

УДК 512.7+515.1

© 1993 ВИК . С. КУЛИКОВ

МНОГОЧЛЕНЫ АЛЕКСАНДЕРА ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В статье исследуется фундаментальная группа дополнения к алгебраической кривой $D \subset \mathbb{C}^2$, заданной уравнением $f(x, y) = 0$. Пусть $F: X = \mathbb{C}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – морфизм, заданный уравнением $z = f(x, y)$. Центральным результатом статьи является утверждение о том, что в случае, когда общий слой $Y = F^{-1}(z_0)$ неприводим, ядро гомоморфизма $F_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*)$ является конечно порожденной группой. В частности, если D – неприводимая кривая, то коммутант группы $\pi_1(X)$ конечно порожден.

Введены понятия внутреннего $\Delta_{in}(t)$ и внешнего $\Delta_{ex}(t)$ многочленов Александра кривой D . Доказано, что многочлен Александра $\Delta_1(t)$ кривой D делит $\Delta_{in}(t)$ и $\Delta_{ex}(t)$, является возвратным многочленом и имеет своими корнями корни из единицы. Кроме того, в случае неприводимой кривой D многочлен Александра $\Delta_1(t)$ этой кривой удовлетворяет дополнительному условию: $\Delta_1(1) = \pm 1$. Отсюда следует, что корнями многочлена Александра $\Delta_1(t)$ неприводимой кривой не могут быть примитивные корни из 1 степени p^n , где p – простое число.

Введение

Пусть $D \subset \mathbb{C}^2$ – произвольная алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ не имеет кратных множителей, $\deg f = d$.

Многочлен $f(x, y)$ определяет морфизм $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$, заданный уравнением $z = f(x, y)$. Слой $F^{-1}(0)$ морфизма F над точкой $z = 0$ совпадает с D . На всем протяжении этой статьи (за исключением п. 1.10) на кривую D будет наложено единственное ограничение:

(*) *общий слой $Y_z = F^{-1}(z)$ связан*

и, следовательно, является неприводимой кривой. Отметим, что если кривая $D \subset \mathbb{C}^2$ связна, то тогда и общий слой Y_z морфизма F также связан. В частности, любая неприводимая кривая $D \subset \mathbb{C}^2$ удовлетворяет условию (*).

Кратко сформулируем содержащиеся в статье результаты.

Морфизм F определяет на $X = \mathbb{C}^2 \setminus D$ структуру расслоения:

$$F: X \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

на кривые Y_z . Среди слоев этого расслоения имеется конечное число вырожденных слоев $Y_{z_1}, \dots, Y_{z_n}$, так что

$$F: X \setminus (Y_{z_1} \cup \dots \cup Y_{z_n}) \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$$

является $\mathbb{C}^\infty$ -локально тривиальным расслоением.

Выберем в $\mathbb{C}^1$ две окружности γ и Γ с центрами в точке 0 радиусов $r_0 \ll 1$ и $r_\infty \gg 1$ так, что множество критических значений

$$\{z_1, \dots, z_n\} \text{ принадлежит кольцу } R = \{z \in \mathbb{C} \mid r_0 \leq |z| \leq r_\infty\}.$$

Пусть $B_i \subset R$ – круги радиусов $r_i \ll 1$ с центрами в точках z_i , $\gamma_i = \partial B_i$ – границы кругов. Выберем в $R \setminus (\cup B_i)$ точку z_0 , а также выберем на каждой окружности $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, $\gamma_0 = \gamma$ и $\gamma_\infty = \Gamma$ по точке y_i , $i = 1, \dots, n$, $0, \infty$, и соединим эти точки с точкой z_0 непересекающимися (вне точки z_0) гладкими путями l_i .

Обходы по замкнутым петлям $l_i \gamma_i l_i^{-1}$ определяют диффеоморфизмы $\tau_i: Y \rightarrow Y$ слоя $Y = Y_{z_0}$. Теорема 1 утверждает, что топология пространства X определяется топологией вырожденных слоев Y_i и диффеоморфизмами τ_i .

Морфизм $F: X \rightarrow C^*$ определяет гомоморфизм

$$F_*: \pi_1(C^2 \setminus D) \rightarrow \pi_1(C^*) = F_1, \quad (1)$$

где F_1 – бесконечная циклическая группа. Если многочлен $f(x, y)$, задающий кривую D , не имеет кратных множителей, то гомоморфизм F_* является эпиморфизмом.

Пусть $N = \text{Ker } F_*$. Отметим, что в случае, когда D – неприводимая кривая, подгруппа N совпадает с коммутантом группы $G = \pi_1(C^2 \setminus D)$.

Пусть $\psi: \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ – гомоморфизм, индуцированный вложением $Y \hookrightarrow X$. Тогда $\text{Im } \psi \subset N$, так как Y – слой морфизма F .

Центральным результатом статьи является

ТЕОРЕМА 2. Для алгебраической кривой $D \subset C^2$, удовлетворяющей условию (*), $\text{Im } \psi = N$.

В качестве следствия из этой теоремы вытекает

ТЕОРЕМА 3. Пусть D – произвольная неприводимая кривая в C^2 . Тогда коммутант группы $\pi_1(C^2 \setminus D)$ конечно порожден.

Пусть $N' = [N, N]$ – коммутант группы N , и пусть

$$N/N' = (N/N')_{\text{Tor}} \oplus (N/N')_{\text{Free}}$$

– разложение в прямую сумму группу кручения и свободной абелевой группы. Точная последовательность

$$1 \rightarrow N/N' \rightarrow \pi_1(X)/N' \rightarrow F_1 \rightarrow 1 \quad (2)$$

определяет действие образующей t группы F_1 на конечно порожденной абелевой группе N/N' и тем самым наделяет N/N' структурой $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуля, где $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ – кольцо многочленов Лорана. Подмодуль $(N/N')_{\text{Tor}}$ инвариантен относительно этого действия. Следовательно, мы можем определить действие t на фактор-модуле $(N/N')/(N/N')_{\text{Tor}} \simeq (N/N')_{\text{Free}}$.

Обозначим это действие (автоморфизм) через h . Пусть $\Delta_1(t) = \det(h - t \text{Id})$ – характеристический многочлен автоморфизма h .

Характеристический многочлен $\Delta_1(t)$ может быть определен в других терминах, использующих свободное исчисление Фокса [5]. А именно, любой конечно определенной группе

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid \{r_i(x)\}, \quad i = 1, \dots, m \rangle$$

и гомоморфизму $F_*: G \rightarrow \text{Ab}$ на абелеву группу Ab можно сопоставить матрицу A порядка $m \times n$ с коэффициентами из группового кольца $\mathbb{Z}[\text{Ab}]$, где n – число

образующих группы G , а m – число определяющих соотношений. Матрица

$$A = \left(F_{**} \left(\frac{\partial r_i(x)}{\partial x_j} \right) \right),$$

где $F_{**}: Z[F_n] \rightarrow Z[Ab]$ – индуцированный гомоморфизмом F_* и копредставлением группы G гомоморфизм группового кольца свободной группы F_n , $\text{rk} F_n = n$, в $Z[Ab]$, а дифференцирования $\partial / \partial x_j$ однозначно определяются условиями

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} + f \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Идеалы $\dots \subset E_k \subset E_{k+1} \subset \dots$ в $Z[Ab]$ такие, что

$$E_k = 0 \quad \text{при } n - k > m,$$

$$E_k = Z[Ab] \quad \text{при } n - k < 0$$

и при $0 \leq n - k \leq m$ идеалы E_k порождены всеми минорами $(n - k)$ -го порядка матрицы A , называются *элементарными идеалами*. Идеалы E_k не зависят от копредставления группы G , т.е. являются инвариантами гомоморфизма F_* .

В случае $Ab = F_1$ кольцо $Z[F_1] = Z[t, t^{-1}]$ является кольцом с однозначным разложением на простые множители. В этом случае для каждого элементарного идеала E_k однозначно определен минимальный главный идеал $(\Delta_{G,k}(t))$, содержащий E_k . Образующая идеала $(\Delta_{G,k}(t))$ определена однозначно только с точностью до множителя $\pm t^p$ – единицы кольца $Z[t, t^{-1}]$. Мы можем выбрать образующую $\Delta_{G,k}(t)$ этого идеала однозначно, потребовав, чтобы

$$\Delta_{G,k}(t) = \sum_{i=0}^s a_i t^i \in Z[t],$$

причем $a_0 \neq 0$, если $(\Delta_{G,k}(t)) \neq (0)$. Многочлен $\Delta_{G,k}(t)$ называется k -ым *многочленом Александра* гомоморфизма $F_*: G \rightarrow F_1$. В дальнейшем если F_* есть гомоморфизм из (1), то мы будем называть многочлены $\Delta_{G,k}(t)$ *F-многочленами Александра кривой D*, а в частном случае, когда D – неприводимая кривая, просто *многочленами Александра кривой D*.

Рассмотренный выше характеристический многочлен $\Delta_1(t)$ совпадает (предложение 1) с *F-многочленом Александра* $\Delta_{G,1}(t)$, когда $G = \pi_1(C^2 \setminus D)$ для неприводимой кривой D .

Определенные выше диффеоморфизмы $\tau_i: Y \rightarrow Y$ индуцируют автоморфизмы монодромии $h_i: H_1(Y, Z) \rightarrow H_1(Y, Z)$. Назовем характеристический многочлен $\Delta_{\text{in}}(t) = \det(h_0 - t \text{Id})$ *внутренним многочленом Александра кривой D*, а характеристический многочлен $\Delta_{\text{ex}}(t) = \det(h_\infty - t \text{Id})$ назовем *внешним многочленом Александра кривой D*.

ТЕОРЕМА 4. Пусть D удовлетворяет условию (*). Тогда *F-многочлен Александра* $\Delta(t)$ кривой D является делителем как *внутреннего многочлена* $\Delta_{\text{in}}(t)$, так и *внешнего многочлена Александра* $\Delta_{\text{ex}}(t)$. Отметим, что *внутренний*

(соответственно внешний) многочлен Александера однозначно определяется (см. [1]) разложением на неприводимые компоненты слоя $\bar{F}^{-1}(0)$ (соответственно $\bar{F}^{-1}(\infty)$) и двойственным графом этого слоя, где $\bar{F}: \bar{\mathbf{P}}^2 \rightarrow \mathbf{P}^1$ – разрешение (до морфизма) рационального отображения $F: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^1$, так что $\bar{F}^{-1}(0)$ (соответственно $\bar{F}^{-1}(\infty)$) является дивизором с нормальными пересечениями.

Из теоремы о монодромии следует, что корнями многочленов $\Delta_{\text{in}}(t)$ и $\Delta_{\text{ex}}(t)$ являются корни из единицы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть D удовлетворяет условию (*). Тогда F -многочлены Александера кривой D обладают следующими свойствами:

$$1) \Delta_{G,0}(t) \equiv 0;$$

$$2) |\Delta_{G,1}(0)| = 1;$$

3) если t_0 – корень многочлена $\Delta_{G,k}(t)$, $k \geq 1$, то $t_0^n = 1$ для некоторого натурального n ;

4) $\Delta_{G,k}(t)$ – возвратные многочлены при $k \geq 1$, т.е. для каждого k найдется такое целое m , что $\Delta_{G,k}(t) = \pm t^m \Delta_{G,k}(t^{-1})$, причем знак $\langle \langle - \rangle \rangle$ имеет место только в том случае, если $t = 1$ является корнем нечетного порядка многочлена $\Delta_{G,k}(t)$.

