УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов

Конечная определенность коммутанта фундаментальной группы дополнения к плоской кривой

В статье доказана следующая теорема. Коммутант фундаментальной группы дополнения к плоской неприводимой проективной кривой является конечно определенной группой.

Библиография: 3 наименования.

0. Пусть $\overline{D} \subset \mathbb{P}^2$ – проективная алгебраическая кривая, определенная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Обозначим через $\overline{G} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D})$ фундаментальную группу дополнения к кривой $\overline{D}$ в $\mathbb{P}^2$.

Как действительное многообразие $\overline{D}$ является подмногообразием действительной коразмерности 2 в $\mathbb{P}^2$. Эта ситуация аналогична ситуации в теории узлов: узел k является подмногообразием действительной коразмерности 2 в трехмерной сфере S^3. Обозначим через $G = \pi_1(S^3 \setminus k)$ группу узла k и через $N = [G, G]$ ее коммутант. Хорошо известно, что множество узлов распадается на два подмножества в соответствии со свойствами их групп, а именно, по теореме Столлингса [3] N является конечно определенной группой тогда и только тогда, когда k – расслоенный узел, т.е. $S^3 \setminus k$ допускает структуру расслоения над S^1 с поверхностями Зайферта в качестве слоев.

Цель этой короткой заметки – доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если $\overline{D} \subset \mathbb{P}^2$ – неприводимая проективная кривая, то коммутант $\overline{N} = [\overline{G}, \overline{G}]$ группы $\overline{G} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D})$ является конечно определенной группой.*

Эта теорема является простым следствием следующего аналога этой теоремы для случая аффинной кривой.

Теорема 2. *Если $D \subset \mathbb{C}^2$ – аффинная неприводимая кривая такая, что ее проективное замыкание $\overline{D} \subset \mathbb{P}^2$ и прямая в бесконечности $L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ пересекаются трансверсально, то коммутант $N = [G, G]$ группы $G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ является конечно определенной группой.*

Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке фонда INTAS (грант № 94-4373) и РФФИ (грант № 96-01-00614).

В [1] уже было доказано, что коммутант $N = [G, G]$ группы $G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ конечно порожден для любой неприводимой аффинной кривой. Доказывая теоремы 1 и 2, мы будем существенно опираться на идеи и результаты из [1].

Ниже мы рассмотрим более общую ситуацию, когда $\overline{D} = \overline{D}_1 + \dots + \overline{D}_n$ является приведенной приводимой кривой.

Пусть $L \subset \mathbb{P}^2$ – прямая. Положим $L = L_\infty$, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$, $D_i = \overline{D}_i \cap \mathbb{C}^2$, и пусть $f_i(x, y) = 0$ – уравнение D_i, где $f_i(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ – неприводимый многочлен.

Обозначим через

$$F\colon X = \mathbb{C}^2 \setminus D \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{1}$$

морфизм, заданный уравнением

$$z = \prod_{i=1}^{n} f_i(x, y). \tag{2}$$

Мы будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$\textit{общий слой } F^{-1}(z) = Y_z \textit{ связен.} \tag{$*$}$$

Отметим, что если D связно в $\mathbb{C}^2$, то F удовлетворяет условию $(*)$.

Теорема 2$'$. *Если $\overline{D} = \overline{D}_1 + \dots + \overline{D}_n \subset \mathbb{P}^2$ и L_∞ пересекаются трансверсально и D удовлетворяет условию $(*)$, то ядро N индуцированного гомоморфизма $F_*\colon \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \to \pi_1(\mathbb{C}^*)$ является конечно определенной группой.*

Теорема 2 является следствием теоремы 2$'$, так как если D – неприводимая кривая, то $\ker F_*$ совпадает с коммутантом группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \overline{D})$.

