_i \neq R_j$ при $i \neq j$, $R_i \neq S_j$ и $n_j > 1$. Кривые R_i и S_j являются гладкими кривыми. По условию леммы кривая D не пересекается с кривыми S_j.

Пусть $\Delta \subsetneq C$ — окрестность точки c_0, изоморфная диску $\{|t| < 1\}$, такая, что $f: f^{-1}(\Delta) \setminus F_0 \to \Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ является гладким морфизмом и $f^{-1}(\Delta) \cap D$ распадается на d непересекающихся сечений D_i морфизма f над Δ, где $d = (D, F)_B$. Обозначим $W = f^{-1}(\Delta)$.

По теореме Мамфорда о полустабильной редукции [2] морфизм $f: W \to$

$\to\Delta$ можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \overline{W} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "f"] \\ \Delta_\tau \arrow[r, "q"'] & \Delta \end{tikzcd}$$

в которой $g:\overline{W}\to\Delta_\tau$ — собственный морфизм гладкой аналитической поверхности $\overline{W}$ на диск $\Delta_\tau=\{|\tau|<1\}$, все слои которого неособы при $\tau\neq0$, а $g^{-1}(0)$ является приведенным дивизором с нормальными пересечениями; $q:\Delta_\tau\to\Delta$ задано уравнением $t=\tau^n$ для некоторого $n\in\mathbf{N}$; $p:\overline{W}\to W$ — аналитическое отображение на W, неразветвленное вне F_0, и в общей точке каждой кривой $R_i\subset F_0$ порядок ветвления отображения p равен n.

Прообраз $p^{-1}(F)$ распадается на n непересекающихся кривых, изоморфных F, $p^{-1}(F)=F_1+\ldots+F_n$. Легко видеть, что $p^{-1}(D_i)$ являются сечениями отображения g над Δ_τ.

Пусть x — гладкая точка дивизора F_0, $x\in R_1$ и $x\notin D$, и пусть $\bar{x}=p^{-1}(x)$. Так как ограничение $p|_{p^{-1}(R_i)}:p^{-1}(R_i)\to R_i$ является изоморфизмом и $g^{-1}(0)$ является связным множеством, а $p|_{g^{-1}(0)}:g^{-1}(0)\to F_{0,\mathrm{red}}$ есть отображение на все $F_{0,\mathrm{red}}$, то, легко видеть, что

$$\alpha=(p|_{g^{-1}(0)})_*:\pi_1(g^{-1}(0)\setminus(g^{-1}(0)\cap p^{-1}(D)),\bar{x})\to\pi_1(F_{0,\mathrm{red}}\setminus(F_0\cap D),x)$$

является эпиморфизмом.

Известно (см., например, [1]), что $g^{-1}(0)$ является строгим деформационным ретрактом пространства $\overline{W}$, причем ограничение r_1 соответствующей ретракции $r:W\to g^{-1}(0)$ на слой F_1 обладает следующими свойствами:

а) $r_1:F_1\setminus r_1^{-1}(T)\to g^{-1}(0)\setminus T$ является диффеоморфизмом, где T — множество двойных точек дивизора с нормальными пересечениями $g^{-1}(0)$;

б) для любой точки $y\in T$ слой $r_1^{-1}(y)$ диффеоморфен окружности.

Более того, ретракция r может быть выбрана таким образом, что $r(p^{-1}(D_i))=p^{-1}(D_i)\cap g^{-1}(0)$ суть точки для всех i, $1\leqslant i\leqslant d$.

Легко видеть, что гомоморфизм

$$r_*:\pi_1(F_1\setminus(p^{-1}(D)\cap F_1),\bar{y})\to\pi_1(g^{-1}(0)\setminus(g^{-1}(0)\cap p^{-1}(D)),\bar{x})$$

является эпиморфизмом, где $\bar{y}=r_1^{-1}(\bar{x})$.