В частном случае, когда D – неприводимая кривая, многочлен Александера $\Delta_{G,1}(t)$ удовлетворяет дополнительному условию, т.е. верна

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\Delta_{G,1}(t)$ – многочлен Александера неприводимой кривой $D \subset \mathbf{C}^2$. Тогда $|\Delta_{G,1}(1)| = 1$.

Из этой просто доказываемой теоремы вытекает

ТЕОРЕМА 7. Пусть $D \subset \mathbf{C}^2$ – неприводимая кривая, и пусть t_0 – корень многочлена Александера $\Delta_{G,1}(t)$ кривой D . Тогда для любого простого p и любого натурального n

$$t_0^{p^n} \neq 1.$$

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 8. Степень многочлена Александера $\Delta_{G,1}(t)$ неприводимой кривой $D \subset \mathbf{C}^2$ четна: $\deg \Delta_{G,1}(t) = 2q$.

С л е д с т в и е 1. Пусть D – неприводимая кривая в $\mathbf{C}^2$, и пусть G' – коммутант группы $G = \pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus D)$, $G'' = [G', G']$. Тогда

$$\text{rk}(G' / G'')_{\text{Free}} = 2q.$$

Если замыкание кривой D в $\mathbf{P}^2$ трансверсально пересекается с бесконечно удаленной прямой, то $\Delta_{\text{ex}}(t) = (t-1)(t^d-1)^{d-2}$, где $d = \deg D$. Отсюда и из теоремы 4 следует

С л е д с т в и е 2. Пусть замыкание неприводимой кривой $D \subset \mathbf{C}^2$ в $\mathbf{P}^2$ трансверсально пересекает бесконечно удаленную прямую, и пусть $\deg D = p^n$, где p – простое число. Тогда G'/G'' – конечная группа.

Отметим, что уже даже для неприводимых кривых шестой степени группа G'/G'' не обязательно является конечной группой [13].

Применяя вычисление иррегулярности q для циклических накрытий плоскости в [9], из теоремы 7 вытекает (ср. с [14])

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\bar{D}$ – неприводимая кривая в $\mathbf{P}^2$, L – прямая в $\mathbf{P}^2$, трансверсально пересекающаяся с $\bar{D}$, и пусть $g: Z \rightarrow \mathbf{P}^2$ – циклическое накрытие

P^2 , неразветвленное вне $\bar{D} \cup L$, $\sigma: \tilde{Z} \rightarrow Z$ – разрешение особенностей поверхности Z . Тогда если $\deg \bar{D} = p^n$, где p – простое число, то

$$q(\tilde{Z}) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{Z}, \Omega_{\tilde{Z}}^1) = 0.$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть неприводимые кривые $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_k$, $k > 1$, и прямая L в P^2 таковы, что:

1) дивизор $\bar{D} = \bar{D}_1 + \dots + \bar{D}_k$ в окрестности каждой точки из $\bigcup_{i < j} (\bar{D}_i \cap \bar{D}_j)$ является дивизором с нормальными пересечениями;

$$2) L \cap \left(\bigcup_{i < j} (\bar{D}_i \cap \bar{D}_j) \right) = \emptyset;$$

и пусть поверхность Z есть десингуляризация замыкания поверхности $Z_0 \subset C^3$, заданной уравнением

$$z^n = \prod_{i=1}^k f_i(x, y),$$

где $f_i(x, y) = 0$ – неприводимое уравнение кривой D_i в $C^2 = P^2L$, $i = 1, \dots, k$. Тогда иррегулярность $q(Z) = 0$.

Отметим, что в частном случае, когда D – такая неприводимая кривая в C^2 , что ее замыкание $\bar{D}$ в P^2 трансверсально пересекает бесконечно удаленную прямую, результаты теорем 4 и 5 были получены ранее другими методами (см. [2, 3, 9, 12]).

Многими авторами неоднократно отмечалась связь между группами узлов и фундаментальными группами дополнений к неприводимым алгебраическим кривым в C^2 . В этой связи отметим, что из теоремы 3 вытекает, что если G – группа некоторого узла K , совпадающая с $\pi_1(C^2 \setminus D)$ для некоторой неприводимой кривой D , то K обязан быть расслоенным узлом, т.е. дополнение узла K в R^3 допускает структуру расслоения над S^1 , слоем которого является поверхность Зайферта рода g . Для таких узлов коммутант $G' = [G, G] = F_{2g}$ – свободная группа ранга $2g$. Для всех остальных узлов коммутант группы узла является бесконечно порожденной группой (см. [4]).

Обратно, не для любой неприводимой кривой D группа $\pi_1(C^2 \setminus D)$ изоморфна группе некоторого узла. Например, если D – неприводимая кривая в C^2 , $\deg D = 4$, с тремя каспами (т.е. с тремя особыми точками, имеющими локальное уравнение $x^2 = y^3$) такая, что замыкание $\bar{D}$ в P^2 трансверсально пересекает бесконечно удаленную прямую L_∞ , то коммутант G' группы $G = \pi_1(C^2 \setminus D)$ есть циклическая группа третьего порядка. Следовательно, такая группа G не может быть группой узла.

Из копредставления Виртингера и копредставления в [6] фундаментальных групп дополнений к алгебраическим кривым в C^2 вытекает, что естественным классом, объединяющим множество групп зацеплений и множество фундаментальных групп дополнений к кривым в C^2 , является класс C -групп (conjugate) (определение и некоторые свойства C -групп даны в §2).

Обозначим через C_r множество неприводимых C -групп, $\mathcal{K}$ – множество групп узлов в R^3 , $\mathcal{A}_r$ – множество фундаментальных групп дополнений к неприводимым алгебраическим кривым в C^2 , $\mathcal{Q}\mathcal{A}_r$ – множество неприводимых C -групп, у которых многочлен Александра $\Delta_{G,1}(t)$ своими корнями имеет только корни из единицы,

$C_{\text{те}}$ – множество неприводимых C -групп, у которых первые многочлены Алехсандера являются возвратными многочленами, A_{loc} – множество фундаментальных групп дополнений к аналитически неприводимым росткам кривых в шаре малого радиуса $B^4 \subset C^2$. Имеем следующие включения:

$$A_{\text{loc}} \subset \mathcal{K} \subset C_{\text{ir}}, {}^1 A_{\text{ir}} \subseteq QA_{\text{ir}} \subset C_{\text{ir}}, \quad A_{\text{ir}} \cup \mathcal{K} \subset C_{\text{те}}, \quad A_{\text{ir}} \not\subset \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} \not\subset A_{\text{ir}}.$$

Было бы интересно узнать ответы на следующие вопросы:

Q1. Верно ли, что $\mathcal{K} \cap A_{\text{ir}} = A_{\text{loc}}$?

Q2. Верно ли, что $\mathcal{K} \cup A_{\text{ir}} = C_{\text{те}}$?

Q3. Верно ли, что $A_{\text{ir}} = QA_{\text{ir}}$?

Q4. Верно ли, что для любой группы $G \in C_{\text{ir}} \setminus A_{\text{ir}}$ найдется заузленная риманова поверхность $S \subset \mathbb{R}^4$ такая, что $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus S) = G$?

Q5. Как по комбинаторным свойствам графа Γ_M (определение см. в §2) узнать: принадлежит или нет C -группа G типа M множеству QA_{ir} ?

§1. Топология дополнения к алгебраической кривой в C^2

1.1. Вложим аффинную плоскость C^2 в проективную плоскость P^2 . Пусть $L_\infty = P^2 \setminus C^2$ – бесконечно удаленная прямая. Морфизм $F: C^2 \rightarrow C^1$, заданный уравнением $z = f(x, y)$, определяет рациональное отображение $F: P^2 \dashrightarrow P^1$. Пусть $\sigma: \bar{P}^2 \rightarrow P^2$ – композиция σ -процессов, разрешающая точки неопределенности рационального отображения F так, что $\bar{F} = F \circ \sigma: \bar{P}^2 \rightarrow P^1$ – морфизм.

Слой $\bar{F}^{-1}(z)$ морфизма $\bar{F}$ обозначим через $\bar{Y}_z$ (аналогично $F^{-1}(z) = Y_z$). Пусть $\sigma^{-1}(L_\infty) = \bar{S}_\infty \cup \bar{Y}_\infty \cup (\cup L_i)$, где $\infty = P^1 \setminus C^1$, кривые L_i являются компонентами слоев морфизма $\bar{F}$, а кривая $\bar{S}_\infty$ такова, что каждая ее неприводимая компонента отображается морфизмом $\bar{F}$ на P^1 . Сделав еще несколько σ -процессов, мы можем считать, что для всех $z \in P^1$ кривые $\bar{Y}_{z, \text{red}}$ пересекаются трансверсально с кривой $\bar{S}_\infty$.

Пусть $\text{Sing } \bar{F} = \{z_1, \dots, z_n\} \subset C^* = C \setminus \{0\}$ – множество точек из C^* , над которыми морфизм $\bar{F}$ не является гладким. Очевидно, что $F: X \setminus F^{-1}(\text{Sing } \bar{F}) \rightarrow C^* \setminus \text{Sing } \bar{F}$ является C^∞ -локально тривиальным расслоением со связными слоями, так как D удовлетворяет условию (*). (Напомним, что $X = C^2 \setminus D$ и $D = F^{-1}(0)$.)

1.2. Пусть B_0 и B_∞ – круги в C с центром в точке $0 \in C$ радиусов

$$r_0 < \min_{z_i \in \text{Sing } \bar{F}} |z_i|, \quad r_\infty > \max_{z_i \in \text{Sing } \bar{F}} |z_i|$$

соответственно.

Кольцо $R = B_\infty \setminus B_0$ является строгим деформационным ретрактом пространства C^* . Так как над $C^* \setminus R$ расслоение $F: F^{-1}(C^* \setminus R) \rightarrow C^* \setminus R$ является C^∞ -локально тривиальным расслоением, то ретракция $C^* \rightarrow R$ продолжается до ретракции X на $X_1 = F^{-1}(R)$. Другими словами, пространства X и X_1 гомотопически эквивалентны.

Выберем в кольце R непересекающиеся друг с другом круги B_i с центрами в точках $z_i \in \text{Sing } \bar{F}$. На границе ∂B_i каждого круга B_i выберем по две точки

z_{i1} и z_{i2} . Точки z_{i1} и z_{i2} разбивают окружность ∂B_i на две дуги γ_{i1} и γ_{i2} . Соединим точки z_{i2} с точками $z_{i+1,1}$ ($z_{n+1,1} = z_{11}$) гладкими непересекающимися путями γ_i , $1 \leq i \leq n$, лежащими в $R \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i$, и выберем из каждой пары дуг γ_{ij} , $j = 1, 2$, одну $\gamma_{ij(i)}$ так, что:

1) замкнутый путь $l_{in} = \left(\bigcup_{i=1}^n \gamma_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \gamma_{ij(i)} \right)$ является границей ограниченной области $V \subset \mathbb{C}$, содержащей точку 0;

2) $\text{Sing } \bar{F} \cap V = \emptyset$.

Обозначим через l_{ex} границу области $V \cup \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right)$.

Очевидно, что существует такой тождественный вне R диффеоморфизм $\lambda: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, что:

- i) образы $\lambda(B_i)$ кругов B_i являются кругами;
- ii) все точки $\lambda(z_i)$, $z_i \in \text{Sing } \bar{F}$, лежат на окружности $\bar{l}$ с центром в точке 0;
- iii) для всех i кривые $\lambda(\gamma_i) \subset \bar{l}$.

