УДК 512.7+515.1

© 1992 ВИК. С. КУЛИКОВ

О СТРУКТУРЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППЫ ДОПОЛНЕНИЯ К АЛГЕБРАИЧЕСКИМ КРИВЫМ В C^2

В статье исследуется фундаментальная группа дополнения к алгебраической кривой $D=\cup D_i$ в C^2. Доказывается, что $\pi_1(C^2\backslash D)$ разлагается в прямое произведение групп $\pi_1(C^2\backslash D_i)$, если для всех i и j, $i\neq j$, кривые D_i и D_j не пересекаются на бесконечности и если в окрестности любой точки пересечения $D_i\cap D_j$ кривая D является дивизором с нормальными пересечениями.

0. Пусть $D_1, \ldots, D_n$ — алгебраические кривые в $\mathbf{C}^2$, $D=\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, и пусть

$$G_i=\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D_i,\ o)$$

— фундаментальные группы дополнений к кривым D_i в $\mathbf{C}^2$. Обозначим через $\bar{D}_i$ замыкания кривых D_i в $\mathbf{P}^2$ и через $L_\infty=\mathbf{P}^2\backslash\mathbf{C}^2$ — бесконечно удаленную прямую.

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\bar{D}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bar{D}_i\subset\mathbf{P}^2$ *такая кривая, что*

а) *для* $1\leqslant i<j\leqslant n$ *кривые* $\bar{D}_i$ *и* $\bar{D}_j$ *не имеют общих компонент;*

б) *в каждой точке из* $\bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\bar{D}_i\cap\bar{D}_j)$ *кривая* $\bar{D}$ *локально является дивизором с нормальными пересечениями;*

в) $L_\infty\cap\left(\bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\bar{D}_i\cap\bar{D}_j)\right)=\varnothing$.

Тогда существует такой естественный изоморфизм

$$\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D, o)\simeq\prod_{i=1}^{n}G_i,$$

где $\prod\limits_{i=1}^{n}G_i$ *— прямое произведение групп* G_i, *что проекции* $p_i:\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D,\ o)\to G_i$ *совпадают с естественными гомоморфизмами* $\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D,\ o)\to\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D_i,\ o)$, *индуцированными вложениями* $\mathbf{C}^2\backslash D\subset\mathbf{C}^2\backslash D_i$.

Для кривой $\bar{D}_i\subset\mathbf{P}^2$, трансверсально пересекающейся с L_∞ в $\deg\bar{D}_i$ точках, ядро естественного гомоморфизма

$$\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D_i)\to\pi_1(\mathbf{P}^2\backslash\bar{D}_i)$$

принадлежит центру группы $G_i=\pi_1(\mathbf{C}^2\backslash D_i)$ [2] и поэтому порождается одним элементом $g_{i,\infty}\in G_i$ — обходом вокруг бесконечно удаленной прямой L_∞.

Следствие 1. *Пусть $\bar{D}=\cup\bar{D}_i$ такая кривая, как в теореме 1, и пусть L_∞ трансверсально пересекается с $\bar{D}$. Тогда*

$$\pi_1(\mathbf{P}^2\setminus\bar{D}, o)\simeq\prod_{i=1}^{n}G_i/(g_\infty),$$

где (g_∞) — циклическая подгруппа в $\prod\limits_{i=1}^{n} G_i$, порожденная элементом $g_\infty=$ $=g_{1,\infty}\ldots g_{n,\infty}$.

Применяя теорему Лефшеца, из теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Пусть $\bar{D}_1,\ldots,\bar{D}_n$ — гиперповерхности в $\mathbf{P}^N$, не имеющие общих компонент, и пусть в общих точках пересечений $\bar{D}_i\cap\bar{D}_j$ $(1\leqslant i<$ $<j\leqslant n)$ дивизор $\bar{D}=\cup\bar{D}_i$ является дивизором с нормальными пересечениями. Тогда для общей гиперплоскости $E\subset\mathbf{P}^N$*

$$\pi_1(\mathbf{C}^N\setminus D)\simeq\prod_{i=1}^{n}\pi_1(\mathbf{C}^N\setminus D_i),$$

где $\mathbf{C}^N=\mathbf{P}^N\setminus E$, $D_i=\bar{D}_i\cap\mathbf{C}^N$ и $D=\cup D_i$.

Доказательство теоремы 1 состоит из двух частей. В первой части доказательства, основываясь на описании образующих в $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D, o)$ и соотношении между ними, приведенном в [1], будет показано, что в $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D, o)$ можно выбрать образующие $\gamma_{i,j(i)}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j(i)\leqslant m_i$, так, что для каждого i образующие $\gamma_{i,1},\ldots,\gamma_{i,m_i}$ соответствуют образующим в $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D_i, o)$ и соотношения между ними те же, что и в $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D_i, o)$. Кроме этих соотношений в группе $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D, o)$ имеется еще несколько соотношений типа: для некоторых пар образующих $\gamma_{i_1,j(i_1)}$ и $\gamma_{i_2,j(i_2)}$ эти образующие коммутируют между собой.

Во второй части доказательства, деформируя кривую D, будет показано, что любые две образующие $\gamma_{i_1,j(i_1)}$ и $\gamma_{i_2,j(i_2)}$ при $i_1\neq i_2$ коммутируют между собой.

Отметим, что в доказательстве гипотезы Зарисского, приведенном в [1], условие трансверсального пересечения кривой $\bar{D}$ с L_∞ является несущественным, т. е. верна (см. п. 4) следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\bar{D}_1,\ldots,\bar{D}_n$ такие неприводимые кривые в $\mathbf{P}^2$,* что $\bar{D}=\cup\bar{D}_i$ *является дивизором с нормальными пересечениями (т. е. все особые точки кривой $\bar{D}$ являются простейшими двойными точками с разделенными касательными), и пусть L_∞ не проходит через особые точки кривой $\bar{D}$. Тогда $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)$ является свободной абелевой группой,* $\operatorname{rk}\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D)=n$.

1. Очевидно, теорему 1 достаточно доказать для случая $n=2$, т. е. $\bar{D}=$ $=\bar{D}_1\cup\bar{D}_2$, где $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ не имеют общих компонент и пересекаются друг с другом трансверсально в $k=\deg\bar{D}_1\cdot\deg\bar{D}_2$ точках. Обозначим эти точки через $s_1,\ldots,s_k$. По условию теоремы 1 бесконечно удаленная прямая L_∞ не проходит через точки s_i, $1\leqslant i\leqslant k$.

Выберем в $\mathbf{C}^2=\mathbf{P}^2\setminus L_\infty$ координаты z_1, z_2 так, что начало координат $o\notin D$.

