

УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов, В. С. Куликов

О монодромии и смешанной структуре Ходжа в когомологиях бесконечного циклического накрытия дополнения к плоской кривой

Доказана полупростота автоморфизма Александра (монодромии) в когомологиях $H^1(X_\infty) \neq 1$ бесконечного циклического накрытия дополнения к плоской неприведенной приводимой алгебраической кривой и, в частности, полупростота в $H^1(X_\infty)$ в случае неприводимой кривой; в $H^1(X_\infty)$ введена естественная смешанная структура Ходжа; вычислена иррегулярность циклических накрытий плоскости через число корней многочлена Александра кривой ветвления.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Пусть $D \subset \mathbb{C}^2$ – комплексная алгебраическая кривая, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, и пусть

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^k f_i^{m_i}(x, y) \quad (1)$$

– разложение на неприводимые множители. Обозначим через $D_i \subset \mathbb{C}^2$ неприводимую компоненту кривой D , заданную уравнением $f_i(x, y) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Функция $t = f(x, y)$ определяет морфизм $f: X \rightarrow S$, где $X = \mathbb{C}^2$, $S = \mathbb{C}^1$. Мы будем предполагать в этой статье, что общий слой этого морфизма неприводим и, в частности, $H.O.D.(m_1, \dots, m_k) = 1$.

Пусть $\varphi_n: X_n \rightarrow X$ – циклическое n -листное накрытие плоскости $\mathbb{C}^2$, где X_n – нормализация поверхности в $\mathbb{C}^3$, заданной уравнением $z^n = f(x, y)$. Обозначим $B = \varphi_n^{-1}(D)$, $X' = X \setminus D$, $X'_n = X_n \setminus B$. Тогда $\varphi_n: X'_n \rightarrow X'$ – неразветвленное накрытие. Кроме того, мы будем рассматривать бесконечное циклическое накрытие $\varphi = \varphi_\infty: X_\infty \rightarrow X'$, соответствующее универсальному накрытию $e: U \rightarrow S'$ проколотой плоскости $S' = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ верхней полуплоскостью U , $t = e(u) = e^{2\pi i u}$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \varphi: X_\infty & \xrightarrow{\varphi_{\infty, n}} & X'_n & \xrightarrow{\varphi_n} & X' \\ \downarrow f_\infty & & \downarrow f'_n & & \downarrow f' \\ e: U & \longrightarrow & S'_n & \longrightarrow & S', \end{array} \quad (2)$$

где $z \in S'_n = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t = z^n$.

Авторы выражают свою признательность Российскому Фонду фундаментальных исследований (грант № 94-01-01575) за финансовую поддержку.

В нашем случае, когда общий слой морфизма f неприводим, индуцированный гомоморфизм $f'_*: \pi_1(X') \rightarrow \pi_1(S') \cong \mathbb{F}_1$ является эпиморфизмом на свободную циклическую группу $\mathbb{F}_1$ (см., например, [3]). Обозначим $N = \ker f'_*$. Тогда $\varphi: X_\infty \rightarrow X'$ – накрытие, определенное нормальным делителем N , $\pi_1(X_\infty) = N$. Имеем изоморфизм $H_1(X_\infty, \mathbb{Z}) = N/N'$, где $N' = [N, N]$ – коммутант группы N . Точная последовательность

$$1 \rightarrow N/N' \rightarrow \pi_1(X')/N' \rightarrow \mathbb{F}_1 \rightarrow 1$$

определяет действие образующей t группы $\mathbb{F}_1$ на N/N' и превращает N/N' в $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуль. Пусть $\Delta_i(t) = \Delta_{i,D}(t)$ – i -й многочлен Александра, связанный с действием образующей t на N/N' . Определение и свойства многочленов Александра можно найти, например, в [3], [4]. Пусть $h \in \text{Deck}(X_\infty/X') = \mathbb{F}_1$ – накрывающее преобразование, соответствующее образующей $t \in \mathbb{F}_1$. Мы будем называть h *монодромией кривой D* . Многочлен Александра $\Delta(t) = \Delta_1(t)$ совпадает с характеристическим многочленом монодромии h_* в $H_1(X_\infty, \mathbb{C})$.

Нас будет интересовать связь между гомологиями аффинного многообразия X'_n и его проективного пополнения $\bar{X}_n$. Пусть $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow S = \mathbb{P}^1$ – рациональное отображение, соответствующее морфизму $f: X \rightarrow S$. Отображение f не определено лишь в точках бесконечно удаленной прямой $L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2 = f^{-1}(\infty)$. Разрешая точки неопределенности с помощью σ -процессов $\sigma: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$, мы получаем морфизм $\bar{f} = f \circ \sigma: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$. При этом $\bar{X}_0 = \bar{f}^{-1}(0) \supset D$, $\bar{f}^{-1}(\infty) \supset L_\infty$, $X' \subset X \subset \bar{X}$. Мы можем представлять себе, что $X = \mathbb{C}^2$ получено из $\bar{X}$ выкидыванием кривой $\sigma^{-1}(L_\infty)$, состоящей из некоторого числа квазисечений и некоторого числа компонент слоев морфизма $\bar{f}$. Аналогично мы можем построить пополнения $\bar{X}_n$. Мы начинаем с гиперповерхности в $\mathbb{P}^3$ с уравнением $x_n^3 = x_0^m \cdot \bar{f}(x_0, x_1, x_2)$, где $\bar{f}(x_0, x_1, x_2)$ – однородный многочлен степени $\deg f$, ассоциированный с f , $m = n - \deg f$. Пусть $\tilde{X}_n$ – нормализация этой поверхности и $\tilde{\varphi}_n: \tilde{X}_n \rightarrow \mathbb{P}^2$ индуцировано морфизмом $\varphi_n: X_n \rightarrow X$. Разрешая особенности поверхности $\tilde{X}_n$ и точки неопределенности морфизмов, мы получаем неособую поверхность $\bar{X}_n \supset X_n^0$, где $X_n^0 = X_n \setminus \text{Sing } X_n$, и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X'_n \subset X_n^0 \subset \bar{X}_n & \xrightarrow{\varphi_n} & \bar{X} \supset X & & \\ \downarrow f'_n & \downarrow f_n & \downarrow \bar{f}_n & & \downarrow \bar{f} \quad \downarrow f \\ S'_n \subset S_n \subset \bar{S}_n & \xrightarrow{\bar{e}_n} & \bar{S} \supset S & & \end{array} \quad (3)$$

Связь между гомологиями пространств X'_n и $\bar{X}_n$ в частном случае, когда кривая D неприводима и хорошо себя ведет на бесконечности, изучалась А. Либгобером в [6]. Им была доказана следующая

ТЕОРЕМА [6]. Пусть $D \subset \mathbb{C}^2$ – неприводимая алгебраическая кривая, и пусть $H.O.D.(t_1, \dots, t_D, n) = 1$, где $t_1, \dots, t_D$ – индексы пересечения $\bar{D}$ и бесконечно удаленной прямой L_∞ . Тогда:

- i) $\dim \ker i_* = 1$, где $i_*: H_1(X'_n, \mathbb{C}) \rightarrow H_1(\bar{X}_n, \mathbb{C})$ – эпиморфизм, индуцированный вложением $i: X'_n \hookrightarrow \bar{X}_n$;
- ii) $\dim H_1(\bar{X}_n, \mathbb{C}) = r_{\neq 1}(D, n)$, где $r_{\neq 1}(D, n)$ – число жордановых клеток автоморфизма Александра h в $H_1(X_\infty, \mathbb{C})$, отвечающих собственным значениям $\lambda \neq 1$ таким, что $\lambda^n = 1$.

Мы получим обобщение теоремы Либгобера на гораздо более общий случай. Прежде всего, сформулируем условия на многочлен $f(x, y)$ или на кривую $D = m_1 D_1 + \dots + m_k D_k$, которые будут участвовать в формулировках теорем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кривая D называется *связной по модулю n* , если носитель дивизора

$$D_{\text{mod } n} = \sum_{m_i \not\equiv 0 \pmod n} m_i D_i$$

является связным множеством; D называется *абсолютно связной по модулю n* , или, короче, удовлетворяет *условию C_n* , если D связна по модулю n_1 для любого делителя $n_1 > 1$ числа n .

Мы будем говорить, что кривая D удовлетворяет *условию Irr_n* , если все кривые $B_i = \varphi_n^{-1}(D_i)$, $i = 1, \dots, k$, являются неприводимыми.