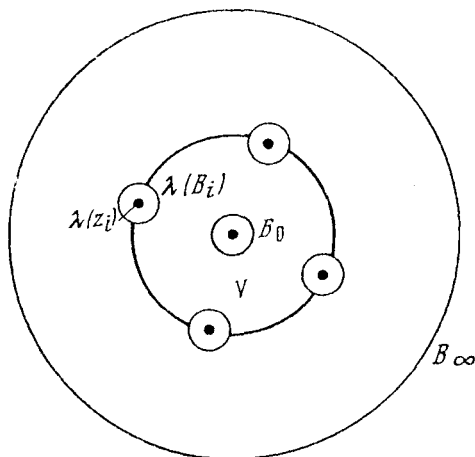


Рис. 1

1.3. Очевидно, существует ретракция кольца R на "ожерелье" $\bar{T} = \bar{l} \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \lambda(B_i) \right)$ (см. рис. 1), которая продолжается до ретракции пространства X_1

на $Z = F^{-1}(T)$, где $T = \lambda^{-1}(\bar{T})$. Тем самым имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пространства $X = \mathbb{C}^2 \setminus D$ и $Z = F^{-1}(T)$ гомотопически эквивалентны.

1.4. Исследуем более подробно расслоение $F: \bar{B}_i = F^{-1}(B_i) \rightarrow B_i$. Для этого сделаем замену координат в $\mathbb{C}$ так, что в новой системе координат $B_i = B = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| \leq 1\}$. Пусть $Y_1 = F^{-1}(1) \subset \bar{B} = \bar{B}_i$ – общий слой расслоения $F: \bar{B} \rightarrow B$.

ЛЕММА 1. Пусть D удовлетворяет условию $(*)$, и пусть $Y_0 = F^{-1}(0) = r_1 C_1 + \dots + r_m C_m$ – разложение на неприводимые компоненты вырожденного слоя расслоения $F: \tilde{B} \rightarrow B$. Тогда

$$\text{Н.О.Д.}(r_1, \dots, r_m) = 1.$$

Доказательство. Пусть $F: \tilde{B} \rightarrow B$ задано уравнением $u = \tilde{f}(x, y)$. Тогда

$$\tilde{f}(x, y) = \prod_{i=1}^m \tilde{f}_i^{r_i}(x, y),$$

где $\tilde{f}_i(x, y) = 0$ – неприводимое уравнение кривой C_i . Если наибольший общий делитель чисел $r_1, \dots, r_m$ равен $r > 1$, то над точкой $u \neq 0$ слой $F^{-1}(u)$ распадается на r кривых, заданных уравнениями

$$\tau_j = \prod_{i=1}^m \tilde{f}_i^{r_i/r}(x, y),$$

где τ_j – различные корни из u степени r .

ЛЕММА 2. Пусть D удовлетворяет условию $(*)$. Тогда гомоморфизм $\varphi: \pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(\tilde{B})$, индуцированный вложением $Y_1 \subset \tilde{B}$, является эпиморфизмом.

Доказательство. Пусть $\partial \tilde{B} = F^{-1}(\partial B)$. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{B} \setminus Y_0) & \xrightarrow{\eta} & \pi_1(\tilde{B}) \\ \mu \uparrow & \nearrow v & \\ \pi_1(\partial \tilde{B}) & & \end{array}$$

гомоморфизмов, индуцированных вложениями пространств, гомоморфизм η является эпиморфизмом, так как для любой петли $\tilde{\gamma}$ в $\tilde{B}$ можно найти гомотопически эквивалентную ей петлю γ , не пересекающуюся с Y_0 – подмногообразием коразмерности 2 в $\tilde{B}$. Гомоморфизм μ является изоморфизмом, так как $\tilde{B} \setminus Y_0$ и $\partial \tilde{B}$ гомотопически эквивалентны. Следовательно, v – эпиморфизм.

С другой стороны, в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi_1(Y_1) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(\partial \tilde{B}) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(\partial B) \rightarrow 1 \\ & & & \searrow \varphi & \downarrow v & & \downarrow \\ & & & & \pi_1(\tilde{B}) & \rightarrow & \pi_1(B) = 1 \end{array}$$

верхняя строка является точной и $\pi_1(\partial B) = F_1$. Пусть $\tilde{t}$ – образующая группы $\pi_1(\partial B)$ и $t \in \pi_1(\partial \tilde{B})$ – такой элемент, что $F_*(t) = \tilde{t}$. Отождествим группу $\pi_1(Y_1)$ с ее образом в $\pi_1(\partial \tilde{B})$. Тогда группа $\pi_1(\partial \tilde{B})$ порождается образующими из $\pi_1(Y_1)$ и элементом t . Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $v(t) \in \text{Im } \varphi$.

Пусть $Y_0 = r_1 C_1 + \dots + r_m C_m$ – разложение на неприводимые компоненты слоя Y_0 .

Если среди r_j найдется $r_{j_0} = 1$, то [11]

$$\pi_1(Y_1) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(\tilde{B}) \rightarrow \pi_1(B) = 1 \quad (3)$$

является точной последовательностью, т.е. φ – эпиморфизм.

В случае, когда все $r_j > 1$, для каждого j рассмотрим отображение $\xi_j: \Delta_j = \{v \in C \mid |v| \leq 1\} \rightarrow B$, заданное уравнением $u = v^{r_j}$. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_j & \xrightarrow{\eta_j} & \tilde{B} \\ G_j \downarrow & & \downarrow F \\ \Delta_j & \xrightarrow{\xi_j} & B \end{array}$$

в которой $\tilde{B}_j$ – десингуляризация пространства $\tilde{B} \times_B \Delta_j$. Прообраз $\eta_j^{-1}(C_j)$ кривой C_j входит в слой $G_j^{-1}(0)$ с кратностью 1. Прообраз $\eta_j^{-1}(Y_1)$ общего слоя Y_1 распадается на j слоев $Y_{1,i}$, $1 \leq i \leq j$, отображения G_j , каждый из которых изоморфен Y_1 . Поэтому $\eta_{j*}: \pi_1(Y_{1,i}) \rightarrow \pi_1(Y)$ является изоморфизмом.

В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi_1(Y_{1,1}) & \xrightarrow{\alpha_j} & \pi_1(G_j^{-1}(\partial\Delta_j)) & \xrightarrow{G_{j*}} & \pi_1(\partial\Delta_j) \rightarrow 1 \\ & & \downarrow \eta_{j*} & & \searrow v_j & & \downarrow \xi_{j*} \\ & & & & \pi_1(\tilde{B}_j) & & \\ & & & & \downarrow \eta_{j*} & & \\ & & & & \pi_1(\tilde{B}) & & \\ & & & & \nearrow v & & \\ 1 & \rightarrow & \pi_1(Y_1) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(\partial\tilde{B}) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(\partial B) \rightarrow 1 \end{array}$$

с точными строками гомоморфизм $\Phi_j = v_j \alpha_j$ является эпиморфизмом в силу (3).

Гомоморфизм ξ_{j*} отображает образующую t_j группы $\pi_1(\partial\Delta_j) \simeq F_1$ в $\tilde{t}^{r_j}$. Поэтому из коммутативности диаграммы и эпиморфности гомоморфизма Φ_j следует, что $v(t^{r_j}) = (v(t))^{r_j} \in \text{Im } \Phi$. По лемме 1 Н.О.Д. $(r_1, \dots, r_m) = 1$. Следовательно, $v(t) \in \text{Im } \Phi$, и лемма 2 доказана.

1.5. Обозначим через $Z_{\text{in}} = F^{-1}(l_{\text{in}})$. Расслоение $F: Z_{\text{in}} \rightarrow l_{\text{in}}$ является локально тривиальным расслоением над "окружностью" l_{in} . Зафиксируем слой $Y_1 \subset Z$ над точкой $z_0 \in \gamma_n$ и точку $y_1 \in Y_1$. Пусть $l_i \subset l_{\text{in}}$ – путь из точки z_0 в точку z_{i1} (обозначения из п. 1.2), состоящий из части пути γ_n до точки z_{11} , пути от z_{11} до z_{12} по $\gamma_{1j(1)}$, пути γ_1 , пути от z_{21} до z_{22} по $\gamma_{2j(2)}$ и так далее, до точки z_{i1} . Если мы зафиксируем локальные тривиализации расслоения $F: Z_{\text{in}} \rightarrow l_{\text{in}}$ над некоторым

покрытием окружности l_{in} , то пути l_i однозначно поднимаются до путей $\bar{l}_i \subset Z_{in}$, начинающихся в точке y_0 . Обозначим через y_i конец пути $\bar{l}_i$.

Пусть $\bar{B}_i = F^{-1}(B_i)$. Выбранные выше пути $\bar{l}_i$ определяют гомоморфизмы $\rho_i: \pi_1(\bar{B}_i, y_i) \rightarrow \pi_1(Z, y_0)$. Обозначим через $\varphi_i: \pi_1(Y_{i+1}, y_i) \rightarrow \pi_1(\bar{B}_i, y_i)$ гомоморфизм, индуцированный вложением, где $Y_{i+1} = F^{-1}(z_{i1})$. По лемме 2 гомоморфизмы φ_i являются эпиморфизмами.

Выбранные выше пути $\bar{l}_i$ определяют изоморфизмы $\psi_i: \pi_1(Y_{i+1}, y_i) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y_1, y_0)$, так как $F: Z_{in} \rightarrow l_{in}$ – локально тривиальное расслоение. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять группы $\pi_1(Y_{i+1}, y_i)$ с группой $\pi_1(Y_1, y_0)$. Тем самым определены эпиморфизмы $\varphi_i: \pi_1(Y_1, y_0) \rightarrow \pi_1(\bar{B}_i, y_i)$ так, что коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi_1(Y_1, y_0) & \xrightarrow{\alpha_{in}} & \pi_1(Z_{in}, y_0) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(l_{in}, z_0) \rightarrow 1 \\ & & \varphi_i \downarrow & \searrow \psi & \downarrow \beta & & \beta_{in} \downarrow \wr \\ & & \pi_1(\bar{B}_i, y_i) & \xrightarrow{\rho_i} & \pi_1(Z, y_0) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(T, z_0) \rightarrow 1 \end{array} \quad (4)$$

где α_{in} , β_0 и β_{in} индуцированы вложениями.

Обозначим $N = \text{Ker } F_* \subset \pi_1(Z, y_0)$. В диаграмме (4) верхняя строка является точной, а β_{in} – изоморфизм. Отсюда следует

ЛЕММА 3.1. $\text{Im } \rho_i \subset N$.

ЛЕММА 3.2. $\text{Im } \psi \subset N$.

1.6. Отождествим $\pi_1(l_{in})$ с $\pi_1(T)$ при помощи изоморфизма β_{in} . Пусть $\bar{t} \in \pi_1(l_{in}) = F_1$ – образующая, и пусть $t \in \pi_1(Z_{in})$ – такой элемент, что $F_*(t) = \bar{t}$.

Выбор элемента t определяет элементы $\tau_{in} \in \text{Aut } \pi_1(Z_{in})$ и $\tau \in \text{Aut } \pi_1(Z, y_0)$ такие, что

$$\tau_{in}(\gamma) = t\gamma t^{-1}, \quad \tau(\gamma') = \beta(t)\gamma\beta(t^{-1}) \quad (5)$$

для любого $\gamma \in \pi_1(Z_{in})$ и любого $\gamma' \in \pi_1(Z, y_0)$. Очевидно, что

$$\beta_0(\tau_{in}(\gamma)) = \tau(\beta_0(\gamma))$$

для любого $\gamma \in \pi_1(Z_{in})$.