Обозначим через $\lambda=r^{-1}(\bar{x})$ путь на $\overline{W}$, соединяющий точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Тогда $\mu=p(\lambda)$ — путь, соединяющий точки $x=p(\bar{x})$ и $y=p(\bar{y})$. Пусть

$$i(\mu):\pi_1(F\setminus(D\cap F),y)\to\pi_1(B\setminus D,x)$$

— гомоморфизм фундаментальных групп, сопоставляющий замкнутой петле $\gamma\subset F\setminus(D\cap F)$, начало и конец которой есть точка y, замкнутую петлю $\mu\gamma\mu^{-1}\subset B\setminus D$, начало и конец которой есть точка x.

Очевидно, мы можем считать, что i_* в (6) совпадает с $i(\mu)$. Поэтому из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \pi_1(F_1\setminus(p^{-1}(D)\cap F_1),\bar{y}) \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, "p_*", "\wr"'] & \pi_1(g^{-1}(0)\setminus(g^{-1}(0)\cap p^{-1}(D)),\bar{x}) \arrow[d, "\alpha"] \\ \pi_1(F\setminus(D\cap F),y) \arrow[r, "i(\mu)"] & \pi_1(B\setminus D,x) & \pi_1(F_0\setminus(F_0\cap D),x) \arrow[l, "i_*"'] \end{tikzcd}$$

в которой r_0 и α — эпиморфизмы, а p_* — изоморфизм, и из точной последовательности (6) следует лемма 6.

10. Докажем лемму 4. Пусть $\tau_0 \in T_0(E, D) \cap \mathbf{R}_+$. Из леммы 3 следует, что лемму 4 достаточно доказать для кривой E_{τ_0}.

Из условий 4) и 6), которым удовлетворяют начало координат o и кривая $C = D \cup E$, следует, что существует $\tau_1 \in T_0(E, D) \cap \mathbf{R}_+$, $\tau_0 \neq \tau_1$, такое, что

i) E_{τ_0} и E_{τ_1} пересекаются трансверсально;

ii) $D \cap E_{\tau_0} \cap E_{\tau_1} = \varnothing$.

Кривые $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})$ и $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_1})$ (в обозначениях п. 3) линейно эквивалентны в X_n; следовательно, пучок кривых в X_n, определяемый кривыми $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})$ и $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_1})$, задает рациональное отображение $g : X_n \dashrightarrow \mathbf{P}^1$, $g(\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})) = p_0$. Базисные точки отображения g — это в точности точки из $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0}) \cap \eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_1})$. Но по построению X_n кривые $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})$ и $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_1})$ могут пересекаться только в $\eta_n^{-1}(\mathbf{C}^2) \simeq \mathbf{C}^2$. Возможны два случая: 1) $(E_{\tau_0}, E_{\tau_1})_{\mathbf{C}^2} > 0$ и 2) $(E_{\tau_0}, E_{\tau_1})_{\mathbf{C}^2} = 0$.

Рассмотрим первый случай. Из условия ii) следует, что базисные точки отображения g не лежат на кривой D, и из i) следует, что каждая базисная точка x_i отображения g разрешается одним σ-процессом. Пусть $\sigma : \bar{X}_n \to X_n$ — композиция σ-процессов с центрами в точках из $E_{\tau_0} \cap E_{\tau_1}$. Тогда в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} \bar{X}_n \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & & X_n \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbf{P}^1 & \end{tikzcd}$$

f является морфизмом. Кривая $\sigma^{-1}(x_i)$, где $x_i \in E_{\tau_0} \cap E_{\tau_1}$, является сечением морфизма f. Поэтому f — почти гладкий морфизм. Кроме того, из условия ii) и из условий теоремы 2 следует, что для любого $p \in \mathbf{P}^1$ неприводимая компонента слоя $g^{-1}(p)$, проходящая через точку x_i, не содержится в D. Отсюда следует, что морфизм f, кривая $\sigma^{-1}(\eta_n^{-1}(D) \cup \eta_n^*(L_\infty))$ и слой $f^{-1}(p_0) = \sigma^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0}))$ удовлетворяют условиям леммы 6. Отсюда, учитывая, что $\pi_1(\mathbf{P}^1)$ — тривиальная группа, получаем доказательство леммы 4 в случае $(E_{\tau_0}, E_{\tau_1})_{\mathbf{C}^2} > 0$.

