УДК 513.83

© 1994 В.С. КУЛИКОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ C-ГРУПП

В статье доказывается, что для любой C-группы G и для любого $n \geqslant 2$ существует такое неособое n-мерное компактное ориентируемое многообразие без края $X_n \subset S^{n+2}$, что $\pi_1(S^{n+2} \setminus X_n) \simeq G$. Кроме того, дано обобщение на n-мерный случай известного представления римановых поверхностей ($n = 2$) в виде конечного числа склеенных друг с другом экземпляров римановой сферы с разрезами.

0. В [4] были исследованы некоторые свойства многочленов Александера групп, названных в [4] *C-группами* (см. определение C-группы в п.2).

Класс C-групп естественным образом содержит группы узлов и зацеплений (с копредставлением Виртингера), а также класс фундаментальных групп дополнений к алгебраическим кривым в $\mathbf{C}^2$ (с копредставлением из [3]).

Обозначим через $\mathcal{C}$ класс C-групп, и пусть $\mathcal{L}_n$ – класс групп n-мерных узлов и зацеплений, $\mathcal{A}$ – класс фундаментальных групп дополнений к алгебраическим кривым в $\mathbf{C}^2$, $\mathcal{F}_n$ – класс фундаментальных групп дополнений к неособым n-мерным компактным ориентируемым многообразиям без края X_n в сфере S^{n+2} ($\mathcal{F}_1 = \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ при $n > 1$). В [4] было показано, что

$$\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_1 \not\subseteq \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{C}.$$

В. п. 5 будет приведен пример такой неприводимой C-группы G, что G не является группой n-мерного узла для любого n, т.е. G не может быть фундаментальной группой дополнения к n-мерной сфере S^n в S^{n+2}.

Основным результатом данной статьи[1] является следующая

ТЕОРЕМА. *Класс C-групп совпадает (естественным образом) с классом фундаментальных групп дополнений к неособым n-мерным компактным ориентируемым многообразиям без края X_n, $n > 1$, в сфере S^{n+2}, т.е. $\mathcal{C} \cong \mathcal{F}_n$ при $n > 1$.*

Пусть $F\colon Y_{n+2} \to S^{n+2}$ – d-листное накрытие, разветвленное над неособым замкнутым компактным ориентируемым многообразием $X \subset S^{n+2}$, $\dim X = n$. Как хорошо известно, отображение F определяет и определяется гомоморфизмом $F_*\colon \pi_1(S^{n+2} \setminus X) \to S_d$, где S_d – симметрическая группа.

В п. 7 приведена конструкция, позволяющая по гомоморфизму F_* восстановить Y_{n+2} в виде d экземпляров сферы S^{n+2} со "стандартными разрезами", склеенных друг с другом вдоль этих разрезов. Это представление является обобщением известного представления римановых поверхностей в виде склеенных друг с другом нескольких экземпляров римановой сферы с разрезами вдоль путей, соединяющих точки ветвления.

[1] Автор выражает свою признательность Математическому институту им. Макса Планка (Бонн), во время пребывания в котором была написана данная статья.

1.1. Рассмотрим вначале случай $\dim X = 2$. Пусть $X \subset S^4$ – гладкая ориентируемая компактная риманова поверхность. Выберем точку $\infty \in S^4 \setminus X$ и обозначим через $\mathbf{R}^4 = S^4 \setminus \{\infty\}$ дополнение к ∞ в S^4. Очевидно, что

$$\pi_1(S^4 \setminus X) \simeq \pi_1(\mathbf{R}^4 \setminus X).$$

Для доказательства теоремы нам понадобится копредставление группы $\pi_1(\mathbf{R}^4 \setminus X)$, аналогичное копредставлению Виртингера групп узлов. Опишем кратко это копредставление. Для этого выберем точку $o \in \mathbf{R}^4 \setminus X$. Пусть $K \subset \mathbf{R}^4$ – конус над X с вершиной в o. Конус K является (особой) гиперповерхностью, $\dim K = 3$. Обозначим через $\operatorname{Sing} K$ множество особых точек конуса K, и пусть $K(2)$ – двойное множество конуса K, т.е. $K(2)$ – подмножество в $\operatorname{Sing} K$, состоящее из точек $x \in K(2)$, в которых K локально является объединением двух неособых гиперповерхностей, пересекающихся трансверсально в точке x.

