

УДК 512.7

Вик.С. Куликов

Многочлены Александра плоских алгебраических кривых. II

1. Пусть $\bar{D} \subset \mathbb{P}^2$ — алгебраическая кривая, и пусть $\bar{D} = \bar{D}_1 \cap \dots \cap \bar{D}_n$ — разложение $\bar{D}$ на неприводимые компоненты. Обозначим через $L_\infty \subset \mathbb{P}^2$ бесконечно удаленную прямую, и пусть $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$, $D_i = \bar{D}_i \cap \mathbb{C}^2$. Обозначим через $f_i(x, y) = 0$ уравнения кривых D_i , где $f_i(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ — неприводимые многочлены.

Пусть $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ — вектор с целыми положительными координатами. Положим $m_0 = \text{НОД}(m_1, \dots, m_n)$ и $m'_i = m_i/m_0$. Вектор $\bar{m}_{\text{prim}} = (m'_1, \dots, m'_n)$ будем называть примитивным вектором.

Обозначим через

$$F_{\bar{m}} : X = \mathbb{C}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (1)$$

морфизм, заданный уравнением

$$z = \prod_{i=1}^n f_i^{m'_i}(x, y).$$

Мы будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$\text{Общий слой } F_{\bar{m}}^{-1}(z) = Y_z \text{ связан.} \quad (*)$$

Если D является связным множеством в $\mathbb{C}^2$, то $F_{\bar{m}}$ удовлетворяет условию (*).

В [5] были изучены некоторые свойства $\bar{m}$ -многочленов Александра кривой D в случае, когда $\bar{m} = (1, \dots, 1)$ (см. определение $\bar{m}$ -многочленов Александра в п. 1.2). Также в [5] в случае трансверсального пересечения кривых D_i была вычислена иррегулярность $q(\bar{X}_k)$ неособой поверхности $\bar{X}_k$, бирационально изоморфной поверхности, заданной в $\mathbb{C}^3$ уравнением

$$z^k = \prod_{i=1}^n f_i(x, y).$$

Цель данной статьи — распространить результаты из [5] на общий случай $\bar{m}$.

С основными результатами по данной тематике можно ознакомиться в [5, 7, 8, 12–14].

1.1. Хорошо известно, что существует конечное множество

$$\{z_1, \dots, z_k\} \subset \mathbb{C}^*$$

такое, что

$$F_{\tilde{m}} : X \setminus F_{\tilde{m}}^{-1}(\{z_1, \dots, z_k\}) \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$$

является локально тривиальным расслоением класса C^∞ . Как и в [5], обозначим через B_i диск с центром в z_i радиуса $r_i \ll 1$, и пусть ∂B_i — его граница. Выберем по две точки $z_{i,1}, z_{i,2}$ на каждой ∂B_i . Точки $z_{i,1}$ и $z_{i,2}$ делят ∂B_i на две дуги $\gamma_{i,1}$ и $\gamma_{i,2}$. Выберем не пересекающиеся друг с другом пути γ_i , соединяющие точки $z_{i,1}$ и $z_{i+1,2}$ ($z_{n+1,2} = z_{1,2}$), и пусть $\gamma_{i,1}$ — та из дуг в ∂B_i , для которой $l_{in} = (\cup \gamma_{i,1}) \cup (\cup \gamma_i)$ является границей ограниченной области V , содержащей начало координат $o \in \mathbb{C}^1$ и такой, что $z_i \notin V$ для всех $i, 1 \leq i \leq n$. Пусть l_{ex} — граница множества $V \cup (\cup B_i)$. Положим $T = (\cup B_i) \cup (\cup \gamma_i)$. Множество $Z = F_{\tilde{m}}^{-1}(T)$ называется $\tilde{m}$ -ожерельем (или просто ожерельем) кривой D .

Так как T — ретракт пространства $\mathbb{C}^*$, а расслоение

$$F_{\tilde{m}} : X \setminus Z \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus T$$

C^∞ -локально тривиально, то имеет место следующее

Предложение 1. Если D и $\tilde{m}$ удовлетворяют условию (*), то пространство $X = \mathbb{C}^2 \setminus D$ и ожерелье Z кривой D гомотопны.

Таким образом, $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \simeq \pi_1(Z)$ и, более того, мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) & \xleftarrow{\quad} & \pi_1(Z) & & \\ F_{\tilde{m}*} \downarrow & & \downarrow F_{\tilde{m}*} & & \\ \pi_1(\mathbb{C}^*) & \xleftarrow{\quad} & \pi_1(T) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{F}_1, \end{array}$$

в которой $\mathbb{F}_1$ — свободная группа, $\text{rg } \mathbb{F}_1 = 1$. Легко видеть, что $F_{\tilde{m}*}$ является эпиморфизмом.

Пусть $Y = F_{\tilde{m}}^{-1}(z_0)$ — слой над некоторой точкой $z_0 \in \gamma_1 \subset T \cup l_{in} \cup l_{ex}$. Вложение $Y \subset Z$ индуцирует гомоморфизм $\psi : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(Z)$. Очевидно, $\text{Im } \psi \subset \text{Ker } F_{\tilde{m}*}$. Как в [5], легко показать, что верна следующая

Теорема 1. Если $D \subset \mathbb{C}^2$ и вектор $\tilde{m}$ удовлетворяют условию (*), то следующая последовательность:

$$\pi_1(Y) \xrightarrow{\psi} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \xrightarrow{F_{\tilde{m}*}} \mathbb{F}_1 \longrightarrow 1$$

является точной.

Следствие 1. Если $D \subset \mathbb{C}^2$ и вектор $\tilde{m}$ удовлетворяют условию (*), то

$$N = \text{Ker } F_{\tilde{m}*}$$

является конечно порожденной группой.

1.2. Пусть $Z_{\text{in(ex)}} = F^{-1}(l_{\text{in(ex)}})$. Тогда включения $Y \subset Z_{\text{in(ex)}} \subset Z$ и морфизм $F_{\bar{m}}$ приводят к следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & \pi_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_{\text{in}}} & \pi_1(Z_{\text{in}}) & \xrightarrow{F_{\bar{m}*}} & \mathbb{F}_1 \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow \psi & & \downarrow \beta_{\text{in}} & & \downarrow \cong \\
 1 & \rightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(Z) & \xrightarrow{F_{\bar{m}*}} & \mathbb{F}_1 \rightarrow 1 \\
 & & \uparrow \psi & & \uparrow \beta_{\text{ex}} & & \uparrow \cong \\
 1 & \rightarrow & \pi_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_{\text{ex}}} & \pi_1(Z_{\text{ex}}) & \xrightarrow{F_{\bar{m}*}} & \mathbb{F}_1 \rightarrow 1
 \end{array} \quad (2)$$

Отображения $F_{\bar{m}} : Z_{\text{in}} \rightarrow l_{\text{in}}$ и $F_{\bar{m}} : Z_{\text{ex}} \rightarrow l_{\text{ex}}$ являются локально тривиальными расслоениями. Таким образом, строки в этой диаграмме являются точными.