Пусть $l_{o,x}$ — действительный луч, выходящий из точки o и проходящий через точку $x \in \mathbf{C}^2$.

В дальнейшем будем предполагать, что начало координат o находится в *общем положении* с римановой поверхностью D, т. е. выполнены следующие условия.

1°. Число точек пересечения (без учета кратности) любого луча $l_{o,x}$ и D не более трех.

2°. Существует лишь конечное число лучей $l_{o,x}$, пересекающих D ровно в трех точках.

3°. Для почти всех точек $x \in D$, кроме точек, принадлежащих конечному числу вещественных алгебраических кривых, $l_{o,x} \cap D = \{x\}$.

4°. Для каждой точки $s \in \operatorname{Sing} D$ пересечение $l_{o,s} \cap D = \{s\}$.

5°. Если луч $l_{o,x}$ касается D в точке x, то $l_{o,x} \cap D = \{x\}$.

6°. Если луч $l_{o,x}$ пересекает D в точках x и y, $x \neq y$, то касательные пространства $T_x D$ и $T_y D$ не параллельны.

7°. Пучок комплексных прямых, проходящих через точку o, является пучком Лефшеца, т. е. для индекса пересечения $(L, D)_x$ каждой прямой L из пучка и кривой D в каждой точке $x \in D \cap L$ выполнено:

$$(L, D)_x \leqslant 2, \text{ если } x - \text{неособая точка},$$

$$(L, D)_x = \mu_x, \text{ если } x \in \operatorname{Sing} D,$$

где μ_x — кратность особой точки x кривой D. Кроме того, прямые L из пучка, проходящие через точки $x \in \bar{D} \cap L_\infty$, пересекают трансверсально $\bar{D}$ в этих точках, если $x \notin \operatorname{Sing} \bar{D}$.

ЛЕММА 1. *Для любой кривой $D \subset \mathbf{C}^2$ существует точка $o \in \mathbf{C}^2$, находящаяся с D в общем положении.*

Доказательство этой леммы дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения в [1, пп. 7 и 8], и поэтому будет опущено.

Пусть $f_i(z_1, z_2) = 0$ — уравнение кривой D_i $(i = 1, 2)$ в выбранной системе координат и $f(z_1, z_2) = 0$ — уравнение кривой D, где $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$.

Точка $z = (z_1, z_2) \in D$ называется *невидимой*, если для некоторого вещественного t, $0 < t < 1$, точка $tz = (tz_1, tz_2)$ также принадлежит D, т. е. если на луче $l_{o,z}$ между точками o и z лежит еще одна точка $tz \in D$. Такую точку $tz \in D$ мы будем называть *экранирующей точкой*. Объединение всех экранирующих точек обозначим через SD и назовем *экраном*, а замыкание множества всех невидимых точек $I^0 D$ обозначим через ID.

Множества

$$SD = S_{11} \cup S_{22} \cup S_{12} \cup S_{21},$$

$$I^0 D = I_{11}{}^0 \cup I_{22}{}^0 \cup I_{12}{}^0 \cup I_{21}{}^0,$$

где S_{ij} и $I_{ij}{}^0$ задаются неявно системой уравнений

$$\begin{cases} f_i(z_1, z_2) = 0 \\ f_j(tz_1, tz_2) = 0, \quad t > 0, \quad t \neq 1, \end{cases} \tag{1}$$

при этом точка (z_1, z_2) — решение системы (1) при $t < 1$ — принадлежит $I_{ij}{}^0$, а при $t > 1$ эта точка принадлежит S_{ij}.

Система (1) неявно в $\mathbf{C}^2$ задает q непрерывных кривых $\gamma_1(t), \ldots$ $\ldots, \gamma_q(t) \subset D$, точки которых параметризованы вещественным параметром t, $t>0$, $t\neq1$. Пусть эти кривые перенумерованы таким образом, что

$$\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_p = S_{1\,2} \cup S_{2\,1} \cup I_{1\,2}{}^0 \cup I_{2\,1}{}^0,$$
$$\gamma_{p+1} \cup \ldots \cup \gamma_q = S_{1\,1} \cup S_{2\,2} \cup I_{1\,1}{}^0 \cup I_{2\,2}{}^0.$$

ЛЕММА 2. 1) $q \leqslant \deg D(\deg D-1)$.

2) $p=2\deg D_1 \cdot \deg D_2$.

3) *Для любого i отображение* γ_i: $\mathbf{R}_+ \setminus \{1\} \to D$ *является гладким погружением.*

4) *Если* $\gamma_i(t_1)=\gamma_j(t_2)$ *при* $i\neq j$, *то* $t_1\neq t_2$.

5) $I_{1\,2}^{\,0} \cup I_{2\,1}^{\,0} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \{\gamma_i(t) \,|\, t<1\}$.

6) $S_{1\,2} \cup S_{2\,1} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \{\gamma_i(t) \,|\, t>1\}$.

7) *Для* $1\leqslant i\leqslant p$ $\gamma_i(t)$ *определено при любом* $t_0>0$, *т. е. существует* $\lim\limits_{\to t_0} \gamma_i(t) \in \mathbf{C}^2$. *Более того,* $\lim\limits_{t\to1} \gamma_i(t) \in D_1 \cap D_2$.

Доказательство утверждений 1)—6) содержится в пп. 6.3—6.8 статьи [1]. Утверждение 7) следует из условия 6°, наложенного на начало координат, так как если выполнено условие 6°, то кривые D_1 и $D_{2\,t}$ в $\mathbf{C}^2$, заданные уравнениями $f_1(z_1, z_2)=0$ и $f_2(tz_1, tz_2)=0$, при любом фиксированном $t>0$, $t\neq1$, пересекаются между собой трансверсально. Кроме того, эти кривые D_1 и $D_{2\,t}$ не пересекаются между собой на бесконечности, если этим же свойством обладают кривые D_1 и $D_{2\,1}=D_2$.

Из (1) легко видеть, что если $z=\gamma_i(t)$ для некоторого i, то точка tz лежит на некоторой кривой γ_j и $tz=\gamma_j(t^{-1})$. В дальнейшем будем считать, что кривые занумерованы таким образом, что если $z=\gamma_i(t)$, то точка tz лежит на той же кривой γ_i. В этом случае каждая кривая $\gamma_i(t)$ при $i\leqslant p$ обладает следующим свойством (см. [1, п. 6.10]):

*) если точки $\gamma_i(t) \in D_1$ (соответственно D_2) при $t<1$, то точки $\gamma_i(t) \in D_2$ (соответственно D_1) при $t>1$. Кроме того, если U — достаточно маленькая окрестность точки $s=\gamma_i(1)$, то $(U \cap D_j) \setminus \bar{\gamma}_i$ ($j=1, 2$) является связным множеством, где $\bar{\gamma}_i = \{z=\gamma_i(t) \,|\, t\leqslant1\}$.