Конструкция X_∞ по $X' = \mathbb{C}^2 \setminus D$ аналогична конструкции канонического общего слоя семейства неособых проективных многообразий над проколотым кругом S' , а также конструкции канонического общего слоя расслоения Милнора особенности функции [9]. Однако в нашем случае расслоение $f' : X' \rightarrow S'$ не является локально тривиальным. В случае вырождений проективных многообразий и в случае особенностей функций имеют место теоремы о монодромии и в $H^1(X_\infty)$ имеется смешанная структура Ходжа (ССХ). Мы исследуем аналогичные вопросы для $H^1(X_\infty)$ в нашем случае. Как показано в [3], [4], корни многочлена Алесандера $\Delta(t) = \det(h - t \cdot \text{Id})$ являются корнями из единицы. Обозначим $n(D)$ минимальное число l , для которого $\lambda^l = 1$ для всех корней λ многочлена $\Delta(t)$. Один из основных результатов данной работы состоит в том, что на $H_1(X_\infty)_{\neq 1}$ монодромия h полупроста. Здесь

$$H_1(X_\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda_i} H_1(X_\infty)_{\lambda_i} = H_1(X_\infty)_1 \oplus H_1(X_\infty)_{\neq 1}$$

– корневое разложение пространства $H_1(X_\infty)$ для автоморфизма h , а $H_1(X_\infty)_{\neq 1}$ – часть, соответствующая корням $\lambda \neq 1$. Отметим, что если кривая D приведена и $\overline{D}$ трансверсально пересекается с L_∞ , то в силу результата Рэндела [8] монодромия h кривой D совпадает с монодрией однородной особенности и поэтому полупроста. Мы применяем другую технику.

Сформулируем основные результаты данной работы.

ТЕОРЕМА 1. Если D удовлетворяет условию C_n , то

$$H^0(X_n, \mathcal{O}_X^*) = \mathbb{C}^*.$$

Эта теорема утверждает, что на аффинном многообразии X_n , как и на $\mathbb{C}^2$, регулярные и регулярно обратимые функции – это только константы. На ней основана

ТЕОРЕМА 2. (i) Если D удовлетворяет условиям C_n и Irr_n , то имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C} \cdot \bar{\gamma}_i \rightarrow H_1(X'_n, \mathbb{C}) \xrightarrow{i_*} H_1(\overline{X}_n, \mathbb{C}) \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $i = i_n: X'_n \subset \bar{X}_n$ – вложение, а циклы $\bar{\gamma}_i \in \ker i_*$ соответствуют простым “обходам вокруг компонент” B_i .

(ii) Кроме того, если D удовлетворяет условиям $C_{n(D)}$ и $\text{Irr}_{n(D)}$, то последовательность (4) точна для каждого n .

Условие теоремы 2, (i) выполняется, если носитель кривой D связан в $\mathbb{C}^2$ и каждая кратность t_i взаимно проста с n (в частности, если D – приведенная кривая). Если D – неприводимая кривая, то получаем результат Либгобера: $\dim \ker i_* = 1$ (условия на бесконечности излишни).

ТЕОРЕМА 3. Если кривая $D \subset \mathbb{C}^2$ удовлетворяет условиям $C_{n(D)}$ и $\text{Irr}_{n(D)}$, то монодромия h на $H_1(X_\infty)_{\neq 1}$ полупроста, т.е. все жордановы клетки автоморфизма h , соответствующие не равным единице собственным значениям, одномерны.

В частности, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если кривая D является связной кривой в $\mathbb{C}^2$ и все кратности t_i взаимно просты с $n(D)$ (в частности, если D является приведенной кривой), то монодромия h полупроста на $H_1(X_\infty)_{\neq 1}$.

Как следует из доказательства теоремы 2, если D – неприводимая кривая, $k = 1$, то $H_1(X_\infty)_1 = 0$, и мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Если D – неприводимая кривая, то монодромия h полупроста на $H_1(X_\infty)$.

Доказательство теоремы 3 использует точную последовательность Милнора, связывающую $H_1(X_\infty)$ и $H_1(X')$. В качестве следствия из теорем 2 и 3 мы получаем выражение иррегулярности поверхности $\bar{X}_n$ через число корней многочлена Александра $\Delta(t)$:

ТЕОРЕМА 4. Если кривая D удовлетворяет условиям $C_{n(D)}$ и $\text{Irr}_{n(D)}$, то для любого n иррегулярность

$$q(\bar{X}_n) = \dim H^0(\bar{X}_n, \Omega_{\bar{X}_n}^1) = \frac{1}{2} r_{\neq 1}(D, n),$$

где $r_{\neq 1}(D, n)$ – число корней $\lambda \neq 1$ многочлена $\Delta(t)$ (с учетом кратностей), для которых $\lambda^n = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если D – неприводимая кривая и n кратно $n(D)$, то

$$q(\bar{X}_n) = \frac{1}{2} \deg \Delta(t).$$

Наконец, мы вводим в когомологиях бесконечного циклического накрытия $H^1(X_\infty)$ естественную ССХ.

ТЕОРЕМА 5. Если кривая D удовлетворяет условиям $C_{n(D)}$ и $\text{Irr}_{n(D)}$, то в $H^1(X_\infty, \mathbb{Q})$ существует естественная смешанная структура Ходжа такая, что гомоморфизмы $\varphi_{\infty, n}^*: H^1(X'_n, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(X_\infty, \mathbb{Q})$ являются морфизмами ССХ. Если D – неприводимая кривая, то ССХ в $H^1(X_\infty, \mathbb{Q})$ является чистой структурой Ходжа.

§ 1. Доказательство теоремы 1

1.1. Пусть $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \bar{S} = \mathbb{P}^1$ – рациональное отображение, определяемое морфизмом $f: \mathbb{C}^2 = X \rightarrow S$, и $\sigma: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция σ -процессов, разрешающая точки неопределенности рационального отображения f до морфизма $\bar{f} = f \times \sigma: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ и такая, что собственный прообраз $\sigma^{-1}(D)$ трансверсально пересекается с полным прообразом $\sigma^*(L_\infty)$ бесконечно удаленной прямой $L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$. Пусть

$$(f) = m_1 C_1 + \dots + m_k C_k - d C_{k+1} + \sum_{i=k+2}^s m_i C_i$$

– дивизор функции f на $\bar{X}$, где $C_i = \sigma^{-1}(D_i)$ – собственные прообразы кривых D_i , $i = 1, \dots, k$, а $C_{k+1} = \sigma^{-1}(L_\infty)$. Положим

$$C = \sum_{i=1}^s C_i, \quad C' = \sum_{i=k+1}^s C_i.$$

Имеем $X = \bar{X} \setminus C'$. Пусть $\bar{\varphi}_n: \bar{X}_n \rightarrow \bar{X}$ – нормализация $\bar{X}$ в поле функций $\mathbb{C}(X_n)/\mathbb{C}(X)$. Обозначим $B_{i,j}$, $j = 1, \dots, n_i$, компоненты прообраза $\bar{\varphi}_n^{-1}(C_i)$ кривой C_i . Пусть

$$B = \varphi^{-1}(C), \quad B' = \sum_{i=k+1}^s \sum_{j=1}^{n_i} B_{i,j}.$$

Тогда $X_n = \bar{X}_n \setminus B'$ и $\bar{\varphi}_n$ неразветвлен вне B .

Обозначим

$$I_n = H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}^*) \setminus \mathbb{C}^*.$$

Требуется доказать, что $I_n = \emptyset$. Мы будем доказывать теорему 1 от противного. Пусть $I_n \neq \emptyset$ и $g \in I_n$. Многочлен g определяет рациональное отображение $\bar{g}: \bar{X}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$. Его точки неопределенности лежат на B' . Как хорошо известно, мы можем разрешить точки неопределенности $\bar{g}$, сначала делая дополнительные σ -процессы на $\bar{X}$, а затем рассматривая нормализацию. Так как $g \in I_n$, то $\bar{g}(X_n) \subset \mathbb{C}^*$ и слои $\bar{g}^{-1}(\infty)$ и $\bar{g}^{-1}(0)$ состоят из компонент B' . Слои $\bar{g}$ могут быть несвязными. Применяя факторизацию Штейна, мы можем пропустить $\bar{g}$ через расслоение $\check{g}: \bar{X}_n \rightarrow Y$ со связными слоями на кривую Y , накрывающую $\mathbb{P}^1$. Мы проанализируем накрытие $\bar{\varphi}_n$ и расслоение $\check{g}$ и покажем, что, заменяя n на его делитель ($\neq 1$) и меняя g с помощью конструкции, “убивающей” компоненты ветвления $\bar{\varphi}_n$ в (g) , на новую функцию, получим расслоение $\check{g}$ такое, что циклическая группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle h_n \rangle$ действует послойно и тем самым действует на Y и приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{X}_n & \xrightarrow{\bar{\varphi}_n} & \bar{X} \supset (f) = \sum m_i C_i \\ & \swarrow \bar{g} & \downarrow \check{g} & & \downarrow \hat{g} \\ \mathbb{P}^1 & \longleftarrow & Y & \xrightarrow{\psi_n} & Y/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{P}^1. \end{array} \quad (\#)$$

Кривая $Y/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ является рациональной, так как она является образом рациональной поверхности $\bar{X} \simeq \mathbb{P}^2$. Мы докажем, что функцию $g \in I_n$ можно выбрать

так, что ψ_n ветвится в одной единственной точке. Из этого противоречия следует доказательство.

Мы начнем с исследования ветвления $\bar{\varphi}_n$ над бесконечно удаленной прямой $C_{n+1} \simeq L_\infty$.

1.2. Выбор “хорошей” системы координат на $\mathbb{C}^2$. Построение поверхности $\bar{X}$, а следовательно, и $\bar{X}_n$, начинается с проективного пополнения $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$. Это стандартное пополнение определяется выбором аффинной структуры на $\mathbb{C}^2$, т.е. пары глобальных координатных функций, которые мы считаем линейными.