Отождествим группу $\pi_1(Y_1, y_0)$ с ее образом в $\pi_1(Z_{in}, y_0)$ и обозначим через

$$K = \langle \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \tau_{in}^j(\text{Ker } \varphi_i) \rangle$$

подгруппу в $\pi_1(Y_1, y_0)$, порожденную элементами из групп $\tau_{in}^j(\text{Ker } \varphi_i)$. Отметим, что K – нормальный делитель в $\pi_1(Y_1, y_0)$.

ТЕОРЕМА 2'. Пусть D удовлетворяет условию (*). Тогда последовательность

$$1 \rightarrow K \rightarrow \pi_1(Y_1, y_0) \xrightarrow{\psi} N \rightarrow 1$$

является точной.

Доказательство. Точная последовательность

$$1 \rightarrow N \rightarrow \pi_1(Z, y_0) \xrightarrow{F_*} \pi_1(T, z_0) \rightarrow 1$$

определяет бесконечное циклическое накрытие $H: \tilde{Z} \rightarrow Z$ так, что коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{T} \\ H \downarrow & & \downarrow h \\ Z & \xrightarrow{F} & T \end{array} \quad (6)$$

в которой $h: \tilde{T} \rightarrow T$ является универсальным накрытием.

Выберем точку $\tilde{y}_0 \in H^{-1}(y_0)$, и пусть $\tilde{z}_0 = \tilde{F}(\tilde{y}_0)$. Тогда $\pi_1(\tilde{Z}, \tilde{y}_0) = N$.

Пространство $\tilde{T}$ есть несвязное объединение счетного числа кругов B_{ij} , соединенных в цепочку при помощи отрезков (см. рис. 2) и таких, что $B_{ij} \subset h^{-1}(B_i)$. Занумеруем круги B_{ij} в порядке, согласованном с порядком на цепочке, так, как это показано на рис. 2. На каждом отрезке, соединяющем соседние круги, выберем по точке $\tilde{z}_i$ (на отрезке, соединяющем круги B_{n-1} и $B_{1,1}$, возьмем выбранную ранее точку $\tilde{z}_0$) и пронумеруем их в порядке, согласованном с порядком на цепочке (точка $\tilde{z}_0$ имеет номер 0).

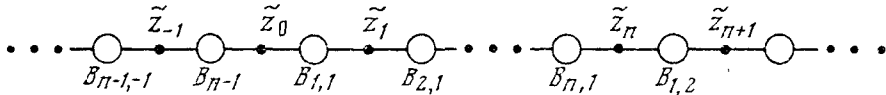


Рис. 2

Обозначим через $\tilde{T}_{ij}$ "часть" пространства $\tilde{T}$, лежащую между точками $\tilde{z}_i$ и $\tilde{z}_j$. Пусть $\tilde{Z}_{ij} = \tilde{F}^{-1}(\tilde{T}_{ij})$. Из пространств $\tilde{Z}_{ij}$ образуем возрастающую последовательность вложенных друг в друга пространств

$$\tilde{Z}_1 \subset \tilde{Z}_2 \subset \dots \subset \tilde{Z}_n \subset \dots \subset \tilde{Z},$$

где $\tilde{Z}_n = \tilde{Z}_{-[\frac{n}{2}], n - [\frac{n}{2}]}$ ($[]$ — целая часть числа).

Прообраз $H^{-1}(\bar{B}_i) = \prod_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{ij}$, где $\tilde{B}_{ij}$ занумерованы так, что $\tilde{F}(\tilde{B}_{ij}) = B_{ij}$.

Очевидно, что путь $l_{in}^j l_i$ (где l_i был определен в п. 1.5), поднятый в $\tilde{Z}$ так, что его начало совпадает с точкой $\tilde{y}_0$, будет иметь своим концом некоторую точку $\tilde{y}_{ij} \in \tilde{B}_{ij}$. Этот путь определяет гомоморфизмы

$$\varphi_{ij}: \pi_1(Y_1, y_0) \rightarrow \pi_1(\tilde{B}_{ij}, \tilde{y}_{ij}), \quad \rho_{ij}: \pi_1(\tilde{B}_{ij}, \tilde{y}_{ij}) \rightarrow \pi_1(\tilde{Z}, \tilde{y}_0).$$

Легко видеть, что если мы отождествим $\pi_1(\tilde{B}_{ij}, \tilde{y}_{ij})$ с $\pi_1(\bar{B}_i, y_i)$, то

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \tau_{in}^j. \quad (7)$$

Применяя последовательно теорему Зайферта-ван Кампена к цепочке пространств $\tilde{Y}_1 = \tilde{Z}_0 \subset \tilde{Z}_1 \subset \dots \subset \tilde{Z}_n \subset \dots \subset \tilde{Z}$, из (7) получаем, что индуцированный вложением гомоморфизм $\psi_n: \pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(\tilde{Z}_n)$ является эпиморфизмом, а ядро этого

гомоморфизма $\text{Ker} \psi_n$ есть наименьший нормальный делитель в $\pi_1(Y_1)$, содержащий $\cup \tau_{in}^j \text{Ker} \varphi_i$, где объединение взято по всем парам (i, j) таким, что $\tilde{B}_{ij} \subset \tilde{Z}_n$. Так как $\tau_{in}^j \text{Ker} \varphi_i \subset K$ и K – нормальный делитель, то $\text{Ker} \psi_n \subset K$.

Для завершения доказательства теоремы 2' рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \text{Ker } \psi_n & & & & \\
 & \swarrow & \downarrow & & & & \\
 1 \rightarrow & K & \rightarrow & \pi_1(Y_1) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(\tilde{Z}) = N & \\
 & & & \downarrow \psi_n & \nearrow \tilde{\psi}_n & & \\
 & & & \pi_1(\tilde{Z}_n) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & 1 & & &
 \end{array}$$

в которой все гомоморфизмы индуцированы вложениями, и заметим, что во-первых, для любого элемента $\gamma \in \pi_1(\tilde{Z})$ найдется такой номер n , что $\gamma \in \text{Im } \tilde{\psi}_n$. Следовательно, ψ – эпиморфизм, так как ψ_n являются эпиморфизмами. Во-вторых, если $\gamma \in \text{Ker } \psi$, то найдется такой номер n , что $\gamma \in \text{Ker } \psi_n$. Следовательно, $\gamma \in K$. Теорема 2' доказана.

1.7. Хорошо известно, что $\pi_1(C^2 \setminus D, y)$ порождается обходами γ_i вокруг кривой D , т.е. петлями, состоящими из пути l_i , соединяющего точку y с некоторой точкой y_i , лежащей вблизи кривой D , обхода вокруг D по часовой стрелке по окружности Γ_i , лежащей на комплексной прямой Π , трансверсально пересекающей D , $y_i \in \Pi$, и возвращения назад в точку y по пути l_i^{-1} . Очевидно, что гомоморфизм $F_*: \pi_1(C^2 \setminus D) \rightarrow \pi_1(C^*) = F_1$ отображает образующие γ_i в образующую группы $\pi_1(C^*)$, если уравнение кривой D не имеет кратных множителей.

Если D – неприводимая кривая, то все описанные выше образующие γ_i сопряжены друг другу и $H_1(C^2 \setminus D, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Отсюда следует (см. также лемму 4), что ядро N гомоморфизма $F_*: \pi_1(C^2 \setminus D) \rightarrow F_1$ совпадает с коммутантом группы $\pi_1(C^2 \setminus D)$. Поэтому из теоремы 2' вытекает сформулированная во введении теорема 3.

1.8. Обозначим через $Z_{ex} = F^{-1}(l_{ex})$. Расслоение $F: Z_{ex} \rightarrow l_{ex}$ так же, как и $F: Z_{in} \rightarrow l_{in}$, является локально тривиальным расслоением.

Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 \rightarrow & \pi_1(Y_1, y_0) & \xrightarrow{\alpha_{in}} & \pi_1(Z_{in}, y_0) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(l_{in}, z_0) & \rightarrow 1 \\
 & \downarrow \psi & & \downarrow \beta & & \beta_{in} \downarrow \gamma & \\
 1 \rightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(Z, y_0) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(T, z_0) & \rightarrow 1 \\
 & \uparrow \psi & & \uparrow \tilde{\beta} & & \beta_{ex} \uparrow \delta & \\
 1 \rightarrow & \pi_1(Y_1, y_0) & \xrightarrow{\alpha_{ex}} & \pi_1(Z_{ex}, y_0) & \rightarrow & \pi_1(l_{ex}, z_0) & \rightarrow 1
 \end{array} \quad (8)$$

Выберем элемент $\tilde{t} \in \pi_1(Z_{ex}, y_0)$ так, что $\tilde{\beta}(\tilde{t}) = \beta(t)$, где t – выбранный в п. 1.6

элемент из $\pi_1(Z_{\text{in}})$. Точно так же, как элементы $\bar{t}$ и t , элемент $\tilde{t}$ определяет $\tau_{\text{ex}} \in \text{Aut } \pi_1(Z_{\text{ex}})$:

$$\tau_{\text{ex}}(\gamma) = \tilde{t}\gamma\tilde{t}^{-1}$$

для любых $\gamma \in \pi_1(Z_{\text{ex}}, y_0)$.

Обозначим ограничение τ_{ex} (соответственно τ_{in} и τ) на образ $\text{Im}\alpha_{\text{ex}}$ (соответственно на $\text{Im}\alpha_{\text{in}}$ и $\text{Im}\alpha$) той же буквой. Из диаграммы (8) видно, что для любого $\gamma \in \pi_1(Y_1, y_0)$

$$\psi(\tau_{\text{in}}(\gamma)) = \tau(\psi(\gamma)), \quad \psi(\tau_{\text{ex}}(\gamma)) = \tau(\psi(\gamma)). \quad (9)$$

Автоморфизмы τ_{in} и τ_{ex} индуцируют автоморфизмы монодромии h_0 и h_∞ $\mathbf{Z}$ -модуля $H_1(Y_1, \mathbf{Z})$, а τ индуцирует автоморфизм $\tilde{h}$ $\mathbf{Z}$ -модуля N/N' . Пусть $\bar{\psi}: H_1(Y_1, \mathbf{Z}) \rightarrow N/N'$ – эпиморфизм, индуцированный гомоморфизмом ψ . Из (9) следует, что

$$\bar{\psi}(h_i(\gamma)) = \tilde{h}(\bar{\psi}(\gamma)) \quad (10)$$

для любого $\gamma \in H_1(Y_1, \mathbf{Z})$, где $i = 0, \infty$.

Слой Y_1 является некомпактной римановой поверхностью, т.е. сферой с g ручками и r дырами. Такая поверхность имеет гомотопический тип букета $2g + r - 1$ окружностей. Поэтому $H_1(Y_1, \mathbf{Z})$ является свободным $\mathbf{Z}$ -модулем ранга $2g + r - 1$.

Пусть $i: N/N' \rightarrow (N/N')_{\text{Tor}} = (N/N')_{\text{Free}}$. Выберем в свободном $\mathbf{Z}$ -модуле $(N/N')_{\text{Free}}$ базис $e_1, \dots, e_n$; пусть $\mathcal{M}_2 = \bar{\psi}^{-1}((N/N')_{\text{Tor}})$ и $\mathcal{M}_1$ – подмодуль в $H_1(Y_1, \mathbf{Z})$, порожденный элементами $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ такими, что $i(\bar{\psi}(\bar{e}_j)) = e_j$. Легко видеть, что $H_1(Y_1, \mathbf{Z}) \simeq \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ – свободные подмодули, $\text{rk } \mathcal{M}_1 = n$, $\text{rk } \mathcal{M}_2 = 2g + r - n - 1$.