1. Теорема 1 следует из теоремы 2. Действительно, рассмотрим неприводимую проективную кривую $\overline{D} \subset \mathbb{P}^2$ и выберем бесконечно удаленную прямую $L_\infty \subset \mathbb{P}^2$ так, что $\overline{D}$ и L_∞ пересекаются трансверсально. Имеем естественный гомоморфизм

$$i_*\colon G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \to \overline{G} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}),$$

индуцированный вложением $i\colon \mathbb{C}^2 \setminus D \to \mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}$. Очевидно, i_* является эпиморфизмом. Согласно [2], так как $\overline{D}$ и L_∞ пересекаются трансверсально, ядро гомоморфизма i_* является бесконечной циклической группой, порожденной простым обходом вокруг бесконечно удаленной прямой. Обозначим эту образующую ядра $\ker i_*$ через γ_∞. Так как i_* является эпиморфизмом, то ограничение $j\colon N \to \overline{N} = [\overline{G}, \overline{G}]$ гомоморфизма i_* на N также является эпиморфизмом.

Пусть $f(x, y) = 0$ – уравнение D в $\mathbb{C}^2$, где $f(x, y)$ – неприводимый многочлен. Многочлен $f(x, y)$ определяет морфизм $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^1$, заданный уравнением

$f(x,y)=z$ так, что $D=F^{-1}(0)$ является нулевым слоем. Рассмотрим ограничение $\varphi\colon \mathbb{C}^2\setminus D\to\mathbb{C}^1\setminus\{0\}=\mathbb{C}^*$ морфизма F на $\mathbb{C}^2\setminus D$. Индуцированный этим отображением гомоморфизм $\varphi_*\colon G\to\pi_1(\mathbb{C}^*)\cong\mathbb{Z}$ является эпиморфизмом, так как общий слой морфизма φ связен.

С одной стороны, хорошо известно, что $\pi_1(\mathbb{C}^2\setminus D)$ порождается следующими образующими, которые ниже мы будем называть *геометрическими*. По определению геометрическая образующая $\gamma=l^{-1}sl$ – это петля, состоящая из пути l, окружности малого радиуса s вокруг D и пути l^{-1}, где l соединяет базисную точку фундаментальной группы с точкой x, близкой к D, s есть (положительно ориентированная) окружность, лежащая в действительной плоскости, проходящей через x и пересекающейся трансверсально с D в некоторой точке $y\in D$, являющейся центром окружности s. Если D – неприводимая кривая, то все геометрические образующие сопряжены друг другу. Следовательно, естественный эпиморфизм

$$\alpha\colon G\to G/N\simeq H_1(\mathbb{C}^2\setminus D,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z},\qquad N=[G,G],$$

отображает все геометрические образующие группы G в одну и ту же образующую группы $\mathbb{Z}$. Легко видеть, что φ_* также отображает все геометрические образующие группы G в некоторую образующую $\mathbb{Z}$. Поэтому гомоморфизмы φ_* и α совпадают. Более того, гомоморфизм α позволяет нам рассмотреть G как полупрямое произведение $G\simeq N\ltimes\mathbb{Z}$. Зафиксируем одну из геометрических образующих, обозначим ее через γ. Мы можем считать, что γ – это образующая второго сомножителя $\mathbb{Z}$ в полупрямом произведении. Тогда γ_∞ может быть представлено в виде произведения: $\gamma_\infty=\nu\gamma^d$, где $d=\deg f(x,y)$ – степень кривой D и ν – некоторый элемент группы N. Так как пересечение $\ker i_*\cap N$ тривиально, то гомоморфизм $j\colon N\to\overline{N}$ является изоморфизмом.

2. Доказательство теоремы $2'$. Рассмотрим отображение F, определенное многочленом (2), и обозначим через $X=\mathbb{C}^2\setminus D$ дополнение к D. Хорошо известно, что существует конечное множество точек $\{z_1,\dots,z_n\}\subset\mathbb{C}^*$ такое, что

$$F\colon X\setminus F^{-1}\bigl(\{z_1,\dots,z_n\}\bigr)\to\mathbb{C}^*\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$$