Выберем $o \in \mathbf{R}^4$ так, что o и X находятся в общем положении. Тогда $\operatorname{Sing} K \setminus K(2)$ есть объединение конечного числа прямых $\{L_1, ..., L_k\}$, проходящих через o. Более того, мы можем предполагать, что выполнены следующие условия:

(i) если L_i касается X в точке x, то $L_i \cap X = \{x\}$;

(ii) если L_i пересекается с X в более чем двух различных точках, тогда $L_i \cap X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и касательные в этих точках пространства $T_{x_1}X$, $T_{x_2}X$, $T_{x_3}X$ находятся в общем положении.

1.2. Выберем систему координат в $\mathbf{R}^4$ так, что начало координат этой системы совпадает с выбранной выше точкой $o \in \mathbf{R}^4$. Обозначим через l_x луч, начинающийся в точке o и проходящий через точку x.

Мы скажем, что точка $x \in X (x = (x_1, ..., x_4))$ является *невидимой*, если существует такое $t \in \mathbf{R}$, $0 < t < 1$, что точка $tx = (tx_1, ..., tx_4)$ также принадлежит X.

Обозначим через IX замыкание множества невидимых точек. Множество

$$SX = \{x \in X \mid tx \in X \text{ для некоторого } t > 1\}$$

называется *экраном*.

Поверхность X делит K на две части. Пусть

$$EX = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid tx \in X \text{ для некоторого } t,\ 0 < t < 1\}$$

– та часть множества $K \setminus X$, в которой не содержится начало координат o. Назовем EX *тенью* от поверхности X (или внешней частью конуса K).

Пусть $X \setminus IX = X_1 \cup ... \cup X_s$ – разложение на компоненты связности. Обозначим через EX_i тень от X_i и через EIX – тень от множества невидимых точек. Гиперповерхность $K_i = EX_i \setminus EIX$ называется *стенкой*.

1.3. Выберем (и зафиксируем) ориентации на X и на $\mathbf{R}^4$. Ориентация на X индуцирует ориентацию на каждой стенке K_i, так как

$$EX_i \simeq X_i \times \{t \in \mathbf{R} \mid 0 < t < 1\}.$$

Выбор ориентаций на X и $\mathbf{R}^4$ позволяет рассматривать каждую K_i как двустороннюю гиперповерхность, стороны которой окрашены: одна сторона окрашена в "положительный" цвет, а другая – в "отрицательный".

1.4. Рассмотрим точку $z \in EX \cap K(2)$. В маленькой окрестности U_z точки z имеем

$$K \cap U_z = K' \cup K'',$$

где K' и K'' – неособые гиперповерхности, пересекающиеся трансверсально вдоль неособой поверхности $K' \cap K''$.

Луч l_z пересекает X в двух точках a и b, где $a \in SX$ и $b \in IX$. В окрестности точек a и b поверхность X есть несвязное объединение двух связных компонент X' и X'' ($a \in X'$ и $b \in X''$) так, что K' – тень от X', а K'' – тень от X''.

В окрестности U_z пересечение $K' \cap K''$ делит каждую K' и K'' на две части: K_1', K_2' и K_1'', K_2'' соответственно. Множества K_1'' и K_2'' содержатся в некоторых стенках, скажем в K_q и K_r (возможно, $K_q = K_r$). Аналогично, в U_z множество K' делится пересечением $K' \cap K''$ на K_1' и K_2'. Но легко видеть, что K_1' и K_2' принадлежат одной и той же стенке. Обозначим ее через K_p. Назовем стенки K_p, K_q, K_r *смежными стенками* в точке z.

Гиперповерхности K' и K'' делят U_z на четыре части E_1, E_2, E_3, E_4. Пусть E_1 – та часть, внутренняя граница которой окрашена в положительный цвет.

Скажем, что тройка K_p, K_q, K_r является *правильно упорядоченной*, если граница множества E_1 состоит из K_p и K_q (а не из K_p и K_r). Конечно, возможно, что стенки K_p, K_q, K_r являются также смежными в некоторой другой точке z_1, и для этой точки уже тройка K_p, K_r, K_q является правильно упорядоченной.

1.5. Сопоставим поверхности X группу Γ_X. Образующими группы Γ_X являются стенки K_i. Образующие K_i в Γ_X связаны соотношениями

$$K_q K_p = K_p K_r \tag{1}$$

для каждой $z \in EX \cap K(2)$, где K_p, K_q, K_r – правильно упорядоченные смежные в точке z стенки.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $X \subset \mathbf{R}^4$ – гладкая ориентируемая компактная риманова поверхность. Тогда*

$$\pi_1(\mathbf{R}^4 \setminus X, o) \simeq \Gamma_X.$$

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 3.1 в [3].