ЛЕММА 1. Пусть $D \subset \mathbb{C}^2$ — произвольная кривая степени d с уравнением (1) и $\varphi_n: X_n \rightarrow \mathbb{C}^2$ — нормализация накрытия, определенного уравнением $z^n = f(x, y)$. Тогда существует новая система координат на $\mathbb{C}^2$ такая, что если $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ — стандартное проективное замыкание относительно линейной структуры, определенной этими координатами, а $\bar{\varphi}_n: \bar{X}_n \rightarrow \mathbb{P}^2$ — нормализация $\mathbb{P}^2$ в поле функций $\mathbb{C}(X_n)$, то морфизм $\bar{\varphi}_n$ неразветвлен над прямой $L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$, а прообраз $\bar{\varphi}_n^{-1}(L_\infty)$ распадается на n неприводимых компонент, изоморфных L_∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала сделаем линейную замену координат x и y так, чтобы форма f_d старшей степени в f содержала член y^d , $f = ay^d + \dots$, $a \neq 0$. Затем возьмем целое m , кратное n и d , например $m = nd$, и сделаем замену координат

$$x = u, \quad y = v + u^n.$$

Тогда $f(x, y) = \tilde{f}(u, v) = au^{nd} +$ (члены степени $< nd$). Рассмотрим стандартное проективное замыкание $\mathbb{P}^2$ относительно линейной структуры, определенной координатами u и v , и накрытие $\bar{\varphi}_m: \bar{X}_m \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени $m = nd$. Тогда ясно, во-первых, что L_∞ не входит в дивизор ветвления $\bar{\varphi}_m$, а, во-вторых, пересечение $\bar{D}$ и L_∞ состоит из одной точки $(0 : 0 : 1)$. Поэтому ветвление ограничения $\bar{\varphi}_m$ над L_∞ может состоять только из одной точки и, следовательно, $\bar{\varphi}_m^{-1}(L_\infty)$ состоит из m компонент. Так как накрытие $\bar{\varphi}_m$ пропускается через накрытие $\bar{\varphi}_n$, то над L_∞ накрытие $\bar{\varphi}_n$ удовлетворяет тем же свойствам, что и $\bar{\varphi}_m$. Лемма доказана.

Итак, мы можем предполагать далее, что $\bar{\varphi}_n$ не разветвлено над бесконечно удаленной прямой C_{k+1} и ее прообраз

$$\bar{\varphi}_n^{-1}(C_{k+1}) = B_{k+1,1} + \dots + B_{k+1,n}$$

состоит из n компонент.

1.3. Собственные функции в I_n . Спуск на накрытие меньшей степени. Группа $\mu_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = (h_n)$ действует на X_n и, следовательно, действует на $H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n})$ как группа автоморфизмов $\mathbb{C}$ -алгебры. Очевидно, что $I_n = H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}^*) \setminus \mathbb{C}^*$ инвариантно относительно этого действия.

Очевидно, что если некоторая кривая $B_{i,j} \subset \bar{X}_n$ инвариантна относительно $(h_n)^l$, то функция $(h_n^*)^l(g)$ имеет на $B_{i,j}$ нуль или полюс того же порядка, что и g . Поэтому кривая $B_{i,j}$ не входит в дивизор функции $(h_n^*)^l(g)/g$.

Мы можем воспользоваться заменой g на $(h_n^*)^l(g)/g$ для “удаления” компонент $B_{i,j}$ из слоев морфизма $\bar{g}$ над точками 0 и $\infty \in \mathbb{P}^1$. Очевидно, что если $g \in I_n$, то функция $(h_n^*)^l(g)/g \in H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}^*)$, и для того, чтобы она принадлежала I_n , нам надо побеспокоиться о том, чтобы она не была константой, т.е.

$$(h_n^*)^l(g) \neq cg, \quad (*)$$

где $c = \text{const}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Заменяя, быть может, n на его делитель $n' > 1$, мы можем считать, что условие (*) выполняется для всех $g \in I_n$ и всех $l = 1, \dots, n-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что если $(h_n^*)(g) = cg$, то $(h_n^*)^n(g) = c^n g = g$, так как $(h_n^*)^n = \text{id}$, и, следовательно, $c^n = 1$. Тогда $(h_n^*)(g^n) = (h_n^*(g))^n = g^n$ и, следовательно, g^n инвариантна относительно h_n^* , т.е. инвариантна относительно группы μ_n . Поэтому функция g^n поднята с $\mathbb{C}^2 = X_n/\mu_n$. Так как функция g^n и ее обратная не обращаются в нуль, а на $\mathbb{C}^2$ такими функциями являются только константы, то $g^n = \text{const}$, следовательно, $g = \text{const}$, т.е. $g \notin I_n$. Это противоречие показывает, что условие (*) выполняется для всех $g \in I_n$ при $l = 1$.

Обозначим

$$n(g) = \min\{l \in \mathbb{N}: (h_n^*)^l(g) = cg\},$$

и пусть

$$n' = \min\{n(g), g \in I_n\}.$$

Тогда в силу предыдущего рассуждения $n' > 1$. Кроме того, существует $g \in I_n$ такая, что $(h_n^*)^{n'}(g) = cg$. Как и выше, заменяя g на g^n , мы можем считать, что $c = 1$, т.е. g инвариантна относительно $(h_n^*)^{n'}$. Следовательно, g поднята с $X_{n'}$, где она также принадлежит $I_{n'}$, т.е. $I_{n'} \neq \emptyset$, и мы можем заменить n на n' . Для n' утверждение 1 справедливо по выбору n' .

1.4. Выбор подходящей функции g . Разобьем компоненты C_i , $i = k+1, \dots, s$, на две части. Обозначим

$$R = \left\{ i \in \mathbb{N}: k+1 \leq i \leq s \text{ и либо } n \text{ не делит } m_i, \text{ либо } C_i \text{ пересекается с} \right. \\ \left. \text{компонентой } C_j, \text{ для которой } m_j \text{ не делится на } n \right\}.$$

Компоненты C_i , $i \in R$, либо входят в дивизор ветвления $\bar{\varphi}_n$, либо пересекаются с этим дивизором. В любом случае, если $i \in R$, то прообраз $(\bar{\varphi}_n)^{-1}(C_i)$ имеет n_i компонент $B_{i,1}, \dots, B_{i,n_i}$, число которых $n_i < n$.

Наоборот, обозначим

$$U = \{i \in \mathbb{N}: k+1 \leq i \leq s, i \notin R\}$$

дополнительное к R множество индексов. Тогда для $i \in U$ компонента C_i не является ветвлением для $\bar{\varphi}_n$ и не пересекается с ветвлением. Так как $C_i \simeq \mathbb{P}^1$, то отсюда следует, что $(\bar{\varphi}_n)^{-1}(C_i)$, $i \in U$, распадается на n несвязных компонент $B_{i,1}, \dots, B_{i,n}$, изоморфных C_i . Напомним, что в силу 1.1

$$n+1 \in U.$$

Из сказанного вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для любого $i \in R$ существует число r_i , $1 \leq r_i < n$, такое, что*

$$(h_n^*)^{r_i}(B_{i,j}) = B_{i,j}, \quad 1 \leq j \leq n_i.$$

Теперь, пользуясь утверждениями 1 и 2, мы можем модифицировать функцию g так, чтобы компоненты $B_{i,j}$ при $i \in R$ не входили в дивизор (g) . Действительно, если некоторая компонента $B_{i,j}$, $i \in R$, входит в (g) , то, заменяя функцию g на $(h_n^*)^{r_i}(g)/g$, мы получим функцию, дивизор которой не содержит $B_{i,j}$. С другой стороны, в силу утверждения 1 функция $(h_n^*)^{r_i}(g)/g \neq \text{const}$ и, следовательно, принадлежит I_n . Применяя эту процедуру последовательно ко всем компонентам $B_{i,j}$ с $i \in R$, мы получим

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $I_n \neq \emptyset$, то мы можем выбрать $g \in I_n$ так (быть может, заменив предварительно n на его делитель $n' > 1$), что компоненты $B_{i,j}$ с $i \in R$ не входят в дивизор (g) .

Если функция g удовлетворяет утверждению 3, то дивизор (g) не пересекается с дивизором ветвления морфизма $\bar{\varphi}_n$. Поэтому мы можем разрешить точки неопределенности отображения $\bar{g}$, делая дополнительные σ -процессы на $\bar{X}$, а затем рассматривая нормализацию $\bar{X}_n$, т.е. можем считать, что $\bar{g}$ является регулярным отображением.

1.5. Инвариантность структуры расслоения $\bar{g}$ относительно действия μ_n . В этом пункте мы покажем, что группа μ_n переводит слои морфизма $\bar{g}$ в слои. Мы считаем, что g выбрано, как в утверждении 3. Тогда носитель дивизора (g) содержится в кривой

$$B_U = \sum_{i \in U} \sum_{j=1}^n B_{i,j} = \bar{\varphi}_n^{-1}(C_U),$$

где $C_U = \sum_{i \in U} C_i$. Рассмотрим связные компоненты кривой C_U . Пусть $C_{U_1} = \sum_{i \in U_1} C_i$ — одна из таких компонент. Тогда по определению U прообраз $\bar{\varphi}_n^{-1}(C_{U_1})$ состоит из n компонент $B_{U_1,j}$, $j = 1, \dots, n$, каждую из которых $\bar{\varphi}_n$ изоморфно отображает на C_{U_1} . При этом группа μ_n транзитивно действует на множестве компонент связности $B_{U_1,j}$, $j = 1, \dots, n$.