Пусть $(E_{\tau_0}, E_{\tau_1})_{\mathbf{C}^2} = 0$. В этом случае $g : X_n \to \mathbf{P}^1$ является морфизмом, $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})$ — слой этого морфизма, и для любого $\tau \in \mathbf{C}^*$

$$(\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0}),\ \eta_n^{-1}(\bar{E}_\tau))_{X_n} = 0.$$

Следовательно, для всех $\tau \in \mathbf{C}^*$ кривые $\eta_n^{-1}(\bar{E}_\tau)$ являются слоями морфизма g.

Морфизм g в аффинной части $\eta_n^{-1}(\mathbf{C}^2) \simeq \mathbf{C}^2$ задается уравнением

$$\lambda f(\tau_0 z_1, \tau_0 z_2) - \mu f(z_1, z_2) = 0, \tag{7}$$

где $(\lambda : \mu) \in \mathbf{P}^1$, а τ_0 — любое фиксированное число из $\mathbf{C}^*$, $\tau_0 \neq 1$.

Пусть $f(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{N} f_i(z_1, z_2)$ — разложение многочлена f, $\deg f = N$, на однородные составляющие, и пусть $t = \mu/\lambda$ — координата на $\mathbf{C}^1 \subset \mathbf{P}^1$. Обозначим через $I = \{i \in \{1, 2, \ldots, N\} \mid f_i(z_1, z_2) \neq 0\}$. Тогда слой $g^{-1}(t) \cap \mathbf{C}^2$

над точкой $t\in\mathbf{C}$ задается уравнением

$$\sum_{i\in I}\tau_0{}^i f_i(z_1,\ z_2)-t\sum_{i\in I}f_i(z_1,\ z_2)=0 \qquad (8)$$

и для почти всех $t\in\mathbf{C}$ слои $g^{-1}(t)\cap\mathbf{C}^2$ совпадают с кривыми $E_{\tau(t)}$, $\tau(t)\in\mathbf{C}^*$, каждая из которых задается уравнением

$$\sum_{i\in I}\tau^i(t)f_i(z_1,\ z_2)=0.$$

Так как $f(z_1 z_2)$ — неприводимый многочлен, то отношения

$$\frac{\tau_0{}^i-t}{\tau^i(t)}=c_i(t) \qquad (9)$$

не должны зависеть от i, т. е. $c_i(t)=c(t)$ для всех $i\in I$. А так как $f_0(z_1, z_2)=$ $=f_0\neq 0$, то $c(t)=1-t$. Следовательно,

$$\tau(t)=\sqrt[N]{\frac{\tau_0{}^N-t}{1-t}},$$

так как $N\in I$. Учитывая (9), отсюда следует, что $I=\{1, N\}$ и

$$f(z_1, z_2)=f_0+f_N(z_1, z_2). \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (8), получаем, что отображение g задается уравнением

$$(1-t)f_0+(\tau_0{}^N-t)f_N(z_1, z_2)=0. \qquad (11)$$

Следовательно, все слои морфизма $g: X_n\to\mathbf{P}^1$, за исключением $g^{-1}(1:1)$ и $g^{-1}(1:\tau_0{}^N)$, являются гладкими кривыми.

Слой $g^{-1}(1:1)=F_{(1:1)}$ в аффинной части $\eta_n{}^{-1}(\mathbf{C}^2)$ задается однородным уравнением $f_N(z_1, z_2)=0$. Следовательно, $F_{(1:1)}$ является объединением конечного числа прямых $R_1,\dots,R_m$, проходящих через начало координат, $F_{(1:1)}=k_1R_1+\dots+k_mR_m$, $k_1+\dots+k_m=N$. Отметим, что прямые R_i не являются компонентами дивизора D, так как $0\notin D$.