Замечание 1. Легко видеть, что Γ_X является конечно определенной группой, так как X – компактная поверхность.

Замечание 2. Очевидно, описанная выше конструкция применима в любой размерности и дает копредставление группы $\pi_1(\mathbf{R}^{n+2} \setminus X_n, o)$ для любого неособого замкнутого ориентируемого многообразия без края X_n в $\mathbf{R}^{n+2}$.

2.1. Пусть $I_q = \{1, 2, \ldots, s\}$ – отрезок натурального ряда $\mathbf{N}$, $M \subset I_s^3 = I_s \times I_s \times I_s$ – некоторое подмножество и $|M| = \# M$ – число точек множества M.

Определение. Группа G называется *C-группой типа M*, если G обладает следующим копредставлением:

$$G = \langle x_1, \ldots, x_s \mid \{R_\alpha(x)\}_{\alpha \in M} \rangle, \tag{2}$$

где для $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ соотношение

$$R_\alpha(x) = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} x_{\alpha_1}^{-1} x_{\alpha_3}^{-1}$$

есть сопряжение (буква "C" в слове "C-группа" – первая буква в слове "сопряжение").

Гомоморфизм $f\colon G_1 \to G_2$ является гомоморфизмом C-групп, если для каждой образующей x_i C-группы G_1 ее образ $f(x_i)$ сопряжен с некоторой образующей C-группы G_2.

Замечание 3. Если мы добавим к образующим C-группы G, заданной копредставлением (2), еще одну образующую (обозначим ее через y) и еще одно соотношение $x_i y x_i^{-1} x_j^{-1}$, то мы получим группу, изоморфную (как C-группы) группе G.

2.2. Каждому C-копредставлению типа M мы можем сопоставить ориентированный граф Γ_M с вершинами $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_s$ и ребрами $e_\alpha, \alpha \in M$. Ребро e_α соединяет вершину υ_{α_2} (начало ребра) с υ_{α_3} (конец ребра), где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

ЛЕММА 1 [4]. *Пусть G – C-группа типа M и $G' = [G, G]$ – ее коммутатор. Тогда $G/G' = \mathbf{Z}^n$, где n – число связных компонент графа Γ_M.*

C-группа G типа M называется *неприводимой* C-группой, если ее граф Γ_M связен.

Пусть $\Gamma_M = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$ – разложение на связные компоненты. Положим $I(j) = [i \in I_s | \upsilon_i \notin \Gamma_j\}$ для каждой Γ_j. Группа

$$G_j = \left\langle x_1, \ldots, x_s | \{R_\alpha\}_{\alpha \in M} \cup \{x_i\}_{i \in I(j)} \right\rangle$$

называется *неприводимой* компонентой C-группы G типа M, и мы будем говорить, что C-группа G составлена из n неприводимых компонент G_j.

З а м е ч а н и е 4. Из теоремы 1 следует, что для каждой гладкой ориентируемой компактной римановой поверхности $X \subset \mathbf{R}^4$ фундаментальная группа $\pi_1(\mathbf{R}^4 \setminus X)$ является C-группой, составленной из n неприводимых компонент, где n – число связных компонент поверхности X.

2.3. Обозначим через i: $I_s^3 \to I_s^3$ инволюцию, заданную

$$i: (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mapsto (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2),$$

и пусть $M^* = i(M)$ – образ множества $M \subset I_s^3$.

C-группа G^* типа M^* называется *сопряженной* C-группе G типа M.

ЛЕММА 2. *Пусть G и G^* – сопряженные C-группы. Тогда G и G^* являются изморфными группами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если в копредставлении группы

$$G = \langle x_1, \ldots, x_s | \{R_\alpha(x)\}_{\alpha \in M} \rangle$$

мы возьмем образующие $y_1 = x_1^{-1}, \ldots, y_s = x_s^{-1}$ вместо образующих $x_1, \ldots, x_s$, то группа G будет иметь следующее копредставление:

$$G = \left\langle y_1, \ldots, y_s | \{R_\alpha(y)\}_{\alpha \in M^*} \right\rangle.$$

2.4. Пусть G – C-группа. Обозначим через $\mathcal{M}_G$ класс всех таких множеств $M_i \subset I_{s_i}^3$, что C-группы G_{M_i} типов M_i изоморфны группе G как C-группы. Назовем число

$$r(G) = \min_{M \in \mathcal{M}_G} \operatorname{rk} \pi_1(\Gamma_M)$$

рангом C-группы G, где $\operatorname{rk} \pi_1(\Gamma_M)$ – ранг свободной группы $\pi_1(\Gamma_M)$.