Пусть $N' = [N, N]$ — коммутант группы N , $(N/N')_{\text{Тог}}$ — подгруппа в N/N' , состоящая из всех элементов конечного порядка, и пусть $(N/N')_{\text{Free}} = (N/N')/(N/N')_{\text{Тог}}$ — фактор-группа.

Средняя строка в (2) определяет действие образующей $\tau \in \mathbb{F}_1$ на N/N' и, следовательно, определяет действие τ на $(N/N')_{\text{Free}}$. Обозначим этот автоморфизм через $h_{\bar{m}}$.

Аналогично верхняя и нижняя строки в (2) определяют действия $\tau \in \mathbb{F}_1$ на $H_1(Y)$. Обозначим эти автоморфизмы через $h_{\bar{m}, \text{in}}$ и $h_{\bar{m}, \text{ex}}$ соответственно.

О п р е д е л е н и е. Многочлен $\Delta_{\bar{m}}(t) = \det(h_{\bar{m}} - t \text{Id})$ называется $\bar{m}$ -многочленом Александра кривой D .

Многочлены $\Delta_{\bar{m}, \text{in}}(t) = \det(h_{\bar{m}, \text{in}} - t \text{Id})$ и $\Delta_{\bar{m}, \text{ex}}(t) = \det(h_{\bar{m}, \text{ex}} - t \text{Id})$ называются внутренними и внешними многочленами кривой D соответственно.

Т е о р е м а 2. Многочлен $\Delta_{\bar{m}, D}(t)$ является делителем многочленов $\Delta_{\bar{m}, \text{in}}(t)$ и $\Delta_{\bar{m}, \text{ex}}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 4 в [5].

1.3. Морфизм $F_{\bar{m}}$ определяет рациональное отображение

$$F_{\bar{m}} : \mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup L_{\infty} \rightarrow \mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}.$$

Пусть $\sigma : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ — такая композиция σ -процессов, что выполнены следующие условия:

- (i) $\bar{F}_{\bar{m}} = F_{\bar{m}} \cdot \sigma : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ является морфизмом;
- (ii) приведенные слои $\bar{Y}_{0, \text{red}} = \bar{F}_{\bar{m}}^{-1}(0)_{\text{red}}$, $\bar{Y}_{\infty, \text{red}} = \bar{F}_{\bar{m}}^{-1}(\infty)_{\text{red}}$ являются дивизорами с нормальными пересечениями;
- (iii) дивизор $\sigma^{-1}(L_{\infty})_{\text{red}}$ является дивизором с нормальными пересечениями.

Пусть $\sigma^{-1}(L_{\infty})_{\text{red}} = \bar{L}_{\infty} \cup R$ — такое разложение, что для каждой неприводимой компоненты R_i дивизора R его образ $\bar{F}_{\bar{m}}(R_i)$ есть точка, и $\bar{F}_{\bar{m}}(L_{\infty, i}) = \mathbb{P}^1$ для каждой компоненты $L_{\infty, i}$ дивизора $\bar{L}_{\infty}$.

Обозначим через $Y_0 = \overline{F}_{\overline{m}}^{-1}(0) \setminus \overline{L}_\infty$ и $Y_\infty = \overline{F}_{\overline{m}}^{-1}(\infty) \setminus \overline{L}_\infty$ слои морфизма $\overline{F}_{\overline{m}} : \mathbb{P}^2 \setminus \overline{L}_\infty \rightarrow \mathbb{P}^1$, и пусть

$$Y_0 = \sum_{i=1}^{N_0} m_i D_i, \quad Y_\infty = \sum_{i=1}^{N_\infty} r_i R_i$$

— разложение на неприводимые компоненты. Положим

$$D_i^0 = D_i \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} (D_i \cap D_j) \right), \quad R_i^0 = R_i \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} (R_i \cap R_j) \right).$$

Очевидно, $h_{\text{in}, \overline{m}}$ и $h_{\text{ex}, \overline{m}}$ являются операторами монодромии, индуцированными обходами вокруг слоев Y_0 и Y_∞ соответственно.

Хорошо известно (см., например, [1]), что

$$\Delta_{\overline{m}, \text{in}}(t) = (t-1) \prod_{i=1}^{N_0} (t^{m_i} - 1)^{-\chi(D_i^0)}, \quad (3)$$

$$\Delta_{\overline{m}, \text{ex}}(t) = (t-1) \prod_{i=1}^{N_\infty} (t^{r_i} - 1)^{-\chi(R_i^0)}, \quad (4)$$

где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика пространства M .

С л е д с т в и е 2. *Корнями многочлена $\Delta_{\overline{m}, D}(t)$ являются корни из единицы.*

З а м е ч а н и е 1. Если кривая $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \dots \cup \overline{D}_n$ пересекается трансверсально с L_∞ , то

$$\Delta_{\overline{m}, \text{ex}}(t) = (t-1) (t^{\sum d_i m'_i} - 1)^{\sum d_i - 2},$$

где $d_i = \deg \overline{D}_i$.

2. В этом пункте будет рассмотрен чисто алгебраический способ определения $\overline{m}$ -многочленов Александера.

Пусть $I_q = \{1, 2, \dots, q\}$ — отрезок натурального ряда $\mathbb{N}$, $M \subset I_q^3 = I_q \times I_q \times I_q$ — некоторое подмножество и $|M| = \#M$ — число точек множества M .

О п р е д е л е н и е. Группа G называется *C-группой* типа M , если G обладает следующим копредставлением:

$$G = \langle x_1, \dots, x_q \mid \{R_\alpha(x)\}_{\alpha \in M} \rangle, \quad (5)$$

где для $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ соотношение

$$R_\alpha(x) = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} x_{\alpha_1}^{-1} x_{\alpha_3}^{-1}$$

есть сопряжение (буква "C" в слове "C-группа" — первая буква в слове "conjugation").

2.1. П р и м е р ы C -групп:

1. Свободная группа $\mathbb{F}_n$.
2. Свободная абелева группа Ab_n .
3. Группа кос B_n .
4. Группы узлов и зацеплений (копредставление Виртингера).
5. Фундаментальные группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ дополнений к плоским алгебраическим кривым D (копредставление из [3]).

