

УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов

О плоских алгебраических кривых положительной размерности Альбанезе

Введено понятие размерности Альбанезе плоской алгебраической кривой как максимум размерностей образов отображений Альбанезе циклических накрытий плоскости, разветвленных вдоль этой кривой. В терминах уравнения кривой найдено необходимое условие для того, чтобы размерность Альбанезе неприводимой кривой была равна единице. Доказано, что это условие является также достаточным для общей кривой. Полностью описано множество многочленов Александра неприводимых плоских кривых, имеющих равную единице размерность Альбанезе. Также полностью описаны образы отображений Альбанезе циклических накрытий плоскости, разветвленных вдоль таких кривых.

Библиография: 6 наименований.

Введение

Пусть $D \subset \mathbb{C}^2$ – неприводимая комплексная алгебраическая кривая, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ – неприводимый многочлен.

Кривая D (многочлен $f(x, y)$) определяет циклическое n -листное накрытие плоскости $\phi_n: X_n \rightarrow X = \mathbb{C}^2$, где X_n – нормализация поверхности в $\mathbb{C}^3$, заданной уравнением $z^n = f(x, y)$. Обозначим $B_n = \phi_n^{-1}(D)$, $X' = X \setminus D$, $X'_n = X_n \setminus B_n$. Тогда $\phi_n: X'_n \rightarrow X'$ – неразветвленное накрытие. Мы можем построить проективное пополнение $\bar{X}_n$ поверхности X_n . Для этого рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{P}^3$, заданную уравнением $x_3^n = x_0^m \cdot \bar{f}(x_0, x_1, x_2)$, где $\bar{f}(x_0, x_1, x_2)$ – однородный многочлен степени $\deg f$, ассоциированный с f , $m = n - \deg f$. Пусть $\tilde{X}_n$ – нормализация этой поверхности и $\tilde{\phi}_n: \tilde{X}_n \rightarrow \mathbb{P}^2$ индуцировано морфизмом $\phi_n: X_n \rightarrow X$. Разрешая особенности поверхности $\tilde{X}_n$ и точки неопределенности морфизмов, мы получаем неособую поверхность $\bar{X}_n \supset X_n^0$, где $X_n^0 = X_n \setminus \text{Sing } X_n$.

Многочлен $f(x, y)$ определяет морфизм $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$, слоем которого над точкой $0 \in \mathbb{C}^1$ является кривая D . Обозначим $f': X' \rightarrow S' = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ограничение f на X' .

Кроме того, мы будем рассматривать бесконечное циклическое накрытие $\phi = \phi_\infty: X_\infty \rightarrow X'$, соответствующее универсальному накрытию $e: U \rightarrow S'$ проколтой плоскости $S' = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ плоскостью $U = \mathbb{C}$, $t = e(u) = e^{2\pi i u}$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \phi: X_\infty & \xrightarrow{\phi_{\infty, n}} & X'_n & \xrightarrow{\phi_n} & X' \\ \downarrow f_\infty & & \downarrow f'_n & & \downarrow f' \\ e: U & \longrightarrow & S'_n & \longrightarrow & S' \end{array} \quad (*)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-01575) и Фонда INTAS (грант № 4373)

где $z \in S'_n = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t = z^n$.

В нашем случае общий слой морфизма f неприводим. Поэтому индуцированный гомоморфизм $f'_*: \pi_1(X') \rightarrow \pi_1(S') \cong \mathbb{F}_1$ является эпиморфизмом на свободную циклическую группу $\mathbb{F}_1$ (см., например, [2]). Обозначим $N = \ker f'_*$. Тогда $\phi: X_\infty \rightarrow X'$ – накрытие, определенное нормальным делителем N , $\pi_1(X_\infty) = N$. Имеем изоморфизм $H_1(X_\infty, \mathbb{Z}) = N/N'$, где $N' = [N, N]$ – коммутант группы N . Точная последовательность

$$1 \rightarrow N/N' \rightarrow \pi_1(X')/N' \rightarrow \mathbb{F}_1 \rightarrow 1$$

определяет действие образующей t группы $\mathbb{F}_1$ на N/N' и превращает N/N' в $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуль. Пусть $\Delta_i(t) = \Delta_{i,D}(t)$ – i -й многочлен Александра, связанный с действием образующей t на N/N' . Определение и свойства многочленов Александра можно найти, например, в [2]. Пусть $h \in \text{Deck}(X_\infty/X') = \mathbb{F}_1$ – накрывающее преобразование, соответствующее образующей $t \in \mathbb{F}_1$. Мы будем называть h *монодромией кривой D* . Многочлен Александра $\Delta(t) = \Delta_1(t)$ совпадает с характеристическим многочленом монодромии h_* в $H_1(X_\infty, \mathbb{C})$. Как известно (см., например, [2]), все корни многочлена Александра $\Delta(t)$ плоской кривой D являются корнями из единицы. Обозначим $n(D)$ такое наименьшее натуральное число, что все корни многочлена Александра $\Delta(t)$ кривой D являются корнями степени $n(D)$ из единицы.

Обозначим $q(n) = \dim H^0(\bar{X}_n, \Omega^1_{\bar{X}_n})$ иррегулярность поверхности $\bar{X}_n$ и $\alpha_n: \bar{X}_n \rightarrow T^{q(n)}$ – отображение Альбанезе. Напомним, что отображение Альбанезе определяется следующим образом. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_{q(n)} \in H^0(\bar{X}_n, \Omega^1_{\bar{X}_n})$ образуют базис пространства голоморфных форм на $\bar{X}_n$ и $\delta_1, \dots, \delta_{2q(n)}$ – базис (по модулю кручения) пространства целочисленных одномерных гомологий на $\bar{X}_n$. Интегралы

$$\Pi_i = \left(\int_{\delta_i} \omega_1, \dots, \int_{\delta_i} \omega_{q(n)} \right) \in \mathbb{C}^{q(n)}$$

называются *периодами*. Периоды $\Pi_1, \dots, \Pi_{2q(n)}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и порождают решетку

$$\Lambda = \{m_1 \Pi_1 + \dots + m_{2q(n)} \Pi_{2q(n)}, m_i \in \mathbb{Z}\}$$

в $\mathbb{C}^{q(n)}$. Зафиксируем точку $p_0 \in \bar{X}_n$. Отображение $\alpha_n: \bar{X}_n \rightarrow T^{q(n)} = \mathbb{C}^{q(n)}/\Lambda$, определяемое

$$\alpha_n(p) = \left(\int_{p_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p_0}^p \omega_{q(n)} \right) \in T^{q(n)},$$

называется *отображением Альбанезе*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Число

$$a(D) = \max_{n \in \mathbb{N}} \dim \alpha_n(\bar{X}_n)$$

называется *размерностью Альбанезе* плоской кривой D .

A priori размерность Альбанезе $a(D)$ плоской кривой D может принимать значения 0, 1, 2. Отметим, что для неприводимой кривой D условие $a(D) > 0$ эквивалентно условию $\deg \Delta(t) > 0$, где $\Delta(t)$ – многочлен Александра кривой D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем неприводимую кривую $D \subset \mathbb{C}^2$, заданную в $\mathbb{C}^2$ уравнением $f(x, y) = 0$, *квазиторической кривой*, если найдутся такие взаимно простые между собой, а также с многочленом $f(x, y)$, многочлены $g(x, y)$, $h(x, y)$ и $r(x, y)$, $\deg g(x, y) > 0$, $\deg h(x, y) > 0$ и $\deg r(x, y) \geq 0$, а также такие взаимно простые натуральные числа $a > 1$ и $b > 1$, что выполнено соотношение

$$g(x, y)^a + h(x, y)^b = r(x, y)^{ab} f(x, y). \quad (1)$$

Квазиторическая кривая D называется *торической*, если в квазиторическом разложении (1) многочлен $r(x, y)$ является константой.

Квазиторическое разложение называется *полным*, если ни из одной пары многочленов $g(x, y)$, $r(x, y)$ и $h(x, y)$, $r(x, y)$ нельзя одновременно извлечь в $\mathbb{C}[x, y]$ никакого корня степени больше единицы. Числа a и b , участвующие в полном квазиторическом разложении для $f(x, y)$, будем называть *показателями* кривой D . Скажем, что уравнение $f(x, y) = 0$, задающее квазиторическую кривую D , обладает единственным квазиторическим разложением, если в ее полном квазиторическом разложении многочлены $g(x, y)$, $h(x, y)$ и $r(x, y)$ определены однозначно с точностью до постоянного множителя, предполагая, что $a < b$.

Название “квазиторическая кривая” возникло из того, что дополнение к кривой $E_{a,b}$, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $u^a + v^b = 0$, гомотопически эквивалентно дополнению к торическому узлу $K_{a,b}$ в S^3 (см., например, [4]). Как хорошо известно, многочлен Александра торической кривой $E_{a,b}$ равен

$$\Delta(t) = \frac{(t^{ab} - 1)(t - 1)}{(t^a - 1)(t^b - 1)}.$$

В данной статье будут исследованы плоские неприводимые кривые D с $a(D) > 0$. Одним из результатов статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть неприводимая плоская кривая D с $a(D) > 0$ задана уравнением $f(x, y) = 0$, и пусть для некоторого n образ отображения Альбанезе $\alpha_n(\bar{X}_n) = C_n$ одномерен. Тогда

- i) отображение Альбанезе α_n определяет некоторое квазиторическое разложение многочлена $f(x, y)$;
- ii) если размерность Альбанезе $a(D) = 1$, то $f(x, y)$ обладает единственным квазиторическим разложением;
- iii) если $f(x, y)$ обладает двумя различными квазиторическими разложениями, то размерность Альбанезе $a(D) = 2$.