3.1. Скажем, что вложение $X \subset \mathbf{R}^4$ является вложением *простейшего типа,* если для X существует такая проекция p: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ с центром в точке $o \in \mathbf{R}^4$, что образ $p(X)$ удовлетворяет следующему условию:

(s) Локально в каждой точке $z \in p(X)$ поверхность $p(X)$ либо является гладкой, либо – объединением двух гладких поверхностей, пересекающихся друг с другом трансверсально.

ТЕОРЕМА 2. *Для каждой C-группы G существует такое вложение простейшего типа гладкой ориентируемой компактной римановой поверхности $X \subset \mathbf{R}^4$, что*

$$\pi_1(\mathbf{R}^4 \setminus X) \simeq G.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем копредставление

$$G = \langle x_1, \ldots, x_s | \{R_\alpha(x)\}_{\alpha \in M} \rangle$$

C-группы G.

Построим вначале образ $p(X)$ искомой поверхности X при проекции $p: \mathbf{R}^4 \to S^3 =$

$=\mathbf{R}^3\cup\{\infty\}$ с центром в точке o. Поверхность $p(X)\subset\mathbf{R}^3$ будет склеена из стандартных частей. Опишем эти стандартные части.

Для этого обозначим через $n(i)$ число ребер графа Γ_M с началом, либо с концом в вершине υ_i, $1\leqslant i\leqslant s$. Пусть $r(i)$ – число соотношений R_α с $\alpha=(i,\cdot,\cdot)$. Положим $n_i=n(i)+r(i)$. Стандартная часть

$$A_i(n_i)=S_i^2\setminus\bigcup\nolimits_{i\leqslant j\leqslant n_i}\Delta_{i,j},\quad 1\leqslant i\leqslant s,$$

– это сфера $S_i^2\subset\mathbf{R}^3$, из которой вырезано n_i попарно непересекающихся дисков $\Delta_{i,j}\subset S_i^2$. Кроме того, мы будем считать, что $S_i^2\cap S_j^2=\varnothing$ при $i\neq j$. Обозначим через $z_{i,j}$ центр диска $\Delta_{i,j}$.

Кроме стандартных частей $A_i(n_i)$ мы будем использовать для построения $p(S)$ стандартные части C_α, $\alpha\in M$. Каждая C_α есть такое объединение

$$C_\alpha=C_{\alpha,1}\cup C_{\alpha,2}\cup\Delta_\alpha,$$

что существует окрестность U_α множества C_α, диффеоморфная (с сохранением ориентации) кубу

$$I^3=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3|\;|x_i|\leqslant 1 \text{ для } i=1,2,3\}$$

и такая, что C_α диффеоморфно (при этом диффеоморфизме) объединению $C_1\cup C_2\cup\Delta$, где

$$C_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in I^3|x_1^2+x_2^2=R^2, R\ll 1\},$$

$$C_2=\{(x_1,x_2,x_3)\in I^3|x_2^2+x_3^2=r^2, r\ll R\},$$

$$\Delta=\{(x_1,x_2,x_3)\in I^3|x_1^2+x_2^2\leqslant R^2,\ x_3=-1\}.$$

Положим $y_1=(0,0,1)$, $y_2=(-1,0,0)$, $y_3=(1,\,0,\,0)$, и пусть $y_{i,\alpha}$, $i=1,2,3$, – соответствующие точкам y_i точки из U_α.

Мы будем предполагать, что $C_{\alpha'}\cap C_{\alpha''}=\varnothing$ для $\alpha'\neq\alpha''$.

Для каждого $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ соединим гладким путем $\gamma_{1,\alpha}$ точку $y_{1,\alpha}$ с незанятой (на предыдущих шагах построения поверхности $p(S)$) точкой z_{α_1,j_1}. Мы будем предполагать, что путь $\gamma_{1,\alpha}$ не пересекается со стандартными частями $A_i(n_i)$ и C_α. Аналогично, соединим гладкими путями $\gamma_{2,\alpha}$ и $\gamma_{3,\alpha}$ точки $y_{2,\alpha}$ и $y_{3,\alpha}$ с незанятыми на предыдущих шагах построения точками z_{α_2,j_2} и z_{α_3,j_3}.