Пространство $D \setminus ID$ распадается на связные компоненты $D_{1\,1}, \ldots, D_{1\,r}$, $D_{2\,1}, \ldots, D_{2\,s}$, где $D_{1\,i} \subset D_1$, $1\leqslant i\leqslant r$, и $D_{2\,j} \subset D_2$, $1\leqslant j\leqslant s$. Эти компоненты связности взаимно однозначно соответствуют образующим фундаментальной группы $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D, o)$ в копредставлении, описанном в [1]. Напомним кратко это копредставление.

Пусть K_i — действительный конус над D_i ($i=1, 2$) с вершиной в точке o, $K_i \setminus \{o\} = \{z \in \mathbf{C}^2 \,|\, f_i(tz)=0$ для некоторого $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$, и пусть $K=K_1 \cup K_2$. Риманова поверхность D делит конус K на две части. Пусть $EK = \{z \in \mathbf{C}^2 \,|\, f(tz)=0$ для некоторого положительного $t<1\}$ — та часть, которая не содержит начала координат (тень кривой D в терминах [1]). Для каждой связной компоненты $D_{i\,j} \subset D \setminus ID$ обозначим через $\bar{K}_{i\,j} = \{z \in \mathbf{C}^2 \,|\, \exists$ положительное $t<1$ такое, что $tz \in D_{i\,j}\} \subset EK$. Каждая $\bar{K}_{i\,j}$ является гладкой двусторонней [1] действительной гиперповерхностью в $\mathbf{C}^2$.

Пусть $EID=\{z\in\mathbf{C}^2 \mid \exists$ положительное $t<1$ такое, что $tz\in ID\}$ — тень от множества невидимых точек. Множества $K_{ij}=\bar{K}_{ij}\setminus EID$ называются *стенками*. Каждая стенка K_{ij} является связным множеством, и если $D_{i_1j_1}\neq\neq D_{i_2j_2}$, то $K_{i_1j_1}\cap K_{i_2j_2}=\varnothing$.

Для почти всех точек $z\in EID$ (кроме точек, лежащих на конечном числе лучей) тень EK локально в окрестности точки z распадается на две гладкие гиперповерхности K' и K'', пересекающиеся трансверсально вдоль $K'\cap K''\subset EID$ (такие точки $z\in EID$ мы будем называть *гладкими точками* множества EID). Гиперповерхности $K'\setminus(K'\cap K'')$ и $K''\setminus(K'\cap K'')$ распадаются на две связные компоненты каждая. Обозначим их через K_1', K_2' и K_1'', K_2''.

По определению множества EID для гладкой точки $z\in EID$ на луче $l_{o,z}$ между точками o и z лежат ровно две точки a и b, принадлежащие D, одна из которых (пусть это точка a) принадлежит SD, а другая точка принадлежит ID (см. рис. 2 в [1]). Точка a принадлежит некоторой компоненте связности $D_{i_1j_1}$ и одно из множеств $K'\setminus(K'\cap K'')$, $K''\setminus(K'\cap K'')$ содержится в $K_{i_1j_1}$ (пусть для определенности это $K'\setminus(K'\cap K''))$. Множества K_1'' и K_2'' также принадлежат некоторым стенкам $K_{i_2j_2}$ и $K_{i_3j_3}$ (быть может, $K_{i_2j_2}=K_{i_3j_3}$). Такие стенки $K_{i_1j_1}$, $K_{i_2j_2}$, $K_{i_3j_3}$ называются *смежными* в точке $z\in EID$. Каждая тройка смежных в точке z стенок $K_{i_1j_1}$, $K_{i_2j_2}$, $K_{i_3j_3}$ является упорядоченной тройкой, порядок на которой определяется ориентациями на этих стенках [1].

Пусть $[a, b]$ — отрезок, пересекающий трансверсально стенку K_{ij} в точке $z\in K_{ij}$ с положительной стороны (двигаясь от a к b) и не пересекающий EK в других точках. Обозначим через $\bar{l}_z$ замкнутую петлю, составленную из отрезков $[o, a]$, $[a, b]$ и $[b, o]$. Как показано в [1], для различных $z\in K_{ij}$ петли $\bar{l}_z$ определяют один и тот же элемент $\gamma_{ij}\in\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D, o)$. Элементы γ_{ij} порождают $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D, o)$, и соотношения между ними — это соотношения вида

$$\gamma_{i_1j_1}\gamma_{i_2j_2}\gamma_{i_1j_1}^{-1}=\gamma_{i_3j_3} \qquad (2)$$

для каждой правильно упорядоченной тройки смежных в некоторой точке $z\in EID$ стенок $K_{i_1j_1}$, $K_{i_2j_2}$, $K_{i_3j_3}$.

Стенки K_{ij} взаимно однозначно соответствуют компонентам связности $D_{ij}\subset D\setminus ID$. Поэтому в дальнейшем каждую D_{ij} мы отождествим с образующей γ_{ij} группы $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D, o)$, а каждой точке $z\in D_{ij}$ сопоставим составленную из отрезков замкнутую петлю $\bar{l}_{z_1}$, где $z_1\in tz\in K_{ij}$ для некоторого $t>1$ (близкого к 1). Эту петлю в дальнейшем мы будем обозначать через l_z.

Процесс разбиения множества $D\setminus ID$ на связные компоненты может быть произведен в два шага. На первом шаге разобьем римановы поверхности $D_i\setminus I_{ii}$ на связные компоненты $D_i^1, \ldots, D_i^{\alpha(i)}$, а затем каждую $D_1^l\setminus I_{12}$ (соответственно $D_2^m\setminus I_{21}$) разобьем на связные компоненты D_{1j} (соответственно D_{2j}).

Компоненты $D_i^1, \ldots, D_i^{\alpha(i)}$ соответствуют образующим группы $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus D_i, o)$.

ЛЕММА 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и пусть* D_{ij_1} *и* D_{ij_2} *лежат в одной и той же компоненте связности* D_i^l. *Тогда* $\gamma_{ij_1}=\gamma_{ij_2}$.

Доказательство. Пусть точка $z \in D_i^l$ лежит на границе, разделяющей компоненты связности D_{ij_1} и D_{ij_2}. Тогда $z=\gamma_r(t)$ для некоторого $r \leqslant p$ и некоторого $t<1$. Предположим, что для D_{ij_1} и D_{ij_2} образующие γ_{ij_1} и γ_{ij_2} не равны между собой в $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D, o)$.

Пусть $T=\max t>0$, где максимум берется по тем значениям $t<1$, для которых найдется такое $r \leqslant p$, что точка $z=\gamma_r(t)$ лежит на границе какой-либо пары компонент D_{ij_1} и D_{ij_2}, определяющих не равные между собой элементы группы $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D, o)$.