является локально тривиальным C^∞-расслоением. Как и в [1], пусть B_i – диск с центром в точке z_i радиуса $r_i\ll 1$, и пусть ∂B_i – его граница. Выберем две не совпадающие между собой точки $z_{i,1}$, $z_{i,2}$, принадлежащие ∂B_i. Точки $z_{i,1}$ и $z_{i,2}$ делят ∂B_i на две дуги, $\gamma_{i,1}$ и $\gamma_{i,2}$. Выберем непересекающиеся пути γ_i, соединяющие точки $z_{i,1}$ и $z_{i+1,2}$ ($z_{n+1,2}=z_{1,2}$) и лежащие вне $\cup B_i$, и пусть $\gamma_{i,1}$ – такая дуга границы ∂B_i, что $l_{in}=(\cup\gamma_{i,1})\cup(\cup\gamma_i)$ является границей ограниченного множества V, содержащего начало координат $o\in\mathbb{C}^1$ и такого, что $z_i\notin V$ для всех i,

$1 \leqslant i \leqslant n$ (см. рис. 1 в [1]). Пусть l_{ex} – граница множества $V \cup (\cup B_i)$. Положим $T = (\cup B_i) \cup (\cup \gamma_i)$. Множество $Z = F^{-1}(T)$ называется *ожерельем* кривой D.

Так как T является ретрактом пространства $\mathbb{C}^*$ и расслоение $F\colon X \setminus Z \to \mathbb{C}^* \setminus T$ локально тривиально, то имеет место следующее

Предложение 1 [1]. *Если D удовлетворяет условию $(*)$, то $X = \mathbb{C}^2 \setminus D$ и ожерелье Z кривой D гомотопически эквивалентны.*

Таким образом, $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \simeq \pi(Z)$, и, более того, мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) & \underset{\sim}{\longleftarrow} & \pi(Z) & & \\
{\scriptstyle F_*}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle F_*} & & \\
\pi_1(\mathbb{C}^*) & \underset{\sim}{\longleftarrow} & \pi_1(T) & \underset{\sim}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Легко видеть, что если D удовлетворяет условию $(*)$, то F_* является эпиморфизмом.

Пусть $z_0 \in \gamma_n$ – общая точка, и пусть $Y = F^{-1}(z_0)$ – слой над z_0. Вложение $Y \subset Z$ индуцирует гомоморфизм $\psi\colon \pi_1(Y) \to \pi_1(Z)$. Очевидно, что $\operatorname{Im}\psi \subset \ker F_*$. В [1] была доказана следующая теорема.

Теорема. *Если $D \subset \mathbb{C}^2$ удовлетворяет условию $(*)$, то последовательность*

$$\pi_1(Y) \xrightarrow{\psi} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \xrightarrow{F_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

является точной.

Следствие 1. *Если $D \subset \mathbb{C}^2$ удовлетворяет условию $(*)$, то $N = \ker F_*$ является конечно порожденной группой.*

Обозначим через $Z_{ex} = F^{-1}(l_{ex})$ прообраз кривой l_{ex}. Вложение $Y \subset Z_{ex} \subset Z$ и морфизм F приводят к следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_{ex}} & \pi_1(Z_{ex}) & \xrightarrow{F_*} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta_{ex}} & & \big\downarrow{\scriptstyle\simeq} & & \\
1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(Z) & \xrightarrow{F_*} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1
\end{array} \tag{3}$$

Отображение $F\colon Z_{ex} \to l_{ex}$ является локально тривиальным расслоением. Поэтому все строки в этой диаграмме являются точными.

Обозначим через h_{ex} диффеоморфизм слоя Y, индуцированный обходом вдоль l_{ex}.

3. Зафиксируем точку $y_0 \in Y_0 = Y$. Пусть $l_i \subset l_{ex}$ – путь, соединяющий точку z_0 с точкой $z_{i,2}$ (мы используем здесь обозначение из п. 2) и состоящий из части пути γ_n до точки $z_{1,1}$, пути от $z_{1,1}$ до $z_{1,2}$ вдоль $\gamma_{1,2}$, пути γ_1, пути вдоль $\gamma_{2,2}$ из $z_{2,1}$ до $z_{2,2}$ и т.д. до точки $z_{i,1}$. Если мы зафиксируем локальные тривиализации расслоения $F\colon Z_{ex} \to l_{ex}$ над некоторым покрытием петли l_{ex}, то пути l_i однозначно поднимаются до путей $\bar{l}_i \subset Z_{ex}$, начинающихся в точке y_0. Обозначим через y_i конец пути $\bar{l}_i$.