Обозначим через $B_{i,\alpha}$ границы трубчатых окрестностей путей $\gamma_{i,\alpha}$ соответственно. Каждая $B_{i,\alpha}$ диффеоморфна произведению $S^1\times[0,\,1]$. Мы можем выбрать эти окрестности так, что одна из связных компонент границы множества $B_{i,\alpha}$ совпадает с одной из компонент связности границы множества $A_{\alpha_i}(n_i)$, а другая компонента границы совпадает с одной из компонент границы множества C_α. Склеим каждую $B_{i,\alpha}$ с $A_{\alpha_i}(n_i)$ и C_α вдоль этих границ (см. рис. 1). После этих склеек мы получим поверхность $p(X)$, вложенную в $\mathbf{R}^3$.

Теперь мы построим искомую поверхность X. Для этого мы будем считать, что рассмотренная выше $\mathbf{R}^3$ задается в $\mathbf{R}^4$ уравнением $x_4=0$, и пусть точка $o=(o_1,\ldots,o_4)$ (центр проекции p) имеет координату $o_4\gg 0$. Мы будем говорить, что точка o лежит выше гиперповерхности $\mathbf{R}^3$.

Для каждой стандартной части C_α пересечение $C_{\alpha,1}\cap C_{\alpha,2}$ является несвязным объединением двух окружностей $\nu_{\alpha,+}$ и $\nu_{\alpha,-}$, где $\nu_{\alpha,+}$ соответствует окружности

$$\nu_+=\{x_1^2+x_2^2=R^2,\ x_2^2+x_3^2=r^2,\ x_1>0\}.$$

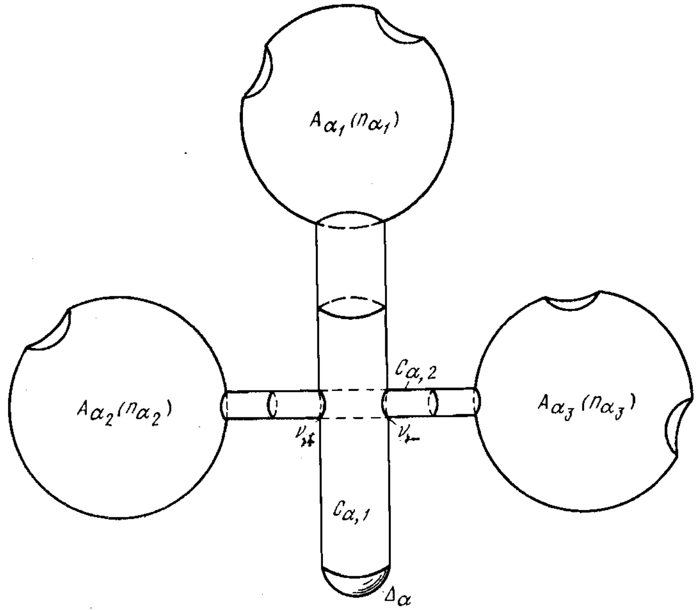

Рис. 1

Выберем открытые в $\mathbf{R}^4$ окрестности $U_{\alpha,+}$ и $U_{\alpha,-}$ окружностей $\nu_{\alpha,+}$ и $\nu_{\alpha,-}$, $U_{\alpha,+} \cap U_{\alpha,-} = \varnothing$, и пусть $V_{\alpha,+}$ и $V_{\alpha,-}$ – компактно вложенные соответственно в $U_{\alpha,+}$ и $U_{\alpha,-}$ окрестности окружностей $\nu_{\alpha,+}$ и $\nu_{\alpha,-}$.

Подняв чуть-чуть вверх пересечение $C_{\alpha,2} \cap V_{\alpha,+}$, мы можем склеить поднятую поверхность с $C_{\alpha,2} \setminus U_{\alpha,+}$, используя сглаживающие функции. Аналогично, мы можем опустить чуть-чуть пересечение $C_{\alpha,2} \cap V_{\alpha,-}$ и склеить опущенную поверхность с $C_{\alpha,2} \setminus U_{\alpha,-}$. В итоге мы получим нужную нам поверхность X.