Покажем, что неравенство $T>0$ невозможно. Действительно, во-первых, $T<1$, так как по свойству *) каждая кривая $\gamma_r(t)$ для $r \leqslant p$ при значениях t, близких к 1, является границей только одной из компонент связности.

Рассмотрим точку $u=\gamma_r(T)$, $r \leqslant p$, лежащую на границе между D_{ij_1} и D_{ij_2}, пусть $\gamma_{ij_1} \neq \gamma_{ij_2}$. Так как $\gamma_r(t)$ локально является гладкой кривой, то по определению числа T через точку u должна проходить еще одна кривая $\gamma_j \subset ID$. Пусть $u=\gamma_j(\tau)$. Тогда $T \neq \tau$. Упорядочим элементы множества $\{T, \tau\}$ в порядке убывания: $\{T, \tau\}=\{t_1, t_2\}$, где $t_1<t_2<1$, а кривые γ_r и γ_j обозначим через $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ так, что $\alpha_1(t_1)=\alpha_2(t_2)=u$.

Так как $t_1 \neq t_2$, то на луче $l_{o,u}$ лежат еще две точки $\alpha_1(t_1^{-1})=w$ и $\alpha_2(t_2^{-1})=v$. Тогда точка $w=t_3 v$, где $t_3=t_2^{-1} \cdot t_1<1$, и через точки v и w проходит еще одна кривая $\alpha_3(t) \subset ID \cup SD$ такая, что $\alpha_3(t_3)=v$. (Конечно, кривые $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$ могут быть ветвями одной и той же некоторой кривой $\gamma_r(t)$, $r \leqslant p$.) Пусть $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ пересекаются в точке u трансверсально. Случай, когда $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ касаются друг друга в точке u, рассматривается аналогично, и мы его опустим. Взаимное расположение кривых $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ и $\alpha_3(t)$ изображено на рис. 1, где сплошной линией изображено множество невидимых точек, а пунктирной — экран, стрелками обозначено направление в сторону уменьшения параметра t.

Кривые $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ в окрестности точки u делят D_i (пусть это D_1) на четыре части a, b, c, d. Пусть e — это связная компонента множества $D \setminus ID$, которой принадлежит точка w, и пусть в окрестности точки v кривая $\alpha_3(t)$ делит D на две части f и g.

Возможны два случая:

1) $\gamma_r(t)=\alpha_1(t)$ и $T=t_1$;

2) $\gamma_r(t)=\alpha_2(t)$ и $T=t_2$.

В первом случае, с одной стороны, по определению числа T имеем $a=b$ и $c \neq d$ как элементы группы $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D, o)$, и так как $u \in D_1$ и $\gamma_r(t) \subset I_{12} \cup S_{21}$, то компонента $e \subset D_2$. С другой стороны, если точка $v \in D_1$, то $\alpha_3(t) \subset I_{12} \cup S_{21}$, а так как $v=\alpha_3(t_3)$ и $t_3=t_2^{-1} t_1>T$, то по определению числа T имеем $f=g$ как элементы группы $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D, o)$. Поэтому в силу соотношений (2)

$$d=g^m a g^{-m}=f^m b f^{-m}=c,$$

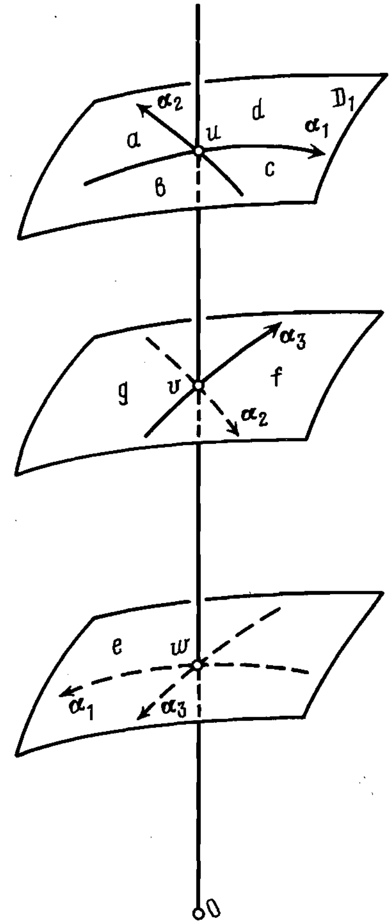
где $m=\pm 1$ в зависимости от ориентации на тенях от компонент a, b, c, d, e, f и g.

Если $v \in D_2$, то $\alpha_2(t) \subset I_{12} \cup S_{21}$, а так как $\alpha_2(t_2)=u$ и $t_2>T$, то $a=d$ и $b=c$. Следовательно, $c=d$.

Во втором случае, с одной стороны, по определению числа T $b=c$ и

$a \neq d$ как элементы группы $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D, o)$. Но, с другой стороны, $a = e^m b e^{-m}$, $d = e^m c e^{-m}$ в силу соотношений (2), т. е. $a = d$. Лемма доказана.

Элемент $\gamma_{i j_1} = \gamma_{i j_2}$ группы $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D, o)$, соответствующий компонентам $D_{i j_1}$ и $D_{i j_2}$, лежащим в одной и той же компоненте D_i^l, в дальнейшем будем обозначать через γ_i^l.



ЛЕММА 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и пусть замыкание компонент связности* D_1^l *и* D_2^m *содержит точку* $s \in D_1 \cap D_2$. *Тогда*

$$\gamma_1^l \gamma_2^m = \gamma_2^m \gamma_1^l.$$

Доказательство этой леммы содержится в [1, п. 6.13].

Из лемм 3 и 4 следует, что в $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D, o)$ мы можем выбрать систему образующих $\gamma_1^1, \ldots, \gamma_1^{\alpha(1)}$, $\gamma_2^1, \ldots, \gamma_2^{\alpha(2)}$ так, что образующие $\gamma_i^1, \ldots, \gamma_i^{\alpha(i)}$ $(i = 1, 2)$ взаимно однозначно соответствуют образующим группы $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D_i, o)$. Соотношения между образующими $\gamma_i^1, \ldots, \gamma_i^{\alpha(i)}$ в $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D, o)$ те же, что и в $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D_i, o)$. Кроме этих соотношений имеется еще несколько соотношений типа: пара образующих $\gamma_1^{j_1}$ и $\gamma_2^{j_2}$ коммутирует между собой, если замыкание компонент $D_1^{j_1}$ и $D_2^{j_2}$ содержит точку из $D_1 \cap D_2$, и других соотношений нет.