2.2. Каждому C -копредставлению типа M мы можем сопоставить ориентированный граф Γ_M с вершинами $v_1, \dots, v_q$ и ребрами e_α , $\alpha \in M$. Для $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ребро e_α соединяет вершину v_{α_2} с v_{α_3} .

Легко доказать следующее утверждение.

Л е м м а 1 [5]. Пусть G — C -группа типа M и $G' = [G, G]$. Тогда $G/G' = \mathbb{Z}^n$, где n — число связных компонент графа Γ_M .

C -группа G типа M называется *неприводимой C -группой*, если ее граф Γ_M связан.

Пусть $\Gamma_M = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ — разложение на связные компоненты. Для каждой Γ_j обозначим через $I(j) = \{i \in I_q \mid v_i \notin \Gamma_j\}$. Группа

$$G_j = \langle x_1, \dots, x_q \mid \{R_\alpha\}_{\alpha \in M} \cup \{x_i\}_{i \in I(j)} \rangle$$

называется неприводимой компонентой C -группы G типа M , и мы скажем, что C -группа G составлена из n неприводимых компонент G_j .

Пусть G — C -группа, составленная из n неприводимых компонент. Для $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ определим гомоморфизм

$$F_{\bar{m}*} : G \rightarrow \mathbb{F}_1 = \langle \tau \mid \emptyset \rangle \quad (6)$$

так, что

$$F_{\bar{m}*}(x_j) = \tau^{m(j)}$$

для каждой образующей x_j группы G , где $m(j) = m_i$ для $j \in I_q \setminus I(i)$. Очевидно, $F_{\bar{m}*}$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда $m_0 = \text{НОД}(m_1, \dots, m_n) = 1$. В общем случае

$$F_{\bar{m}*} = (m_0) \cdot F_{\bar{m}_{\text{prim}}*},$$

где $(m_0) : \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$ — гомоморфизм, заданный: $(m_0)(\tau) = \tau^{m_0}$. Обозначим через $N = \text{Ker } F_{\bar{m}*}$ ядро гомоморфизма $F_{\bar{m}*}$.

З а м е ч а н и е 2. Если $G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ и копредставление группы G совпадает с копредставлением из [3], то в случае $\bar{m} = \bar{m}_{\text{prim}}$ гомоморфизм (6) совпадает с гомоморфизмом, индуцированным морфизмом (1).

2.3. Следуя [9], сопоставим каждой C -группе G двумерный связный симплициальный комплекс K с одной вершиной x_0 , 1-остов которого состоит из q ориентированных петель s_i . Петли s_i взаимно однозначно соответствуют образующим x_i группы G .

$$K \setminus (\vee s_i) = \bigsqcup_{\alpha \in M} S_\alpha^0$$

состоит из несвязного объединения открытых дисков. Для $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ диск S_α подклеивается к 1-остову вдоль пути $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}^{-1} s_{\alpha_3}^{-1}$. Очевидно, $\pi_1(K, x_0) \simeq G$.

Гомоморфизм $F_{\tilde{m}*} : G \rightarrow \mathbb{F}_1$ определяет бесконечное циклическое накрытие $f : \tilde{K} \rightarrow K$ такое, что $\pi_1(\tilde{K}) = N$ и $H_1(\tilde{K}, \mathbb{Z}) = N/N'$ (здесь мы предполагаем, что $\tilde{m}$ является примитивным вектором).

Пусть $\tilde{K}_0 = f^{-1}(x_0)$ и $\tilde{K}_1$ — 1-остов комплекса $\tilde{K}$. Имеем следующие точные последовательности:

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(\tilde{K}, \tilde{K}_1) & \xrightarrow{\mu} & H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0) & \xrightarrow{\nu} & H_1(\tilde{K}, \tilde{K}_0) & \rightarrow & 0 \\ & & & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & H_1(\tilde{K}) & \rightarrow & H_1(\tilde{K}, \tilde{K}_0) & \xrightarrow{\partial} & H_0(\tilde{K}_0) \rightrightarrows H_0(\tilde{K}) \quad (7) \\ & & \parallel & & & & \\ & & N/N' & & & & \end{array}$$

Действие $\mathbb{F}_1$ на $\tilde{K}$ определяет структуру $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуля на каждом члене этой диаграммы.

Опишем более подробно возникающие на этих членах структуры $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуля. Для этого фиксируем одну из вершин $p_0 \in \tilde{K}$. Пусть $p_i = t^i p_0$ — образ точки p_0 при действии $\tau^i \in \mathbb{F}_1$. Тогда $\bar{s}_j$, $j = 1, \dots, q$, являются образующими свободного $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуля $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$, где $\bar{s}_j$ — ребро с началом в точке p_0 и концом в точке $p_{m(j)}$ и такое, что петля s_j накрывается этим ребром. Ребро $t^i \bar{s}_j$ с началом в точке p_i , накрывающее петлю s_j , является образом ребра $\bar{s}_j$ под действием τ^i .

Описание действия $\mathbb{F}_1$ на $H_1(\tilde{K})$ точно такое же, как и на $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$.

З а м е ч а н и е 3. Легко видеть, что описанное выше действие $\mathbb{F}_1$ на $H_1(\tilde{K}) \simeq N/N'$ совпадает с действием $\mathbb{F}_1$ на N/N' , индуцированным точной последовательностью

$$1 \rightarrow N/N' \rightarrow G/N' \xrightarrow{F_{\tilde{m}*}} \mathbb{F}_1 \rightarrow 1.$$

Образующие свободного $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модуля $H_2(\tilde{K}, \tilde{K}_1)$ суть диски $\bar{S}_\alpha$, подклеенные к 1-остову вдоль путей $\bar{s}_{\alpha_1} \cup t^{m(\alpha_1)} \bar{s}_{\alpha_2} \cup t^{m(\alpha_2)} \bar{s}_{\alpha_1}^{-1} \cup \bar{s}_{\alpha_3}^{-1}$.

Легко видеть, что координаты вектора $\mu(\bar{S}_\alpha) \in H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ в базисе $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_q$ равны либо

$$A_\alpha = (0, \dots, 0, 1 - t^{m(\alpha_2)}, 0, \dots, 0, t^{m(\alpha_1)} - 1, 0, \dots, 0) \quad (8)$$

для $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3 \neq \alpha_1$, либо

$$A_\alpha = (0, \dots, 0, 1 - t^{m(\alpha_2)}, 0, \dots, 0, t^{m(\alpha_1)}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \quad (9)$$

для $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$. Более того, в первом случае $1 - t^{m(\alpha_2)}$ стоит на α_1 -м месте, $t^{m(\alpha_1)}$ — на α_2 -м месте; во втором случае $1 - t^{m(\alpha_2)}$ стоит на α_1 -м месте, $t^{m(\alpha_1)}$ — на α_2 -м месте и -1 — на α_3 -м месте. Обозначим через $A_{\bar{m},G}(t)$ матрицу, образованную строками A_α , $\alpha \in M$.