Выберем в $\mathcal{M}_2$ базис $\bar{e}_{n+1}, \dots, \bar{e}_{2g+r-1}$. Тогда в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{2g+r-1}$ автоморфизмы h_i имеют вид

$$h_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ 0 & C_i \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где A_i , B_i и C_i – матрицы порядков соответственно $n \times n$, $n \times (2g + r - n - 1)$ и $(2g + r - n - 1) \times (2g + r - n - 1)$. По построению модуля $\mathcal{M}_1$ и из (10) следует, что матрица A_i совпадает с матрицей автоморфизма $h: (N/N')_{\text{Free}} \rightarrow (N/N')_{\text{Free}}$ в базисе $e_1, \dots, e_n$, индуцированного автоморфизмом $\tilde{h}$.

Из (11) следует, что $\det(h_i - t \text{Id}) = \det(h - t \text{Id}) \det(C_i - t \text{Id})$. Тем самым теорема 4 доказана.

1.9. Как уже отмечалось во введении, корнями многочленов $\Delta_{\text{in}}(t)$ и $\Delta_{\text{ex}}(t)$ могут быть только корни из единицы. Следовательно, многочлен $\Delta_1(t) = \det(h - t \text{Id})$ также имеет своими корнями только корни из единицы. Многочлен $\Delta_1(t)$ имеет целые коэффициенты. Поэтому если t_i – его комплексный корень, то комплексно сопряженное число $\bar{t}_i$ также является корнем многочлена $\Delta_1(t)$. Следовательно,

$$\Delta_1(t) = \pm (t-1)^{m_1} (t+1)^{m_2} \prod (t^2 - (t_i + \bar{t}_i)t + 1)^{m_i}.$$

Поэтому имеет место

С л е д с т в и е 1. Если t_0 – корень характеристического многочлена $\Delta_1(t)$, то $t_0^n = 1$ для некоторого n .

С л е д с т в и е 2. $\Delta_1(t)$ является возвратным многочленом, т.е. $\Delta_1(t) = \pm t^{\deg \Delta_1(t)} \Delta_1(t^{-1})$, причем знак "–" имеет место только в том случае, когда $t = 1$ является корнем нечетного порядка.

1.10. Рассмотрим кратко общий случай, когда на кривую D не наложено никаких ограничений. В обозначениях п. 1.1 пусть общий слой $F^{-1}(z) = Y_1 + \dots + Y_k$ распадается на k неприводимых компонент.

Морфизм F определяет вложение $F_*: C[z] \hookrightarrow C[x, y]$. Пусть K – целое замыкание кольца $F_*(C[z])$ в $C[x, y]$, и пусть $C = \text{Spec} K$. Тогда неособая кривая C может быть включена в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & C^2 & \\ \bar{F} \swarrow & & \searrow F \\ C & \xrightarrow{G} & C^1 \end{array}$$

Из целозамкнутости кольца K в $C[x, y]$ вытекает, что общий слой морфизма $\bar{F}$ неприводим.

Так как иррегулярность $q = 0$ для рациональной поверхности, то C – рациональная кривая, т.е. C изоморфна проективной прямой с выколотыми точками. А так как C^2 односвязно и $\bar{F}$ есть отображение на C с общим связным слоем, то $\pi_1(C) = 0$. Следовательно, $C \simeq C^1$.

Слой $F^{-1}(0) = D$ так же, как и общий слой $F^{-1}(z)$, должен распадаться на k кривых

$$D = D_1 + \dots + D_k$$

– различных слоев морфизма $\bar{F}$, так как мы выбрали уравнение $f(x, y) = 0$ кривой D так, что $f(x, y)$ не имеет кратных множителей.

Пусть $D_i = \bar{F}^{-1}(u_i)$. Тогда

$$X = C^2 \setminus D = \bar{F}^{-1}(C^1 \setminus \{u_1, \dots, u_k\}).$$

Пространство $C^1 \setminus \{u_1, \dots, u_k\}$ гомотопически эквивалентно букету k окружностей. Поэтому $\pi_1(C^1 \setminus \{z_1, \dots, z_k\}) = F_k$. Применяя к расслоению $\bar{F}: X \rightarrow C^1 \setminus \{u_1, \dots, u_k\}$ лемму 2 и рассуждения, аналогичные тем, которые применялись в доказательстве теоремы 2', легко получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2'. Пусть кривая $D \subset C^2$ задана уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ не имеет кратных множителей, и пусть $F^{-1}(z) = Y_1 + \dots + Y_k$ – разложение на неприводимые компоненты общего слоя морфизма $F: C^2 \rightarrow C^1$, заданного уравнением $z = f(x, y)$. Тогда последовательность

$$\pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(C^2 \setminus D) \rightarrow F_k \rightarrow 1$$

является точной.

1.11. Конструкция из п.1.2 позволяет легко увидеть гомотопический тип пространства $X = C^2 \setminus D$ в простейшем случае, когда $\bar{D} \subset \mathbb{P}^2$ – неособая кривая, трансверсально пересекающаяся с $L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus C^2$. В самом деле, очевидно, что если $\bar{D}_t$ – деформация кривой $\bar{D}$ в $\mathbb{P}^2$ ($\bar{D}_0 = \bar{D}$) такая, что все $\bar{D}_t$ – неособые кривые,

пересекающие прямую L_∞ трансверсально, то $X_t = P\Lambda(\bar{D}_t \cup L_\infty)$ диффеоморфны друг другу. Очевидно, что мы также можем двигать прямую L_∞ , и если прямые $L_{\infty,t}$ и кривая $\bar{D}_1$ пересекаются трансверсально, то пространства $P\Lambda(\bar{D}_1 \cup L_{\infty,t})$ останутся опять диффеоморфными друг другу. Поэтому мы можем считать, что $X = C^2\mathcal{D}$, где D задано уравнением

$$x^d + y^d + 1 = 0.$$

Среди слоев морфизма $F: C^2 \rightarrow C^1$, заданного уравнением $z = x^d + y^d + 1$, имеется только один вырожденный слой $Y_1 = F^{-1}(1)$.

Пусть $F: Z \rightarrow T$ – ожерелье (см. п. 1.2) для нашего морфизма F , где $T = I \cup B$, $I = \{z \in C^1 \mid |z| = 1\}$, $B = \{z \in C^1 \mid |z - 1| \leq \varepsilon\}$.

Расслоение $F: F^{-1}(B) \rightarrow B$ гомотопически эквивалентно расслоению $F: C^2 \rightarrow C^1$. Следовательно, $\tilde{B} = F^{-1}(B)$ стягиваемо по себе в точку. Поэтому Z (тем самым и $X = C^2\mathcal{D}$) гомотопически эквивалентно факторпространству $Z_1 = Z/(\tilde{B})$, где Z_1 получено из Z стягиванием в точку $x_0 \in Z_1$ множества $\tilde{B}$.

Пространство Z_1 гомеоморфно факторпространству $Z_{in} / F^{-1}(\gamma_{1,j(1)})$, где Z_{in} и дуга $\gamma_{1,j(1)}$ были определены в п. 1.2. Расслоение $F: Z_{in} \rightarrow I_{in}$ является C^∞ -тривиальным расслоением, так как слой $F^{-1}(0) = D$ – неособая кривая.

Следовательно, Z_1 гомеоморфно факторпространству $D \times S^1 / (D \times \{z_0\})$.

Разрежем Z_1 по точке x_0 . Пусть $\tilde{Z}_1$ – разрезанное Z_1 . Тогда $\tilde{Z}_1$ гомеоморфно надстройке ΣD , т.е. пространству $D \times [0, 1]$, у которого стянуты в точки слои $D \times \{0\}$ и $D \times \{1\}$.

Слой D является римановой поверхностью рода $g = (d-1)(d-2)/2$ с d дырами. Следовательно, поверхность D гомотопически эквивалентна букету $(d-1)^2$ экземпляров окружностей $S^1 \vee \dots \vee S^1_{(d-1)^2}$. Поэтому ΣD гомотопически эквивалентно $(d-1)^2$ экземплярам сфер

$$S^2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\},$$

склеенным друг с другом по половине экватора $l_{1/2} = \{(a, b, c) \in S^2 \mid c = 0, b \geq 0\}$:

$$\Sigma D \sim \cup_{l_{1/2}} S_i^2.$$

Пусть $x_1 = (-1, 0, 0) \in S^2$ и $x_2 = (1, 0, 0) \in S^2$ – концы экватора $l_{1/2}$. Из вышеизложенного следует, что Z_1 гомотопически эквивалентно факторпространству

$$Z_2 = \cup_{l_{1/2}} S_i^2 / \{x_1, x_2\}.$$

Пространство Z_2 гомотопически эквивалентно пространству

$$Z_3 = \left(\cup_{l_{1/2}} S_i^2 \right) \cup_{\{x_1, x_2\}} [0, 1],$$

которое получено из $\cup_{l_{1/2}} S_i^2$ подклеиванием отрезка $[0, 1]$ своими концами к точкам x_1 и x_2 .

В пространстве Z_3 стянем полуэкватор $l_{1/2}$ в точку. Получим пространство Z_4 , гомеоморфное букету из окружности и $(d-1)^2$ экземпляров сферы S^2 . Итак,

$$C^2 \setminus D \sim S^1 \vee \left(S_1^2 \vee \dots \vee S_{(d-1)^2}^2 \right).$$

§2. Многочлены Александра C -групп

2.1. Пусть $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ – отрезок натурального ряда, $I_n^3 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_i \in I_n\}$, и пусть $M \subset I_n^3$ – некоторое подмножество.

О п р е д е л е н и е . Назовем копредставление группы G

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid \{r_\alpha(x)\}, \alpha \in M \rangle$$

C -копредставлением типа M и мощности n , если каждое соотношение $r_\alpha(x)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, этого копредставления суть сопряжение, т.е. имеет вид

$$r_\alpha(x) = x_{\alpha_1} \cdot x_{\alpha_2} x_{\alpha_1}^{-1} x_{\alpha_3}^{-1}. \quad (12)$$

Назовем группу G C -группой, если G обладает некоторым C -копредставлением.

Копредставление Виртингера и копредставление в [6] являются C -копредставлениями групп зацеплений в R^3 и фундаментальных групп дополнений к алгебраическим кривым в C^2 .

Отметим, что свободная группа F_n является C -группой типа $\emptyset \subset I_n$, а свободная абелева группа Z^n есть C -группа типа

$$M_n^{ab} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in I_n^3 \mid \alpha_2 = \alpha_3\}. \quad (13)$$

Пусть G_1 – C -группа типа $M_1 \subset I_{n_1}^3$ и G_2 – C -группа типа $M_2 \subset I_{n_2}^3$. Легко видеть, что свободное произведение $G_1 * G_2$ и прямое произведение $G_1 \times G_2$ также являются C -группами типов $M_1 * M_2$ и $M_1 \times M_2$ соответственно, $M_1 * M_2 = M_1' \cup M_2'$, а $M_1 \times M_2 = M_1' \cup M_2' \cup M_{12}^{ab}$, где

$$M_1' = \{\alpha \in I_{n_1+n_2}^3 \mid \alpha \in M_1\},$$

$$M_2' = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in I_{n_1+n_2}^3 \mid \alpha_1 > n_1, \alpha_2 > n_1, \alpha_3 > n_1, (\alpha_1 - n_1, \alpha_2 - n_1, \alpha_3 - n_1) \in M_2\},$$

$$M_{12}^{ab} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in I_{n_1+n_2}^3 \mid \alpha_1 \leq n_1, \alpha_2 = \alpha_3 > n_1\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Если среди элементов множества M имеется элемент $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, у которого $\alpha_1 = \alpha_2$ или $\alpha_1 = \alpha_3$, то C -группа типа M обладает C -копредставлением меньшей мощности.