Квазиторическое разложение многочлена $f(x, y)$ определяет (квазиторический) пучок кривых $D_{\bar{\lambda}}$, заданных уравнением

$$\lambda_1 g(x, y)^a + \lambda_2 h(x, y)^b = 0,$$

$\bar{\lambda} = (\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1$, так что $D \subset D_{(1:1)}$. Предположим, что общая кривая $D_{\bar{\lambda}}$ этого пучка является неприводимой. Квазиторический пучок кривых $D_{\bar{\lambda}}$ определяет рациональное отображение

$$\psi = \psi(g, h, a, b): \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad \psi^{-1}(\bar{\lambda}) = D_{\bar{\lambda}}.$$

Разрешая точки неопределенности этого отображения с помощью последовательности σ -процессов $\sigma: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, получим регулярный морфизм $\bar{\psi}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Морфизм $\bar{\psi}$ имеет конечное число критических значений $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k \in \mathbb{P}^1$, над которыми соответствующие слои $\bar{\psi}^{-1}(\bar{\lambda}_i)$ являются вырожденными, либо нетрансверсально пересекаются с хотя бы одним из дивизоров: либо $\sigma^*(L_\infty)_{\text{red}}$, либо с исключительным дивизором морфизма σ , где $L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ – бесконечно удаленная прямая.

Имеет место теорема, “обратная” теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть кривая $D_{\bar{\lambda}_0} = D + abD'$ принадлежит квазиторической му пучку кривых, определяемому квазиторическим разложением уравнения $f(x, y)$ кривой D . Тогда

- i) $a(D) \geq 1$;
- ii) если $D_{\bar{\lambda}_0}$ – неприводимая кривая ($D' = \emptyset$) и $\bar{\lambda}_0$ не является критическим значением морфизма $\bar{\psi}(g, h, a, b)$, то $a(D_{\bar{\lambda}_0}) = 1$.

Теорема 3 описывает образ отображения Альбанезе циклического накрытия плоскости, разветвленного над неприводимой кривой D с $a(D) = 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для неприводимой кривой D , заданной уравнением $f(x, y) = 0$, $a(D) = 1$, и пусть $C_n = \alpha_n(\bar{X}_n)$ – образ отображения Альбанезе n -листного циклического накрытия плоскости, разветвленного вдоль D . Пусть a и b – показатели кривой D для квазиторического разложения многочлена $f(x, y)$. Тогда

- i) $ab = n(D)$;
- ii) если a или b взаимно просты с n , то C_n есть точка;
- iii) если $a' = \text{Н.О.Д.}(n, a) > 1$ и $b' = \text{Н.О.Д.}(n, b) > 1$, то кривая C_n имеет род

$$g_n = \frac{a'b' - a' - b' + 1}{2}$$

и является циклическим накрытием проективной прямой $\mathbb{P}^1$ степени $n' = a'b'$, разветвленным над тремя точками (для определенности, над $0, 1, \infty$). Порядок ветвления над точкой 0 равен a' , над ∞ равен b' и над 1 равен $n' = a'b'$.

В случае если плоская неприводимая кривая D имеет размерность Альбанезе $a(D) = 2$, но при некотором n образ $C_n = \alpha_n(\bar{X}_n)$ отображения Альбанезе n -листного циклического накрытия плоскости, разветвленного вдоль D , является кривой, то точно так же, как и в одномерном случае, кривая C_n имеет род

$$g_n = \frac{a'b' - a' - b' + 1}{2},$$

где a' и b' – некоторые делители числа n и квазиторических показателей a и b квазиторической структуры, определяемой отображением α_n , а сама C_n также является циклическим накрытием проективной прямой $\mathbb{P}^1$ степени $n' = a'b'$, разветвленным над тремя точками $0, 1, \infty$ с порядками ветвления a' , b' и $n' = a'b'$ соответственно.

Простыми следствиями из теоремы 3 являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть неприводимая плоская кривая D с $a(D) = 1$ имеет квазиторические показатели a и b . Тогда многочлен Александера $\Delta(t)$ кривой D равен

$$\Delta(t) = \frac{(t^{ab} - 1)(t - 1)}{(t^a - 1)(t^b - 1)}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть уравнение $f(x, y) = 0$ плоской кривой D с $a(D) = 2$ обладает квазиторическим разложением с показателями a и b . Тогда многочлен

$$\frac{(t^{ab} - 1)(t - 1)}{(t^a - 1)(t^b - 1)}$$

является делителем многочлена Александера $\Delta(t)$ кривой D .

Пусть неприводимая кривая D имеет многочлен Александера $\Delta(t)$, $\deg \Delta(t) = 2$. В этом случае согласно [3, теорема 4] $q(n) \leq 1$ и $q(n(D)) = 1$. Следовательно, $a(D) = 1$. Отсюда и из теорем 1, 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f(x, y) = 0$ – уравнение неприводимой кривой D , имеющей многочлен Александера $\Delta(t)$, $\deg \Delta(t) = 2$. Тогда $f(x, y)$ обладает единственным квазиторическим разложением

$$g(x, y)^2 + h(x, y)^3 = f(x, y)r(x, y)^6,$$

и многочлен Александера $\Delta(t) = t^2 - t + 1$.

Для достаточно широкого класса плоских (не обязательно неприводимых и приведенных) кривых D в [3] была введена естественная смешанная структура Ходжа на $H^1(X_\infty)$. В частности, если D – неприводимая плоская кривая, то эта смешанная структура Ходжа является чистой и совпадает со структурой Ходжа на $H^1(\overline{X}_{n(D)})$. Отсюда и из теоремы 3 вытекает

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\{D_\beta\}_{\beta \in V}$ – алгебраическая деформация плоских кривых размерности Альбанезе $a(D_\beta) = 1$. Тогда соответствующая этому семейству вариация структур Ходжа $H^1(X_{\infty, \beta})$ является тривиальной.

Теоремы 1–5 будут доказываться одновременно, их доказательство содержится в первом параграфе и существенно опирается на следующее предложение, доказательство которого составляет содержание второго параграфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть a, b, c – тройка попарно взаимно простых не равных единице натуральных чисел. Тогда в кольце многочленов $\mathbb{C}[x, y]$ не существует попарно взаимно простых многочленов $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$, $s(x, y)$ и $t(x, y)$ таких, что

- i) $\deg p(x, y) > 0$, $\deg q(x, y) > 0$, $\deg r(x, y) > 0$, $\deg s(x, y) > 0$, $\deg t(x, y) \geq 0$;
- ii) многочлен $s(x, y)$ неприводим;
- iii) $p(x, y)^a + q(x, y)^b = r(x, y)^c$;
- iv) существует такое $\bar{\lambda} = (\lambda_1 : \lambda_2) \neq (0 : 0)$, что

$$\lambda_1 p(x, y)^a + \lambda_2 q(x, y)^b = s(x, y)t(x, y)^{abc}.$$

В заключение хочу отметить, что мне не известно ни одного примера неприводимой плоской кривой D с $a(D) = 2$. Согласно теореме 1 один из возможных подходов для доказательства существования такой кривой состоит в нахождении неприводимого многочлена $f(x, y)$, имеющего два неэквивалентных квазиторических разложения.

§ 1. Размерность Альбанезе и квазиторическое разложение

1.1. Рассмотрим бесконечное циклическое накрытие $\phi = \phi_{\infty, n}: X_{\infty} \rightarrow X'_n$ из диаграммы (*). Если $\mathbb{F}_1$ – свободная группа, порожденная монодромией h , то $X' = X_{\infty}/\mathbb{F}_1$. Пусть $G_n \subset \mathbb{F}_1$ – бесконечная циклическая группа, порожденная h^n . Тогда $X'_n = X_{\infty}/G_n$, а $X' = X'_n/\mu_n$, где $\mu_n = \mathbb{F}_1/G_n$ – циклическая группа порядка n . Обозначим h_n автоморфизм на X'_n , индуцированный h . Тогда h_n – образующая группы μ_n , которая соответствует также образующей группы Галуа $\text{Gal}(\mathbb{C}(X'_n)/\mathbb{C}(X'))$.

В ситуации бесконечного циклического накрытия Милнор [5] рассмотрел точную последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow C_{\bullet}(X_{\infty}) \xrightarrow{h^n - \text{id}} C_{\bullet}(X_{\infty}) \xrightarrow{\phi_*} C_{\bullet}(X'_n) \rightarrow 0,$$

которая приводит к точной последовательности гомологий

$$\dots \rightarrow H_1(X_{\infty}) \xrightarrow{h^n - \text{id}} H_1(X_{\infty}) \xrightarrow{\phi_*} H_1(X'_n) \rightarrow H_0(X_{\infty}) \rightarrow 0. \quad (2n)$$

(Мы часто будем использовать h вместо h_* , если это не приводит к недоразумению.)