Из (7) получаем

$$\partial(\nu(\bar{s}_j)) = (t^{m(j)} - 1)p_0$$

и, более того, $\text{Im } \partial$ остается свободным $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модулем, порожденным элементом $(t - 1)p_0$ (здесь мы предполагаем, что $m_0 = 1$).

Пусть $s \in H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ — такой элемент, что $\partial(\nu(s)) = (t - 1)p_0$. Тогда $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ раскладывается в прямую сумму

$$H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0) \simeq \text{Ker}(\partial \cdot \nu) \oplus \mathbb{Z}[t, t^{-1}]s.$$

Из (8) и (9) следует

$$\text{Im } \mu \subset \text{Ker}(\partial \cdot \nu),$$

а из (7) вытекает

$$H_1(\tilde{K}) = \text{Ker}(\partial \cdot \nu) / \text{Im } \mu$$

и

$$\text{rg } A_{\bar{m}}(G) \leq q - 1.$$

О п р е д е л е н и е. C -группа G типа $M \subset I_q$ называется $\bar{m}$ -связной, если

$$\text{rg } A_{\bar{m}}(G) = q - 1.$$

Обозначим через $E_{\bar{m},G,i}(t)$ такие идеалы в $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, что

$$E_{\bar{m},G,i}(t) = \begin{cases} (0), & \text{если } q - i > |M|, \\ \mathbb{Z}[t, t^{-1}], & \text{если } q - i < 0, \\ \text{порожден } (q - i)\text{-минорами из } A_{\bar{m},G}(t), & \text{если } 0 \leq q - i \leq |M|. \end{cases}$$

Пусть $\Delta_{\bar{m},G,i}(t)$ — образующая минимального главного идеала, содержащего $E_{\bar{m},G,i}(t)$. Если $\Delta_{\bar{m},G,i}(t) \neq 0$, то после умножения $\Delta_{\bar{m},G,i}(t)$ на обратимый элемент из $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ мы можем считать, что

$$\Delta_{\bar{m},G,i}(t) \in \mathbb{Z}[t] \quad \text{и} \quad \Delta_{\bar{m},G,i}(0) \neq 0.$$

З а м е ч а н и е 4. Идеалы $E_{\bar{m},G,i}(t)$ и многочлены $\Delta_{\bar{m},G,i}(t)$ могут быть получены с помощью свободного исчисления Фокса (см. [2]).

Если мы применим доказательство теоремы 5 из [6, гл. 15] к конечно порожденным подмодулям $\text{Im } \mu \otimes \mathbb{Q}$ и $\text{Ker}(\partial \cdot \nu) \otimes \mathbb{Q}$ свободного $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -модуля $H_1(\tilde{K}, \tilde{K}_0) \otimes \mathbb{Q}$, то мы получим, что существуют базис $g_1, \dots, g_q$ в $H_1(\tilde{K}, \tilde{K}_0) \otimes \mathbb{Q}$ и такие ненулевые элементы $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t) \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$, $0 \leq r \leq q - 1$, что:

(i) $g_1, \dots, g_{q-1}$ образуют базис в $\text{Ker}(\partial \cdot \nu) \otimes \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$;

(ii) $\lambda_1(t)g_1, \dots, \lambda_r(t)g_r$ образуют базис в $\text{Im } \mu \otimes \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$;

(iii) $\lambda_i \mid \lambda_{i+1}$ для $i = 1, \dots, r-1$;

(iv) модуль

$$(N/N') \otimes \mathbb{Q} = H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[t, t^{-1}]/(\lambda_1(t)) \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}[t, t^{-1}]/(\lambda_r(t)) \oplus (\mathbb{Q}[t, t^{-1}])^{q-r-1} \quad (10)$$

и, более того, образующие $\Delta_{\bar{m}, i, G, \mathbb{Q}}(t)$ минимальных главных идеалов, содержащих $E_{\bar{m}, G, i}(t) \otimes \mathbb{Q}$, суть

$$\Delta_{\bar{m}, G, i, \mathbb{Q}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } i < q-r; \\ \lambda_1(t) \cdot \dots \cdot \lambda_{q-i}(t), & \text{если } i \geq q-r. \end{cases}$$

После умножения $\lambda_i(t)$ на обратимые элементы из $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ мы можем считать, что

$$\Delta_{\bar{m}, G, i, \mathbb{Q}}(t) = \Delta_{\bar{m}, G, i}(t).$$

Из (10) легко видеть, что $(N/N') \otimes \mathbb{Q}$ является конечно порожденным $\mathbb{Q}$ -модулем тогда и только тогда, когда $\Delta_{\bar{m}, G, i}(t) \neq 0$.

Пусть G — $\bar{m}$ -связная группа. Из (10) следует, что $\Delta_{\bar{m}, 1, G}(t)$ совпадает с характеристическим многочленом автоморфизма $h \in \text{Aut}[(N/N') \otimes \mathbb{Q}]$, который определяется действием образующей $\tau \in \mathbb{F}_1$ на $H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q})$. В силу установленного выше это действие сводится к умножению на t в (10).

Заменяя поле $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{Z}_p$ в вышеизложенном, мы получим, что в случае, когда группа N/N' является конечно порожденной группой, наибольший общий делитель коэффициентов многочлена $\Delta_{\bar{m}, G, 1}(t)$ равен единице.

С другой стороны, если N/N' — конечно порожденная группа, то выбор базиса в $(N/N')_{\text{Free}}$ определяет базис в $(N/N')_{\text{Free}} \otimes \mathbb{Q}$. Матрица h в выбранном базисе является целочисленной и $\det h = 1$, так как h — автоморфизм группы $(N/N')_{\text{Free}}$. Следовательно, в этом случае $\Delta_{\bar{m}, G, 1}(t)$ совпадает с точностью до знака с характеристическим многочленом автоморфизма h , так как наибольший общий делитель коэффициентов многочлена $\Delta_{\bar{m}, G, 1}(t)$ равен единице.