Сделаем одно замечание, из которого следует, что носитель дивизора (g) содержится в $B_{U_1} = \bar{\varphi}_n^{-1}(C_{U_1})$, где C_{U_1} — та компонента связности в C_U , которая содержит кривую C_{k+1} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если B — кривая на неособой поверхности X и матрица пересечений компонент кривой B отрицательно определена, а g — функция на X , для которой в окрестности B носитель $\text{Supp}(g) \subset B$, то в окрестности B функция g регулярна и не обращается в нуль. Действительно, кривая B может быть стянута в нормальную особую точку, и дивизор функции g в окрестности этой точки по предположению пуст. Поэтому g не имеет ни нулей, ни полюсов в окрестности этой точки.

Применим это замечание к прообразам компоненты связности C_{U_i} кривой C . Все компоненты связности C_{U_i} , кроме C_{U_1} , состоят из кривых, полученных при раздутии неособых точек. Поэтому матрица пересечений компонент кривой C_{U_i} отрицательно определена, если $C_{k+1} \notin C_{U_i}$. То же самое справедливо для любой части кривой C_{U_1} , в которую не входит компонента C_{k+1} . Кроме того, дивизоры нулей и полюсов функции g не пересекаются, так как $\bar{g}$ по построению является морфизмом. Отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. (i) $\text{Supp}(g) \subset B_{U_1} = \bar{\varphi}_n^{-1}(C_{U_1})$, где C_{U_1} — связная компонента C_U , содержащая C_{k+1} .

(ii) Если g имеет нуль (соответственно полюс) на компоненте $B_{k+1,j}$, то g не имеет полюсов (соответственно нулей) на $B_{U_1,j}$.

(iii) Если $B_{k+1,j} \not\subset \text{Supp}(g)$, то и ни одна компонента из $B_{U_1,j}$ не входит в $\text{Supp}(g)$.

Рассмотрим расслоение $\bar{g}$ поверхности $\bar{X}_n$ и связанное с ним расслоение $\bar{g}$ со связными слоями (см. диаграмму (#)). Кривые на $\bar{X}_n$ делятся на два типа: те,

которые лежат в слоях морфизма $\bar{g}$, и те, которые отображаются на $\mathbb{P}^1$. Если некоторая кривая $Z \subset \bar{X}_n$ не пересекается с некоторым слоем морфизма $\bar{g}$, то она сама лежит в слое. Пусть связная компонента слоя $\bar{g}^{-1}(\infty)$ лежит, например, в $B_{U_1,1}$. Группа μ_n переставляет $B_{U_1,j}$, $j = 1, \dots, n$, и при $j_1 \neq j_2$ дивизоры B_{U_1,j_1} и B_{U_1,j_2} не пересекаются. Поэтому μ_n переводит связные компоненты слоя $\bar{g}^{-1}(\infty)$ в связные компоненты некоторого слоя морфизма $\bar{g}$. Отсюда также следует, что μ_n переводит связные компоненты любого слоя морфизма $\bar{g}$ в связные компоненты слоя. Поэтому μ_n действует на слоях морфизма $\bar{g}$ и, следовательно, действует на Y , и мы получаем накрытие $\psi_n: Y \rightarrow Y/\mu_n = \mathbb{P}^1$.

1.6. Исследование ветвления накрытия ψ_n . Пусть связная компонента S слоя $\bar{g}^{-1}(\infty)$ (слой морфизма $\bar{g}$) лежит, например, в $B_{U_1,1}$. Обозначим $\psi_n \times \bar{g}(S) = \infty \in \mathbb{P}^1$. Так как группа μ_n действует на слоях морфизма $\bar{g}$, а также переставляет $B_{U_1,j}$, $j = 1, \dots, n$, и при $j_1 \neq j_2$ дивизоры B_{U_1,j_1} и B_{U_1,j_2} не пересекаются, то прообраз $\psi_n^{-1}(\infty)$ состоит из n различных точек. Поэтому ψ_n не разветвлен над ∞ .

Так как $\bar{g}^{-1} \cdot \psi_n^{-1}(\infty) \subset \bar{X}_n \setminus X_n$, то из коммутативной диаграммы (#) следует, что ограничение $\bar{g}|_{X=\mathbb{C}^2} = \check{g}$ отображает X на $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{C}^1$. Выберем системы координат на $X = \mathbb{C}^2$ и на $\mathbb{C}^1$. Морфизм $\check{g}$ в этих координатах задается уравнением $z = g(x, y)$, где $g(x, y)$ – некоторый многочлен. Отметим, что для любой константы $c \in \mathbb{C}$ из многочлена $g(x, y) - c$ в кольце $\mathbb{C}[x, y]$ не может быть извлечен корень степени r для любого натурального $r > 1$, так как морфизм $\check{g}$ имеет связные слои.

Для всех $i < k + 1$ таких, что m_i не кратно n , кривые $B_{i,j}$ лежат в слоях морфизма $\check{g}_n$ по построению функции g , так как эти кривые не пересекаются с $B_{U_1,j}$. С другой стороны, ограничение морфизма $\bar{\varphi}_n$ на X_n совпадает с φ_n , который разветвлен только над $D_{\text{mod } n}$. В силу абсолютной по модулю n связности дивизора D все компоненты дивизора $D_{\text{mod } n}$ должны лежать в одном и том же слое морфизма $\bar{g}$. Обозначим этот слой через S_1 , $\bar{g}(S_1) = 1 \in \mathbb{C}^1$.

Покажем, что морфизм $\psi_n: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ не имеет ветвления над всеми точками $z \in \mathbb{P}^1$, кроме точки $z = 1$. Действительно, как упоминалось выше, φ_n не разветвлен над $\infty \in \mathbb{P}^1$. Предположим, что φ_n разветвлен над точкой $z = c$, $c \neq 1$ (не ограничивая общности, мы можем считать, что $z = 0$). Выберем локальный параметр τ в прообразе точки $z = 0$ так, что $\tau^{n_1} = \psi_n^*(z)$, где $n_1 > 1$. Тогда для того, чтобы морфизм φ_n не ветвился над точками из $\bar{g}^{-1}(\{z = 0\})$, необходимо, чтобы все компоненты кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $g(x, y) = 0$, имели кратности, делящиеся на n_1 . Но это означает, что из многочлена $g(x, y)$ можно извлечь корень степени n_1 , что невозможно.

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось заметить, что морфизм $\psi_n: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени $\deg \psi_n = n > 1$ обязан иметь более одной точки ветвления.

§ 2. Следствие из теоремы 1

В качестве следствия из теоремы 1 мы получаем, что с точки зрения одномерных гомотопий при компактификации $X'_n \subset \bar{X}_n$ существенны только компоненты $B_i = \varphi_n^{-1}(D_i)$, которые лежат на нормализации X_n^0 .

СЛЕДСТВИЕ (из теоремы 1). Если кривая D удовлетворяет условию C_n , то вложение $i: X_n^0 \hookrightarrow \bar{X}_n$ индуцирует изоморфизм

$$i_*: H_1(X_n^0) \xrightarrow{\sim} H_1(\bar{X}_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность X_n имеет изолированные нормальные особенности в точках $\text{Sing } X_n$ и $X_n^0 = X_n \setminus \text{Sing } X_n$. Мы можем считать, что при компактификации X_n и при разрешении особенностей “добавляется” кривая $E = \overline{X}_n \setminus X_n^0$, которая является дивизором с нормальными пересечениями на $\overline{X}_n$. Тогда компоненты E_i дивизора $E = E_1 + \dots + E_s$ линейно независимы в $(\text{Pic } \overline{X}_n) \otimes \mathbb{Q}$, так как иначе существует функция $g \in \mathbb{C}(\overline{X}_n)$, отличная от константы и такая, что $\text{Supp}(g) \subset E$. Тогда g и g^{-1} – регулярные функции на X_n^0 . Следовательно, g и g^{-1} – регулярные функции на X_n , так как X_n – нормальная поверхность и $X_n^0 = X_n \setminus \text{Sing } X_n$. Поэтому $g = \text{const}$ в силу теоремы 1. Мы получаем доказательство следствия из того факта, что числа Бетти $b_1(X_n^0)$ и $b_1(\overline{X}_n)$ совпадают, как вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ [1]. Пусть Z – гладкая проективная поверхность, и пусть $E = E_1 + \dots + E_s$ – дивизор с нормальными пересечениями на Z . Тогда

$$b_1(Z \setminus E) - b_1(Z) = s - \rho(E),$$

где $b_1(\cdot)$ – первое число Бетти, а $\rho(E)$ – размерность подпространства в $(\text{Pic } Z) \otimes \mathbb{Q}$, порожденного классами $[E_i]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из точной последовательности вычета Пуанкаре:

$$0 \rightarrow H^0(Z, \Omega_Z^1) \rightarrow H^0(Z, \Omega_Z^1(\log E)) \rightarrow H^0(E^{(1)}, \mathcal{O}_{E^{(1)}}) \rightarrow H^1(Z, \Omega_Z^1),$$

где $E^{(1)}$ – несвязное объединение кривых E_i , и из спектральной последовательности $E_1^{pq} = H^q(Z, \Omega_Z^p(\log E)) \Rightarrow H^{p+q}(Z \setminus E, \mathbb{C})$, которая вырождается в члене E_1 .