1.2. Пусть $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \bar{S} = \mathbb{P}^1$ – рациональное отображение, соответствующее морфизму $f: X \rightarrow S$. Отображение f не определено лишь в точках бесконечно удаленной прямой $L_{\infty} = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2 = f^{-1}(\infty)$. Разрешая точки неопределенности с помощью σ -процессов $\sigma: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$, мы получаем морфизм $\bar{f} = f \cdot \sigma: X \rightarrow \bar{S}$. При этом $\bar{X}_0 = \bar{f}^{-1}(0) \supset D$, $\bar{f}^{-1}(\infty) \supset L_{\infty}$, $X' \subset X \subset \bar{X}$. Мы можем представлять себе, что $X = \mathbb{C}^2$ получено из $\bar{X}$ выкидыванием кривой $\sigma^{-1}(L_{\infty})$, состоящей из некоторого числа квазисечений и некоторого числа компонент слоев морфизма $\bar{f}$. Аналогично определяются морфизмы f_n , f'_n и $\bar{f}_n$, и мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X'_n \subset X_n^0 \subset \bar{X}_n & \xrightarrow{\bar{\phi}_n} & \bar{X} \supset X \\ \downarrow f'_n & \downarrow f_n & \downarrow \bar{f}_n \quad \downarrow \bar{f} \quad \downarrow f \\ S'_n \subset S_n \subset \bar{S}_n & \xrightarrow{\bar{e}_n} & \bar{S} \supset S \end{array} \quad (3)$$

Пусть $Y = X_t = f^{-1}(t)$, соответственно $\bar{Y} = \bar{X}_t = \bar{f}^{-1}(t)$, есть неособый слой (близкий к нулевому) морфизма f , соответственно $\bar{f}$, из диаграммы (3). Морфизмы ϕ_n и ϕ_{∞} являются неразветвленными накрытиями, и прообразы $\phi_n^{-1}(Y)$ и $\phi_{\infty}^{-1}(Y)$ распадаются на компоненты, изоморфные Y . Выбирая точки $u \in e_{\infty}^{-1}(t)$ и $t \in e_n^{-1}(t)$, мы можем считать, что Y вложено в X_{∞} и X'_n в качестве слоев $f_{\infty}^{-1}(u)$ и $f_n^{-1}(t)$ так, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xlongequal{\quad} & Y & \hookrightarrow & \bar{Y} \\ j_{\infty} \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow \bar{j} \\ X_{\infty} & \xrightarrow{\phi_{\infty, n}} & X'_n & \hookrightarrow_i & \bar{X}_n \end{array}$$

Получаем коммутативную диаграмму для гомологий

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_1(Y) & \longrightarrow & H_1(\bar{Y}) \\
 & \swarrow (j_\infty)_* & \downarrow & & \downarrow \bar{j}_* \\
 H_1(X_\infty) & \xrightarrow{(\phi_{\infty,n})_*} & H_1(X'_n) & \xrightarrow{i_*} & H_1(\bar{X}_n)
 \end{array} \quad (4)$$

На пространствах $H_1(X_\infty)$, $H_1(X'_n)$, $H_1(Y)$ (и $H_1(\bar{Y})$) действуют операторы монодромии, которые мы обозначаем h , h_n и T соответственно (монодромия T порождается обходом вокруг слоя $f^{-1}(0)$). Очевидно, что гомоморфизмы $(j_\infty)_*$, j_* и $\bar{j}_*$ эквивариантны, т.е. коммутируют с действием операторов монодромии.

Сделаем несколько замечаний. Если D – неприводимая кривая, то:

1) $(j_\infty)_*: H_1(Y) \rightarrow H_1(X_\infty)$ является эпиморфизмом. Это следует (см. [2]) из эпиморфности гомоморфизма

$$\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X_\infty) = N = \ker\left(\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \xrightarrow{f'_*} \pi_1(\mathbb{C}^1 \setminus \{0\})\right).$$

2) $H_1(X'_n) \xrightarrow{i_*} H_1(\bar{X}_n)$ является эпиморфизмом в силу [3, теорема 2], а его ядро порождается “простым обходом” вокруг кривой $B_n = \phi_n^{-1}(D)$.

3) Сквозное отображение $H_1(X_\infty) \rightarrow H_1(\bar{X}_n)$ является (см. [3]) изоморфизмом, если n кратно $n(D)$, и эпиморфизмом в общем случае. Более того, если $H_1(X_\infty) = \bigoplus_{\xi_i} V^{\xi_i}$ – разложение на собственные подпространства, отвечающие собственным значениям ξ_i монодромии h , то $H_1(\bar{X}_n)$ эквивариантно изоморфно $\bigoplus_{\xi_i=1} V^{\xi_i}$.

4) Инвариантные относительно монодромии T циклы из $H_1(Y)$ принадлежат ядру морфизма $H_1(Y) \rightarrow H_1(\bar{X}_n)$. Это следует из эквивариантности диаграммы (4) и из точной последовательности Милнора (2₁).

ЛЕММА 1. Пусть D – неприводимая кривая. Тогда для любого n собственный прообраз $\phi_n^{-1}(D) = B_n$ кривой D отображается отображением Альбанезе α_n в точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно показать, что ограничение на B_n любой голоморфной на $\bar{X}_n$ 1-формы ω обращается в нуль на B_n . Для этого достаточно проверить, что морфизм $i_*: H_1(B_n) \rightarrow H_1(\bar{X}_n)$, индуцированный вложением, является нулевым.

Рассмотрим морфизмы $\bar{f}$ и $\bar{f}_n$. Пусть $\Delta \subset S$ (соответственно $\Delta_n \subset S_n$) – изоморфная диску достаточно маленькая окрестность нуля. Обозначим $\pi: Z \rightarrow \Delta$ (соответственно $\pi_n: Z_n \rightarrow \Delta_n$) ограничение $\bar{f}$ на $\bar{f}^{-1}(\Delta) = Z$. Сделав несколько σ -процессов, мы можем считать, что слои $Z_0 = \pi^{-1}(0)$, $\pi_n^{-1}(0)$ являются дивизорами с нормальными пересечениями, а $\bar{Y}$ является общим слоем расслоения на кривые π и π_n . Обозначим $r: Y \rightarrow Z_0$ ограничение на слой Y ретракции $Z \rightarrow Z_0$. Так как кривая D входит в слой Z_0 с кратностью 1, то циклы из $I = r_*^{-1}(H_1(D)) \subset H_1(Y)$ являются инвариантными относительно действия монодромии T на $H_1(Y)$. Из диаграмм (3) и (4), очевидно, следует, что $i_*(H_1(B_n)) = \bar{j}_*(I)$, так как ограничение ϕ_n на B_n является бирациональным изоморфизмом. Применив сделанное выше замечание 4), получаем, что морфизм $i_*: H_1(B_n) \rightarrow H_1(\bar{X}_n)$, индуцированный вложением, является нулевым.

1.3. Напомним, что все корни многочлена Александера $\Delta(t)$ плоской кривой D являются корнями из единицы и через $n(D)$ обозначено такое наименьшее натуральное число, что все корни многочлена Александера $\Delta(t)$ кривой D являются корнями степени $n(D)$ из единицы.

ЛЕММА 2. *Неприводимая кривая D имеет размерность Альбанезе $a(D) = 1$ тогда и только тогда, когда образ $\alpha_{n(D)}(\overline{X}_{n(D)})$ является кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [3, теорема 2], применяя точные последовательности Милнора (2_n) , получаем, что в случае неприводимой кривой D первое число Бетти $b_1(n)$ поверхности $\overline{X}_n$ совпадает с числом корней многочлена Александера $\Delta(t)$ кривой D , являющихся корнями n -й степени из единицы. Поэтому для n , кратных $n(D)$, иррегулярность $q(n) = \frac{1}{2} \deg \Delta(t)$ и, следовательно, естественные морфизмы

$$\phi_{n,n(D)}^*: H^0(\overline{X}_{n(D)}, \Omega_{\overline{X}_{n(D)}}^1) \rightarrow H^0(\overline{X}_n, \Omega_{\overline{X}_n}^1),$$

индуцированные морфизмами $\phi_{n,n(D)}$, являются изоморфизмами. Поэтому если $\alpha_{n(D)}$ является отображением на кривую $C = \alpha_{n(D)}(\overline{X}_{n(D)})$, то для n , кратных $n(D)$, все голоморфные формы на $\overline{X}_n$ являются поднятыми с C . Следовательно, для n , кратных $n(D)$, образ $\alpha_n(\overline{X}_n)$ является кривой. Как известно, отображения Альбанезе функториальны, т.е. если $F: Z_1 \rightarrow Z_2$ – морфизм алгебраических многообразий, имеющих иррегулярности q_1 и q_2 соответственно, то для отображений Альбанезе имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{F} & Z_2 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ T^{q_1} & \xrightarrow{F_*} & T^{q_2} \end{array}$$

Из вышеизложенного следует, что $\dim \alpha_n(\overline{X}_n) \leq 1$ для всех n .

1.4. В дальнейшем нам понадобится общий факт об отображении Альбанезе, вытекающий из теоремы Штейна о факторизации морфизмов, из функториальности отображения Альбанезе и из того, что для кривой положительного рода отображение Альбанезе является биголоморфным отображением на образ.

ЛЕММА 3. *Пусть образ $\alpha(Z)$ отображения Альбанезе алгебраической поверхности Z есть кривая. Тогда общий слой $\alpha^{-1}(p)$, $p \in \alpha(Z)$, есть неприводимая кривая.*

1.5. В дальнейшем мы предполагаем, что образ $C_n = \alpha_n(\overline{X}_n)$ одномерен.