Соберем полученные выше результаты в

Предложение 2. Пусть G — C -группа и $N = \text{Ker } F_{\bar{m}*}$. Тогда:

(i) $(N/N') \otimes \mathbb{Q}$ является конечно порожденным $\mathbb{Q}$ -модулем тогда и только тогда, когда G является $\bar{m}$ -связной группой. В этом случае $\Delta_{\bar{m}, \text{prim}, G, 1}(t)$ совпадает (с точностью до постоянного множителя) с характеристическим многочленом автоморфизма $h \in \text{Aut}[(N/N') \otimes \mathbb{Q}]$, который индуцирован действием образующей $\tau \in \mathbb{F}_1$ на $(N/N') \otimes \mathbb{Q}$;

(ii) если N/N' является конечно порожденной группой, то

$$\Delta_{\bar{m}, \text{prim}, G, 1}(t) = \pm \det(h - t \text{Id}).$$

В частности, $|\Delta_{\bar{m}, G, 1}(0)| = 1$.

С л е д с т в и е. Если кривая $D \subset \mathbb{C}^2$ и вектор $\bar{m}$ удовлетворяют условию (*), то

$$\Delta_{\bar{m}, D}(t) = \pm \Delta_{\bar{m}_{\text{prim}}, G, 1}(t),$$

где $G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$.

Из леммы 1 и из точной последовательности [8]

$$\rightarrow H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{h-\text{Id}} H_1(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H_0(\tilde{K}, \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

мы получаем следующее

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть G — $\bar{m}$ -связная C -группа. Тогда

$$\Delta_{\bar{m}, G, 1}(t) = (t-1)^m \Delta'(t),$$

для некоторого $m \geq n-1$, где n — число неприводимых компонент группы G и $\Delta'(t)$ — такой многочлен, что $\Delta'(1) \neq 0$.

2.4. П р е д л о ж е н и е 4. Пусть $G = G_1 \times \dots \times G_n$ — прямое произведение неприводимых C -групп, $n > 1$, и $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ — вектор, у которого каждая координата $m_i = p_i^{r_i}$, где p_i — простые числа и $r_i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Delta_{\bar{m}, G, i}(t) = (t^{m_0} - 1)^{n-i}$$

для $1 \leq i \leq n$, где $m_0 = \text{НОД}(m_1, \dots, m_n)$.

З а м е ч а н и е 5. В формулировке предложения 4 мы не предполагаем, что вектор $\bar{m}$ удовлетворяет условию $m_0 = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 4 индукцией по n .

Во-первых, заметим, что

$$\Delta_{\bar{m}, G, i}(t) = \Delta_{\bar{m}_{\text{prim}}, G, i}(t^{m_0}).$$

Случай $n = 2$. Пусть для $1 \leq i \leq q_1$ вершины $v_i \in \Gamma_M$ соответствуют образующим $x_i \in G_1$, а для $q_1 < i \leq q_1 + q_2 = q$ вершины v_i соответствуют образующим группы G_2 . Занумеруем соотношения R_α таким образом, что первые s_1 соотношений являются соотношениями в C -группе G_1 , соотношения с индексами i , $s_1 < i \leq s_1 + s_2$, суть соотношения в C -группе G_2 , а последние $q_1 \cdot q_2$ соотношений — соотношения коммутирования.

Положим

$$\bar{m} = (m_1, m_2), \quad m_0 = \text{НОД}(m_1, m_2), \quad m'_i = m_i / m_0.$$

Легко видеть, что матрица Александра $A_{\bar{m}, G}(t)$ порядка $(s_1 + s_2 + q_1 q_2) \times (q_1 + q_2)$ имеет вид

$$A_{\bar{m}, G}(t) = \begin{pmatrix} A_{1, G_1}(t^{m_1}) & 0 \\ 0 & A_{1, G_2}(t^{m_2}) \\ E_1(t^{m_2}) & E_2(t^{m_1}) \end{pmatrix},$$

где $A_{1,G_i}(t)$ — матрицы Александра групп G_i , а матрицы $E_i(t)$ имеют порядок $(q_1 q_2) \times s_i$ и составлены из строк вида

$$(0, \dots, 0, \pm(t-1), 0, \dots, 0).$$

Прибавим первые $q_1 - 1$ столбцов к столбцу с номером q_1 , а столбцы с номерами i , $q_1 + 1 \leq i \leq q_1 + q_2 - 1$, прибавим к столбцу с номером $(q_1 + q_2)$. Мы получим матрицу $\tilde{A}_{\bar{m},G}(t)$, эквивалентную матрице $A_{\bar{m},G}(t)$. Столбцы матрицы $\tilde{A}_{\bar{m},G}(t)$ с номерами q_1 и $(q_1 + q_2)$ имеют вид

$$(0, \dots, 0, \pm(t^{m_i} - 1), \dots, \pm(t^{m_i} - 1)),$$

где нули стоят на первых $s_1 + s_2$ местах.

Рассмотрим $(q_1 + q_2 - 1)$ -миноры матрицы $\tilde{A}_{\bar{m},G}(t)$, порожденные первыми $(s_1 + s_2 + 1)$ строками. Легко видеть, что эти миноры имеют следующий вид:

$$\phi_1(t^{m_1})\phi_2(t^{m_2})(t^{m_i} - 1),$$

где $\phi_i(t)$ — некоторые $(q_i - 1)$ -миноры матрицы $A_{1,G_i}(t)$.

Заметим, что по лемме 6 из [5] многочлены $\Delta_{1,G_i,1}(t)$ удовлетворяют следующему условию:

$$\Delta_{1,G_i,1}(1) = \pm 1.$$

Таким образом, наибольший общий делитель этих миноров равен

$$\Delta_{1,G_1,1}(t^{m_1})\Delta_{1,G_2,1}(t^{m_2})(t^{m_0} - 1). \quad (11)$$

С другой стороны, легко показать, что наибольший общий делитель $(q_1 + q_2 - 1)$ -миноров, которые образованы последними $q_1 q_2$ строками матрицы $A_{\bar{m},G}(t)$, равен

$$(t^{m_1} - 1)^{q_2 - 1}(t^{m_2} - 1)^{q_1 - 1}(t^{m_0} - 1). \quad (12)$$

Согласно [5] корни p^r -й степени из единицы не могут быть корнями многочлена $\Delta_{1,G_i,1}(t)$. Таким образом, из (11) и (12) мы получаем

$$\Delta_{\bar{m},G_1 \times G_2,1}(t) = (t^{m_0} - 1).$$

Очевидно,

$$\Delta_{\bar{m},G_1 \times G_2,2}(t) \equiv 1.$$

Случай $n > 2$. Предположим, что предложение 4 имеет место для $n \leq l$. Рассмотрим группу $G = G_1 \times \dots \times G_{l+1}$ и вектор $\bar{m} = (m_1, \dots, m_{l+1})$. Зафиксируем номер $j \leq l + 1$ и введем следующие обозначения:

$$\tilde{G}_1 = G_j, \quad \tilde{G}_2 = G_1 \times \dots \times \hat{G}_j \times \dots \times G_{l+1},$$

$$m_0^j = \text{НОД}(m_1, \dots, \hat{m}_j, \dots, m_{l+1}), \quad \bar{m}_j = (m_1, \dots, \hat{m}_j, \dots, m_{l+1}).$$

Пусть q_i — число образующих и s_i — число соотношений в C -группе $\tilde{G}_i$, $i = 1, 2$. Обозначим через $A_{\bar{m}_j, \tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(t)$ матрицу, определение которой аналогично тому, как в случае $n = 2$ (по отношению к $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$).