Для этой поверхности окружности $\nu_{\alpha,+} \subset C_{\alpha,1}$ и опущенные вниз окружности $\nu_{\alpha,-}$ (принадлежащие опущенным вниз $C_{\alpha,2}$) составляют множество невидимых точек. Окружность $\nu_{\alpha,+}$ делит $C_{\alpha,1}$ на две части. Одна из них гомеоморфна диску. Обозначим этот диск через y_α.

Отождествим каждую стандартную часть $A_i(n_i)$ с образующей x_i C-группы G. Тогда $X \setminus IX$ является несвязным объединением связных компонент $x_i, i = 1, \ldots, s$, и y_α, $\alpha \in M$.

Соотношения в $\pi_1(\mathbf{R}^4 \setminus X, o)$ между x-ми суть либо $\{R_\alpha(x)\}_{\alpha \in M}$, либо $\{R_\alpha(x)\}_{\alpha \in M^*}$ (это зависит от выбора ориентаций на $\mathbf{R}^4$ и X). Если это необходимо, мы можем изменить ориентацию на X для того, чтобы получить соотношения $\{R_\alpha(x)\}_{\alpha \in M}$.

Соотношения в $\pi_1(\mathbf{R}^4 \setminus X, o)$ между x-ми и y_α-ми суть присоединенные соотношения из замечания 3. Таким образом, $\pi_1(\mathbf{R}^4 \setminus X, o) \simeq G$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Легко видеть, что геометрический род $g(X)$ поверхности X, построенной при доказательстве теоремы 2, равен

$$g(X) = \operatorname{rk} \pi_1(\Gamma_M).$$

4. П р и м е р. Простейшая (нетривиальная) неприводимая C-группа должна иметь по крайней мере три образующие и два соотношения. Существуют ровно две такие C-группы: G_1 и G_2 типов $M_1 \subset I_3^3$ и $M_2 \subset I_3^3$ соответственно, $\# M_1 = \# M_2 = 2$. Графы

Рис. 2

Γ_{M_1} и Γ_{M_2} этих групп представлены на рис. 2 (ребра $e_\alpha, \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, обозначены на этом рисунке своей первой координатой α_1, а вершины υ_{α_2} и υ_{α_3} обозначены числами α_2 и α_3 соответственно). Группа G_1 – это группа трехлистника.

Группы G_1 и G_2 не изоморфны друг другу, так как многочлен Александера $\Delta_{G_1}(t)$ группы G_1 равен $\Delta_{G_1}(t)=t^2-t+1$, а многочлен Александера $\Delta_{G_2}(t)$ группы G_2 равен $\Delta_{G_2}(t)=t-2$.

Согласно теореме 2 группа G_1 может быть реализована как фундаментальная группа дополнения к некоторой поверхности X_1 в $\mathbf{R}^4$. Образ $p(X)$ этой поверхности изображен на рис. 3.

Чтобы получить X_1 из $p(X)$, мы должны поднять $C_{1,2}$ и $C_{2,3}$ в окрестности окружностей $\nu_{3,+}$ и $\nu_{1,+}$ соответственно и, кроме того, опустить $C_{1,2}$ и $C_{2,3}$ в окрестности окружностей $\nu_{3,-}$ и $\nu_{1,-}$.

Группа G_2 также может быть реализована как фундаментальная группа дополнения к некоторой поверхности X_2 в $\mathbf{R}^4$. Чтобы получить X_2, мы можем использовать тот же образ $p(X)$, который мы уже использовали для построения поверхности X_1. Надо только изменить направления поднятий. Для построения X_2 мы должны поднять $C_{1,2}$ и $C_{2,3}$ в окрестности окружностей $\nu_{3,+}$ и $\nu_{1,-}$ и опустить $C_{1,2}$ и $C_{2,3}$ в окрестности окружностей $\nu_{3,-}$ и $\nu_{1,+}$ соответственно.

5. Применим стандартную конструкцию, предложенную Артином [1] (см. также [6]), позволяющую для данного многообразия X_n в $\mathbf{R}^{n+2}$ построить многообразие вращения $\tilde{X}_{n+1}$ в $\mathbf{R}^{n+3}$ такое, что

$$\pi_1(\mathbf{R}^{n+2}\setminus X_n)\simeq\pi_1(\mathbf{R}^{n+3}\setminus \tilde{X}_{n+1}).$$

Отсюда и из теорем 1 и 2 получаем сформулированную во введении основную теорему.