Слой $g^{-1}(1:\tau_0{}^N)=F_\infty$ не пересекается с аффинной частью $\eta_n{}^{-1}(\mathbf{C}^2)$. Пусть $\mathbf{C}^1=\mathbf{P}^1\setminus\{(1:\tau_0{}^N)\}$, и пусть $Y\to X_n\setminus F_\infty$. Тогда $\bar g=g|_Y: Y\to\mathbf{C}^1$ имеет один вырожденный слой — это $F_{(1:1)}$. Выберем на $\mathbf{C}^1=\mathbf{P}^1\setminus\{(1:\tau_0{}^N)\}$ координату u таким образом, что $u=0$ в точке $(1:1)$.

Если для дивизора $F_{(1:1)}$ все $k_i>1$, сделаем σ-процесс $\sigma:\overline{Y}\to Y$ с центром в начале координат аффинной части $\eta_n{}^{-1}(\mathbf{C}^2)$ и применим теорему Мамфорда о полустабильной редукции к морфизму $\tilde g:\overline{Y}\to\mathbf{C}^1$, где $\tilde g=\bar g\circ\sigma$. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & \overline{Y} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde g} \\ \mathbf{C}_v^1 & \xrightarrow{q} & \mathbf{C}^1 \end{array}$$

в которой морфизм q задается уравнением $u=v^s$ для некоторого $s\in\mathbf{N}$, где v — координата на прямой $\mathbf{C}_v{}^1$, а морфизм h удовлетворяет условию: все слои, кроме слоя $h^{-1}(0)$, являются гладкими кривыми, а слой $h^{-1}(0)$ является приведенным дивизором с нормальными пересечениями. Прообраз $p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0}))$ слоя $\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau_0})$ морфизма $\tilde{g}$ распадается на s кривых,

$$p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{E}_{\tau}))=F_1+\ldots+F_s,$$

причем все F_i являются слоями морфизма h.

Легко видеть, что морфизм h, кривая $p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty))$ и слой F_1 удовлетворяют условиям леммы 6. Следовательно,

$$i_*:\pi_1(F_1\setminus(F_1\cap p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty))))\to\pi_1(Z\setminus p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty)))$$

является эпиморфизмом.

Ограничение

$$\bar{h}:F_1\setminus(F_1\cap p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty)))\to E_{\tau_0}\setminus(D\cap E_{\tau_0})$$

морфизма h на $F_1\setminus(F_1\cap p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty)))$ является изоморфизмом. Рассмотрим ограничение

$$\bar{h}:Z\setminus p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty))\to Y\setminus(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty))$$

морфизма h на $Z\setminus p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty))$. Пространство $Y\setminus(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup$ $\cup\eta_n^*(L_\infty))$ изоморфно $\mathbf{C}^2\setminus D$, и, как хорошо известно, фундаментальная группа $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D,x)$ порождается геометрическими образующими, т. е. петлями γ вида: петля γ состоит из пути l, соединяющего точку x с некоторой точкой y, лежащей вблизи кривой D, обхода по окружности Γ вокруг D, $y\in\Gamma$, и возвращения назад в точку x по пути l в обратном направлении. Очевидно, мы можем считать, что эти геометрические образующие не пересекаются с $\bigcup_{i=1}^{m}R_i$. Поэтому, так как морфизм h неразветвлен вне $\bigcup_{i=1}^{m}R_i$ и $R_i\not\subset D$, описанные выше геометрические образующие однозначно поднимаются до замкнутых петель в $Z\setminus p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty))$, выходящих из точки $\bar{x}\in\bar{h}^{-1}(x)$. Следовательно,

$$\bar{h}_*:\pi_1(Z\setminus p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty))\to\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)$$

является эпиморфизмом и лемма 4 в случае $(E_{\tau_0},E_{\tau_1})_{\mathbf{C}^2}=0$ следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(F_1\setminus(F_1\cap p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty)))) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(Z\setminus p^{-1}(\eta_n^{-1}(\bar{D})\cup\eta_n^*(L_\infty)))\\
\bar{h}_*\downarrow\wr & & \downarrow\bar{h}_*\\
\pi_1(E_{\tau_0}\setminus(D\cap E_{\tau_0})) & \xrightarrow[i_*]{} & \pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)
\end{array}$$