Действительно, если $\alpha_1 = \alpha_2$ (соответственно $\alpha_1 = \alpha_3$), то соотношение $r_{\bar{\alpha}}(x)$ эквивалентно соотношению $x_{\alpha_1} = x_{\alpha_3}$ (соответственно $x_{\alpha_1} = x_{\alpha_2}$). Подставляя x_{α_1} вместо x_{α_3} во все остальные соотношения $r_\alpha(x)$, мы уменьшим мощность C -копредставления.

В дальнейшем будем предполагать, что для $\alpha \in M$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2, \quad \alpha_1 \neq \alpha_3.$$

З а м е ч а н и е 2. Если среди элементов множества M имеются элементы $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$ и $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)$, у которых $\bar{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_2$, а $\bar{\alpha}_3 \neq \tilde{\alpha}_3$, либо $\bar{\alpha}_2 \neq \tilde{\alpha}_2$, а $\bar{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_3$, то C -группа типа M обладает C -копредставлением меньшей мощности.

Действительно, если $\bar{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_2$, то пара соотношений $r_{\bar{\alpha}}(x)$ и $r_{\tilde{\alpha}}(x)$ эквивалентна паре соотношений $r_{\bar{\alpha}}(x)$ и $x_{\bar{\alpha}_3} = x_{\tilde{\alpha}_3}$. Подставляя $x_{\bar{\alpha}_3}$ вместо $x_{\tilde{\alpha}_3}$ во все остальные соотношения, получим C -копредставление меньшей мощности.

2.2. Сопоставим каждому множеству $M \subset I_n^3$ ориентированный граф Γ_M с вершинами $e_1, \dots, e_n$ и ребрами v_α , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in M$ такой, что каждое ребро v_α соединяет вершину e_{α_2} (начало ребра) с e_{α_3} (конец ребра).

ЛЕММА 4. Пусть $G' = [G, G]$ – коммутант C -группы типа M . Тогда

$$G/G' = \mathbb{Z}^k,$$

где k – число компонент связности графа Γ_M .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Группа G/G' является C -группой типа $M \cup M_n^{\text{ab}}$. По замечанию 2 это C -копредставление эквивалентно C -копредставлению типа M_k^{ab} .

Назовем C -группу типа M *неприводимой* группой, если ее граф Γ_M связан.

Отметим, что группы узлов и фундаментальные группы дополнений к неприводимым алгебраическим кривым в S являются неприводимыми C -группами.

2.3. Рассмотрим гомоморфизм $F_*: G \rightarrow F_1$ C -группы G типа M , переводящий образующие x_i группы G в образующую t бесконечной циклической группы F_1 .

Пусть $N = \text{Ker } F_*$.

Легко видеть, что если G – неприводимая C -группа, то

$$N = G'.$$

Обозначим через $F_{**}: \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[F_1] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ гомоморфизм групповых колец, индуцированный гомоморфизмом $F_*: G \rightarrow F_1$. Пусть

$$A(G) = \left(F_{**} \left(\frac{\partial r_\alpha(x)}{\partial x_j} \right) \right)$$

– матрица Александра C -группы G типа M , и пусть $E_k(G)$ – ее k -й элементарный идеал, а $\Delta_{G,k}(t)$ – образующая минимального главного идеала, содержащего $E_k(G)$. Многочлены $\Delta_{G,k}(t)$ будем называть *F-многочленами Александра* группы G , а если G – неприводимая C -группа, то просто *многочленами Александра*.

Очевидно, что если $\Delta_{G,i}(t) \neq 0$, то многочлен $\Delta_{G,i}(t)$ делит многочлен $\Delta_{G,i-1}(t)$.

2.4. Пусть G – C -группа типа M . Матрица $A(G)$ имеет порядок $|M| \times n$, где $|M|$ – число элементов множества M .

Дифференцируя соотношения (12), легко видеть, что строки A_α матрицы $A(G)$ имеют следующий вид:

– если $\alpha_2 \neq \alpha_3$, то

$$A_\alpha = (0, \dots, 0, 1 - t, 0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0), \quad (14)$$

где $1 - t$ стоит на α_1 -м месте, t стоит на α_2 -м месте и -1 стоит на α_3 -м месте;

– если $\alpha_2 = \alpha_3$, то

$$A_\alpha = (0, \dots, 0, 1 - t, 0, \dots, 0, t - 1, 0, \dots, 0), \quad (15)$$

где $1 - t$ стоит на α_1 -м месте, а $t - 1$ стоит на α_2 -м месте.

Следующие две леммы являются обобщением на C -группы аналогичных утверждений для групп узлов (см. [5]).

ЛЕММА 5. Для C -группы G

$$E_0(G) = (0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из (14) и (15) видно, что сумма всех столбцов матрицы $A(G)$ равна нулю. Следовательно, все миноры n -го порядка матрицы $A(G)$ равны нулю.

ЛЕММА 6. Пусть G – неприводимая C -группа. Тогда

$$|\Delta_{G,1}(1)| = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\tau: \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}$ – гомоморфизм $\mathbb{Z}$ -модулей такой, что $\tau(t) = 1$. Из (15) и (13) следует, что

$$\tau(A(G/G')) = \tau(\widetilde{A(G)}),$$

$\widetilde{A(G)}$ получена из $A(G)$ добавлением нулевых строк. Следовательно,

$$\tau(E_k(G)) = \tau(E_k(G/G')).$$

С другой стороны, известно [5], что элементарные идеалы не зависят от копредставления группы G . В частности, $\tau(E_k(G/G')) = \mathbb{Z}$ при $k \geq 1$, так как $G/G' = F_1$ для неприводимой C -группы. Поэтому для доказательства леммы осталось заметить, что

$$\tau(|\Delta_{G,1}(t)|) = |\Delta_{G,1}(1)| \supset \tau(E_1(G)) = \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $|\Delta_{G,1}(1)| = \pm 1$.

ЛЕММА 7. Пусть $G_1, \dots, G_n$ – неприводимые C -группы, $n > 1$. Тогда

$$\Delta_{G_1 \times \dots \times G_n, k}(t) = (t - 1)^{n-k}$$

при $1 \leq k \leq n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по n . Пусть $n = 2$, и пусть G_i – неприводимая C -группа типа $M_i \subset I_{n_i}^3$, $i = 1, 2$. В матрице Александра $A(G_1 \times G_2)$ имеется $|M_1| + |M_2| + n_1 n_2$ строк, из которых первые $|M_1|$ возникли из дифференцирований соотношений $r_\alpha(x)$ группы G_1 , строки с номерами от $|M_1| + 1$ до $|M_1| + |M_2|$ – результат дифференцирования соотношений $r_\alpha(x)$ группы G_2 , а последние $n_1 n_2$ строк – результат дифференцирования соотношений коммутирования. Пусть первые n_1 столбцов соответствуют образующим группы G_1 .

В матрице $A(G_1 \times G_2)$ прибавим к последнему столбцу все остальные столбцы, и к n_1 -му столбцу прибавим n_1-1 первых столбцов. Получим эквивалентную матрицу $\tilde{A}(G_1 \times G_2)$ матрицу $\tilde{A}$. Из (14) и (15) следует, что в $\tilde{A}$ последний столбец состоит из нулей, а в столбце с номером n_1 в первых $|M_1| + |M_2|$ строках стоят нули, а далее стоят многочлены $\pm(t-1)$. В первых $|M_1|$ строках матрицы $\tilde{A}$, начиная с n_1 -го столбца стоят нули, а на пересечении этих строк с первыми n_1 столбцами стоит матрица $\tilde{A}(G_1)$, эквивалентная матрице Александра $A(G_1)$ группы G_1 . Аналогично, в строках с номерами от $|M_1| + 1$ до $|M_1| + |M_2|$ в первых n_1 столбцах стоят нули, а на пересечении этих строк со столбцами с номерами от $n_1 + 1$ до n_2 стоит матрица $\tilde{A}(G_2)$, эквивалентная матрице $A(G_2)$.

Легко видеть, что если в минор $\mathcal{M}$ порядка $(n_1 + n_2 - 1)$ не входят строки с номерами $> |M_1| + |M_2|$, то $\mathcal{M} = 0$.

Раскрывая миноры $(n_1 + n_2 - 1)$ -го порядка, в которые входит только одна строка с номером $> |M_1| + |M_2|$, по n_1 -му столбцу, видим, что среди миноров $(n_1 + n_2 - 1)$ -го порядка матрицы $A(G_1 \times G_2)$ имеются миноры

$$\mathcal{M} = \pm(t-1)\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2, \quad (16)$$

где $\mathcal{M}_i$ – некоторые миноры матрицы $\tilde{A}(G_i)$ порядка $n_i - 1$, $i = 1, 2$. По лемме 6 среди миноров $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ найдутся такие, что каждый из них взаимно прост с $(t-1)$.

С другой стороны, рассмотрим соотношения

$$x_i x_{n_1+1} x_i^{-1} x_{n_1+1}^{-1} = 1, \quad i = 1, \dots, n_1,$$

$$x_{n_1} x_j x_{n_1}^{-1} x_j^{-1} = 1, \quad j = n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2.$$

Строки в матрице $\tilde{A}(G_1 \times G_2)$, соответствующие этим соотношениям, образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} 1-t & 0 & \dots & \dots & 0 & 1-t & t-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & \dots & 0 & 1-t & t-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1-t & t-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1-t & 0 & t-1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1-t & 0 & \dots & \dots & t-1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1-t & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Легко видеть, что миноры $(n_1 + n_2 - 1)$ -го порядка такой матрицы равны либо $(-1)^{n_2} (t-1)^{n_1+n_2-1}$, либо нулю.

Отсюда и из (16) следует, что наибольший общий делитель миноров $(n_1 + n_2 - 1)$ -го порядка матрицы $A(G_1 \times G_2)$ равен $(t-1)$, т.е.

$$\Delta_{G_1 \times G_2, 1}(t) = (t-1).$$

Кроме того, очевидно, что $\Delta_{G_1 \times G_2, 2}(t) \equiv 1$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $\Delta_{G_1 \times \dots \times G_{p,k}}(t) = (t-1)^{p-k}$ при $k \leq p$, и пусть

$G = G_1 \times \dots \times G_p \times G_{p+1}$. Обозначим через $\tilde{G}_1 = G_1 \times \dots \times G_p$ C -группу типа $\tilde{M}_1$, и пусть $\tilde{n}_1 = n_1 + \dots + n_p$, $\tilde{n}_1 \geq p$, $\tilde{n}_2 = n_{p+1}$, $\tilde{M}_2 = M_{p+1}$, $\tilde{G}_2 = G_{p+1}$.

В матрице Александра $\tilde{A}(\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2)$ сделаем те же преобразования, что и в случае $p = 2$.

Покажем, во-первых, что любой минор $\mathcal{M}$ $(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 - k)$ -го порядка матрицы $\tilde{A}(G)$ делится на $(t-1)^{p+1-k}$. Действительно, любой минор $\mathcal{M}$ $(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 - 1)$ -го порядка может быть разложен в сумму произведений:

$$\mathcal{M} = \sum \mathcal{M}_{1,i} \mathcal{M}_{2,j} \mathcal{M}_{3,r},$$

где $\mathcal{M}_{1,i}$ – миноры матрицы $\tilde{A}(\tilde{G}_1)$ порядка $\tilde{n}_1 - k_1$, $\mathcal{M}_{2,j}$ – миноры матрицы $\tilde{A}(\tilde{G}_2)$ порядка $\tilde{n}_2 - k_2$ и $\mathcal{M}_{3,r}$ – миноры порядка $k_1 + k_2 - k \geq 0$, в которые входят строки с номерами $> |\tilde{M}_1| + |\tilde{M}_2|$. Заметим, что $\mathcal{M}_{3,r}$ делится на $(t-1)^{k_1+k_2-k}$.