ЛЕММА 4. *Пусть D – неприводимая кривая, и пусть при некотором n образ $C_n = \alpha_n(\overline{X}_n)$ отображения Альбанезе n -листного циклического накрытия плоскости, разветвленного вдоль D , является кривой. Тогда монодромия h_n , действующая на $\overline{X}_n$, переводит слои расслоения $\alpha_n: \overline{X}_n \rightarrow C_n$ в слои.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На $H^0(\overline{X}_n, \Omega_{\overline{X}_n}^1)$ действует автоморфизм h_n^* . Выберем базис $\{\omega_1, \dots, \omega_{q(n)}\}$ в $H^0(\overline{X}_n, \Omega_{\overline{X}_n}^1)$ из собственных векторов этого автоморфизма, $h_n^*(\omega_i) = \xi_i \cdot \omega_i$, где ξ_i – корни n -й степени из единицы.

Пусть p_0 – фиксированная точка и p – произвольная точка, принадлежащие одному и тому же слою $F_c = \alpha_n^{-1}(c)$ отображения Альбанезе α_n . Тогда

$$\int_{p_0}^p \omega_i = 0,$$

где интегралы берутся по произвольным путям в F_c , соединяющим точки p_0 и p . Следовательно,

$$\int_{h_n(p_0)}^{h_n(p)} \omega_i = \int_{p_0}^p h_n^*(\omega_i) = \xi_i \int_{p_0}^p \omega_i = 0.$$

Поэтому точки $h_n(p_0)$ и $h_n(p)$ также принадлежат одному и тому же слою отображения α_n .

1.6. Из леммы 4 следует, что действие группы Галуа μ_n , порожденной автоморфизмом h_n , порождает действие группы μ_n на C_n (образующую этой группы опять обозначим через h_n). Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}_n & \xrightarrow{\overline{\phi}_n} & \overline{X} \\ \downarrow \alpha_n & & \downarrow \alpha_1 \\ C_n & \xrightarrow{\psi_n} & C_n/(\mu_n) \simeq \mathbb{P}^1 \end{array} \quad (5)$$

Кривая $C_n/(\mu_n)$ является рациональной, так как она является образом рациональной поверхности $\overline{X} \simeq \mathbb{P}^2$, а морфизм $\psi: C_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ является циклическим накрытием степени, равной некоторому делителю n' числа n . Кроме того, морфизм $\alpha_n^*: H^1(C_n, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(\overline{X}_n, \mathbb{R})$ является эквивариантным относительно действия группы μ_n изоморфизмом.

1.7. Отметим, что если $a(D) = 1$ и $n = n(D)$, то $\deg \psi_{n(D)} = n(D)$. Действительно, по определению числа $n(D)$ в $H^1(X_\infty, \mathbb{C})$ существует собственный вектор, отвечающий собственному значению ξ , где ξ – некоторый первообразный корень степени $n(D)$ из единицы. Эквивариантность изоморфизмов

$$H^1(X_\infty, \mathbb{C}) \simeq H^1(\overline{X}_{n(D)}, \mathbb{C}) \quad \text{и} \quad H^1(C_{n(D)}, \mathbb{C}) \simeq H^1(\overline{X}_{n(D)}, \mathbb{C})$$

позволяет заключить, что автоморфизм $h_{n(D)}^*$ пространства $H^1(C_{n(D)}, \mathbb{C})$ имеет собственное значение ξ , являющееся первообразным корнем степени $n(D)$ из единицы. Следовательно, степень накрытия $\psi_{n(D)}$ должна быть кратна $n(D)$. С другой стороны, как отмечалось выше, степень накрытия ψ_n является делителем числа n . Поэтому $\deg \psi_{n(D)} = n(D)$.

1.8. Исследуем ветвление морфизма ψ_n . Покажем, во-первых, что над одной из точек $\bar{\lambda} \in \mathbb{P}^1$ морфизм ψ_n имеет ветвление кратности $n' = \deg \psi_n$. Действительно, по лемме 1 кривая $B = \phi_n^{-1}(D)$ лежит в слое морфизма α_n над некоторой точкой $c \in C_n$. Морфизм ϕ_n имеет ветвление над D кратности $n = \deg \phi_n$. Отсюда и из коммутативной диаграммы (5) следует, что морфизм ψ_n над точкой $\psi_n(c) = (\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1$ имеет ветвление кратности n' . В дальнейшем считаем, что $(\lambda_1 : \lambda_2) = (1 : 1)$.

Во-вторых, морфизм ψ_n должен иметь по крайней мере еще две точки ветвления, кроме точки $(1 : 1)$, так как кривая C_n имеет положительный род. Не ограничивая общности, мы можем считать, что это точки $(0 : 1)$, $(1 : 0) \in \mathbb{P}^1$. Пусть в первой из этих точек морфизм ψ_n имеет ветвление кратности a , а во второй – b . Числа a и b являются делителями числа n' .

1.9. Покажем, что a и b взаимно просты. Действительно, пусть это не так, и пусть простое число p является делителем чисел a и b . Тогда существуют кривая C_p и циклические морфизмы $\bar{\psi}_p: C_p \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\bar{\psi}_{n,p}: C_n \rightarrow C_p$, $\deg \bar{\psi}_p = p$ и $\bar{\psi}_p$ имеет ветвление кратности p по крайней мере над тремя точками $(1:1)$, $(1:0)$, $(0:1) \in \mathbb{P}^1$, и такие, что морфизм ψ_n может быть включен в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & C_n & \\ \bar{\psi}_{n,p} \swarrow & & \searrow \psi_n \\ C_p & \xrightarrow{\bar{\psi}_p} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Но, так как морфизм $\bar{\psi}_p: C_p \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет не менее трех точек ветвления кратности p , род кривой C_p должен быть больше нуля, что невозможно. Действительно, в этом случае среди корней характеристического многочлена автоморфизма h_n , действующего на $H^1(C_n, \mathbb{R})$, найдется примитивный корень из единицы степени p , где p – простое число. Это противоречит теореме 7 из [2], так как характеристический многочлен автоморфизма h_n , действующий на $H^1(C_n, \mathbb{R})$, является делителем многочлена Александера $\Delta(t)$ кривой D в силу замечания 3) из п. 1.2 и того, что $\alpha_n^*: H^1(C_n) \rightarrow H^1(\bar{X}_n)$ является эквивариантным относительно действия группы μ_n изоморфизмом.

1.10. Поверхность $\bar{X}$ бирационально изоморфна поверхности $X = \mathbb{C}^2$. Поэтому для завершения доказательства i) теоремы 1 мы можем заменить в диаграмме (5) $\bar{X}$ на $\mathbb{C}^2$. При этом морфизмы $\bar{\phi}_n$ и α_1 заменятся на некоторые рациональные отображения $\tilde{\phi}_n$ и $\tilde{\alpha}_1$ и мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_n & \xrightarrow{\tilde{\phi}_n} & \mathbb{C}^2 \\ \alpha_n \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha}_1 \\ C_n & \xrightarrow{\psi_n} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad (5')$$

Отметим, что так как $\bar{\phi}_n: \bar{X}_n \rightarrow \bar{X}$ является проективным морфизмом, то индуцированное им рациональное отображение $\tilde{\phi}_n$ обладает следующим свойством: для любой кривой $C \subset \mathbb{C}^2$ ее прообраз $\tilde{\phi}_n^{-1}(C)$ непуст. В частности, имеет смысл говорить о порядке ветвления отображения $\tilde{\phi}_n$ вдоль любой кривой $C \subset \mathbb{C}^2$.

Отображение $\tilde{\alpha}_1$ определяет пучок кривых $D_{\bar{X}}$ на $\mathbb{C}^2$, $\tilde{\alpha}_1^{-1}(\bar{\lambda}) = D_{\bar{X}}$. Рассмотрим кривую $D_{(1:0)}$. Так как точка $(1:0)$ является точкой ветвления морфизма ψ_n кратности a , а отображение $\tilde{\phi}_n$ разветвлено лишь вдоль D , то кривая $D_{(1:0)}$ обязана быть кратной кривой с кратностью, делящейся на a . Следовательно, $D_{(1:0)}$ задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением $g(x, y)^a = 0$, где $g(x, y)$ – некоторый многочлен. Аналогично, кривая $D_{(0:1)}$ задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением $h(x, y)^b = 0$, где $h(x, y)$ – некоторый многочлен.

Кривая $D_{(1:1)}$ содержит в качестве компоненты нашу кривую D , и точка $(1:1)$ является точкой ветвления морфизма ψ_n кратности n' . Напомним, что n' кратно произведению $a \cdot b$ и отображение $\tilde{\phi}_n$ разветвлено лишь вдоль D . Поэтому кривая $D_{(1:1)}$ задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением $f(x, y) \cdot r(x, y)^{ab} = 0$, где $r(x, y)$ – некоторый многочлен (возможно, $r(x, y)$ является константой), взаимно простой с многочленом $f(x, y)$.

Так как кривая $D_{(1:1)}$ является элементом пучка, порожденного кривыми $D_{(1:0)}$ и $D_{(0:1)}$, то должно выполняться равенство

$$g(x, y)^a + h(x, y)^b = f(x, y) \cdot r(x, y)^{ab}.$$

По лемме 3 общий слой отображения Альбанезе α_n является неприводимой кривой. Поэтому общий элемент пучка $g(x, y)^a + \lambda h(x, y)^b = 0$, совпадающий с образом общего слоя отображения α_n , также является неприводимой кривой. Следовательно, $\deg g > 0$ и $\deg h > 0$, так как $a > 1$ и $b > 1$. Тем самым часть i) теоремы 1 доказана.