11. Для доказательства леммы 5 нам понадобятся некоторые результаты статьи [3]. А именно, пусть в терминах из [3]

$$SD=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2\mid\exists t\in\mathbf{R}_+,\ t<1,\text{ такое, что } g(tz_1,tz_2)=0\}$$

— тень от кривой D,

$$ID\to\overline{SD\cap D}$$

— множество невидимых точек на D (черта означает замыкание),

$$SID=\{(z_1, z_2)\in \mathbf{C}^2 \mid \exists t\in \mathbf{R}_+,\ t<1, \text{ такое, что } (tz_1, tz_2)\in ID\}$$

— тень от множества невидимых точек.

$$D\setminus ID=D_1\cup\ldots\cup D_m$$

— разложение $D\setminus ID$ на связные компоненты,

$$SD_i=\{(z_1, z_2)\in \mathbf{C}^2 \mid \exists t\in \mathbf{R}_+,\ t<1, \text{ такое, что } (tz_1, tz_2)\in D_i\}$$

— тень от D_i.

Множества $K_i=SD_i\setminus SID$ называются *стенками*. Каждая стенка K_i рассматривается как двусторонняя действительная гиперповерхность в $\mathbf{C}^2$, одна из сторон которой выбрана в качестве положительной стороны.

Одним из основных результатов статьи [3] является копредставление фундаментальной группы $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D, o)$, отождествляющее стенки K_i с образующими группы $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D, o)$ (подробности см. в [3]).

Пусть $\gamma : [0, 1]\to \mathbf{C}^2\setminus D$ — петля в $\mathbf{C}^2\setminus D$, выходящая из точки $o=\gamma(0)=$ $=\gamma(1)$, такая, что

1) $\gamma\cap SID=\varnothing$;

2) γ пересекается с $SD\setminus SID$ трансверсально по конечному числу точек.

Двигаясь по петле γ в положительном направлении, получим последовательность стенок

$$\{K_{i_1}^{m_1}, \ldots K_{i_n}^{m_n}\}, \tag{12}$$

с которыми пересекается петля γ, где $m_j=\pm 1$ в зависимости от того, с какой стороны петля γ пересекает стенку K_{i_j}. Последовательность (12) называется *типом* петли γ. Из [3, теорема 1] следует, что если типы петель γ_1 и γ_2 совпадают, то $\gamma_1=\gamma_2$ как элементы из $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D, o)$.

Вернемся к доказательству леммы 5. Рассмотрим множество $I_{12}=SD\cap E$. Множество I_{12} задается уравнениями

$$\begin{cases} f(z_1, z_2)=0 \\ g(tz_1, tz_2)=0, \quad t\in \mathbf{R}_+,\ t<1. \end{cases} \tag{13}$$

Из условия 6) общего положения, которому удовлетворяют точка o и кривая $D\cup E$, следует, что для фиксированного t система (13) имеет ровно $(D, E_{t^{-1}})_{\mathbf{C}^2}$ решений. Для $t^{-1}\in T_0(E, D)$ это число равно M. Следовательно, система (13) определяет M вещественных кривых $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_M(t)\subset E$, точки которых параметризованы при помощи переменной t. Из условий 4)—6) общего положения следует, что $\gamma_i : T_0(E, D)\cap\{t\in \mathbf{R}_+ \mid t<1\}\to E\setminus \operatorname{Sing} E$ является гладким погружением. А из условия 2) общего положения следует, что кривая $I_{12}=\cup\gamma_i$ может иметь не более чем конечное число особых точек. Обозначим множество особых точек кривой I_{12} через $S_{12}=\{x_1, \ldots, x_k\}$. Локально вблизи каждой точки $x_i\in S_{12}$ кривая I_{12} выглядит следующим образом: существует ровно две кривых $\gamma_{j_1(i)}(t)$ и $\gamma_{j_2(i)}(t)$ (быть может, $j_1(i)=j_2(i)$) и два значения $t_1=t_1(x_i)$ и $t_2=t_2(x_i)$, $t_1\neq t_2$, таких, что $x_i=$