Если $k_1 > p$, то $\mathcal{M}_{3,r}$ делится на $(t-1)^{p+1-k}$. Следовательно, $\mathcal{M}$ также делится на $(t-1)^{p+1-k}$.

Пусть $k_1 \leq p$. Тогда $\mathcal{M}_{1,i}$ делится на $(t-1)^{p-k_1}$ по индуктивному предположению. В этом случае $\mathcal{M}_{1,i} \mathcal{M}_{3,r}$ делятся на $(t-1)^{p+k_2-k}$. Если $k_2 = 0$, то $\mathcal{M}_{2,j} \equiv 0$. Следовательно, $\mathcal{M}$ во всех случаях делится на $(t-1)^{p+1-k}$.

В матрице $\tilde{A}(\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2)$ имеется $\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 - 1$ строк, образующих матрицу вида (17). Следовательно, в $\tilde{A}(\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2)$ найдется минор $(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 - k)$ -го порядка, равный $(t-1)^{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 - k}$.

С другой стороны, в $\tilde{A}(\tilde{G}_1)$ по индуктивному предположению мы можем выбрать минор $\mathcal{M}_1$ порядка $\tilde{n}_1 - k$ такой, что $\mathcal{M}_1 = (t-1)^{p-k} \tilde{\mathcal{M}}_1$, где $\tilde{\mathcal{M}}_1$ взаимно прост с $t-1$. Выберем в $\tilde{A}(\tilde{G}_2)$ минор $\mathcal{M}_2$ порядка $\tilde{n}_2 - 1$ такой, что $\mathcal{M}_2$ взаимно прост с $t-1$. Добавив к строкам и столбцам, входящим в миноры $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, еще одну строку с номером $> |\tilde{M}_1| + |\tilde{M}_2|$ и столбец с номером $\tilde{n}_1$, найдем минор $\mathcal{M}$ $(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 - k)$ -го порядка матрицы $\tilde{A}(\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2)$ такой, что

$$\mathcal{M} = \pm (t-1)^{p+1-k} \tilde{\mathcal{M}}_1 \mathcal{M}_2.$$

Следовательно, $\Delta_{G,k}(t) = (t-1)^{p+1-k}$. Лемма доказана.

Следующие две леммы имеют доказательства, аналогичные доказательству леммы 7.

ЛЕММА 8. Пусть $G_1, \dots, G_n$ – C -группы. Тогда

- 1) $\Delta_{G_1 * \dots * G_n, k}(t) \equiv 0$ при $1 \leq k \leq n-1$;
- 2) $\Delta_{G_1 * \dots * G_n, n}(t) = \Delta_{G_1, 1}(t) \dots \Delta_{G_n, 1}(t)$.

ЛЕММА 9. Пусть G – C -группа типа M . Тогда при $i > 0$ F -многочлены Александра $\Delta_{G,i}(t)$ делятся на $(t-1)^{k-i}$, где k – число компонент связности графа Γ_M .

Назовем C -группу G связной группой, если ее F -многочлен Александра $\Delta_{G,1}(t) \neq 0$.

Пусть $\Gamma_M = \Gamma_{M_1} \cup \dots \cup \Gamma_{M_k}$ – разложение графа Γ_M на связные компоненты.

Пусть $I_{n, M_i} = \{j \in I_n | e_j \notin \Gamma_{M_i}\}$. Назовем группы

$$G_i = \langle x_1, \dots, x_n | \{r_\alpha(x), x_j\}, \alpha \in M, j \in I_{n, M_i} \rangle$$

неприводимыми компонентами C -группы G типа M . Легко видеть, что каждая неприводимая компонента является неприводимой C -группой.

2.5. Обозначим через $i: I_n^3 \rightarrow I_n^3$ инволюцию

$$i: (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2),$$

и пусть $M^* = i(M)$ для $M \subset I_n^3$.

Назовем C -копредставление типа M^* сопряженным C -копредставлению типа M .

ЛЕММА 10. G – C -группа типа M и G^* – C -группа типа M^* . Тогда $G = G^*$.

Доказательство. Действительно, если в группе

$$G = \langle x_1, \dots, x_n | \{r_\alpha(x)\}, \alpha \in M \rangle$$

вместо образующих $x_1, \dots, x_n$ взять образующие $y_1 = x_1^{-1}, \dots, y_n = x_n^{-1}$, то группа G будет иметь копредставление

$$G = \langle y_1, \dots, y_n | \{r_\alpha(y)\}, \alpha \in M^* \rangle.$$

Назовем множество M самосопряженным, если $M = M^*$. C -группа G называется самосопряженной, если G обладает C -копредставлением типа M с самосопряженным множеством M .

ЛЕММА 11. Пусть G – самосопряженная C -группа. Тогда F -многочлены Александера $\Delta_{G,k}(t)$ являются возвратными многочленами.

Доказательство. Для самосопряженной C -группы G в матрицу Александера $A(G)$ вместе со строкой

$$A_\alpha(t) = (0, \dots, 0, 1-t, 0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$$

входит строка

$$A_{i(\alpha)}(t) = (0, \dots, 0, 1-t, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0).$$

Эти строки связаны равенством

$$tA_\alpha(t^{-1}) = -A_{i(\alpha)}(t).$$

Следовательно, для каждого минора $\mathcal{M}$ матрицы $A(G)$ порядка $n-k$ найдется минор $i(\mathcal{M})$ этой матрицы того же порядка и такой, что

$$t^{n-k} \mathcal{M}(t^{-1}) = (-1)^{n-k} i(\mathcal{M}(t)).$$

Отсюда видно, что наибольший общий делитель миноров $\mathcal{M}(t)$ и $i(\mathcal{M}(t))$ является возвратным многочленом. Следовательно, наибольший общий делитель всех миноров $(n-k)$ -го порядка также является возвратным многочленом, как наибольший общий делитель возвратных многочленов.

2.6. Пусть $N' = [N, N]$ – коммутант группы $N = \text{Ker } F_*$, где $F_*: G \rightarrow F_1$ был определен в п. 2.3. Точная последовательность

$$1 \rightarrow N/N' \rightarrow G/N' \rightarrow F_1 \rightarrow 1$$

определяет действие (автоморфизм) образующей t свободной группы F_1 на абелевой группе N/N' и, тем самым, превращает N/N' в $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуль.

Пусть $(N/N')_{\text{Tor}} \subset N/N'$ – подгруппа элементов конечного порядка. Действие элемента t на N/N' оставляет инвариантной подгруппу $(N/N')_{\text{Tor}}$ и, следовательно, определяет действие t на

$$(N/N')_{\text{Free}} = (N/N') / (N/N')_{\text{Tor}}.$$

Это действие превращает $(N/N')_{\text{Free}}$ в $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуль. Изучим более подробно этот модуль.

Следуя [10], сопоставим C -группе G двумерный комплекс K с одной вершиной x_0 , одномерный остов которого есть букет ориентированных окружностей s_i , $1 \leq i \leq n$, взаимно однозначно соответствующих образующим C -копредставления группы G , а $K \setminus (\cup s_i) = \coprod_{\alpha \in M} \overset{\circ}{D}_\alpha$ – несвязное объединение открытых дисков. Каждый диск D_α подклеивается к букету $\vee s_i$ вдоль пути $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}^{-1} s_{\alpha_3}^{-1}$. Очевидно, $\pi_1(K, x_0) = G$.

Гомоморфизм $F_*: G \rightarrow F_1$ определяет бесконечное циклическое накрытие $f: \tilde{K} \rightarrow K$ с $\pi_1(\tilde{K}) = N$, и $H_1(\tilde{K}, \mathbb{Z}) = N/N'$. Группа F_1 действует на $\tilde{K}$.

Пусть $\tilde{K}_0 = f^{-1}(x_0)$, а $\tilde{K}_1$ – одномерный остов комплекса $\tilde{K}$. Рассмотрим точные последовательности гомоморфизмов групп гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(\tilde{K}, \tilde{K}_1) & \xrightarrow{\mu} & H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0) & \xrightarrow{\nu} & H_1(\tilde{K}, \tilde{K}_0) & \rightarrow & 0 \\ & & & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & H_1(\tilde{K}) & \rightarrow & H_1(\tilde{K}, \tilde{K}_0) & \xrightarrow{\partial} & H_0(\tilde{K}_0) \rightarrow H_0(\tilde{K}) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \\ & & N/N' & & & & \end{array} \quad (18)$$

Действие F_1 на $\tilde{K}$ превращает входящие в эти последовательности группы в $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модули. Зафиксируем одну из вершин $p_0 \in \tilde{K}_0$. Пусть $p_i = t^i p_0$ – результат действия элемента $t^i \in F_1$ на точку p_0 . Тогда $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ является свободным $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модулем с образующими $\bar{s}_i$ -путями, каждый из которых имеет начало в точке p_0 , а конец в точке p_1 , и накрывающими петли s_i . Результат действия t^i на образующую $\bar{s}_j$ есть путь, начинающийся в точке p_i и накрывающий петлю s_j .

Образующие свободного $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуля $H_2(\tilde{K}, \tilde{K}_1)$ – это диски $\bar{D}_\alpha$, подклеенные к одномерному остову вдоль путей, состоящих из: пути $\bar{s}_{\alpha_1}$, затем $t\bar{s}_{\alpha_2}$, затем $t\bar{s}_{\alpha_1}^{-1}$ и, наконец, $\bar{s}_{\alpha_3}^{-1}$. Легко проверить, что координаты в базисе $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n$ элементов $\mu(\bar{D}_\alpha) \in H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ суть строки A_α матрицы Александра $A(G)$.

Рассматривая нижнюю строку в (18), легко видеть, что

$$\partial(v(\bar{s}_i)) = (t-1)p_0$$

для каждой образующей z_i модуля $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$. Выберем в $H_1(\tilde{K}, \tilde{K}_0)$ новый базис $e_i = \bar{s}_i - \bar{s}_n$, $i = 1, \dots, n-1$, $e_n = \bar{s}_n$. Тогда $v(e_i) \in \text{Ker } \partial$ для $i = 1, \dots, n-1$. Поэтому мы можем отождествить $H_1(\tilde{K})$ с $v(H'_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0))$, где $H'_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ – подмодуль $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуля $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$, порожденный элементами $e_1, \dots, e_{n-1}$.

В базисе $e_1, \dots, e_n$ матрица из координат образов $\mu(\bar{D}_\alpha)$ есть матрица $\tilde{A}(G)$, полученная из $A(G)$ с помощью замены последнего столбца столбцом нулей. Следовательно, $H_1(\tilde{K})$ изоморфен фактормодулю свободного $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуля $H'_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ по подмодулю $H''_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$, порожденному строками матрицы $\tilde{A}(G)$.