1.11. Перейдем к доказательству теорем 1, ii) и 3. Если морфизм ψ_n имеет ветвление над какой-нибудь еще одной точкой $\bar{\lambda}_0 = (\lambda_1 : \lambda_2)$, не совпадающей с $(1 : 1)$, $(1 : 0)$, $(0 : 1)$, то рассуждения, аналогичные приведенным в пп. 1.7, 1.8, показывают, что найдутся взаимно простое с числами a и b число $c > 1$ и многочлен $t(x, y)$, $\deg t(x, y) > 0$, такие, что:

$$i) \lambda_1 g(x, y)^a + \lambda_2 h(x, y)^b = t(x, y)^c;$$

ii) многочлены $g(x, y)$, $h(x, y)$, $t(x, y)$, $f(x, y)$ и $r(x, y)$ попарно взаимно просты, так как либо являются уравнениями не совпадающих слоев пучка $D_{\bar{\lambda}}$, либо уравнениями разных компонент одного слоя.

В следующем параграфе будет доказано предложение 1, утверждающее, что существование таких многочленов $g(x, y)$, $h(x, y)$, $t(x, y)$, $f(x, y)$ и $r(x, y)$ невозможно. Следовательно, во-первых, циклическое накрытие $\psi_n: C_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ разветвлено только над тремя точками $(0 : 1)$, $(1 : 0)$ и $(1 : 1)$. Во-вторых, морфизму α_n соответствует только одно квазиторическое разложение многочлена $f(x, y)$.

ЛЕММА 5. Пусть циклическое накрытие $\phi: C \rightarrow \mathbb{P}^1$, разветвленное лишь в трех точках $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{P}^1$, имеет в этих точках порядки ветвления a , b и n' соответственно, где $a > 1$ и $b > 1$ – взаимно простые числа. Тогда $\deg \phi = n' = ab$ и род $g(C)$ кривой C равен

$$g(C) = \frac{1}{2}(ab - a - b + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $C^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{z_3\}$. Как известно, фундаментальная группа $\pi_1(C^1 \setminus \{z_1, z_2\})$ является свободной и порождается двумя элементами γ_1 и γ_2 – обходами вокруг точек z_1 и z_2 соответственно, а морфизм ϕ однозначно определяется эпиморфизмом $\pi_1(C^1 \setminus \{z_1, z_2\})$ на циклическую группу μ_k , переводящим γ_1 в элемент порядка a и γ_2 в элемент порядка b . Следовательно, $k = ab$, так как a и b взаимно просты. Порядок ветвления в точке z_3 определяется порядком образа в μ_k элемента $\gamma_3 \in \pi_1(C^1 \setminus \{z_1, z_2\})$, представляющего обход вокруг точки z_3 . Очевидно, что γ_3 совпадает с произведением элементов γ_1 и γ_2 . Следовательно, $n' = ab$. Род кривой C вычисляется по формуле Гурвица.

1.12. В обозначениях из предыдущих пунктов считаем, что $n = n(D)$. Из п. 1.7 следует, что порядок ветвления циклического накрытия $\psi_{n(D)}$ над точкой $(1 : 1)$, равный $n' = \deg \psi_{n(D)}$, совпадает с $n(D)$. Отсюда и из леммы 5 следует утверждение i) теоремы 3 (по модулю предложения 1). Кроме того, отсюда следует доказательство утверждения iii) теоремы 3 в случае $n = n(D)$.

Утверждение ii) теоремы 3 следует из утверждения i) и из замечания 3) в п. 1.2, в силу которого $\dim H^1(\bar{X}_n) = 0$, если n взаимно просто с $n(D)$.

1.13. Для доказательства утверждения iii) теоремы 3 рассмотрим отдельно два случая: либо n является делителем числа $n(D)$, либо не является.

Пусть $n(D) = nk$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}_{n(D)} & \xrightarrow{\overline{\phi}_{n(D),n}} & \overline{X}_n \\ \alpha_{n(D)} \downarrow & & \downarrow \alpha_n \\ C_{n(D)} & \xrightarrow{\overline{\psi}_{n(D),n}} & C_n \xrightarrow{\psi_n} \mathbb{P}^1, \end{array} \quad (6)$$

в которой на каждом из пространств действуют циклические группы так, что все морфизмы в (6) являются эквивариантными относительно этих действий (на $\mathbb{P}^1$ действие тривиально). Более того, мы можем считать, что $\overline{\psi}_{n(D),n}$ является отображением факторизации кривой $C_{n(D)}$ на факторпространство $C_{n(D)}/\{\overline{h}_{n(D)}^k\} \simeq C_n$ по действию группы, порожденной автоморфизмом $\overline{h}_{n(D)}^k$, где $\overline{h}_{n(D)}$ — образующая циклической группы, действующей на $C_{n(D)}$, и, кроме того, $\psi_{n(D)} = \psi_n \circ \overline{\psi}_{n(D),n}$. Отсюда легко получить, что $\deg \psi_n = n$ и морфизм ψ_n разветвлен также только над тремя точками, порядки ветвления в которых равны соответственно $a' = \text{Н.О.Д.}(a, n)$, $b' = \text{Н.О.Д.}(b, n)$ и n . Применяя формулу Гурвица, получаем доказательство утверждения iii) теоремы 3 в случае, когда n является делителем числа $n(D)$.

Пусть $n = n_1 k$, где $n_1 = \text{Н.О.Д.}(n(D), n)$. Тогда в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}_n & \xrightarrow{\overline{\phi}_{n,n_1}} & \overline{X}_{n_1} \\ \alpha_n \downarrow & & \downarrow \alpha_{n_1} \\ C_n & \xrightarrow{\overline{\psi}_{n,n_1}} & C_{n_1} \end{array}$$

морфизм $\overline{\phi}_{n,n_1}$ индуцирует изоморфизм $\overline{\phi}_{n,n_1*}: H_1(\overline{X}_n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\overline{X}_{n_1}, \mathbb{Z})$ в силу замечания 3) из п. 1.2. Следовательно, $\overline{\psi}_{n,n_1}: C_n \rightarrow C_{n_1}$ является изоморфизмом. Таким образом, утверждение iii) теоремы 3 полностью доказано (по модулю предположения 1).

1.14. Докажем теорему 2, i). Пусть D — неприводимая кривая — задана уравнением $f(x, y) = 0$, и пусть многочлен $f(x, y) = 0$ имеет квазиторическое разложение (предполагаем, что оно является полным)

$$g(x, y)^a + h(x, y)^b = r(x, y)^{ab} f(x, y).$$

Это разложение определяет рациональное отображение $F_{a,b}: \overline{X}_{ab} \rightarrow \mathbb{C}^3$, заданное функциями

$$u = \frac{g(x, y)}{r(x, y)^b}, \quad v = \frac{h(x, y)}{r(x, y)^a}, \quad w = z$$

(напомним, что $z^{ab} = f(x, y)$ на $\overline{X}_{ab}$). Образ $F_{a,b}(\overline{X}_{ab})$ лежит на проективном замыкании поверхности Y_{ab} , заданной в $\mathbb{C}^3$ уравнением $u^a + v^b = w^{ab}$ и являющейся циклическим накрытием плоскости, разветвленным вдоль торической кривой $E_{a,b}$, заданной уравнением $u^a + v^b = 0$. Очевидно, $\dim F_{a,b}(\overline{X}_{ab}) > 0$.

Легко проверить, что $a(E_{a,b}) = 1$ и отображение Альбанезе α_{ab} для $\bar{Y}_{ab}$ отображает $\bar{Y}_{ab}$ на кривую C_{ab} рода $g = \frac{1}{2}(ab - a - b + 1)$. Слоями этого отображения являются рациональные кривые (прообразы кривых из торического пучка $\lambda_1 u^a + \lambda_2 v^b = 0$ при циклическом накрытии $\bar{\phi}_{ab}: \bar{Y}_{ab} \rightarrow \bar{Y}$).

Покажем, что $F_{a,b}(\bar{X}_{ab})$ не лежит в слое отображения Альбанезе α_{ab} для $\bar{Y}_{ab}$. Действительно, если это не так, то для некоторых значений λ_1, λ_2 на $\mathbb{C}^2$ должно выполняться тождество

$$\lambda_1 g(x, y)^a + \lambda_2 h(x, y)^b \equiv 0,$$

невозможное по определению квазиторического разложения. Поэтому сквозное отображение $\alpha_{ab} \cdot F_{a,b}$ отображает $\bar{X}_{ab}$ на кривую положительного рода. Следовательно, $a(D) > 0$ и часть i) теоремы 2 доказана.

1.15. Докажем утверждение ii) теоремы 1. В обозначениях из предыдущего пункта пусть $a(D) = 1$ и квазиторическое разложение многочлена $f(x, y)$ определено отображением Альбанезе (см. п. 1.10). Из функториальности отображений Альбанезе вытекает существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_{ab} & \xrightarrow{F_{a,b}} & \bar{Y}_{ab} \\ \alpha_{ab} \downarrow & & \downarrow \alpha_{ab} \\ C_{ab} & \xrightarrow{\bar{F}_{a,b}} & C_{ab} \end{array} \quad (7)$$

в которой все морфизмы являются эквивариантными относительно действия циклической группы μ_{ab} , а $\bar{F}_{a,b}$ является изоморфизмом кривых, так как обе кривые являются циклическими накрытиями $\mathbb{P}^1$ степени ab и действия циклической группы μ_{ab} на этих кривых коммутируют с $\bar{F}_{a,b}$.