$=\gamma_{j_1(i)}(t_1)=\gamma_{j_2(i)}(t_2)$. Обозначим

$$S(E, D)=\{t\in\mathbf{R}_+ \mid \exists x_i\in S_{1\,2} \text{ такая, что } t=t_j(x_i), \text{ где } j=1 \text{ или } 2\}.$$

Пусть

$$T=\min t, \tag{14}$$

где минимум взят по всем $t\in S(E, D)\cup(\mathbf{R}_+\setminus T_0(E, D))$.

Рассмотрим кривую E_{τ_0}, $\tau_0\in\mathbf{R}_+$. Для этой комплексной кривой мы также можем определить вещественную кривую $I_{1\,2}(\tau_0)=SD\cap E_{\tau_0}=\bar\gamma_1(t)\cup\ldots\cup\bar\gamma_M(t)$ и множество точек $S(E_{\tau_0}, D)\subset\mathbf{R}_+$, аналогичное множеству $S(E, D)$. В координатах (z_1, z_2) кривая $I_{1\,2}(\tau_0)$ определяется уравнениями

$$\begin{cases} f(\tau_0 z_1, \tau_0 z_2)=0 \\ g(tz_1, tz_2)=0, \ t\in\mathbf{R}_+, \ t<1. \end{cases} \tag{15}$$

Утверждение. *Пусть* $\tau_0>T^{-1}$. *Тогда*

1) $S(E_{\tau_0}, D)=\varnothing$;

2) *для* $1\leqslant i\leqslant M$ *значения* $\bar\gamma_i(t)$ *определены для всех* $t\in(0, 1)$;

3) $\lim\limits_{t\to1}\bar\gamma_i(t)\in E_{\tau_0}\cap D$.

Доказательство. Автоморфизм $h=h_{\tau_0,1,1}$ аффинной плоскости, определение которого дано в п. 2, отображает согласно (5) кривую E_{τ_0} в E. Из (15) и (13) следует, что после перенумерации кривых $\gamma_i(t)$ (если это необходимо)

$$h(\bar\gamma_i(t))=\gamma_i(\tau_0^{-1}t).$$

Так как $\tau_0^{-1}t<T$ для $0<t<1$, то $h(I_{1\,2}(\tau_0))$ – гладкая кривая. Следовательно, $I_{1\,2}(\tau_0)$ – гладкая кривая и из определения числа T следует, что значения $\bar\gamma_i(t)$ определены при всех $t\in(0, 1)$.

Заменив в (15) условие $t<1$ на $t<1+\varepsilon<T\tau_0$, где $\varepsilon>0$, легко получить, что $\bar\gamma_i:(0, 1)\to E_{\tau_0}$ продолжаются до гладких отображений $\bar\gamma_{i,\varepsilon}:(0, 1+\varepsilon)\to E_{\tau_0}$ для всех i, причем кривая $\bigcup\limits_{i=1}^{M}\bar\gamma_{i,\varepsilon}$ также не имеет особых точек.

Кривые $\bar\gamma_i(t)$ являются «кусками» вещественных алгебраических кривых на римановой поверхности E_{τ_0}. Отсюда и из утверждения следует, что множество $E_{\tau_0}\setminus(I_{1\,2}(\tau_0)\cup\operatorname{Sing} E_{\tau_0})$ является линейно связным множеством, т. е. любые две точки x и $y\in E_{\tau_0}\setminus(I_{1\,2}(\tau_0)\cup\operatorname{Sing} E_{\tau_0})$ можно соединить гладким путем в $E_{\tau_0}\setminus(I_{1\,2}(\tau_0)\cup\operatorname{Sing} E_{\tau_0})$. В частности, для точки $x\in E_{\tau_0}\setminus(I_{1\,2}(\tau_0)\cup\operatorname{Sing} E_{\tau_0})$ и любого i, $1\leqslant i\leqslant M$, найдется гладкая петля $\Gamma_i:[0, 1]\to E_{\tau_0}\setminus(\operatorname{Sing} E_{\tau_0}\cup(E_{\tau_0}\cap D))$, $\Gamma_i(0)=\Gamma_i(1)=x$, такая, что