Применяя доказательство теоремы 5 из [8, гл. XV] к конечно порожденному подмодулю $H''_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0) \otimes \mathbb{Q}$ свободного модуля $H'_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0) \otimes \mathbb{Q}$ над кольцом главных идеалов $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$, получаем, что в $H'_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0) \otimes \mathbb{Q}$ существуют базис $g_1, \dots, g_{n-1}$ и ненулевые элементы $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t) \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ такие, что

- i) элементы $\lambda_1(t)g_1, \dots, \lambda_r(t)g_r$ образуют базис в $H'_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0) \otimes \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$;
- ii) $\lambda_i(t) \mid \lambda_{i+1}(t)$ для $i = 1, \dots, r-1$;
- iii) модуль

$$(N/N') \otimes \mathbb{Q} = H_1(\tilde{K}_1, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t, t^{-1}] / (\lambda_1(t)) \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}[t, t^{-1}] / (\lambda_r(t)) \oplus \left(\mathbb{Q}[t, t^{-1}] \right)^{n-r-1} \quad (19)$$

Более того, многочлены Александера $\Delta_{k,Q}(t)$ – образующие наименьших главных идеалов $(\Delta_{k,Q}(t)) \supset E_k(G) \otimes \mathbb{Q}$ – суть

$$\begin{aligned} \Delta_{k,Q}(t) &\equiv 0 && \text{при } k < n-r, \\ \Delta_{k,Q}(t) &= \lambda_1(t) \dots \lambda_{n-k}(t) && \text{при } k \geq n-r \end{aligned}$$

и отличаются от $\Delta_{G,k}(t)$ только на обратимые в $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ элементы.

Умножая многочлены $\lambda_i(t)$ на обратимые в $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ элементы, мы можем считать, что

$$\begin{aligned} \Delta_{G,k}(t) &= \lambda_1(t) \dots \lambda_{n-k}(t) && \text{при } k \geq n-r, \\ \Delta_{G,k}(t) &\equiv 0 && \text{при } k < n-r. \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть теперь $(N/N') \otimes \mathbb{Q}$ есть конечно порожденный $\mathbb{Q}$ -модуль. Тогда $r = n-1$. Из разложения (19) легко получить, что $\Delta_{G,1}(t)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с характеристическим многочленом автоморфизма $h: (N/N') \otimes \mathbb{Q} \rightarrow (N/N') \otimes \mathbb{Q}$, определяемого действием t на $(N/N') \otimes \mathbb{Q}$, которое в силу вышеизложенного сводится к умножению на t в разложении (19).

Пусть, наконец, N/N' – конечно порожденный $\mathbb{Z}$ -модуль. Тогда выбор базиса в $(N/N')_{\text{Free}}$ определяет базис в $(N/N') \otimes \mathbb{Q}$. Матрица автоморфизма h в выбранном базисе является целочисленной, и h является автоморфизмом $(N/N')_{\text{Free}}$. Из вышеизложенного и из леммы 6 вытекает, что в этом случае $\Delta_{G,1}(t)$ совпадает с характеристическим многочленом автоморфизма h . В частности,

$$\Delta_{G,1}(0) = \det h = \pm 1.$$

Соберем полученные выше результаты в

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть G – C -группа и $N = \text{Ker} F_*$. Тогда

1) $(N/N') \otimes Q$ – конечно порожденный Q -модуль тогда и только тогда, когда $\Delta_{G,1}(t) \neq 0$.

2) Если $(N/N') \otimes Q$ – конечно порожденный Q -модуль, то $\Delta_{G,1}(t)$ совпадает с точностью до постоянного множителя с характеристическим многочленом действия образующей $t \in F_1$ на $(N/N') \otimes Q$.

3) Если N/N' – конечно порожденная группа, то $\Delta_{G,1}(t)$ совпадает с характеристическим многочленом действия образующей $t \in F_1$ на $(N/N')_{\text{Free}}$. В частности,

$$|\Delta_{G,1}(0)| = 1.$$

С л е д с т в и е . C -группа G является связной группой тогда и только тогда, когда $(N/N') \otimes Q$ – конечно порожденный Q -модуль.

§ 3. Доказательство теорем 5–10

Докажем сформулированные во введении теоремы 5–10.

3.1. Доказательство теоремы 5 вытекает из предложения 1 и следствия из теоремы 4.

3.2. Теорема 6 непосредственно следует из леммы 6, так как $\pi_1(C^\lambda D)$ является неприводимой C -группой в случае, когда D – неприводимая кривая.

3.3. Для доказательства теоремы 7 заметим, что если t_0 – корень многочлена Александра $\Delta_{G,1}(t)$ – является примитивным корнем из единицы степени p^n , где p – простое число, то t_0 является корнем неприводимого над $\mathbb{Z}$ многочлена

$$\lambda(t) = \left(t^{p^{n-1}}\right)^{p-1} + \left(t^{p^{n-1}}\right)^{p-2} + \dots + \left(t^{p^{n-1}}\right) + 1.$$

Следовательно, $\Delta_{G,1}(t)$ должен делиться на $\lambda(t)$, т.е. $\Delta_{G,1}(t) = \lambda(t)\varphi(t)$, где $\varphi(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Но тогда по теореме 6

$$\pm 1 = \Delta_{G,1}(1) = p\varphi(1),$$

что невозможно.

3.4. Из теоремы 7 вытекает, что корнями многочлена Александра $\Delta_{G,1}(t)$ не могут быть числа $t_0 = \pm 1$. Поэтому $\Delta_{G,1}(t)$ не имеет действительных корней. Следовательно, $\deg \Delta_{G,1}(t)$ – четное число. Поэтому справедлива теорема 8 и следствие 1, а также, учитывая предложение 1, отсюда вытекает следствие 2.

3.5. Как уже отмечалось во введении, теорема 9 следует из проведенного в [9] вычисления иррегулярности $q = \frac{1}{2} \dim H^1(\bar{Z}, C)$ для циклических накрытий плоскости $\mathbb{P}^2$, неразветвленных вне неприводимой кривой $\bar{D}$ и прямой L , трансверсально пересекающей кривую $\bar{D}$. Однако мы, по существу, повторим это вычисление в доказательстве теоремы 10.

3.6. Докажем теорему 10. Обозначим через $g: Z \rightarrow \mathbb{P}^2$ наше циклическое накрытие, $\deg(g) = n$. Пусть $D = C^2 \cap \bar{D}$, $X = C^\lambda D$ и $g^{-1}(X) = Z_n$. Тогда $g: Z_n \rightarrow X$ –

n -листное неразветвленное накрытие. Пусть $g_*: \pi_1(Z_n) \rightarrow \pi_1(X)$ – вложение фундаментальных групп, индуцированное накрытием $g: Z_n \rightarrow X$.

По теореме 1 из [7] фундаментальная группа $G = \pi_1(C^\lambda D)$ изоморфна прямому произведению групп $G_i = \pi_1(C^\lambda D_i)$, каждая из которых является неприводимой C -группой.

Очевидно, что $g_*(\pi_1(\widetilde{Z_n})) = \text{Ker } F_{n*}$, где F_{n*} – композиция эпиморфизмов $F_*: G \rightarrow F_1$ (рассмотренного в §2) и $(n): F_1 \rightarrow \mathbb{Z}/n$.

Докажем вначале, что $\dim H_1(Z_n, \mathbb{Q}) = k - 1$. Пусть $\tilde{K} \rightarrow K$ – двумерные комплексы, рассмотренные в п. 2.6. Точная последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow C_*(\tilde{K}) \xrightarrow{t-1} C_*(\tilde{K}) \rightarrow C_*(K) \rightarrow 0$$

влечет точную последовательность

$$\begin{aligned} \rightarrow H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{t-1} H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H_0(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{t-1} H_0(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \rightarrow \\ \rightarrow H_0(K, \mathbb{Q}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как $\pi_1(K) = \pi_1(X)$, то $H_1(K, \mathbb{Q}) \simeq H_1(X, \mathbb{Q})$. По лемме 4 $H_1(X, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^k$. А так как K – связный комплекс, то $H_0(K, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Группа $G = \pi_1(X)$ есть прямое произведение неприводимых C -групп. Поэтому $\Delta_{G,i}(t) = (t-1)^{k-i}$ при $1 \leq i \leq k$. Следовательно, из (20) получаем, что

$$H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathbb{Q}[t, t^{-1}] / (t-1). \quad (22)$$

Отсюда и из (21) следует, что

$$H_1(K, \mathbb{Q}) \simeq H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \oplus H_0(\tilde{K}, \mathbb{Q}).$$

Следовательно, $\dim H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) = k - 1$.

Пусть $K_n \rightarrow K$ – накрытие, соответствующее гомоморфизму $F_{n*}: \pi_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}/n$. Точная последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow C_*(\tilde{K}) \xrightarrow{t^n-1} C_*(\tilde{K}) \rightarrow C_*(K_n) \rightarrow 0$$

приводит к точной последовательности

$$\begin{aligned} \rightarrow H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{t^n-1} H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(K_n, \mathbb{Q}) \rightarrow \\ \rightarrow H_0(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{t^n-1} H_0(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_0(K_n, \mathbb{Q}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (22) следует, что $H_1(K_n, \mathbb{Q}) = H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \oplus H_0(\tilde{K}, \mathbb{Q})$. Следовательно, $\dim H_1(K_n, \mathbb{Q}) = \dim H_1(Z_n, \mathbb{Q}) = k$.

Пусть $\gamma_i \in C_1(C^\lambda D)$ – окружность малого радиуса, лежащая на комплексной прямой L_0 , с центром в одной из точек из $D_i \cap L_0$. Тогда $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ – базис в $H_1(C^\lambda D)$. Очевидно, $n\gamma_1, \dots, n\gamma_k \in \text{Im}(g_*: H_1(Z_n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(C^2 \setminus D, \mathbb{Z}))$. Следовательно, $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k \in H_1(Z_n)$ такие, что $g_*(\tilde{\gamma}_i) = n\gamma_i$, являются независимыми циклами в $H_1(Z_n)$. Но $\dim H_1(Z_n, \mathbb{Q}) = k$, поэтому $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k$ – базис в $H_1(Z_n, \mathbb{Q})$.

Вложение $i: Z_n \hookrightarrow Z$ определяет эпиморфизм

$$i_*: H_1(Z_n, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(Z, \mathbb{Q}).$$

Очевидно, что $i_*(\tilde{\gamma}_i) = 0$. Следовательно, $\dim H_1(Z, \mathbb{Q}) = 0$. Теорема 10 доказана.

Список литературы

1. *A'Campo N.* La fonction zeta d'une monodromie // *Commentarii Mathematici Helvetici*. 1979. V. 54, № 2: P. 318–327.
2. *Esnaault H.* Fibre de Milnor d'un cone sur une courbe plane singulière // *Invent. Math.* 1982. V. 68. P. 477–496.
3. *Kohno T.* An algebraic computation of the Alexander polynomial of plane algebraic curve // *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math.* 1983. V. 59. P. 94–97.
4. Коллинз Д., Цишанг Х. Комбинаторная теория групп и фундаментальные группы // *Итоги науки и техники. Сер. современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. 1990. Т. 58. С. 5–190.
5. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.
6. Куликов Вик.С. Фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1991. Т. 55, № 2. С. 434–455.
7. Куликов Вик.С. О структуре фундаментальной группы дополнения к алгебраическим кривым в $\mathbb{C}^2$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1992. Т. 56, № 2. С. 469–481.
8. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
9. *Libgober A.* Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes // *Duke Math. J.* 1982. V. 49. P. 833–851.
10. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
11. *Nori M.* Zariski's conjecture and related problems // *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Ser. 4.* 1983. V. 16. P. 305–344.
12. *Randell R.* Milnor fibres and the Alexander polynomials of plane algebraic curves // *Proc. Sympos. Pure Math.* V. 40. Part 2. Amer. Math. Soc. Providence. R. I. 1983. P. 415–420.
13. *Zariski O.* Algebraic Surfaces. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1971.
14. *Zariski O.* On the linear connection index of the algebraic surface $z^n = f(x, y)$ // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1929. V.15.

Поступило в редакцию
24.III.1992