§ 3. Доказательство теоремы 2, (i)

Очевидно, что i_* – эпиморфизм, так как любой 1-цикл в $\overline{X}_n$ мы можем сдвинуть с дивизора $\overline{X}_n \setminus X_n^0$, имеющего вещественную коразмерность 2.

В силу следствия теоремы 1 мы можем вместо $\overline{X}_n$ рассматривать X_n^0 , отличающееся от X_n^0 на k кривых

$$X_n^0 \setminus X'_n = \bigcup_{i=1}^k B_i, \quad B_i = \varphi_n^{-1}(D_i).$$

Укажем k циклов, порождающих $\ker i_*$. Пусть L – прямая в $\mathbb{C}^2$, трансверсально пересекающаяся с кривой D . Обозначим γ_i окружность малого радиуса в L с центром в одной из точек пересечения $D_i \cap L$. Хорошо известно, что циклы $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, соответствующие выбранным петлям, образуют базис в $H_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, \mathbb{Z})$ и не зависят от выбора прямой L . Рассмотрим накрытие $\varphi_n: X_n \rightarrow X$, и пусть $\bar{\gamma}_i, i = 1, \dots, k$, – цикл в $H_1(X'_n, \mathbb{Z})$, соответствующий простому обходу в $\varphi_n^{-1}(L)$ вокруг одной из точек пересечения $\varphi_n^{-1}(L)$ и B_i .

ЛЕММА 2. Циклы $\bar{\gamma}_i, i = 1, \dots, k$, линейно независимы в $H_1(X'_n, \mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из замечания о том, что при гомоморфизме $(\varphi_n)_*: H_1(X'_n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, \mathbb{Z})$ образ $(\varphi_n)_*(\bar{\gamma}_i) = n_i \gamma_i$, где n_i – индекс ветвления морфизма φ_n вдоль кривой B_i .

ЛЕММА 3. Если D удовлетворяет условию Irr_n , то циклы $\bar{\gamma}_i$ порождают $\ker i_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\ker i_*$ порождается циклами, “обходящими” компоненты $X_n^0 \setminus X_n'$. По условию Irr_n таких компонент имеется k , $B_i = \varphi_n^{-1}(D_i)$, $i = 1, \dots, k$.

§ 4. Точная последовательность Милнора

Рассмотрим бесконечное циклическое накрытие $\varphi = \varphi_\infty: X_\infty \rightarrow X' = \mathbb{C}^2 \setminus D$ из диаграммы (2). Если $\mathbb{F}_1$ – свободная группа, порожденная монодромией h , то $X' = X_\infty/\mathbb{F}_1$. В этой ситуации Милнор [7] рассмотрел точную последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow C.(X_\infty) \xrightarrow{h-\text{id}} C.(X_\infty) \xrightarrow{\varphi_*} C.(X') \rightarrow 0,$$

которая приводит к точной последовательности гомологий

$$\dots \rightarrow H_1(X_\infty) \xrightarrow{h-\text{id}} H_1(X_\infty) \xrightarrow{\varphi_*} H_1(X') \rightarrow H_0(X_\infty) \rightarrow 0. \quad (5)$$

(Мы часто пишем h вместо h_* , если это не приводит к недоразумению.)

Для анализа группы $H_1(X_\infty)$ мы применим последовательности (5_n) для бесконечного циклического накрытия $\varphi_{\infty,n}: X_\infty \rightarrow X_n'$, построенные так же, как и (5). Если $G_n \subset \mathbb{F}_1$ – бесконечная циклическая группа, порожденная h^n , то $X_n' = X_\infty/G_n$, а $X' = X_n'/\mu_n$, где $\mu_n = \mathbb{F}_1/G_n$ – циклическая группа порядка n . Обозначим h_n автоморфизм на X_n' , индуцированный h . Тогда h_n – образующая группы μ_n , которая соответствует также образующей группы Галуа $\text{Gal}(\mathbb{C}(X_n')/\mathbb{C}(X'))$.

Соединим вместе точные последовательности (5_n) и (4):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \vdots & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & H_1(X_\infty) & & & \\ & & & \downarrow h^n - \text{id} & & & \\ & & & H_1(X_\infty) & & & \\ & & & \downarrow (\varphi_{\infty,n})_* & & & \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C} \bar{\gamma}_i & \longrightarrow & H_1(X_n') & \xrightarrow{(i_n)_*} & H_1(\bar{X}_n) \longrightarrow 0. \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & H_0(X_\infty) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array} \quad (6_n)$$

Точнее, мы пока знаем только, что группа

$$H_B(n) =: \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C} \cdot \bar{\gamma}_i \subset \ker(i_n)_*,$$

а при выполнении условия C_n имеем $H_B(n) = \ker(i_n)_*$.

Дальше нас будет интересовать структура автоморфизма $h = h_*$ в $H_1(X_\infty)$. Обозначим

$$H_1(X_\infty) = \oplus H_1(X_\infty)_{\lambda_i} = H_1(X_\infty)_{\lambda=1} \oplus H_1(X_\infty)_{\lambda \neq 1}$$

корневое разложение, где $H_1(X_\infty)_{\lambda \neq 1} = \bigoplus_{\lambda_i \neq 1} H_1(X_\infty)_{\lambda_i}$. Аналогичные обозначения будут применяться для корневого разложения пространства $H_1(X'_n)$, соответствующего автоморфизму $h_n = (h_n)_*$. Ниже нам потребуется легкое упражнение из линейной алгебры.

ЛЕММА 4. Пусть h – автоморфизм векторного пространства $V/\mathbb{C}$. Тогда:

(i) если в жордановом разложении h имеется только одна жорданова клетка с собственным значением $\lambda \neq 0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ автоморфизм h^n также имеет только одну жорданову клетку с собственным значением λ^n ; отсюда следует:

(ii) если h не имеет собственных значений $\lambda = 0$, то размеры и число жордановых клеток у h^n такие же, как и у h ;

(iii) если h имеет одну жорданову клетку и $\lambda \neq 1$, то $h - \text{id}: V \rightarrow V$ – изоморфизм, а если $\lambda = 1$, то $\dim \ker(h - \text{id}) = \dim V/(h - \text{id})V = 1$.

Обозначим $J = J(h)$ число жордановых клеток автоморфизма h , а $J_1 = J_{\lambda=1}$, $J_n = J_{\lambda^n=1}$, $J_{\neq 1}$ – числа жордановых клеток с собственным значением $\lambda = 1$, с собственными значениями λ такими, что $\lambda^n = 1$, и с не равными 1 собственными значениями соответственно.

Применим лемму 4 к автоморфизму h^n пространства $H_1(X_\infty)$ в диаграмме (6_n) . Гомоморфизмы $(\varphi_{\infty, n})_*$ и $(i_n)_*$ в этой диаграмме являются эквивариантными; монодромии h в $H_1(X_\infty)$ соответствует автоморфизм $h_n = (h_n)_*$ в $H_1(X'_n)$ и $H_1(\bar{X}_n)$ (мы можем считать, что пополнение $\bar{X}_n$ выбрано так, что h_n регулярно действует на $\bar{X}_n$). Из леммы 4 следует, что

$$\dim H_1(X'_n) = J_1(h^n) + 1 = J_n(h) + 1 \quad (7)$$

и каждой клетке оператора h в $H_1(X_\infty)$ в $\text{Im}(\varphi_{\infty, n})_* \subset H_1(X'_n)$ соответствует один собственный вектор оператора h_n в $H_1(X'_n)$ с таким же собственным значением.

§ 5. Доказательство теоремы 2, (ii)

Пусть выполнены условия $C_{n(D)}$ и $\text{Irr}_{n(D)}$. Тогда в силу части (i) теоремы 2 последовательность (4) точна при $n = n(D)$.

Мы покажем, что последовательность (4) соответствует корневому разложению оператора h_n :

$$\ker i_* = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C} \cdot \bar{\gamma}_i = H_1(X'_n, \mathbb{C})_{\lambda=1}, \quad H_1(\bar{X}_n, \mathbb{C}) \simeq H_1(X'_n, \mathbb{C})_{\neq 1}.$$

ЛЕММА 5. Оператор h_n в $H_1(\bar{X}_n, \mathbb{C})$ не имеет собственных значений $\lambda = 1$,

$$H_1(\bar{X}_n, \mathbb{C}) = H_1(\bar{X}_n, \mathbb{C})_{\neq 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть двойственное пространство $H^1(\bar{X}_n, \mathbb{C})$ и его инвариантное подпространство $H^{0,1} = H^0(\bar{X}_n, \Omega_{\bar{X}_n}^1)$. Но если $H^0(\bar{X}_n, \Omega_{\bar{X}_n}^1)_1 \neq 0$, то на $\bar{X}_n$ имеется 1-форма ω , инвариантная относительно h_n . Поэтому ω получается из 1-формы на $\bar{X}_n/(h_n) \simeq \mathbb{P}^2$. Поэтому $\omega = 0$, так как на рациональных многообразиях нет регулярных 1-форм. Следовательно, $H_1(\bar{X}_n, \mathbb{C})_{\lambda=1} = 0$.