Пусть $\overline{B}_i = F^{-1}(B_i)$. Выбранные выше пути $\bar{l}_i$ определяют гомоморфизмы $\rho_i\colon \pi_1(\overline{B}_i, y_i) \to \pi_1(Z, y_0)$. Обозначим через $\psi_i\colon \pi_1(Y_i, y_i) \to \pi_1(\overline{B}_i, y_i)$ гомоморфизмы, индуцированные вложениями, где $Y_i = F^{-1}(z_{i,1})$. По лемме 2 из [1] гомоморфизмы ψ_i являются эпиморфизмами.

Так как $F\colon Z_{ex} \to l_{ex}$ является локально тривиальным C^∞-расслоением, то выбранные выше пути $\bar{l}_i$ определяют изоморфизмы $\alpha_i\colon \pi_1(Y_i, y_i) \to \pi_1(Y_0, y_0)$. Следовательно, используя эти изоморфизмы, мы можем отождествить группы $\pi_1(Y_i, y_i)$ с группой $\pi_1(Y_0, y_0)$ и определить эпиморфизмы $\psi_i\colon \pi_1(Y_0, y_0) \to \pi_1(\overline{B}_i, y_i)$.

4. Отождествим $\pi_1(l_{ex})$ и $\pi_1(T)$, используя изоморфизм, индуцированный вложением $l_{ex} \subset T$. Точная последовательность

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(Z, y_0) \xrightarrow{F_*} \pi_1(T, z_0) \longrightarrow 1$$

определяет бесконечное циклическое накрытие $\tilde{g}\colon \widetilde{Z} \to Z$, которое может быть включено в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Z} \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & \widetilde{T} \arrow[d, "g"] \\
Z \arrow[r, "F"'] & T,
\end{tikzcd}$$

где $g\colon \widetilde{T} \to T$ – универсальное накрытие. Выберем точку $\tilde{y}_0 \in \tilde{g}^{-1}(y_0)$, и пусть $\tilde{z}_0 = \widetilde{F}(\tilde{y}_0)$. Тогда $\pi_1(\widetilde{Z}, \tilde{y}_0) = N$.

Пространство $\widetilde{T}$ является несвязным объединением счетного числа дисков $B_{i,j}$, $j \in \mathbb{Z}$, так что $B_{i,j} \subset g^{-1}(B_i)$. Эти диски соединены последовательно путями (см. рис. 2 в [1]) так, что вместе с этими путями они образуют цепь. Занумеруем диски $B_{i,j}$ в порядке, индуцированном порядком в этой цепи так, как это изображено на рис. 2 в [1]. На каждом пути, соединяющем соседние диски, выберем по точке $\tilde{z}_i$ (на пути, соединяющем диски $B_{n,-1}$ и $B_{1,1}$, мы берем выбранную выше точку $\tilde{z}_0$)

и занумеруем их в порядке, индуцированном порядком на цепи (так, что точка $\tilde{z}_0$ имеет номер 0).

Обозначим через $\widetilde{T}_{kn,mn}$ “часть” пространства $\widetilde{T}$, лежащего между точками $\tilde{z}_{kn}$ и $\tilde{z}_{mn}$, $m > k$, где n – число дисков B_i, принадлежащих T. Пусть $\widetilde{Z}_{kn,mn} = \widetilde{F}^{-1}(\widetilde{T}_{kn,mn})$.