Пусть многочлен $f(x, y)$ имеет еще одно (полное) квазиторическое разложение

$$g_1(x, y)^{a_1} + h_1(x, y)^{b_1} = r_1(x, y)^{a_1 b_1} f(x, y).$$

Это разложение также определяет рациональное отображение $F_{a_1, b_1}: \bar{X}_{a_1 b_1} \rightarrow \mathbb{C}^3$, заданное функциями

$$u = \frac{g_1(x, y)}{r_1(x, y)^{b_1}}, \quad v = \frac{h_1(x, y)}{r_1(x, y)^{a_1}}, \quad w = z.$$

Образ $F_{a_1, b_1}(\bar{X}_{a_1 b_1})$ лежит на проективном замыкании поверхности $Y_{a_1 b_1}$, заданной в $\mathbb{C}^3$ уравнением $u^{a_1} + v^{b_1} = w^{a_1 b_1}$ и являющейся циклическим накрытием плоскости, разветвленным вдоль торической кривой E_{a_1, b_1} , заданной уравнением $u^{a_1} + v^{b_1} = 0$, и мы имеем коммутативную диаграмму, аналогичную диаграмме (7),

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_{a_1 b_1} & \xrightarrow{F_{a_1, b_1}} & \bar{Y}_{a_1 b_1} \\ \alpha_{a_1 b_1} \downarrow & & \downarrow \alpha_{a_1 b_1} \\ C_{a_1 b_1} & \xrightarrow{\bar{F}_{a_1, b_1}} & C_{a_1 b_1} \end{array} \quad (7')$$

Применяя теорему Штейна, мы можем считать, что морфизм $\alpha_{a_1 b_1}$ имеет связные слои.

Пусть n – общее кратное чисел ab и a_1b_1 . Рассмотрим композиции морфизмов $\alpha_{ab} \cdot \phi_{n,ab}$ и $\alpha_{a_1b_1} \cdot \phi_{n,a_1b_1}$, задающие две структуры расслоений на кривые на $\bar{X}_n$ над C_{ab} и $C_{a_1b_1}$ соответственно. Если слои одного из расслоений не являются слоями другого, то должен существовать сюръективный морфизм $\bar{X}_n \rightarrow C_{ab} \times C_{a_1b_1}$, но это противоречит условию $a(D) = 1$. Следовательно, слои этих расслоений совпадают. Применяя рассуждение из п. 1.10 и предложение 1, получаем утверждение ii) теоремы 1.

1.16. Докажем теоремы 4 и 5. Рассмотрим опять рациональное отображение $F_{a,b}$ из п. 1.14. Как отмечалось во введении, многочлен Александра торической кривой $E_{a,b}$ равен

$$\Delta(t) = \frac{(t^{ab} - 1)(t - 1)}{(t^a - 1)(t^b - 1)}$$

и совпадает с характеристическим многочленом монодромии h_{ab}^* , действующей на $H^1(\bar{Y}_{ab})$ в силу замечаний из п. 1.2 (так как $n(E_{ab}) = ab$).

По теореме 3

$$\dim H^0(\bar{X}_{ab}, \Omega_{\bar{X}_{ab}}^1) = g(C_{ab}) = \frac{1}{2}(ab - a - b + 1) = \dim H^0(\bar{Y}_{ab}, \Omega_{\bar{Y}_{ab}}^1).$$

Следовательно, вложение $F_{a,b}^*: H^0(\bar{Y}_{ab}, \Omega_{\bar{Y}_{ab}}^1) \rightarrow H^0(\bar{X}_{ab}, \Omega_{\bar{X}_{ab}}^1)$ является изоморфизмом. Отсюда следует, что $F_{a,b}^*: H^1(\bar{Y}_{ab}, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\bar{X}_{ab}, \mathbb{C})$ также изоморфизм. Более того, $F_{a,b}^*$ является эквивариантным морфизмом относительно действий циклической группы μ_{ab} на $H^1(\bar{X}_{ab})$ и $H^1(\bar{Y}_{ab})$. Следовательно, многочлены Александра кривых D и $E_{a,b}$ совпадают. Теорема 4 доказана.

Для доказательства теоремы 5 вернемся в п. 1.14. Из инъективности эквивариантного морфизма $F_{a,b}^*: H^0(\bar{Y}_{ab}, \Omega_{\bar{Y}_{ab}}^1) \rightarrow H^0(\bar{X}_{ab}, \Omega_{\bar{X}_{ab}}^1)$ и из замечания 3 в п. 1.2 вытекает сюръективность эквивариантного морфизма

$$F_{a,b*} \cdot \phi_{\infty,ab*}: H_1(X_\infty) \rightarrow H_1(\bar{Y}_{ab}) \simeq H_1(Y_\infty).$$

Следовательно, многочлен Александра кривой $E_{a,b}$, равный

$$\frac{(t^{ab} - 1)(t - 1)}{(t^a - 1)(t^b - 1)},$$

является делителем многочлена Александра $\Delta(t)$ кривой D . Теорема 5 доказана.

1.17. Докажем утверждение ii) теоремы 2. Пусть нам задан торический пучок кривых $D_{\bar{\lambda}}$, определяемых уравнением

$$\lambda_1 g(x, y)^a + \lambda_2 h(x, y)^b = 0,$$

$\bar{\lambda} = (\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1$, так что общая кривая $D_{\bar{\lambda}}$ этого пучка является неприводимой кривой. Этот пучок кривых $D_{\bar{\lambda}}$ определяет рациональное отображение $\psi = \psi(g, h, a, b): \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\psi^{-1}(\bar{\lambda}) = D_{\bar{\lambda}}$. Разрешая точки неопределенности этого отображения с помощью последовательности σ -процессов $\sigma: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, получим регулярный морфизм $\bar{\psi} = \bar{\psi}(g, h, a, b): \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Морфизм $\bar{\psi}$ имеет конечное число критических значений $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k \in \mathbb{P}^1$, над которыми соответствующие слои $\bar{\psi}^{-1}(\bar{\lambda}_i)$ являются вырожденными, либо нетрансверсально пересекаются с хотя

бы одним из дивизоров: либо с $\sigma^*(L_\infty)_{\text{red}}$, либо с исключительным дивизором E морфизма σ , где $L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ – бесконечно удаленная прямая. Все слои $F_{\bar{\lambda}}$ морфизма $\bar{\psi}$ являются гладкими неприводимыми кривыми для $\bar{\lambda} \notin \{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k\}$, так как общая кривая пучка $D_{\bar{\lambda}}$ является неприводимой кривой.

Пусть $D = D_{\bar{\lambda}_0}$, $\bar{\lambda}_0 = (\lambda_{0,1} : \lambda_{0,2}) \notin \{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k\}$, и пусть $\tilde{\phi}_n: \tilde{X}_n \rightarrow \bar{X}$ – нормализация поверхности $\bar{X} = \mathbb{P}^2$ в поле рациональных функций $\mathbb{C}(x, y, z)$, где

$$z^n = \lambda_{0,1}g(x, y)^a + \lambda_{0,2}h(x, y)^b,$$

а $\tau: \bar{X}_n \rightarrow \tilde{X}_n$ – разрешение особенностей и $\bar{\phi}_n = \tilde{\phi}_n \cdot \tau$. Пусть $\bar{D}$ – замыкание собственного прообраза кривой D в $\bar{X} = \mathbb{P}^2$. Так как $\bar{D}$ трансверсально пересекается с дивизорами $\sigma^*(L_\infty)$ и исключительным дивизором E морфизма σ , а $\tilde{\phi}_n: \tilde{X}_n \rightarrow \bar{X}$ – циклическое накрытие степени n , не разветвленное вне $\bar{D} \cup \sigma^{-1}(L_\infty) \cup E$, то $\tilde{X}_n$ локально изоморфна нормализации поверхности, заданной в $\mathbb{C}^3$ уравнением $z^n = x^k y^m$. Поэтому $\tilde{X}_n$ имеет только изолированные рациональные особые точки и исключительный дивизор $\tau^{-1}(\text{Sing } \tilde{X}_n)$ морфизма τ состоит из конечного набора рациональных кривых.

Рассмотрим композиции морфизмов $\Psi = \bar{\psi} \cdot \tilde{\phi}_n: \tilde{X}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\bar{\Psi} = \bar{\psi} \cdot \bar{\phi}_n: \bar{X}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$. Слой $\Psi^{-1}(\bar{\lambda}_0)$ над точкой $\bar{\lambda}_0$ состоит из собственного прообраза $B_n = \phi_n^{-1}(D)$ кривой D , а $\bar{\Psi}^{-1}(\bar{\lambda}_0)$ состоит из собственного прообраза $\bar{B}_n = \bar{\phi}_n^{-1}(\bar{D})$ и некоторого числа исключительных кривых морфизма τ .

Отображение Альбанезе $\alpha_n: \bar{X}_n \rightarrow T^{q(n)}$ отображает слой $\bar{\Psi}^{-1}(\bar{\lambda}_0)$ в точку, так как $\alpha_n(B_n)$ есть точка по лемме 1, а все остальные компоненты этого слоя являются рациональными кривыми и поэтому также отображаются в точку при отображении Альбанезе. Следовательно, образ $\alpha_n(\bar{X}_n)$ не может быть двумерным и является либо точкой, либо кривой, так как матрица пересечений компонент слоя $\bar{\Psi}^{-1}(\bar{\lambda}_0)$ не является отрицательно определенной. Утверждение ii) теоремы 2 доказано.