Из леммы 5 следует, что

$$H_1(X'_n)_{\lambda=1} \subset \ker(i_n)_*.$$

ЛЕММА 6. Если выполнено условие Irr_n , т.е. кривые B_i являются неприводимыми, то

$$H_B(n) \subset H_1(X'_n)_{\lambda=1}.$$

Таким образом, $H_B(n) \subset \ker(i_n)_*$, и поэтому всегда

$$\dim \ker(i_n)_* \geq k. \quad (8)$$

Пусть $n, q \in \mathbb{N}$. Сравним гомологии поверхностей X'_n и X'_{qn} . Имеем неразветвленное накрытие $X'_{qn} \rightarrow X'_n$. Мы можем считать, что оно продолжается до морфизма $\bar{X}_{qn} \rightarrow \bar{X}_n$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(i_{qn})_* & \longrightarrow & H_1(X'_{qn}) & \xrightarrow{(i_{qn})_*} & H_1(\bar{X}_{qn}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker(i_n)_* & \longrightarrow & H_1(X'_n) & \xrightarrow{(i_n)_*} & H_1(\bar{X}_n) \longrightarrow 0. \end{array} \quad (9)$$

Из описания $H_1(X'_{qn})$ и $H_1(X'_n)$ с помощью точных последовательностей Милнора (5_{qn}) и (5_n) и из леммы 4 следует, что $H_1(X'_{qn}) \rightarrow H_1(X'_n)$ является эпиморфизмом. Отсюда следует, что и $H_1(\bar{X}_{qn}) \rightarrow H_1(\bar{X}_n)$ тоже является эпиморфизмом. Это мы получим также с помощью другого рассуждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Теорема 2, (ii) верна в случае, когда n кратно $n(D)$, т.е. $n = q \cdot n(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму (9) для $n = n(D)$. Тогда $J_{qn(D)} = J_{n(D)}$, и поэтому $\dim H_1(X'_{qn(D)}) = \dim H_1(X'_{n(D)})$. В силу теоремы 2, (i) $\dim \ker(i_{n(D)})_* = k$, а из (8) следует, что $\dim \ker(i_{qn(D)})_* \geq k$. Поэтому из диаграммы (9) следует, что $\dim \ker(i_{qn(D)})_* = k$, т.е.

$$H_B(n) = \ker(i_{n(D)})_* = H_1(X'_{qn(D)})_{\lambda=1}.$$

Пусть теперь n — произвольное натуральное число. В диаграмме (9) возьмем $q = n(D)$. Тогда в силу предыдущего предложения для верхней строки в (9) имеем $\dim \ker(i_{qn})_* = k = J_1 + 1$. Так как $\dim H_1(X'_{qn}) = J_{qn} + 1$, то $\dim H_1(\bar{X}_{qn}) = J_{qn} + 1 - k = J_{qn} - J_1$. Для нижней строки в (9) имеем

$$\dim \ker(i_n)_* \geq k, \quad \dim H_1(X'_n) = J_n + 1.$$

Мы хотим доказать, что $\dim \ker(i_n)_* = k$. Для этого исследуем эпиморфизм $H_1(\bar{X}_{qn}) \rightarrow H_1(\bar{X}_n)$. Рассмотрим двойственное отображение (мономорфизм) $H^1(\bar{X}_n) \rightarrow H^1(\bar{X}_{qn})$, соответствующее накрытию $\bar{X}_{qn} \rightarrow \bar{X}_n$. Для $(0,1)$ -части, т.е. на голоморфных формах это отображение индуцирует вложение $H^0(\bar{X}_n, \Omega_{\bar{X}_n}^1) \subset H^0(\bar{X}_{qn}, \Omega_{\bar{X}_{qn}}^1)$. Так как $\bar{X}_n = \bar{X}_{qn}/\mu_q$, где μ_q — циклическая группа порядка q , порожденная h^n , то $H^0(\bar{X}_n, \Omega_{\bar{X}_n}^1) = H^0(\bar{X}_{qn}, \Omega_{\bar{X}_{qn}}^1)^{\mu_q}$ — инвариантные голоморфные формы, и $H^1(\bar{X}_n) = H^1(\bar{X}_{qn})^{\mu_q}$ состоит из тех $H^1(\bar{X}_{qn})_\lambda$, для которых $\lambda^n = 1$. Поэтому

$$\dim H_1(\bar{X}_n) = \dim H^1(\bar{X}_n) = J_n - J_1 = J_n + 1 - k.$$

Следовательно, $\dim \ker(i_n)_* = J_n + 1 - (J_n + 1 - k) = k$, и теорема 2, (ii) доказана для любого n .

СЛЕДСТВИЕ. Если кривая D удовлетворяет условиям $C_{n(D)}$ и $\text{Irr}_{n(D)}$, то для любого n

$$\dim H_1(\bar{X}_n) = J_n - J_1 = r_{\neq 1}(D, n), \quad (10)$$

где $r_{\neq 1}(D, n)$ — число жордановых клеток монодромии h в $H_1(X_\infty, \mathbb{C})$ с собственными значениями $\lambda \neq 1$, для которых $\lambda^n = 1$.

Мы переходим к доказательству теоремы 3. Мы хотим сравнить действие оператора монодромии $h = h_*$ в $H_1(X_\infty)$ с действием оператора монодромии в $H_1(Y)$, где Y — общий слой расслоения $X_n \rightarrow S_n$, близкий к нулевому слою Y_0 . Для этого нам необходимо напомнить, как устроена предельная ССХ для хорошего вырождения кривых [2].

§ 6. Монодромия в гомологиях общего слоя хорошего вырождения кривых

В этом параграфе мы временно сменим обозначения. Пусть $\pi: X \rightarrow S$ — хорошее вырождение кривых над кругом S , т.е. π — проективный морфизм, гладкий над $S' = S \setminus \{0\}$, а вырожденный слой $X_0 = \pi^{-1}(0) = C_1 + \dots + C_k$ есть приведенный дивизор с нормальными пересечениями (дополнительно можно считать, что компоненты C_i неособы). Общий слой $X_t = \pi^{-1}(t)$ есть неособая кривая рода $g = g(X_t)$.

Пусть

$$X_0 \xleftarrow{\nu} \tilde{X}_0 = \prod_{i=1}^k \tilde{C}_i$$

— нормализация кривой X_0 , $\tilde{g} = g(\tilde{X}_0) = \sum \tilde{g}_i$, Γ — двойственный граф кривой X_0 . ССХ в $H^1(X_0)$ вводится так, что

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma) \rightarrow H^1(X_0) \rightarrow H^1(\tilde{X}_0) \rightarrow 0$$

есть точная последовательность ССХ. В частности, если 0W — весовая фильтрация, $H^1(X_0) = {}^0W_1 \supset {}^0W_0 \supset 0$, то ${}^0W_0 = H^1(\Gamma)$, $\text{Gr}_1^{{}^0W} = {}^0W_1 / {}^0W_0 \simeq H^1(\tilde{X}_0)$.

Пусть $r: X \rightarrow X_0$ — ретракция на нулевой слой, а $r_t: X_t \rightarrow X_0$ — ее ограничение на X_t . Пусть

$$V = \ker((r_t)_*: H_1(X_t) \rightarrow H_1(X_0))$$

– пространство исчезающих циклов. Пусть $h: X_t \rightarrow X_t$ – геометрическая монодромия, соответствующая образующей в $\pi_1(S')$, а $M = h_*$, $T = (h^*)^{-1}$ – монодромии в $H_1(X_t)$ и $H^1(X_t)$ соответственно. В данном случае монодромия полупроста [2], $T = T_u$, и по теореме о монодромии $(T - \text{id})^2 = 0$, т.е. нильпотентный оператор $N =: \log T_u$ равен $T - \text{id}$.

Весовая фильтрация W . предельной ССХ в $H^1(X_t)$ определяется как весовая фильтрация оператора N , $W = W(N)$,

$$H^1(X_t) = W_2 \supset W_1 \supset W_0 \supset 0, \quad W_0 = \text{Im } N, \quad W_1 = \ker N = H^1(X_t)^T.$$

Последовательность Клеменса–Шмида

$$0 \rightarrow H^1(X_0) \xrightarrow{(r_t)^*} H^1(X_t) \xrightarrow{N} H^1(X_t) \rightarrow H_1(X_t) \rightarrow 0$$

является точной последовательностью ССХ, причем морфизмы $(r_t)^*$ и N имеют типы $(0, 0)$ и $(-1, -1)$ соответственно.