Лемма 1. *$\pi_1(\widetilde{Z}_{kn,mn})$ является конечно определенной группой.*

Доказательство. Пусть $\tilde{z}_{0,i,j}$ – центр диска $B_{i,j}$. Рассмотрим пространство

$$\widetilde{Z}^0_{kn,mn} = \widetilde{F}^{-1}\left(\widetilde{T}_{kn,mn} \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=k}^{m} \tilde{z}_{0,i,j}\right).$$

Так как расслоения $\widetilde{F}\colon \widetilde{F}^{-1}\bigl(B_{i,j} \setminus \{\tilde{z}_{0,i,j}\}\bigr) \to B_{i,j} \setminus \{\tilde{z}_{0,i,j}\}$ являются локально тривиальными C^∞-расслоениями над проколотыми дисками с некомпактными римановыми поверхностями в качестве слоев, то фундаментальные группы $\pi_1\bigl(\widetilde{F}^{-1}\bigl(B_{i,j} \setminus \{\tilde{z}_{0,i,j}\}\bigr)\bigr)$ являются конечно определенными группами. Применяя теорему Зайферта–ван Кампена, получаем, что $\pi_1(\widetilde{Z}^0_{kn,mn})$ является конечно определенной группой. Прообраз $\widetilde{F}^{-1}\bigl(\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=k}^{m} \tilde{z}_{0,i,j}\bigr)$ есть объединение конечного числа римановых поверхностей, и ядро естественного эпиморфизма $\pi_1(\widetilde{Z}^0_{kn,mn}) \to \pi_1(\widetilde{Z}_{kn,mn})$ порождается геометрическими образующими – простыми обходами вокруг этих поверхностей. Так как для неприводимой римановой поверхности любые две геометрические образующие сопряжены друг другу, то $\pi_1(\widetilde{Z}_{kn,mn})$ является конечно определенной группой.

5. Лемма 2. *Если $f(x,y)$ – приведенный многочлен, $\overline{D}$ и L_∞ пересекаются трансверсально, то $h^d_{ex} = \mathrm{id}$, где $d = \deg f(x,y)$.*

Доказательство. Морфизм F задает рациональное отображение

$$F\colon \mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup L_\infty \to \mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}.$$

Пусть $\sigma\colon \overline{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^2$ – композиция σ-процессов такая, что $\overline{F} = F \cdot \sigma\colon \overline{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^1$ является морфизмом.

Пусть $\tilde{f}(x_0,x_1,x_2)$ – однородный многочлен, соответствующий многочлену f, $f(x,y) = \tilde{f}(1,x,y)$. Уравнение $z^d = \tilde{f}(x_0,x_1,x_2)$ определяет нормальную проективную поверхность $\widetilde{X}_d \subset \mathbb{P}^3$ и морфизм $\tilde{\phi}_d\colon \widetilde{X}_d \to \mathbb{P}^2$. Прообраз $\tilde{\phi}_d^{-1}(L_\infty) = \overline{Y}_\infty$ является неособой кривой. Обозначим через $\overline{X}_d$ нормализацию поверхности $\overline{\mathbb{P}}^2$ в поле $\mathbb{C}(x,y,z)$ и через $\phi_d\colon \overline{X}_d \to \overline{\mathbb{P}}^2$ соответствующий морфизм.

Выберем некоторую окрестность U точки $\infty \in \mathbb{P}^1$, изоморфную диску $\Delta = \bigl\{u \in \mathbb{C} \mid |u| \leqslant 1\bigr\}$ (точка $u = 0$ соответствует точке $\infty \in U$) и такую, что отображение

$\overline{F}\colon \overline{F}^{-1}(U \setminus \infty) \to U \setminus \infty$ является гладким собственным морфизмом. Положим $\overline{U} = \overline{F}^{-1}(U)$ и $\widetilde{U} = \phi_d^{-1}(\overline{U})$. Мы получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \xrightarrow{\phi_d} & \overline{U} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \overline{F}_d} & & \big\downarrow{\scriptstyle \overline{F}} \\ \Delta & \xrightarrow{\psi_d} & U, \end{array} \tag{4}$$

где ψ_d определено уравнением $u = v^d$ (v – координата в Δ). Так как прообраз $\overline{F}_d^{-1}(0) = \phi_d^{-1}(L_\infty)$ является невырожденным слоем расслоения $\overline{F}_d$, то монодромия h_d, действующая на общем слое и определяемая обходом вокруг границы диска Δ, тривиальна. С другой стороны, из коммутативной диаграммы (3) следует, что $h_d = h_{ex}^d$. Лемма 2 доказана.