Покажем вначале, что каждый $(q_1 + q_2 - i)$ -минор матрицы $A_{\bar{m}_j, \tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(t)$ делится на $(t^{m_0^j} - 1)^{l+1-j}$. Для этого заметим, что каждый $(q_1 + q_2 - i)$ -минор $\mathcal{M}$ может быть разложен в сумму произведений:

$$\mathcal{M} = \sum \mathcal{M}_{1,\alpha} \mathcal{M}_{2,\beta} \mathcal{M}_{3,\gamma},$$

где $\mathcal{M}_{1,\alpha}$ — $(q_1 - i_1)$ -миноры матрицы $A_{\bar{m}_j, \tilde{G}_1}(t)$, $\mathcal{M}_{2,\beta}$ — $(q_2 - i_2)$ -миноры матрицы $A_{\bar{m}_j, \tilde{G}_2}(t)$ и $\mathcal{M}_{3,\gamma}$ — миноры порядка $i_1 + i_2 - i$, порожденные строками с номерами $> s_1 + s_2$. Легко видеть, что $\mathcal{M}_{3,\gamma}$ делится на $(t^{m_0} - 1)^{i_1+i_2-i}$.

Если $i_2 > l$, то $\mathcal{M}_{3,\gamma}$ делится на $(t^{m_0} - 1)^{l+1-i}$.

Если $i_2 \leq l$, то $\mathcal{M}_{2,\beta}$ делится на $(t^{m_0} - 1)^{l-i_2}$ по индуктивному предположению. В этом случае $\mathcal{M}_{2,\beta} \mathcal{M}_{3,\gamma}$ делится на $(t^{m_0} - 1)^{l+i_1-i}$. Если $i_1 = 0$, то $\mathcal{M}_{1,\alpha} \equiv 0$. Таким образом, во всех случаях $\mathcal{M}_{1,\alpha} \mathcal{M}_{2,\beta} \mathcal{M}_{3,\gamma}$ делится на $(t^{m_0} - 1)^{l+1-i}$.

С другой стороны, по индуктивному предположению мы можем выбрать такой $(q_2 - 1)$ -минор $\mathcal{M}_2$ матрицы $A_{\bar{m}_j, \tilde{G}_2}(t)$, что $\mathcal{M}_2 = (t^{m_0^j} - 1)^{l-i} \widetilde{\mathcal{M}}_2$, где $\widetilde{\mathcal{M}}_2$ и $(t^{m_0^j} - 1)$ взаимно просты. Также мы можем выбрать такой $(q_1 - 1)$ -минор $\mathcal{M}_1$ матрицы $A_{\bar{m}_j, \tilde{G}_1}(t)$, что $\mathcal{M}_1$ и $(t^{m^j} - 1)$ взаимно просты, более того, корни степени p^r из единицы не являются корнями многочлена $\mathcal{M}_1(t)$ для каждого простого числа p .

Добавим к строкам и столбцам, входящим в матрицы $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, еще одну строку с номером $> s_1 + s_2$ и еще один (не входящий в $\mathcal{M}_2$) столбец с номером $> q_1$. Мы найдем такой $(q_1 + q_2 - i)$ -минор $\mathcal{M}$ матрицы $A_{\bar{m}, G}(t)$, что

$$\mathcal{M} = \pm (t^{m_0^j} - 1)^{l-i} \widetilde{\mathcal{M}}_2 \mathcal{M}_1 (t^{m^j} - 1).$$

Легко видеть, что наибольший общий делитель таких миноров равен

$$(t^{m_0^j} - 1)^{l+1-i} \mathcal{M}'(t), \quad (13)$$

где $\mathcal{M}'(t)$ не имеет своими корнями корни p^r -й степени из единицы.

С другой стороны, существует ненулевой $(q_1 + q_2 - i)$ -минор $\mathcal{M}(t)$ матрицы $A_{\bar{m}, G}(t)$, образованный некоторыми строками, номера которых $> s_1 + s_2$ (эти строки соответствуют соотношениям коммутирования). Корнями многочлена $\mathcal{M}(t)$ являются корни из единицы степеней $m_i = p_i^{r_i}$. Отсюда и из (13) следует, что $\Delta_{\bar{m}, G, i}(t)$ делит $(t^{m_0^j} - 1)^{l+1-i}$.

Следовательно, $\Delta_{\bar{m}, G, i}(t)$ делит

$$\text{НОД}((t^{m_0^1} - 1)^{l+1-i}, \dots, (t^{m_0^{l+1}} - 1)^{l+1-i}) = (t^{m_0} - 1)^{l+1-i}.$$

А так как $\Delta_{\bar{m}, G, i}(t)$ делится на $(t^{m_0} - 1)^{l+1-i}$, то предложение 4 доказано.

Предложение 5. Пусть $G = G_1 \times \dots \times G_n$ — прямое произведение неприводимых C -групп, $n > 1$. Предположим, что $\Delta_{1, G, i, 1}(t) \equiv 1$ для всех i . Тогда для $1 \leq i \leq n$ и для любого $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$

$$\Delta_{\bar{m}, G, i}(t) = (t^{m_0} - 1)^{n-i}.$$

Доказательство точно такое же, как и доказательство предложения 4.

Следствие. Пусть $G = \mathbb{Z}^n$ — свободная абелева группа. Тогда

$$\Delta_{\bar{m}, G, i}(t) = (t^{m_0} - 1)^{n-i}$$

для $1 \leq i \leq n$ и для каждого $\bar{m} \in \mathbb{N}^n$.

Пример. Пусть G_1 и G_2 — два экземпляра группы

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1}, x_2 x_3 x_2^{-1} x_1^{-1} \rangle$$

(G — группа узла — "трилистника"). Прямые вычисления дают

$$\Delta_{(6,1), G_1 \times G_2, 1}(t) = (t-1)(t^2 - t + 1).$$

3. В этом пункте полученные выше результаты будут применены для вычисления иррегулярности некоторых циклических накрытий проективной плоскости $\mathbb{P}^2$.