Рассмотрим более геометрическую двойственную картину для гомологий. Имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & H_1(\tilde{X}_0) & & & H_1(\bar{X}) & & \\
 & \downarrow & \nearrow i_* & & \uparrow j_* & & \\
 0 \leftarrow H_1(X_0) & \xleftarrow[(0,0)]{(r_t)^*} & H_1(X_t) & \xleftarrow[(1,1)]{N^*} & H_1(X_t) & \leftarrow H^1(X_0) \leftarrow 0, & (11) \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & H_1(\Gamma) & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & 0 & & & & &
 \end{array}$$

в которой строка – это точная последовательность Клеменса–Шмида, а столбец дает весовую фильтрацию 0W в $H_1(X_0)$,

$$\begin{aligned}
 H_1(X_0) &= {}^0W_0 \supset {}^0W_{-1} \supset 0, \quad {}^0W_{-1} = H_1(\tilde{X}_0), \\
 \text{Gr}_0^{{}^0W} &= {}^0W_0 / {}^0W_{-1} \simeq H_1(\Gamma).
 \end{aligned}$$

Кроме того, в диаграмме содержится член $H_1(\bar{X})$, который нам потребуется ниже.

Весовая фильтрация W . предельной ССХ в $H_1(X_t)$ – это фильтрация нильпотентного оператора $N^* = M - \text{id}$, она устроена так:

$$\begin{aligned}
 H_1(X_t) &= W_0 \supset W_{-1} \supset W_{-2} \supset 0, \quad W_{-2} = \text{Im } N^* = \ker(r_t)_* = V, \\
 W_{-1} &= \ker N^* = H_1(X_t)^M.
 \end{aligned}$$

Имеем

$$H_1(X_0) = H_1(X_t) / \ker(r_t)_* = W_0 / W_{-2}, \quad W_{-1} / W_{-2} \simeq {}^0W_{-1} = H_1(\tilde{X}_0), \\ W_0 / W_{-1} \simeq {}^0W_0 / {}^0W_{-1} \simeq H_1(\Gamma).$$

Мы можем выбрать базис $(\delta, \delta', \gamma', \gamma)$ в $H_1(X_t)$ в соответствии с весовой фильтрацией W . Разобьем базисные векторы на три части: исчезающие базисные векторы δ , геометрические базисные векторы δ', γ' и комбинаторные базисные векторы γ . Сначала выберем базис $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_v)$ в $W_{-2} = V$. Это исчезающие циклы. Затем выберем базис в $W_{-1} / W_{-2} \simeq H_1(\tilde{X}_0)$ и возьмем их представители в W_{-1} , $(\delta', \gamma') = (\delta'_1, \dots, \delta'_g, \gamma'_1, \dots, \gamma'_g)$ — это геометрические базисные векторы. Наконец, выберем базис в $W_0 / W_{-1} \simeq H_1(\Gamma)$ и возьмем их представители в W_0 , $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_v)$; это — комбинаторные базисные векторы.

Очевидно, что двумерным клеткам монодромии M в $H_1(X_t)$ соответствуют двумерные подпространства, которые натянуты на один исчезающий и один комбинаторный циклы.

Пусть теперь поверхность $X \subset \bar{X}$ вложена (или просто отображается) в проективную поверхность $\bar{X}$. Обозначим $i: X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{X}$ и $j: X_t \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{X}$ соответствующие вложения (отображения). Так как X_0 есть гомотопический ретракт X , то треугольник в диаграмме (11) коммутативен: $i_* \cdot (r_t)_* = j_*$.

ЛЕММА 7. *Комбинаторную часть базиса γ в $H_1(X_t)$ можно выбрать так, что $j_*(\gamma) = 0$ в $H_1(\bar{X})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. диаграмму (11)). CCX в $H_1(\bar{X})$ является чистой веса -1 , $H_1(\bar{X}) = \bar{W}_{-1} \supset \bar{W}_{-2} = 0$. С другой стороны, $i_*: H_1(X_0) \rightarrow H_1(\bar{X})$ есть морфизм CCX . Поэтому i_* строго согласован с фильтрацией и, следовательно,

$$\text{Im } i_* = i_*({}^0W_{-1}H_1(X_0)) = i_*H_1(\tilde{X}_0).$$

Комбинаторные векторы получаются из векторов в $H_1(\Gamma)$. Прообраз γ такого вектора в $H_1(X_0)$ определен по модулю $H_1(\tilde{X}_0)$, и мы можем выбрать $\gamma \in H_1(X_0)$ так, что $i_*(\gamma) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. *Можно так выбрать жорданово разложение монодромии в пространстве $H_1(X_t)$, что для подпространства L , соответствующего двумерной жордановой клетке, $j_*(L) = 0$ в $H_1(\bar{X})$.*

Действительно, можно считать, что $L = \mathbb{C} \cdot \delta \oplus \mathbb{C} \cdot \gamma$, где δ — исчезающий, а γ — комбинаторный векторы. Тогда в силу леммы 7 можно считать, что $j_*(\gamma) = 0$, а $j_*(\delta) = 0$, так как $j_* = i_* \cdot (r_t)_*$ и $(r_t)_*(\delta) = 0$.

§ 7. Доказательство теоремы 3

Пусть $Y = X_t = f^{-1}(t)$, соответственно $\bar{Y} = \bar{X}_t = \bar{f}^{-1}(t)$, есть неособый слой (близкий к нулевому) морфизма f , соответственно $\bar{f}$, из диаграммы (3). Морфизмы φ_n и φ_∞ являются неразветвленными накрытиями и слои $\varphi_n^{-1}(Y)$ и $\varphi_\infty^{-1}(Y)$ распадаются на компоненты, изоморфные Y . Выбирая точки $u \in e_\infty^{-1}(t)$ и $t \in e_n^{-1}(t)$,

мы можем считать, что Y вложено в X_∞ и X'_n в качестве слоев $f_\infty^{-1}(u)$ и $f_\infty^{-1}(\tilde{t})$ так, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xlongequal{\quad} & Y & \hookrightarrow & \bar{Y} \\ j_\infty \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow \bar{j} \\ X_\infty & \xrightarrow[\varphi_{\infty,n}]{} & X'_n & \hookrightarrow_{i_*} & \bar{X}_n. \end{array}$$

Получаем коммутативную диаграмму для гомологий

$$\begin{array}{ccccc} H_1(Y) & \xlongequal{\quad} & H_1(Y) & \longrightarrow & H_1(\bar{Y}) \\ (j_\infty)_* \downarrow & & \downarrow j_* & & \downarrow \bar{j}_* \\ H_1(X_\infty) & \longrightarrow & H_1(X'_n) & \xrightarrow[i_*]{} & H_1(\bar{X}_n). \end{array} \quad (12)$$

На пространствах $H_1(X_\infty)$, $H_1(X'_n)$, $H_1(Y)$ (и $H_1(\bar{Y})$) действуют операторы монодромии, которые мы обозначаем h , h_n и T соответственно. Очевидно, что гомоморфизмы $(j_\infty)_*$, j_* и $\bar{j}_*$ эквивариантны, т.е. коммутируют с действием операторов монодромии.

Рассмотрим часть диаграммы (12), соответствующую собственным значениям $\lambda \neq 1$:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_1(Y)_{\neq 1} & \longrightarrow & H_1(\bar{Y}) \\ & \swarrow (j_\infty)_* & \downarrow & & \downarrow \bar{j}_* \\ H_1(X_\infty)_{\neq 1} & \xrightarrow[(\varphi_{\infty,n})_*]{} & H_1(X'_n)_{\neq 1} & \xrightarrow[i_*]{\sim} & H_1(\bar{X}_n). \end{array} \quad (13)$$

Сделаем несколько замечаний.

1) $(j_\infty)_*: H_1(Y)_{\neq 1} \rightarrow H_1(X_\infty)_{\neq 1}$ является эпиморфизмом. Это следует (см., например, [3], [4]) из эпиморфности гомоморфизма

$$\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X_\infty) = N = \ker(\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^1 \setminus \{0\})).$$

2) На $\text{соker}(\varphi_{\infty,n})_* = H_0(X_\infty)$ (см. диаграмму (6_n)) монодромия действует тривиально. Поэтому $H_1(X_\infty)_{\neq 1} \rightarrow H_1(X'_n)_{\neq 1}$ является эпиморфизмом.

3) $H_1(X'_n)_{\neq 1} \xrightarrow{i_*} H_1(\bar{X}_n)$ является изоморфизмом в силу (доказательства) теоремы 2, (ii).

4) $H_1(Y) \rightarrow H_1(\bar{Y})$ является эпиморфизмом, причем его ядро инвариантно относительно монодромии и порождено циклами, которые соответствуют обходам вокруг точек $\bar{Y} \setminus Y$, “лежащих на бесконечности”. Геометрический базис в $H_1(\bar{Y})$ и эти циклы на бесконечности дают разложение $H_1(Y)_{\neq 1} = \ker \oplus H_1(\bar{Y})$, инвариантное относительно монодромии. На $\ker$ монодромия T полупроста. Это следует из того, что вблизи точки пересечения квазисечения морфизма $\bar{f}$ с компонентой кратности m нулевого слоя $\bar{f}^{-1}(0)$ “бесконечно удаленные циклы” переставляются, и поэтому T имеет конечный порядок.