1) Γ_i пересекается с $\bar\gamma_i$ только в одной точке, и это пересечение трансверсально;

2) $\Gamma_i\cap\bar\gamma_j=\varnothing$ для всех $j\neq i$;

3) $(\Gamma_i, \bar\gamma_i)=1$, где $(\Gamma_i, \bar\gamma_i)$ – индекс пересечения кривых Γ_i и $\bar\gamma_i$ на римановой поверхности E_{τ_0}.

Отметим, что так как $\Gamma_i\cap\operatorname{Sing} E_{\tau_0}=\varnothing$, то петля Γ_i однозначно поднимается на $E_{\tau_0}{}^n$ до замкнутой петли $\bar\Gamma_i$.

Для завершения доказательства леммы 5 выберем на множестве $E_{\tau_0}\setminus(\operatorname{Sing} E_{\tau_0}\cup I_{1\,2}(\tau_0))$ точку x так, что луч $l_{0,x}$ пересекает E_{τ_0} только в одной точке. Отрезок $[l_{o,x}]\subset l_{o,x}$, соединяющий точки o и x, определяет гомоморфизм

$$i_{x*}:\pi_1(E_{\tau_0}\setminus(D\cap E_{\tau_0}),x)\to\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D,o),$$

сопоставляющий каждой петле γ, выходящей из точки x, петлю $i_{x*}(\gamma)$, выходящую из o и состоящую из отрезка $[l_{o,x}]$, петли γ и отрезка $[l_{o,x}]$ в обратном направлении.

Для каждого $\gamma\in\pi_1(E_{\tau_0}\setminus(D\cap E_{\tau_0}),x)$ выберем представляющую элемент γ петлю $\bar\gamma:[0,1]\to E_{\tau_0}\setminus(D\cap E_{\tau_0})$ так, что $\bar\gamma$ пересекает $I_{12}(\tau_0)$ по конечному числу точек $x_1,\dots,x_k$ и эти пересечения трансверсальны. Пусть $\{\bar\gamma_{i_1}^{m_1},\dots,\bar\gamma_{i_k}^{m_k}\}$ — последовательность из кривых $\bar\gamma_i\subset I_{12}(\tau_0)$, с которыми пересекается $\bar\gamma$ в порядке увеличения параметра на $\bar\gamma$, а $m_j=(\bar\gamma,\bar\gamma_{i_j})_{x_j}$ — индексы пересечения в точках x_j. Очевидно, петли $i_{x*}(\bar\gamma)$ и $i_{x*}(\Gamma_{i_1}^{m_1}\dots\Gamma_{i_k}^{m_k})$ имеют один и тот же тип. Следовательно, так как петли Γ_i поднимаются до замкнутых петель на $E_{\tau_0}^n$ при отображении нормализации $\nu_{\tau_0}:E_{\tau_0}^n\to E_{\tau_0}$, то $\mathrm{Im}(i_x\cdot\nu_{\tau_0})_*=\mathrm{Im}\,i_{x*}$. Лемма 5, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

Список литературы

1. *Clemens C. H.* Degeneration of Kähler manifolds // Duke Math. J. 1977. V. 44, № 2. P. 215–290.
2. *Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal embeddings // Lect. Notes in Math. V. 339. Springer-Verlag, 1973.
3. *Куликов Вик. С.* Фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в $\mathbf{C}^n$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, № 2. С. 407–428.
4. *Куликов Вик. С.* О структуре фундаментальной группы дополнения к алгебраическим кривым в $\mathbf{C}^2$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56, № 2. С. 469–481.
5. *Nori M.* Zariski's conjecture and related problems // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4ᵉ série. 1983. T. 16. P. 305–344.
6. *Zariski O.* Algebraic surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

Поступила в редакцию
24.XII.1991