§ 2. Единственность квазиторического разложения для кривой D с $a(D) = 1$

2.1. Неоднозначность квазиторического разложения может возникать в следующих двух случаях. Во-первых, возможно, кривая D с $a(D) = 1$ может быть включена в качестве компоненты слоя в два различных квазиторических пучка кривых. Во-вторых, один и тот же пучок кривых $D_{\bar{\lambda}}$ может иметь две различные квазиторические структуры. Следующее предложение показывает, что второй случай на практике не может быть реализован. В п. 1.5 уже было доказано, что из этого предложения также следует невозможность реализации первого случая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть a, b, c – тройка попарно взаимно простых, не равных единице, натуральных чисел. Тогда в кольце многочленов $\mathbb{C}[x, y]$ не существует попарно взаимно простых многочленов $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$, $s(x, y)$ и $t(x, y)$ таких, что

- i) $\deg p(x, y) > 0$, $\deg q(x, y) > 0$, $\deg r(x, y) > 0$, $\deg s(x, y) > 0$,
 $\deg t(x, y) \geq 0$;
- ii) многочлен $s(x, y)$ неприводим;
- iii) $p(x, y)^a + q(x, y)^b = r(x, y)^c$;

iv) существует такое $\bar{\lambda} = (\lambda_1 : \lambda_2) \neq (0 : 0)$, что

$$\lambda_1 p(x, y)^a + \lambda_2 q(x, y)^b = s(x, y)t(x, y)^{abc}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В процессе доказательства нам понадобится одномерный аналог этого утверждения.

ЛЕММА 6. Пусть a, b, c – тройка попарно взаимно простых, не равных единице, натуральных чисел. Тогда в кольце многочленов $\mathbb{C}[z]$ не существует попарно взаимно простых между собой и с многочленом $z - z_0$ многочленов $p(z)$, $q(z)$, $r(z)$ и $t(z)$ таких, что

- i) $\deg p(z) > 0$, $\deg q(z) > 0$, $\deg r(z) > 0$, $\deg t(z) \geq 0$;
- ii) $p(z)^a + q(z)^b = r(z)^c$;
- iii) существует такое $\bar{\lambda}_0 = (\lambda_1 : \lambda_2) \neq (0 : 0)$, что

$$\lambda_1 p(z)^a + \lambda_2 q(z)^b = (z - z_0)t(z)^{abc}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что $\bar{\lambda}_0 = (\lambda_1 : \lambda_2) \neq (1 : 0)$, $(0 : 1)$ и $(1 : 1)$, так как по условию многочлены $p(z)$, $q(z)$, $r(z)$, $t(z)$ и $z - z_0$ попарно взаимно просты. Во-вторых,

$$a \deg p(z) = b \deg q(z) = c \deg r(z) > abc \deg t(z) + 1,$$

так как в силу условия ii) обязательно должно выполняться одно из равенств: либо $a \deg p(z) = b \deg q(z)$, либо $b \deg q(z) = c \deg r(z)$, либо $a \deg p(z) = c \deg r(z)$ (пусть, например, $a \deg p(z) = b \deg q(z)$), и для всех значений $\bar{\lambda}$, за исключением, возможно, только одного, степень многочлена $\lambda_1 p(z)^a + \lambda_2 q(z)^b$ обязана в этом случае совпадать с $a \deg p(z) = b \deg q(z)$. Значение $\bar{\lambda}$, для которого степень многочлена $\lambda_1 p(z)^a + \lambda_2 q(z)^b$ меньше $a \deg p(z)$, очевидно, совпадает с $\bar{\lambda}_0$ из условия iii), так как $a \deg p(z) - 1$ не делится нацело на a .

Пусть $a \deg p(z) = b \deg q(z) = c \deg r(z) = abcd$ и $\deg t(z) = e < d$.

Пучок многочленов $\lambda_1 p(z)^a + \lambda_2 q(z)^b \in \mathbb{C}[z]$ определяет морфизм $\nu: \mathbb{C}^1 \subset \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$,

$$\nu^{-1}(\bar{\lambda}) = \{z \mid \lambda_1 p(z)^a + \lambda_2 q(z)^b = 0\}.$$

Над точкой $(1 : 0)$ морфизм ν имеет ветвление в точках $\{z \in \mathbb{C}^1 \mid p(z) = 0\}$ порядков am_i , где m_i – кратности корней многочлена $p(z)$, $\sum m_i = bcd$. Аналогично, над точкой $(0 : 1)$ морфизм ν имеет ветвление в точках $\{z \in \mathbb{C}^1 \mid q(z) = 0\}$ порядков an_i , где n_i – кратности корней многочлена $q(z)$, $\sum n_i = acd$, и над $(1 : 1)$ – ветвление порядков ak_i , $\sum k_i = abd$. Кроме того, ν имеет над точкой $\bar{\lambda}_0$ ветвление в точках $\{z \in \mathbb{C}^1 \mid t(z) = 0\}$ порядков $abcv_i$, $\sum v_i = e$, и в точке $\infty \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{C}^1$ порядок ветвления равен $abc(d - e) - 1$.

Для морфизма ν применим формулу Гурвица, связывающую роды кривой и ее образа. Получаем неравенства

$$\begin{aligned} -2 &\geq -2abcd + \sum (am_i - 1) + \sum (bn_i - 1) \\ &\quad + \sum (ck_i - 1) + \sum (abcv_i - 1) + abc(d - e) - 2 \\ &\geq -2abcd + (abcd - bcd) + (abcd - acd) \\ &\quad + (abcd - abd) + (abce - e) + abc(d - e) - 2, \end{aligned}$$

т.е.

$$0 \geq 2abcd - bcd - acd - abd - e.$$

Имеем $d > e$, следовательно,

$$bc + ac + ab + 1 > 2abc,$$

или, эквивалентно, должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} > 2.$$

Но даже для минимальной тройки $(a, b, c) = (2, 3, 5)$ (напомним, что a, b, c попарно взаимно просты) это неравенство не выполняется. Лемма 6 доказана.

2.2. Вернемся к доказательству предложения 1. Многочлены $p(x, y) = u$, $q(x, y) = v$ и $r(x, y) = w$ определяют морфизм $\mu: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$. В силу условия iii) образ $\mu(\mathbb{C}^2)$ лежит на поверхности Z , заданной в $\mathbb{C}^3$ уравнением

$$u^a + v^b = w^c.$$

Возможны два случая: либо $\dim \mu(\mathbb{C}^2) = 1$, либо $\dim \mu(\mathbb{C}^2) = 2$.

2.3. Пусть $\dim \mu(\mathbb{C}^2) = 1$. Кривая $C = \mu(\mathbb{C}^2)$ является аффинной рациональной кривой. Пусть $\nu: \tilde{C} \rightarrow C$ – нормализация. Тогда μ пропускается через ν , $\mu = \nu \cdot \tilde{\mu}$, где $\tilde{\mu}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \tilde{C}$. Не ограничивая общности (применив теорему Штейна о факторизации), мы можем считать, что $\tilde{\mu}$ – морфизм на гладкую аффинную рациональную кривую со связными слоями. Имеем вложение $i: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{C}^1$. Композиция $i \cdot \tilde{\mu}$ задается многочленом $z = \tilde{s}(x, y)$. Если $\tilde{C} \neq \mathbb{C}^1$, то многочлен $\tilde{s}(x, y)$ не принимает в $\mathbb{C}^2$ какое-то значение, что невозможно. Следовательно, $\tilde{C} = \mathbb{C}^1$.

Морфизм $\tilde{\mu}$ задается некоторым многочленом $z = \tilde{s}(x, y)$, а ν задается многочленами $u = p(z)$, $v = q(z)$, $w = r(z)$ и $p(x, y) = p(z)$, где вместо z подставлен многочлен $\tilde{s}(x, y)$ (и аналогично для $q(x, y)$ и $r(x, y)$), и так как $\mu = \nu \cdot \tilde{\mu}$, то, очевидно, выполнено тождество ii) из леммы 6: $p(z)^a + q(z)^b = r(z)^c$.

Многочлен $\lambda_1 p(x, y)^a + \lambda_2 q(x, y)^b = s(x, y)t(x, y)^{abc}$ принадлежит подкольцу, порожденному в $\mathbb{C}[x, y]$ многочленом $z = \tilde{s}(x, y)$. Пусть $s(x, y)t(x, y)^{abc} = T(z)$, и пусть

$$T(z) = \prod_{i=0}^n (z - z_i)^{k_i}$$

– разложение на неприводимые множители в кольце $\mathbb{C}[z]$. Так как $s(x, y)$ и $t(x, y)$ взаимно просты, то одно из k_i равно 1 (пусть это k_0), т.е. $z - z_0 = s(x, y)T_1(x, y)$, где $T_1(x, y)$ – некоторый делитель многочлена $t(x, y)^{abc}$. Так как различные слои морфизма $\tilde{\mu}$ не имеют общих компонент, то $T_1(x, y) = t_1(x, y)^{abc}$ для некоторого делителя $t_1(x, y)$ многочлена $t(x, y)$, $t(x, y) = t_1(x, y)t_2(x, y)$. Тогда

$$T_2(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)^{k_i} = t_2(x, y)^{abc}.$$

Общий слой морфизма $\tilde{\mu}$ неприводим, поэтому $T_2(z) = t(z)^{abc}$ для некоторого многочлена $t(z) \in \mathbb{C}[z]$. Найденные многочлены $p(z)$, $q(z)$, $r(z)$, $t(z)$ и $z - z_0$, очевидно, удовлетворяют всем условиям леммы 6, что невозможно. Следовательно, $\dim \mu(\mathbb{C}^2) \neq 1$.