5) Если на пространстве $H_1(X_\infty)_{\neq 1}$ монодромия имеет двумерную клетку L , то для любого жорданова разложения монодромии в $H_1(Y)_{\neq 1}$ имеется двумерная клетка, которая отображается на L . Здесь мы называем клеткой инвариантное

подрпространство, на котором гомоморфизм в жордановом разложении состоит из одной клетки.

Напомним, что мы хотим доказать, что монодромия h на $H_1(X_\infty)_{\neq 1}$ полупроста. В силу леммы 4 из § 4 мы можем вместо h рассматривать h^n . В силу теоремы Мамфорда о полустабильной редукции [5] мы можем выбрать n так, что нулевой слой морфизма $\bar{X}_n \rightarrow \bar{S}_n$ является хорошим. Мы попадаем в ситуацию § 6, в котором слой $\bar{Y}$ обозначался X_t (а монодромия в $H^1(X_t)$ равна T^n).

Теперь мы переходим к ключевому месту доказательства. Если на $H_1(X_\infty)_{\neq 1}$ автоморфизм h^n имеет двумерную клетку L , то в силу замечаний 4) и 5) мы можем считать, что L является образом двумерной клетки $\bar{L}$ монодромии в $H_1(\bar{Y})$. Тогда, с одной стороны, в силу следствия из леммы 7 в § 6 мы можем выбрать жорданово разложение на $H_1(\bar{Y})$ так, что для двумерных клеток $\bar{L}$ имеем $\bar{j}_*(\bar{L}) = 0$. С другой стороны, в силу (7) каждой жордановой клетке оператора h^n в $H_1(X_\infty)_{\neq 1}$, в том числе соответствующей подрпространству $\bar{j}_*(\bar{L})$, соответствует один ненулевой вектор в $H_1(X'_n)_{\neq 1} \simeq H_1(\bar{X}_n)$ при гомоморфизме $(\varphi_{\infty, n})_*$. Это противоречие доказывает теорему 3.

§ 8. О смешанной структуре Ходжа в $H^1(X_\infty)$

Мы хотим ввести ССХ в $H^1(X_\infty, \mathbb{Q})$ так, чтобы гомоморфизмы

$$(\varphi_{\infty, n})^*: H^1(X'_n) \rightarrow H^1(X_\infty)$$

были морфизмами ССХ. Многообразие X'_n является неособым алгебраическим многообразием, поэтому в $H^1(X'_n)$ имеется ССХ, введенная Делинем [2]. Напомним, что для определения ССХ на $H^1(X'_n)$ мы должны взять неособое проективное многообразие $\bar{X}_n \supset X'_n$ такое, что $\bar{X}_n \setminus X'_n = \bar{D}$ есть дивизор с нормальными пересечениями. Весовая фильтрация W определяет спектральную последовательность

$${}_W E_1^{p, q} \Rightarrow H^{p+q}(X'_n),$$

которая вырождается в члене E_2 и для которой ${}_W E_1^{-l, k+l} = H^{k-l}(\bar{D}^{(l)})$, где $\bar{D}^{(l)}$ есть несвязное объединение l -кратных пересечений компонент дивизора $\bar{D}$. Из этой спектральной последовательности получаем точную последовательность ССХ

$$0 \rightarrow H^1(\bar{X}_n) \rightarrow H^1(X'_n) \rightarrow H^0(\bar{D}^{(1)}) \rightarrow H^2(\bar{X}_n),$$

причем на $H^1(\bar{X}_n)$ имеется чистая структура Ходжа веса 1; $\bar{D}^{(1)}$ – это несвязное объединение компонент кривой $\bar{D}$ и на $H^0(\bar{D}^{(1)})$ имеется чистая структура Ходжа веса 2 и типа $(1, 1)$. В нашем случае в силу теоремы 2 эта точная последовательность есть точная последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\bar{X}_n) \rightarrow H^1(X'_n) \rightarrow \oplus \mathbb{C} \cdot \gamma_i^* \rightarrow 0, \quad (4)$$

двойственная последовательности (4). Если W – весовая фильтрация в $H^1(X'_n)$, $H^1(X'_n) = W_2 \supset W_1 \supset 0$, то $W_1 = H^1(\bar{X}_n)$, а $\text{Gr}_2^W = W_2/W_1 = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C} \cdot \gamma_i^*$. На $H^1(\bar{X}_n)$ имеется чистая структура Ходжа веса 1, а на Gr_2^W – чистая структура веса 2 и типа $(1, 1)$.

В нашем случае на $H^1(X'_n)$ действует циклическая группа μ_n (и группа $\mathbb{F}_1 = \mathbb{Z}$), порожденная монодромией h_n^* — образом монодромии $h^* \in \mathbb{F}_1$ в $\mu_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. h_n^* есть изоморфизм ССХ, так как h_n — изоморфизм алгебраического многообразия X'_n . Из доказательства теоремы 2, (ii) следует, что если $\bigoplus_i H^1(X'_n)_{\lambda_i}$ — разложение пространства $H^1(X'_n)$, то

$$H^1(\overline{X}_n) = H^1(X'_n)_{\neq 1}, \quad H^1(X'_n)_1 \simeq \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C} \cdot \gamma_i^*.$$

Поэтому ССХ в $H^1(X'_n)$ расщепляется и является прямой суммой чистых структур Ходжа в $H^1(\overline{X}_n)$ и в $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C} \cdot \gamma_i^*$.

Рассмотрим диаграмму, двойственную диаграмме (6_n) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & H^1(X_\infty) & & & & \\
 & & \uparrow (h^*)^n - \text{id} & & & & \\
 & & H^1(X_\infty) & & & & \\
 & & \uparrow (\varphi_{\infty, n})^* & & & & \\
 0 \longrightarrow & H^1(\overline{X}_n) & \longrightarrow & H^1(X'_n) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C} \cdot \gamma_i^* & \longrightarrow 0. \\
 & & & \uparrow & & & \\
 & & & H^0(X_\infty) & & & \\
 & & & \uparrow & & & \\
 & & & 0 & & &
 \end{array} \quad (6_n)$$

Пусть $\bigoplus_i H^1(X_\infty)_{\lambda_i}$ — корневое разложение пространства $H^1(X_\infty)$ для монодромии h . В силу теоремы 3 если $n(D) \mid n$, то

$$H^1(X'_n)_{\neq 1} \xrightarrow{(\varphi_{\infty, n})^*} H^1(X_\infty)_{\neq 1}$$

является изоморфизмом. Поэтому если мы введем ССХ в $H^1(X_\infty)$ как прямую сумму чистой структуры Ходжа веса 1 в $H^1(X_\infty)_{\neq 1}$, полученной с помощью изоморфизма $(\varphi_{\infty, n(D)})^*$, и чистой структуры Ходжа веса 2 и типа $(1, 1)$ в $H^1(X_\infty)_1$, то, очевидно, все гомоморфизмы $(\varphi_{\infty, n})^*$ будут морфизмами ССХ и теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы ввели ССХ в $H^1(X_\infty)$, потребовав, чтобы все $(\varphi_{\infty, n})^*$ были морфизмами ССХ. Это, конечно, примитивная постановка вопроса. Естественно вводить ССХ во всех $H^k(X_\infty)$ сразу, функториально, à la Делинь, и в более общей постановке. Формально фильтрации можно ввести на комплексе дифференциальных форм: ходжева фильтрация — глупая, а весовая — каноническая. Здесь возникает ряд вопросов: как быть с бесконечномерностью $H^k(X_\infty)$, является ли точная последовательность Милнора последовательностью ССХ и т.д.? Этому будет посвящена другая работа.

Список литературы

1. *Esnault H.* Fibre de Milnor d'un cone sur une courbe plane singuliere // *Invent. Math.* 1982. V. 54. №2. P. 318–327.
2. *Griffiths Ph. and Schmid W.* Recent development in Hodge theory: a discussion of techniques and results // *Proc. Int. Coll. Bombay.* 1973:: Oxford Univ. Press, 1975. P. 31–127.
3. *Куликов Вук. С.* Многочлены Александра плоских алгебраических кривых // *Изв. АН. Сер. матем.* 1993. Т. 57. №1. С. 76–101.
4. *Куликов Вук. С.* Многочлены Александра плоских алгебраических кривых. II // *Тр. МИАН.* 1994. Т. 208.
5. *Kempf G. et al.* Toroidal embeddings // *Lect. Notes Math.* 1973. V. 339: Springer–Verlag.
6. *Libgober A.* Alexander polynomials of plane algebraic curves and cyclic multiple planes // *Duke Math. J.* 1982. V. 49. P. 833–851.
7. *Milnor J.* Infinite cyclic coverings // *Topology of manifolds.* Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1968. P. 115–133.
8. *Randell R.* Milnor fibres and Alexander polynomials of plane curves // *Pros. Symp. Pure Math.* 40. Part 2.: AMS, 1983. P. 415–420.
9. *Steenbrink J. H. M.* Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology // *Real and Complex Singularities* / ed. P. Holm. Oslo. 1976. P. 525–563. Sijthoff–Noordhoff: Alphen a/d Rijn, 1977.

Поступило в редакцию

11.10.1994