2. Чтобы завершить доказательство теоремы 1, нам надо показать, что любые две образующие $\gamma_1^{j_1}$ и $\gamma_2^{j_2}$ коммутируют между собой. Для этого рассмотрим группу $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$. Выбранная выше система координат в $\mathbf{C}^2$ определяет линейное действие группы $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ на $\mathbf{C}^2$. Это действие продолжается до действия на $\mathbf{P}^2$, при этом для любого $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ образ $gL_\infty = L_\infty$.

Рассмотрим в $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ открытое по Зарисскому подмножество $G = \{g \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) \mid gD_1$ и D_2 пересекаются трансверсально в $\deg D_1 \deg D_2$ точках$\}$, где gD_1 — образ кривой D_1 при действии элемента $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ на $\mathbf{C}^2$. Отметим, что G является связным многообразием.

Рассмотрим в прямом произведении $G \times \mathbf{P}^2$ три гиперповерхности

$$\tilde{D}_1 = G\bar{D}_1 = \{(g, x) \in G \times \mathbf{P}^2 \mid g^{-1}(x) \in \bar{D}_1\}, \quad \tilde{D}_2 = G \times \bar{D}_2,$$
$$\tilde{L}_\infty = \mathrm{GL}_\infty = \{(g, x) \in G \times \mathbf{P}^2 \mid g^{-1}(x) \in L_\infty\}.$$

Пусть $p : G \times \mathbf{P}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{L}_\infty) \to G$ — ограничение на $G \times \mathbf{P}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{L}_\infty)$ проекции $\mathrm{pr}_1 : G \times \mathbf{P}^2 \to G$. Очевидно, для каждого $g \in G$ слой $p^{-1}(g) \simeq \simeq \mathbf{C}^2 \setminus (gD_1 \cup D_2)$.

ЛЕММА 5. *Морфизм* $p : G \times \mathbf{P}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{L}_\infty) \to G$ *является* C^∞*-локально тривиальным расслоением. Более того, над некоторой окрестностью* U *лю-*

бой точки $g_0 \in G$ тривиализация может быть выбрана так, что $\{(g, o)|g\in U\}$ является постоянным сечением этой тривиализации.

Доказательство этой леммы использует стандартную технику тривиализации расслоения в окрестности U_g компактного слоя $\mathrm{pr}_1^{-1}(g)$ путем склейки с помощью гладкого разбиения единицы, подчиненного покрытию $\{U_i\}$, глобальных векторных полей в U_g из векторных полей, определенных на открытых множествах U_i, $U_g = \cup U_i$, и потому будет опущено.

Пусть $\lambda : [0, 1] \to G$ — гладкий путь, соединяющий элементы e и g_1, где e — единица группы $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$, $\lambda(0)=e$, $\lambda(1)=g_1$. Ограничение морфизма $p : G\times\mathbf{P}^2\setminus(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2\cup\bar{L}_\infty)\to G$ на кривую λ, p_λ: $\lambda\times\mathbf{C}^2\setminus(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2)\to\lambda$, является C^∞-тривиальным расслоением и, следовательно, позволяет отождествить $\pi_1(\lambda\times\mathbf{C}^2\setminus(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2))$ с $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus(D_1\cup D_2), o)$ и определяет естественные изоморфизмы $\lambda(\tau)_*: \pi_1(\mathbf{C}^2\setminus(D_1\cup D_2), o)\to\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus(\lambda(\tau)D_1\cup D_2), o)$ фундаментальных групп слоев $p_\lambda^{-1}(e)$ и $p_\lambda^{-1}(\lambda(\tau))$ для любого $\tau\in[0, 1]$, согласованные с морфизмами

$$i_{\tau *} : \pi_1(\mathbf{C}^2\setminus(\lambda(\tau)D_1\cup D_2), o)\to\pi_1(\lambda\times\mathbf{C}^2\setminus(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2)),$$

индуцированными вложениями $i_\tau : \mathbf{C}^2\setminus(\lambda(\tau)D_1\cup D_2)\subset\lambda\times\mathbf{C}^2\setminus(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2)$.
Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что для $\gamma_1^{j_1}$, $\gamma_2^{j_2}\in\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus(D_1\cup D_2), o)$ существует такой путь $\lambda\subset G$, что элементы $\lambda(1)_*(\gamma_1^{j_1})$ и $\lambda(1)_*(\gamma_2^{j_2})$ коммутируют в $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus(\lambda(1)D_1\cup D_2), o)$.

Обозначим через $H\subset G$ — подмножество тех элементов $g\in G$, для которых начало координат o не находится в общем положении с римановой поверхностью $gD_1\cup D_2$, $H_{D_1}=\cup\{g\in G|g\check{D}_1\subset K_2\}$, $H_{D_2}=\cup\{g\in G|\check{D}_2\subset gK_1\}$, где K_i — действительный конус над римановой поверхностью D_i, $\check{D}_i$ — неприводимая компонента римановой поверхности D_i и объединение взято по всем неприводимым компонентам $\check{D}_i\subset D_i$, $i=1, 2$.

Обозначим также $H_x=\{g\in G|g(x)\in K_2\}$,

$$TH_x=\{g\in G|g(x)\in K_2, \quad g(T_xD_1)\subset T_{g(x)}K_2\},$$

где $x\in D_1$ и T_xD_1, $T_{g(x)}K_2$ — касательные пространства к D_1 и K_2 в точках x и $g(x)$ соответственно. Аналогично, для $x\in D_2$ обозначим

$$\bar{H}_x=\{g\in G|g^{-1}(x)\in K_1\}, \quad T\bar{H}_x=\{g\in G|g^{-1}(x)\in K_1, g^{-1}(T_xD_2)\subset T_{g^{-1}(x)}K_1\}.$$

Кроме того, для любой точки $x\in D_1$ обозначим

$$EH_x=\{g\in G|g(x)\in EID_2\}$$

и для точки $x\in D_2$ обозначим $E\bar{H}_x=\{g\in G|g^{-1}(x)\in EID_1\}$.

ЛЕММА 6. 1) *Пространства* H, H_{D_1}, H_{D_2}, H_x, $\bar{H}_x$, TH_x, $T\bar{H}_x$, EH_x, $E\bar{H}_x$ *являются собственными вещественными алгебраическими подмногообразиями в* G.

2) $\dim_{\mathbf{R}} H_{D_i}\leqslant\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})-3$.

3) *Для общей точки* $x\in D_1$ $\dim_{\mathbf{R}} TH_x=\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})-3$.

4) *Для общей точки* $x\in D_2$ $\dim_{\mathbf{R}} T\bar{H}_x=\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})-3$.

5) *Для любой точки* $x\in D_1$ $\dim_{\mathbf{R}} EH_x\leqslant\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})-2$.

6) *Для любой точки* $x\in D_2$ $\dim_{\mathbf{R}} E\bar{H}_x\leqslant\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})-2$.