6. Следующая лемма завершает доказательство теоремы $2'$.

Лемма 3. *Если $f(x,y)$ и $\overline{D}$ удовлетворяют условиям леммы 2, то $\pi_1(\widetilde{Z}_{kdn,mdn})$ изоморфны $\pi_1(\widetilde{Z}_{0,dn})$ для всех k и m.*

Доказательство. Пусть $\tilde{l}_{ex} = g^{-1}(l_{ex})$ и $\widetilde{Z}_{ex} = \tilde{g}^{-1}(Z_{ex})$. Тогда $\widetilde{F}\colon \widetilde{Z}_{ex} \to \tilde{l}_{ex}$ является тривиальным C^∞-расслоением. Рассмотрим слои $Y_s = \widetilde{F}^{-1}(\tilde{z}_s)$ этого расслоения. Если мы выберем тривиализацию, то мы можем отождествить все эти слои; другими словами, выбранная тривиализация индуцирует диффеоморфизмы $\alpha_{i,j}\colon Y_i \to Y_j$. Если $kdn \leqslant s \leqslant mdn$, то $Y_s \subset \widetilde{Z}_{kdn,mdn}$, и это вложение индуцирует эпиморфизм $\psi_{s,kdn,mdn}\colon \pi_1(Y_s) \to \pi_1(Z_{kdn,mdn})$ такой, что если $kdn \leqslant r \leqslant mdn$, то $\psi_{s,kdn,mdn}\alpha_{r,s^*} = \psi_{r,kdn,mdn}$.

Все пространства $\widetilde{Z}_{kdn,(k+1)dn}$, $k \in \mathbb{Z}$, естественным образом диффеоморфны друг другу, так как эти пространства являются прообразами d-кратных обходов ожерелья T, начинающихся в точке z_0. Эти диффеоморфизмы позволяют нам отождествить фундаментальные группы $\pi_1(\widetilde{Z}_{kdn,(k+1)dn}) \simeq \pi$ для всех k. Это отождествление согласовано со сделанным отождествлением слоев Y_r; другими словами, следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y_r) & \xrightarrow{\alpha_{r,s^*}} & \pi_1(Y_s) \\ {\scriptstyle \psi_{r,kdn,(k+1)dn}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \psi_{s,mdn,(m+1)dn}} \\ \pi_1(\widetilde{Z}_{kdn,(k+1)dn}) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_1(\widetilde{Z}_{mdn,(m+1)dn}). \end{array}$$

Чтобы получить $\widetilde{Z}_{0,2dn}$ из $\widetilde{Z}_{0,dn}$ и $\widetilde{Z}_{dn,2dn}$ (аналогично для $\widetilde{Z}_{-2dn,0}$), мы должны склеить эти два подпространства пространства $\widetilde{Z}_{0,2dn}$ вдоль диффеоморфных слоев $Y_{dn} \subset \widetilde{Z}_{0,dn}$ и $Y_{dn} \subset \widetilde{Z}_{dn,2dn}$. Правило склейки определяется монодромией h^d_{ex}. В нашем случае по лемме 2 монодромия $h^d_{ex} = \mathrm{id}$. Применяя теорему Зайферта–ван Кампена, получаем существование изоморфизма $\psi_{0,2}\colon \pi_1(\widetilde{Z}_{0,dn}) \to \pi_1(\widetilde{Z}_{0,2dn})$, согласованного с эпиморфизмами α_*. Очевидная индукция завершает доказательство леммы 3.

Список литературы

1. *Куликов Вик. С.* Многочлены Александера плоских алгебраических кривых // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 42. №1. С. 67–90.
2. *Nori M.* Zariski's conjecture and related problems // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Ser.4. 1983. V. 16. P. 305–344.
3. *Stallings J. R.* On fibering certain 3-manifolds // Topology of 3-manifolds. Proc. Top. Inst. Univ. Georgia, 1961; // Englewood Cliffs / Ed. M.K. Fort. N. J.: Prentice Hall, 1962. P. 95–100.

e-mail: victor@olya.ips.ras.ru

Поступило в редакцию
4.VI.1996