6. Зафиксируем неприводимую C-группу G. Обозначим через X_G множество гладких связных компактных ориентируемых римановых поверхностей $X\subset\mathbf{R}^4$ таких, что $\pi_1(\mathbf{R}^4\setminus X)$ изоморфна группе G как C-группа. Целое неотрицательное число

$$g(G)=\min_{X\in X_G} g(X)$$

называется *родом* неприводимой C-группы G, где $g(X)$ – геометрический род римановой поверхности X.

Обозначим через $X_{s,G}$ множество гладких связных компактных ориентируемых римановых поверхностей X с простейшим вложением $X\subset\mathbf{R}^4$ таких, что $\pi_1(\mathbf{R}^4\setminus X)$ изоморфна группе G как C-группа. Назовем целое неотрицательное число

$$g_s(G)=\min_{X\in X_{s,G}} g(X)$$

s-родом неприводимой C-группы G.

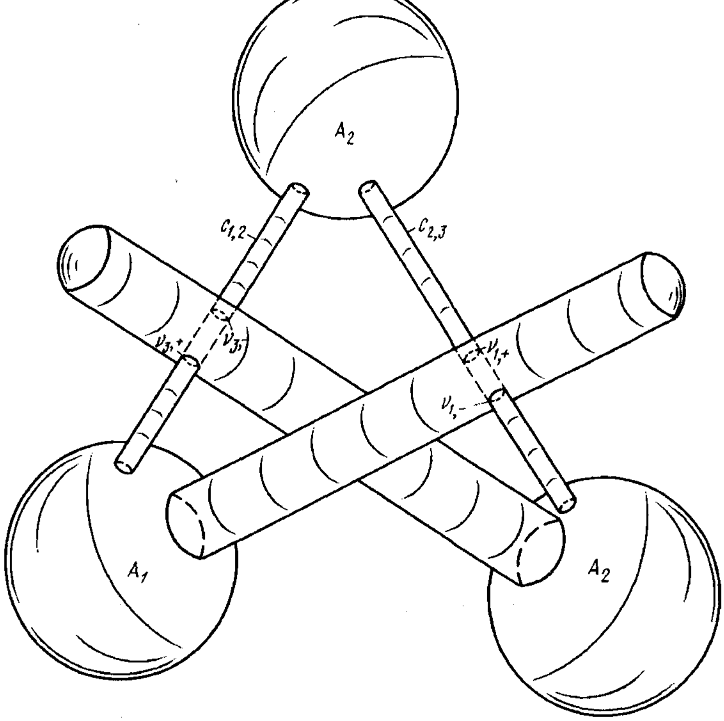

Рис. 3

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G – неприводимая C-группа. Тогда*
$r(G) = g_s(G)$.

Доказательство следует из замечания 4.

С л е д с т в и е . *Пусть G – неприводимая G-группа. Тогда*
$g(G) \leqslant r(G)$.

П р и м е р (С-группы рода больше нуля). Пусть B_k – группа кос из k нитей. Как известно, группа B_k имеет следующее стандартное копредставление: B_k порождена элементами $x_1, ..., x_k$, соотношения между которыми суть

$$x_i x_j = x_j x_i \text{ при } |i-j| \geqslant 2, \tag{3}$$

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}. \tag{4}$$

Легко видеть, что соотношения (4) между порождающими элементами в B_k могут быть заменены на соотношения сопряжения

$$x_i^{-1} x_{i+1} x_i = y_i, \quad y_i^{-1} x_i y_i = x_{i+1},$$

если к множеству порождающих элементов $x_1, ..., x_k$ мы добавим элементы $y_1, ..., y_{k-1}$. Следовательно, группы кос B_k являются неприводимыми C-группами. Покажем, что при $k \geqslant 4$ группа кос B_k имеет род больше нуля, более того, для любого n группа B_k не может быть реализована как группа n-мерного узла. Действительно, согласно [2] необходимым условием того, чтобы C-группа G была группой n-мерного узла, является следующее условие: $H_2(G, \mathbf{Z}) = 0$. Но, как известно [7], $H_2(B_k, \mathbf{Z}) \neq 0$ для группы кос B_k при $k \geqslant 4$.