Доказательство этой леммы будет дано в п. 3.

Для доказательства того, что любые две образующие $\gamma_1^{j_1}$ и $\gamma_2^{j_2}$ коммутируют между собой, выберем в $D_1^{j_1}$ точку x_0 и элемент $g_1 \in G \setminus H$ так, что $g_1(x_0) = y_0 \in D_2^{j_2}$. Такие точка x_0 и элемент $g_1 \in G \setminus H$ существуют, так как если для некоторых точки $\bar{x} \in D_1$ и элемента $\bar{g} \in G$ кривые $\bar{g}D_1$ и D_2 пересекаются в точке $\bar{y} = \bar{g}(\bar{x})$, то по непрерывности для всех $g \in G$, близких к элементу $\bar{g}$, кривые gD_1 и D_2 будут пересекаться в точках $y \in D_2$, близких к точке $\bar{y}$.

Из леммы 6 следует, что существует такой гладкий путь

$$\lambda : [0, 1] \to G \setminus (H_{D_1} \cup H_{D_2} \cup TH_{x_0} \cup T\bar{H}_{y_0} \cup EH_{x_0} \cup E\bar{H}_{y_0}),$$

соединяющий элементы e и g_1, что кривая $\lambda \subset G$ пересекается с $H \cup H_{x_0} \cup \bar{H}_{y_0}$ в не более чем конечном числе точек. Обозначим эти точки $g_{\tau_1} = \lambda(\tau_1), \ldots$ $\ldots, g_{\tau_n} = \lambda(\tau_n)$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$. Отметим, что $\tau_n = 1$ $g_1 \notin H$.

Зафиксируем такой путь λ и выберем в $D_1^{j_1}$ точку x_1 так, что $\lambda(1)(x_1) \notin$ $\notin K_2$. Тогда в $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus (\lambda(1)D_1 \cup D_2), o)$ определены два элемента: один из них — это $\lambda(1) \cdot (\gamma_1^{j_1})$, а другой элемент представляется замкнутой петлей $\lambda(1)(l_{x_1})$, где l_{x_1} — составленная из отрезков замкнутая петля, определенная в п. 1. Аналогично, по точке $y_1 \in D_2^{j_2}$ такой, что $y_1 \notin \lambda(1) K_1$, можно построить составленную из отрезков замкнутую петлю l_{y_1}, которая определяет некоторый элемент в $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus (\lambda(1) D_1 \cup D_2), o)$.

ЛЕММА 7. 1) $\lambda(1)(l_{x_1}) \in \lambda(1) \cdot (\gamma_1^{j_1})$.

2) $l_{y_1} \in \lambda(1) \cdot (\gamma_2^{j_2})$.

Доказательство. Докажем, что $\lambda(1)(l_{x_1}) \in \lambda(1) \cdot (\gamma_1^{j_1})$. Доказательство того, что $l_{y_1} \in \lambda(1) \cdot (\gamma_2^{j_2})$, аналогично, и поэтому будет опущено.

Очевидно, мы можем считать, что петли $\lambda(t)(l_{x_0})$ не пересекаются с D_2 для $t \in [0, 1] \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$.

Заметим, что если точки x_1 и $x_2 \in D_1^{j_1}$ таковы, что $\lambda(1)(x_1) \notin K_2$ и $\lambda(1)(x_2) \notin K_2$, то по лемме 3 петли $\lambda(1)(l_{x_1})$ и $\lambda(1)(l_{x_2})$ определяют один и тот же элемент в $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus (\lambda(1) D_1 \cup D_2), o)$. Поэтому лемму 7 достаточно доказать для случая, когда x_1 достаточно близка к точке x_0 и $\lambda(1) \notin H_{x_1}$. Обозначим $T = \max t$, где максимум берется по тем значениям $t \in [0, 1]$, для которых $\lambda(t) \in H \cup H_{x_1}$. Отметим, что $T < 1$.

Очевидно, что если для $t \in [t_1, t_2]$ петля $\lambda(t)(l_x)$ не пересекается с D_2, то двумерная пленка $l_{x,[t_1,t_2]} = \{(\lambda(t), \bar{x}) \in \lambda \times \mathbf{C}^2 \mid (\lambda(t))^{-1}(\bar{x}) \in l_x,\ t \in [t_1, t_2]\}$ определяет гомотопическую эквивалентность петель $\lambda(t_1)(l_x)$ и $\lambda(t_2)(l_x)$ в $\lambda \times \mathbf{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2)$.

Из вышеизложенного следует, что для значений t из интервала $(\max(T, \tau_{n-1}), 1)$ петли $\lambda(t)(l_{x_0})$ гомотопически эквивалентны в $\lambda \times \mathbf{C}^2 \setminus$ $\setminus (\tilde{D}_1, \tilde{D}_2)$ петлям $\lambda(t)(l_x)$, которые, в свою очередь, гомотопически эквивалентны петле $\lambda(1)(l_{x_1})$. Поэтому для доказательства леммы 7 надо показать, что $\lambda(\tau_i - \varepsilon_i)(l_{x_0})$ и $\lambda(\tau_i + \varepsilon_i)(l_{x_0})$ для $i = 1, \ldots, n-1$ определяют один и тот же элемент в $\pi_1(\lambda \times \mathbf{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2))$, где ε_i достаточно близки к 0.

Для этого рассмотрим пересечение $\bar{C}_{\tau_i} = \lambda(\tau_i)(D_1^{j_1}) \cap K_2 \subset \lambda(\tau_i) D_1 \cap K_2$. Так как $\lambda(\tau_i) \notin H_{D_1}$, то $\bar{C}_{\tau_i}$ — вещественная алгебраическая кривая, а так как $\lambda(\tau_i) \notin TH_{x_0}$, то поверхность $\lambda(\tau_i)(D_1^{j_1})$ и конус K_2 пересекаются в точке $\lambda(\tau_i)(x_0)$ трансверсально и, следовательно, $\bar{C}_{\tau_i}$ — гладкая кривая в точке $\lambda(\tau_i)(x_0)$. Поэтому для t, близких к τ_i, кривые $\bar{C}_t = \lambda(t)(D_1^{j_1}) \cap K_2$ являются гладкими кривыми в точках, близких к точке $\lambda(\tau_i)(x_0)$. Пусть $C_t = D_1^{j_1} \cap$ $\cap (\lambda(t))^{-1}(K_2)$.