2.4. Пусть $\dim \mu(\mathbb{C}^2) = 2$. Рассмотрим отдельно два случая: $(a, b, c) \neq (2, 3, 5)$ (как неупорядоченные тройки) и $(a, b, c) = (2, 3, 5)$.

Пусть $(a, b, c) \neq (2, 3, 5)$.

ЛЕММА 7. Пусть $\nu: Y \rightarrow Z$ — морфизм неособых алгебраических поверхностей, $\dim \nu(Y) = 2$. Тогда $\nu_*(\pi_1(Y))$ является подгруппой конечного индекса в фундаментальной группе $\pi_1(Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C \subset Z$ — кривая, над точками которой морфизм ν вырожден. Тогда $\nu: Y \setminus \nu^{-1}(C) \rightarrow Z \setminus C$ является конечным неразветвленным накрытием. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y \setminus \nu^{-1}(C)) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(Y) \\ \nu_* \downarrow & & \downarrow \nu_* \\ \pi_1(Z \setminus C) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(Z) \end{array}$$

горизонтальные гомоморфизмы являются эпиморфизмами, а левый вертикальный гомоморфизм является вложением на подгруппу конечного индекса. Следовательно, $\nu_*(\pi_1(Y))$ является подгруппой конечного индекса в $\pi_1(Z)$.

Образ $\mu(\mathbb{C}^2) = Z \subset \mathbb{C}^3$, заданный уравнением $u^a + v^b = w^c$, имеет одну изолированную особую точку $o = (0, 0, 0)$. Прообраз $\mu^{-1}(o)$ состоит из конечного числа точек, так как многочлены p , q и r не имеют общих множителей. Следовательно, $\mathbb{C}^2 \setminus \mu^{-1}(o)$ односвязно. Тогда по лемме 7 $\pi_1(Z \setminus \{o\})$ должна быть конечной группой. Однако хорошо известно (см., например, [6]), что $\pi_1(Z \setminus \{o\})$ является бесконечной группой в случае, когда a , b и c попарно взаимно просты и $(a, b, c) \neq (2, 3, 5)$.

2.5. Для доказательства предложения 1 нам осталось рассмотреть случай $(a, b, c) = (2, 3, 5)$. В этом случае, не ограничивая общности, мы будем считать, что образ $\mu(\mathbb{C}^2) = Z$ задан в $\mathbb{C}^3$ уравнением $u^2 + v^3 = 1728w^5$ (и этим же соотношением связаны многочлены $p(x, y)$, $q(x, y)$ и $r(x, y)$). Как хорошо известно (см., например, [1], [6]), в этом случае $\pi_1(Z \setminus \{o\})$ является конечной группой 60-го порядка, а универсальной накрывающей $\nu: Y \rightarrow Z \setminus \{o\}$ является $Y = \mathbb{C}^2 \setminus \{o\}$ и ν задается однородными многочленами (см. [1])

$$\begin{aligned} u &= -(\xi_1^{30} + \xi_2^{30}) + 522(\xi_1^{25}\xi_2^5 - \xi_2^{25}\xi_1^5) - 1000(\xi_1^{20}\xi_2^{10} + \xi_2^{20}\xi_1^{10}), \\ v &= -(\xi_1^{20} + \xi_2^{20}) + 228(\xi_1^{15}\xi_2^5 - \xi_2^{15}\xi_1^5) - 494\xi_1^{10}\xi_2^{10}, \\ w &= \xi_1\xi_2(\xi_1^{10} + 11\xi_1^5\xi_2^5 - \xi_2^{10}). \end{aligned}$$

Многообразие $\mathbb{C}^2 \setminus \mu^{-1}(o)$ односвязно, так как $\mu^{-1}(o)$ состоит из конечного числа точек. Следовательно, морфизм $\mu: \mathbb{C}^2 \setminus \mu^{-1}(o) \rightarrow Z \setminus \{o\}$ поднимается до голоморфного отображения $\tilde{\pi}: \mathbb{C}^2 \setminus \mu^{-1}(o) \rightarrow Y$ так, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^2 \setminus \mu^{-1}(o) & \\ \tilde{\pi} \swarrow & & \searrow \mu \\ Y & \xrightarrow{\nu} & Z \setminus \{o\} \end{array}$$

Голоморфное отображение $\tilde{\pi}$ продолжается до голоморфного отображения $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \bar{Y} = \mathbb{C}^2$, так как $\mu^{-1}(o)$ – конечное число точек. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^2 & \\ \pi \swarrow & & \searrow \mu \\ \mathbb{C}^2 = \bar{Y} & \xrightarrow{\nu} & Z \end{array} \quad (8)$$

отображения μ и ν являются регулярными морфизмами, а π голоморфно, поэтому π также является регулярным морфизмом. Действительно, коммутативная диаграмма (8) может быть расширена до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & W \subset \mathbb{C}^2 \times_Z \bar{Y} \subset \mathbb{C}^4 & \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{q} & \bar{Y} \\ \mu \swarrow & \pi & \searrow \nu \\ & Z & \end{array}$$

в которой pr_1 и pr_2 являются регулярными морфизмами алгебраической аффинной поверхности $\mathbb{C}^2 \times_Z \bar{Y}$. Голоморфное отображение π поднимается до голоморфного сечения q . Образ $q(\mathbb{C}^2)$ содержится в некоторой неприводимой компоненте W поверхности $\mathbb{C}^2 \times_Z \bar{Y}$. Следовательно, ограничение pr_1 на W является бирациональным морфизмом, для которого q является обратным. Поэтому q – регулярный морфизм. Следовательно, $\pi = \text{pr}_2 \cdot q$ также является регулярным морфизмом.

2.6. Чтобы привести случай $(a, b, c) = (2, 3, 5)$ к противоречию, рассмотрим пересечения поверхностей $W_{\bar{\lambda}}$, заданных уравнениями $\lambda_1 u^a + \lambda_2 v^b = 0$, с Z и их прообразы в $\bar{Y}$ и $\mathbb{C}^2$. Непосредственно проверяется, что при $\bar{\lambda} \neq (1 : 0), (0 : 1), (1 : 1)$ пересечение $W_{\bar{\lambda}} \cap Z = C_{\bar{\lambda}}$ является неприводимой приведенной кривой с единственной особой точкой в начале координат. Прообраз $\nu^{-1}(C_{\bar{\lambda}})$ задается в $\bar{Y} = \mathbb{C}^2$ тем же уравнением $\lambda_1 u^a + \lambda_2 v^b = 0$, где u и v – приведенные выше однородные многочлены. Следовательно, $\nu^{-1}(C_{\bar{\lambda}})$ распадается на 60 не совпадающих между собой прямых, так как $C_{\bar{\lambda}}$ – приведенная кривая, а ν является неразветвленным накрытием. Пусть

$$\nu^{-1}(C_{\bar{\lambda}_0}) = \bigcup_{i=0}^{59} L_i,$$

где L_i – прямые.

Прообраз $\pi^{-1}(C_{\bar{\lambda}_0})$ задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением $s(x, y)t^{30}(x, y) = 0$. Следовательно, прообраз одной из прямых L_i (пусть это – прямая L_0) задается уравнением $s(x, y) = 0$, так как $s(x, y)$ неприводим и взаимно прост с $t(x, y)$, а прообразы остальных прямых $L_i, i > 0$, задаются уравнениями

$$t_i(x, y)^{30} = 0,$$

где

$$t(x, y) = \prod_{i=1}^{59} t_i(x, y)$$

– некоторое разложение на множители многочлена $t(x, y)$.

Сделав линейную замену координат в $\bar{Y} = \mathbb{C}^2$, мы можем считать, что прямые L_1 и L_2 в $\bar{Y}$ задаются уравнениями $\xi_i = 0, i = 1, 2$, где ξ_i – координатные функции, а L_0 задается уравнением $\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 = 0$ при некоторых λ_1 и λ_2 . В этом случае морфизм π задается уравнениями

$$\xi_1 = t_1(x, y)^{30}, \quad \xi_2 = t_2(x, y)^{30}$$

и

$$s(x, y) = \lambda_1 t_1(x, y)^{30} + \lambda_2 t_2(x, y)^{30}.$$

Но это невозможно, так как $s(x, y)$ является неприводимым многочленом. Предложение 1 доказано.

Список литературы

1. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 1. М.: Наука, 1989.
2. Куликов Вик. С. Многочлены Александра плоских алгебраических кривых // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №1. С. 76–101.
3. Куликов Вик. С., Куликов В. С. О монодромии и смешанной структуре Ходжа в когомологиях бесконечного циклического накрытия дополнения к плоской кривой // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №2. С. 143–162.
4. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
5. Milnor J. Infinite cyclic coverings // Topology of manifolds. Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1968. P. 115–133.
6. Milnor J. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$ // Ann. Math. Stud. 1975. №84. P. 175–225.

МИИТ

e-mail: victor@olya.ips.ras.ru

Поступило в редакцию

4.IV.1995