3.1. В обозначениях п. 1 пусть $X_{k, \bar{m}}^0$ — поверхность в $\mathbb{C}^3$, заданная уравнением

$$z^k = f_1^{m_1}(x, y) \cdot \dots \cdot f_n^{m_n}(x, y). \quad (14)$$

Пусть $\phi' : X_{k, \bar{m}}^0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ — ограничение проекции $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$, переводящей точку с координатами (x, y, z) в точку с координатами (x, y) .

Ниже мы будем предполагать, что $\text{НОД}(m_1, \dots, m_n, k) = 1$ (это условие означает, что $X_{k, \bar{m}}^0$ является неприводимой поверхностью). Пусть $X_{k, \bar{m}}$ — проективное замыкание поверхности $X_{k, \bar{m}}^0$ и $\pi : \bar{X}_{k, \bar{m}} \rightarrow X_{k, \bar{m}}$ — разрешение особенностей. Мы можем считать, что $\phi = \phi' \cdot \pi : \bar{X}_{k, \bar{m}} \rightarrow \mathbb{P}^2$ является морфизмом.

Напомним, что иррегулярность $q_{k, \bar{m}} = q(\bar{X}_{k, \bar{m}})$ поверхности $\bar{X}_{k, \bar{m}}$ имеет следующие эквивалентные определения:

$$q_{k, \bar{m}} = \dim H^1(\bar{X}_{k, \bar{m}}, \mathcal{O}) = \dim H^0(\bar{X}_{k, \bar{m}}, \Omega^1) = \frac{1}{2} \dim H^1(\bar{X}_{k, \bar{m}}, \mathbb{R}) = \frac{1}{2} b_1(\bar{X}_{k, \bar{m}}).$$

Замечание 6. Поверхности $\bar{X}_{k, \bar{m}}, \bar{X}_{k, \bar{m} + \bar{k}}, \bar{X}_{k, \bar{m} + \bar{k}}$ являются бирационально изоморфными, где $\bar{m} + \bar{k} = (m_1 + k, \dots, m_n + k)$. Поэтому эти поверхности имеют одну и ту же иррегулярность $q_{k, \bar{m}}$.

Положим $U_{k, \bar{m}} = \bar{X}_{k, \bar{m}} \setminus \phi^{-1}(\bar{D} \cup L_\infty)$.

Ниже мы будем предполагать, что k не делит m_i для всех i , или, что то же самое, морфизм ϕ разветвлен вдоль каждой компоненты D_i кривой D .

Включение $\alpha : U_{k,\bar{m}} \rightarrow \bar{X}_{k,\bar{m}}$ определяет эпиморфизм

$$\alpha_* : H_1(U_{k,\bar{m}}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(\bar{X}_{k,\bar{m}}, \mathbb{Q}).$$

Следовательно,

$$b_1(\bar{X}_{k,\bar{m}}) = b_1(U_{k,\bar{m}}) - \dim \operatorname{Ker} \alpha_*. \quad (15)$$

Л е м м а 3 (ср. [11]).

$$\dim \operatorname{Ker} \alpha_* \geq n = \#\{\text{неприводимые компоненты кривой } D\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гомоморфизм $\phi_* : H_1(U_{k,\bar{m}}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, \mathbb{Q})$ является эпиморфизмом. В самом деле, $H_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, \mathbb{Z})$ порождается циклами γ_i , где γ_i — обходы по окружности маленького радиуса вокруг кривых D_i . Легко видеть, что $(k/\operatorname{НОД}(m_i, k))\gamma_i$ может быть поднят в $H_1(U_{k,\bar{m}}, \mathbb{Z})$ и этот поднятый цикл $\tilde{\gamma}_i$ есть простой обход вокруг одной из неприводимых компонент кривой $\phi^{-1}(D_i)$. Циклы $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$ являются линейно независимыми в $H_1(U_{k,\bar{m}}, \mathbb{Z})$, так как $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ образуют базис в $H_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, \mathbb{Z})$.

Очевидно, $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n \in \operatorname{Ker} \alpha_*$.

3.2. Положим

$$N(k, \bar{m}) = \sum_j \#\{\text{различные корни из единицы степени } k,$$

являющиеся корнями многочлена $\lambda_j(t)\}$,

где $\lambda_j(t)$ — элементарные делители многочлена $\Delta_{\bar{m}_{\text{prim}}, G, 1}(t)$, определенные в (10), и $G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$.

Т е о р е м а 3 [11, 7]. Пусть $D \subset \mathbb{C}^2$ и вектор $\bar{m}$ удовлетворяют условию (*). Тогда

$$b_1(U_{k,\bar{m}}) = 1 + N(k, \bar{m}).$$

3.3. Из [4] и из предложений 4 и 5 следуют

Т е о р е м а 4. Пусть кривая $\bar{D} = \bar{D}_1 \cup \dots \cup \bar{D}_n$, $n > 1$, удовлетворяет следующим условиям:

(i) для всех i и j , $i \neq j$, пересечения $(\bar{D}_i \cap \bar{D}_j) \cap L_\infty = \emptyset$;

(ii) локально в каждой точке $x \in \cup_{i \neq j} (D_i \cap D_j)$ дивизор $D = D_1 + \dots + D_n$ является дивизором с нормальными пересечениями.

Тогда

$$q(\bar{X}_{k,\bar{m}}) = 0$$

для $\bar{m} = \{m_1, \dots, m_n\}$ с $m_i = p_i^{r_i}$, где p_i — простые числа и $r_i \in \mathbb{N}$.

Т е о р е м а 5. Пусть $\bar{D}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, и пусть $\Delta_{1, G_i, 1}(t) \equiv 1$ для всех i , где $G_i = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_i)$. Тогда

$$q(\bar{X}_{k,\bar{m}}) = 0$$

для любого $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$.

В частности, если $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_i) \simeq \mathbb{F}_1$ для всех i и если $\bar{D} = \bar{D}_1 \cup \dots \cup \bar{D}_n$ удовлетворяет условиям теоремы 4, то для любого $\bar{m}$ иррегулярность $q(\bar{X}_{k, \bar{m}}) = 0$.

Т е о р е м а 6. Пусть $\bar{D}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, и пусть выполнены также следующие условия:

- (i) $\bar{D}$ пересекается с L_∞ трансверсально;
- (ii) $\sum d_i m'_i = p^r$, где p — простое число, $r \in \mathbb{N}$ и $d_i = \deg D_i$.

Тогда $q(\bar{X}_{k, \bar{m}}) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2 и замечания 1 следует, что корнями многочлена $\Delta_{\bar{m}, D}(t)$ являются корни p^r -й степени из единицы.