7. Пусть $F\colon Y_{n+2} \to S^{n+2}$ – d-листное накрытие, разветвленное над неособым замкнутым компактным ориентируемым многообразием $X \subset S^{n+2}$, $\dim X = n$, т.е. Y_{n+2} – неособое связное замкнутое компактное ориентируемое многообразие и F – непрерывное отображение такое, что

1) для любой точки $x \in S^{n+2}$ прообраз $F^{-1}(x)$ состоит из конечного числа точек;

2) $F\colon Y_{n+2} \setminus F^{-1}(X) \to S^{n+2} \setminus X$ является топологическим d-листным накрытием.

Как хорошо известно, отображение F определяет и определяется гомоморфизмом $F_*\colon \pi_1(S^{n+2} \setminus X) \to S_d$, где S_d – симметрическая группа.

Ниже будет показано, что копредставление, описанное в п. 1, и гомоморфизм F_* позволяют представить Y_{n+2} в виде d экземпляров сферы S^{n+2} со "стандартными разрезами", склеенных друг с другом вдоль этих разрезов.

Как и в п.1, представим сферу S^{n+2} в виде $S^{n+2} = \mathbf{R}^{n+2} \cup \{\infty\}$. Обозначим через C пространство $\mathbf{R}^{n+2}$, разрезанное вдоль тени EX, и назовем его *камерой*. Вне коразмерности 2 камера C является $(n+2)$-мерным многообразием с границей. Граница ∂C есть замыкание объединения стенок:

$$\partial C = \cup\overline{\left(K_i^+ \cup K_i^-\right)},$$

где для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, $(n+1)$-мерные многообразия K_i^+ и K_i^- взаимно однозначно соответствуют стенкам K_i (K_i^+ – одна из полученных после разреза вдоль K_i стенок, внутренняя сторона которой (по отношению к C) окрашена в положительный цвет). Положим $C_0 = C \setminus \partial C$.

Легко видеть, что если задано d-листное накрытие $F\colon Y_{n+2} \to S^{n+2}$, разветвленное над X, то

$$F^{-1}(C_0) = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant d} C_{0j}$$

является несвязным объединением d многообразий C_{0j}, гомеоморфных многообразию C_0. Многообразия C_{0j} подклеены друг к другу вдоль прообразов стенок K_i.

Обратно, пусть задан гомоморфизм

$$F_*\colon \pi_1(S^{n+2} \setminus X) \to S_d.$$

Для того чтобы восстановить многообразие Y_{n+2}, возьмем d экземпляров $C_1,\dots,C_d$ камеры C и обозначим через $K_{i,j}^{\pm} \subset C_j$ стенки в C_j, соответствующие стенке $K_i^{\pm} \subset C$. Мы должны для каждой камеры C_j и каждой стенки $K_{i,j}^+$ указать правило, по которому мы будем выбирать камеру C_l, которая должна быть склеена с C_j вдоль стенок $K_{i,j}^+$ и $K_{i,l}^-$ соответственно. Для этого отождествим множество $\{C_1,\dots, C_d\}$ с множеством, на котором действует группа S_d. Кроме того, отождествим стенки K_i с образующими группы $\pi_1(S^{n+2} \setminus X)$.

Правило подклейки камер C_j друг к другу вдоль стенок состоит в следующем: камера C_j склеивается с камерой $C_l = F_*(K_i)(C_j)$ вдоль стенок $K_{i,j}^+ \subset C_j$ и $K_{i,l}^- \subset C_l$.

Список литературы

1. *Artin E.* Zur Isotopic zweidimensioaler Flachen in R_4 // Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg. 1926. V. 4. P. 174–177.
2. *Kervaire M.* On higher dimentional knots // Differential and combinatorial Topology (S. Cairn edit). Princeton Univ. Press. 1965. P. 105–120.

3. *Куликов В.С.* Фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в $\mathbf{C}^n$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, № 2. С. 434–455.
4. *Куликов В.С.* Многочлены Александера плоских алгебраических кривых // Изв. АН. Сер. матем. 1993. Т. 57, № 1. С. 76–101.
5. *Levin J.* Some results on higher dimensional knot groups // Lect. Notes in Math. 1978. V. 685. P. 243–270.
6. *Zeeman E.C.* Linking spheres // Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg. 1960. V. 24. P. 149–153.
7. *Арнольд В.И.* О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций // Тр. Моск. матем. об-ва. 1970. Т. 21. С. 27–46.

Поступило в редакцию
24.VI.1993

МИИТ,
ул. Образцова 15,
101475 Москва А-55