Для достаточно малого $\varepsilon>0$ выберем точку $\bar{x}\in C_{\tau_i+\varepsilon}$, близкую к точке x_0, так, что $\bar{x}\notin C_{\tau_i}$. Пусть $\varepsilon_+=\min\varepsilon$ (соответственно $\varepsilon_-=\min\varepsilon$), где минимум берется по тем значениям $\varepsilon>0$, для которых $\bar{x}\in C_{\tau_i+\varepsilon}$ (соответственно $\bar{x}\in C_{\tau_i-\varepsilon}$). Тогда $\varepsilon_+>0$ и $\varepsilon_->0$, так как $\bar{x}\notin C_{\tau_i}$. Пусть $\varepsilon_i={}^1/_2\min(\varepsilon_+,\varepsilon_-)$. Тогда петли $\lambda(t)(l_{\bar{x}})$ гомотопически эквивалентны между собой в $\lambda\times\mathbf{C}^2\setminus(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2)$ для $t\in[\tau_i-\varepsilon_i,\tau_i+\varepsilon_i]$, а по лемме 3 петли $\lambda(t)(l_{x_0})$ и $\lambda(t)(l_{\bar{x}})$ гомотопически эквивалентны друг другу для значений $t\in[\tau_i-\varepsilon_i,\tau_i)\cup(\tau_i+\varepsilon_i]$. Следовательно, петли $\lambda(\tau_i-\varepsilon_i)(l_{x_0})$ и $\lambda(\tau_i+\varepsilon_i)(l_{x_0})$ гомотопически эквивалентны в $\lambda\times\mathbf{C}^2\setminus(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2)$. Тем самым лемма 7 доказана.

Так как $\lambda(1)D_1^{j_1}$ и $D_2^{j_2}$ пересекаются между собой, то из лемм 4 и 7 следует, что элементы $\lambda(1)\cdot(\gamma_1^{j_1})$ и $\lambda(1)\cdot(\gamma_2^{j_2})$ коммутируют в $\pi_1(\mathbf{C}^2\setminus(\lambda(1)D_1\cup D_2),o)$.

3. Доказательство леммы 6. Условия $1^\circ-7^\circ$ в определении точки, находящейся в общем положении с римановой поверхностью $D_1\cup D_2$, являются алгебраическими условиями. Конусы K_i и кривые SD_i также являются вещественными алгебраическими многообразиями. Поэтому H, H_{D_1}, H_{D_2}, H_x, $\tilde{H}_x$, TH_x, $T\tilde{H}_x$, EH_x, $E\tilde{H}_x$ являются вещественными алгебраическими многообразиями. Все эти многообразия являются собственными подмногообразиями в G, так как элементы некоторой окрестности единицы $e\in\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ не содержатся в пространствах H, H_{D_1} и H_{D_2}. То же самое верно для H_x, TH_x, если $x\notin K_2$, и для $\tilde{H}_x$, $T\tilde{H}_x$, если $x\notin K_1$.

Покажем, что $\dim_{\mathbf{R}} H_{D_i}\leqslant\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})-3$. Пусть $i=1$ (случай $i=2$ рассматривается аналогично). Конус $K_2\setminus\operatorname{Sing}K_2$ естественным образом диффеоморфен прямому произведению $(\bigcup_{j_2} D_2^{j_2})\times(\mathbf{R}\setminus\{0\})$. Этот диффеоморфизм определяет в касательном пространстве T_xK_2 каждой точки $x\in\in K_2\setminus\operatorname{Sing}K_2$ горизонтальное подпространство $T_{z,x}=T_xtD_2$ к $tD_2=\{z\in\mathbf{C}^2\mid t^{-1}z\in D_2\}$, где $t\in\mathbf{R}$ таково, что $t^{-1}z\in D_2$.

Так как касательные пространства любых двух комплексных кривых в $\mathbf{C}^2$, проходящих через точку x, либо совпадают, либо порождают все $T_x\mathbf{C}^2$, а $\dim_{\mathbf{R}}T_xK_2=3$, то в T_xK_2 имеется единственное комплексное направление, а именно T_xtD_2.

Пусть теперь для некоторого элемента $g\in\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ и неприводимой компоненты $\check{D}_1$ комплексной кривой D_1 комплексная кривая $g\check{D}_1\subset K_2$. Из вышеизложенного следует, что в каждой точке $x\in g\check{D}_1$ касательное пространство $T_xg\check{D}_1=T_{z,x}$. Следовательно, кривая $g\check{D}_1$ является горизонтальным сечением, т. е. найдется такое $t\in\mathbf{R}$, что $\check{D}_2=t^{-1}g\check{D}_1$, где $\check{D}_2$ — неприводимая компонента кривой D_2. Отсюда следует, что для любой комплексной кривой $\check{D}_1$ выполнено неравенство $\dim_{\mathbf{R}}H_{\check{D}_1}\leqslant\dim_{\mathbf{R}}\operatorname{Aut}\check{D}_2+1$, где $\operatorname{Aut}\check{D}_2==\{g\in\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})\mid g\check{D}_2=\check{D}_2\}$.

Покажем, что $\dim_{\mathbf{R}}\operatorname{Aut}\check{D}_2\leqslant\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})-4$. Пусть $f_2(z_1,z_2)=0$ — неприводимое уравнение кривой $\check{D}_2$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $f_2(z_1,z_2)=\alpha_0+\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+R(z_1,z_2)$, где $\alpha_0\neq0$, линейная часть $\alpha_1z_1+\alpha_2z_2\neq0$ и $R(z_1,z_2)$ содержит однородные формы степени >1. Тогда для $g\in\operatorname{Aut}\check{D}_2$, равного

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix},$$

функция $\tilde{f}_2(z_1, z_2)\equiv\alpha_0+(\alpha_1 g_{11}+\alpha_2 g_{21})z_1+(\alpha_1 g_{12}+\alpha_2 g_{22})z_2+R(gz)$, т. е. $\operatorname{Aut}\check{D}_2$ лежит в комплексном подпространстве, заданном уравнениями

$$\alpha_1 g_{11}+\alpha_2 g_{21}=\alpha_1, \quad \alpha_1 g_{12}+\alpha_2 g_{22}=\alpha_2.$$

Следовательно, $\dim_{\mathbf{R}} \operatorname{Aut} \check{D}_2 \leqslant \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})-4$.

Докажем утверждение 3) леммы 6 (доказательство утверждения 4) аналогично). Используя представление $K_2 \setminus \operatorname{Sing} K_2 \simeq (\cup D_2^{j_2})\times(\mathbf{R}\setminus\{0\})$, легко видеть, что

$$\dim_{\mathbf{R}} TH_x=\dim_{\mathbf{R}} T_D H_x+1,$$

где $T_D H_x=\{g\in\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})\,|\,g(x)\in D_2,\ g(T_x D_1)=T_{g(x)} D_2\}$.