С другой стороны, из предложения 4 следует, что

$$\Delta_{\bar{m}, D}(t) = (t-1)^{n-1} \Delta'(t),$$

где $\Delta'(t)$ — делитель многочлена

$$\Delta = \prod_{i=1}^n \Delta_{1, D_i}(t^{m'_i}).$$

По теореме 7 из [5] корнями многочлена $\Delta(t)$ не могут быть корни p^r -й степени из единицы. Следовательно, $\Delta'(t) \equiv \text{const}$ и теорема 6 следует из (15) и из теоремы 3.

3.4. Напомним [10], что $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_i) = \mathbb{F}_1$, если собственный прообраз $\sigma^{-1}(\bar{D}_i)$ имеет положительный индекс самопересечения, где $\sigma: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ — такая композиция σ -процессов, что $\sigma^*(\bar{D}_i \cup L_\infty)$ является дивизором с нормальными пересечениями.

Предложим другой критерий коммутативности фундаментальной группы дополнения к алгебраической кривой в $\mathbb{C}^2$.

Т е о р е м а 7. Пусть $\{C_b\}_{b \in B}$ — такое семейство плоских алгебраических кривых, что:

(i) $C_0 = D_1 + \dots + D_n$ является приведенным дивизором и удовлетворяет условиям теоремы 4;

(ii) общий член C_b этого семейства неприводим.

Тогда $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C_b) = \mathbb{F}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из хорошо известного принципа "полунепрерывности" следует, что существует эпиморфизм C -групп

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C_0) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C_b).$$

Обозначим его через ν . Легко видеть, что если x_i — образующая C -группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C_0)$, то $\nu(x_i)$ — также образующая C -группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C_b)$.

Согласно [4] $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C_0) \cong \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_1) \times \dots \times \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_n)$. Пусть x_1 и x_2 — две образующие группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C_0)$, принадлежащие различным подгруппам $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_i)$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что x_1 — образующая группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_1)$, а x_2 — образующая группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_2)$.

Так как C_b — неприводимая группа, то элементы $\nu(x_1)$ и $\nu(x_2)$ сопряжены друг другу. Пусть $\nu(x_2) = \nu(x_3)\nu(x_1)\nu(x_3)^{-1}$, где x_3 — образующая одной из подгрупп $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_i)$.

Если $x_3 \notin \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_1)$, то $\nu(x_2) = \nu(x_1)$, так как в этом случае x_1 и x_3 коммутируют друг с другом.

Если $x_3 \in \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_1)$, то $\nu(x_1) = \nu(x_3)^{-1}\nu(x_2)\nu(x_3) = \nu(x_2)$. Таким образом, во всех случаях $\nu(x_1) = \nu(x_2)$ для всех образующих x_1 C -группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_1)$ и для всех образующих x_2 C -группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_2)$. Таким образом, $\text{Im } \nu \cong \mathbb{F}_1$. Теорема 7 доказана.

3.5. Скажем, что вектор $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ является k -допустимым, если k не является делителем m_i для всех i . Два вектора $\bar{m}_1 = (m_1, \dots, m_n)$ и $\bar{m}_2 = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n)$ называются k -эквивалентными, если существует переход от $\bar{m}_1$ к $\bar{m}_2$ с помощью последовательности следующих преобразований:

- 1) $\bar{m} \mapsto \bar{m} \pm \bar{k}$;
- 2) $\bar{m} \mapsto p\bar{m} = (pm_1, \dots, pm_n)$, если вектор $p\bar{m}$ является k -допустимым;
- 3) $\bar{m} \mapsto \bar{m}_{\text{prim}}$.

Пример. Векторы $\bar{m}_1 = (1, 3)$ и $\bar{m}_2 = (3, 4)$ являются 5-эквивалентными, так как

$$\bar{m}_1 = (1, 3) \mapsto (6, 8) \mapsto (3, 4) = \bar{m}_2.$$

Предложение 6. Пусть D и вектор $\bar{m}_1$ удовлетворяют условию (*), и пусть $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ являются k -эквивалентными. Тогда

$$\begin{aligned} & \# \left(\bigcup_j \{ \text{корни } k\text{-й степени из единицы, являющиеся корнями элементарного} \right. \\ & \quad \left. \text{делителя } \lambda_j(t) \text{ многочлена } \Delta_{\bar{m}_1, \text{prim}, D}(t) \} \right) = \\ & = \# \left(\bigcup_j \{ \text{корни } k\text{-й степени из единицы, являющиеся корнями элементарного} \right. \\ & \quad \left. \text{делителя } \lambda_j(t) \text{ многочлена } \Delta_{\bar{m}_2, \text{prim}, D}(t) \} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Поверхности $U_{k, \bar{m}_1}$ и $U_{k, \bar{m}_2}$ изоморфны. Отсюда и из теоремы 3 следует предложение 6.

Автор выражает свою признательность Математическому институту им. Макса Планка (Бонн), во время пребывания в котором была написана данная статья.

Поступило в октябре 1993 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. A'Campo N. La fonction zeta d'une monodromie //Comment. math. helv. 1979. Vol. 68, N 2. P. 318–327.
2. Crowell R.H., Fox R.H. Introduction to knot theory. Berlin: Springer-Verlag, 1963.
3. Куликов Вик.С. Фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$ //Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 2. С. 434–455.
4. Куликов Вик.С. О структуре фундаментальной группы дополнения к алгебраическим кривым в $\mathbb{C}^2$ //Изв. АН СССР. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 2. С. 469–481.
5. Куликов Вик.С. Многочлены Александера плоских алгебраических кривых //Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 1. С. 76–101.

6. *Lang S.* Algebra. Reading: Addison-Wessley, 1977.
7. *Libgober A.* Alexander polynomials of plane algebraic curves and cyclic multiple planes //Duke Math. J. 1982. Vol. 49. P. 833-851.
8. *Milnor J.* Infinite cyclic covers //Topology of manifolds. Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1967. P. 115-133. (Michigan State Univ.).
9. *Milnor J.* Singular points of complex hypersurfaces //Ann. Math. Stud. Vol. 61. Princeton: Princeton Univ. Press, 1968.
10. *Nori M.* Zariski's conjecture and related problems //Ann. sci. Ecole norm. super. Ser. 4e. 1983. Vol. 16. P. 305-344.
11. *Sakai F.* On the irregularity of cyclic coverings of the projective plane: Prepr. Saitama Univ., 1992.
12. *Shinohara Y., Sumners D.W.* Homology invariants of cyclic coverings with applications to links //Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 163. P. 101-121.
13. *Zariski O.* On the linear connection index of the algebraic surface $z^n = f(x, y)$ //Proc. Mat. Acad. Sci. USA. 1929. Vol. 15. P. 494-501.
14. *Zariski O.* On the irregularity of cyclic multiple planes //Ann. Math. 1931. Vol. 32. P. 485-511.