Вычислим $\dim_{\mathbf{R}} T_D H_x$ для общей точки $x\in D_1$. Мы можем считать, что комплексная прямая $T_x D_1$ не проходит через начало координат o. Поэтому мы можем выбрать в $\mathbf{C}^2$ систему координат так, что $x=(1, 0)$ и вектор $(0, 1)\in T_x D_1$.

Рассмотрим в $\mathbf{C}^2\times\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ алгебраическое подмногообразие

$$\widetilde{TH}_x=\{(z, g)\in\mathbf{C}^2\times\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})\,|\,g\in T_D H_x,\ z=g(x)\}.$$

Ограничение на $\widetilde{TH}_x$ проекции pr_2 является морфизмом многообразия $\widetilde{TH}_x$ на $T_D H_x$ степени 1. Рассмотрим ограничение проекции pr_1 на $\widetilde{TH}_x$. Для выбранной выше системы координат в $\mathbf{C}^2$ слой $\mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ над общей точкой $z=(z_1, z_2)\in D_2$ состоит из линейных преобразований вида

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где $g_{11}=z_1$, $g_{21}=z_2$ и вектор $(g_{12}, g_{22})\in T_z D_2$, т. е. $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{pr}_1^{-1}(z)=1$. Следовательно, $\dim_{\mathbf{C}} T_D H_x=2$, и поэтому $\dim_{\mathbf{R}} TH_x=5$.

Докажем утверждение 5) леммы 6 (доказательство утверждения 6) аналогично). Обозначим через $L\subset EID_2$ объединение конечного числа лучей, выходящих из точки o и либо пересекающих D_2 в трех точках или в особой точке римановой поверхности D_2, либо касающихся D_2 в некоторой точке.

Пусть $LH_x=\{g\in G\,|\,g(x)\in L\}$. Легко видеть, что $\dim_{\mathbf{R}} LH_x=\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})-3$, если $L\neq\varnothing$.

Если $EID_2\neq\varnothing$, то для точек из $EH_x\setminus LH_x$ определено отображение $\rho: EH_x\setminus LH_x\to S_{2\,2}\subset D_2$, переводящее $g\in EH_x\setminus LH_x$ в $\rho(g)=y$, где $y\in S_{2\,2}$ — такая точка, что $g(x)$ лежит на луче, соединяющем точки 0 и y. Легко видеть, что $\dim_{\mathbf{R}} S_{2\,2}=1$ и $\dim_{\mathbf{R}} \rho^{-1}(y)=\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})-3$. Следовательно, $\dim_{\mathbf{R}} EH_x=\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})-2$.

4. Пусть $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_q(t)$ — вещественные кривые на $D=\cup D_i$, $\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_q=SD\cup ID$, определение которых дано в п. 1 (или в п. 6.4 статьи [1]).

Доказательство теоремы 2 дословно повторяет доказательство гипотезы Зарисского в [1], если к нему добавить следующее утверждение.

ЛЕММА 8. *В условиях теоремы 2 для любой кривой $\gamma_i(t)$ и любого $t_0>0$ существует $\lim\limits_{t\to t_0}\gamma_i(t)\in\mathbf{C}^2$, т. е. $\gamma_i(t)$ определены при любом значении $t\in\mathbf{R}_+$.*

Доказательство. Пусть $f(z_1, z_2)=H_N(z_1, z_2)+H_{N-1}(z_1, z_2)+\ldots+H_0=0$ — уравнение комплексной кривой $D=\cup D_i$, где $H_i(z_1, z_2)$ — однородные составляющие многочлена $f(z_1, z_2)$. Тогда точки кривых $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_q(t)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} f(z_1, z_2)=0 \\ \dfrac{f(tz_1, tz_2)-f(z_1, z_2)}{t-1}=0, \quad t>0. \end{cases}$$

Пусть D_t — кривая, заданная уравнением

$$\frac{f(tz_1, tz_2)-f(z_1, z_2)}{t-1}=0 \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} t^i H_j(z_1, z_2)=0.$$

Для доказательства леммы 8 нам достаточно показать, что в каждой точке $x\in\bar{D}\cap L_\infty$ индекс пересечения $(\bar{D}, \bar{D}_t)_x$ принимает одно и то же значение для всех $t\in\mathbf{R}_+$.

Рассмотрим одну из точек $x\in\bar{D}\cap L_\infty$. Сделав линейную замену координат в $\mathbf{C}^2$, можем считать, что в $\mathbf{P}^2$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$, где $z_1=x_1/x_0$, $z_2=x_2/x_0$, точка x имеет координаты $(0:0:1)$. Поэтому в аффинной карте $\{x_2\neq 0\}$ кривая $\bar{D}$ задается уравнением

$$H_N(x_1, 1)+x_0H_{N-1}(x_1, 1)+\ldots+x_0^{N-k}H_k(x_1, 0)+\ldots+x_0^NH_0=0,$$

а кривая $\bar{D}_t$ задается уравнением

$$\sum_{i=0}^{N-1} t^iH_N(x_1, 1)+\sum_{i=0}^{N-2} t^ix_0H_{N-1}(x_1, 1)+\ldots$$
$$\ldots+\sum_{i=0}^{k-1} t^ix^{N-k}H_k(x_1, 1)+\ldots+x_0^{N-1}H_1(x_1, 1)=0.$$

По условию теоремы 2 кривая $\bar{D}$ неособа в точке x. Следовательно, возможны два случая:

1) $H_N(x_1, 1)=\sum_{i=1}^{N} a_ix_1^i$, где $a_1\neq 0$;

2) $H_N(x_1, 1)=\sum_{i=p}^{N} a_ix_1^i$, где $a_p\neq 0$ и $p>1$.

Так как кривая $\bar{D}$ в точке x неособа, то во втором случае, если $H_{N-1}(x_1, 1)=\sum_{i=0}^{N-1} b_ix_1^i$, то $b_0\neq 0$. Пусть k — максимальный номер, для которого $H_k(0, 1)\neq 0$. Легко видеть, что в обоих случаях кривые $\bar{D}_t$ неособы в точке x и индекс пересечения $(\bar{D}, \bar{D}_t)_x$ равен числу σ-процессов, которые надо сделать в точке x, чтобы собственные прообразы кривых $\bar{D}$ и $\bar{D}_t$ перестали пересекаться. Легко проверить, что в первом случае индекс пересечения $(\bar{D}, \bar{D}_t)_x$ равен $N-k$ для любого $t\in\mathbf{R}_+$, а во втором случае этот индекс пересечения равен p для любого $t\in\mathbf{R}_+$.

Список литературы

1. *Куликов Вик. С.* Фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в $\mathbf{C}^n$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, № 2. С. 434–455.
2. *Nori M.* Zariski's conjecture and related problems // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Ser. 4. 1983. V. 16. P. 305–344.

Поступила в редакцию 18.VI.1991