

УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов

О фундаментальных группах дополнений к торическим кривым

Доказано, что для почти всех кривых D , заданных в $\mathbb{C}^2$ уравнением вида $g(x, y)^a + h(x, y)^b = 0$, где $a > 1$ и $b > 1$ – взаимно простые натуральные числа, фундаментальные группы дополнений к этим кривым имеют копредставление $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \simeq (x_1, x_2 \mid x_1^a = x_2^b)$, т.е. совпадают с группами торических узлов $K_{a,b}$. В проективном случае для почти всех кривых $\bar{D}$ в $\mathbb{P}^2$, являющихся проективным замыканием кривых, заданных в $\mathbb{C}^2$ уравнением вида $g(x, y)^a + h(x, y)^b = 0$, фундаментальная группа дополнения $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{D})$ является свободным произведением с объединенной подгруппой двух циклических групп конечного порядка. В частности, для общей кривой $\bar{D} \subset \mathbb{P}^2$, заданной уравнением $l_{bc}^a(z_0, z_1, z_2) + l_{ac}^b(z_0, z_1, z_2) = 0$, где l_q – однородный многочлен степени q , $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{D}) \simeq \langle x_1, x_2 \mid x_1^a = x_2^b, x_1^{ac} = 1 \rangle$.

Библиография: 8 наименований.

Введение

Пусть $D \subset \mathbb{C}^2$ – неприводимая комплексная алгебраическая кривая, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ – неприводимый многочлен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем кривую D *торической кривой*, если найдутся такие многочлены $g(x, y)$ и $h(x, y)$, $\deg g(x, y) > 0$, $\deg h(x, y) > 0$, а также такие взаимно простые натуральные числа $a > 1$ и $b > 1$, что выполнено соотношение

$$g(x, y)^a + h(x, y)^b = f(x, y). \quad (1)$$

Название “торическая кривая” возникло из того, что дополнение к кривой $E_{a,b} \subset \mathbb{C}^2$, заданной в координатах u и v уравнением $u^a + v^b = 0$, гомотопически эквивалентно дополнению к торическому узлу $K_{a,b}$ в трехмерной сфере (см., например, [4]). Как хорошо известно, фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_{a,b})$ порождается двумя элементами, x_1 и x_2 , и имеет следующее копредставление:

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_{a,b}) = \langle x_1, x_2 \mid x_1^a = x_2^b \rangle. \quad (2)$$

Торическое разложение (1) задает *торический пучок* кривых D_λ , $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, определяемый уравнением $g(x, y)^a + \lambda h(x, y)^b = 0$.

Работы выполнены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00614) и фонда INTAS (грант № 4373).

Многочлены $u = g(x, y)$ и $v = h(x, y)$, участвующие в торическом разложении (1), определяют морфизм $\psi: X = \mathbb{C}^2 \rightarrow Y = \mathbb{C}^2$. Предположим, что якобиан этого морфизма

$$J(g, h) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0,$$

и пусть морфизм $\bar{\psi}: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ является продолжением ψ на некоторое проективное замыкание аффинной плоскости X . Обозначим $\bar{B}$ множество точек в $\mathbb{P}^2$, над которыми морфизм $\bar{\psi}$ не является этальным, и пусть $B_{g,h} = \bar{B} \cap Y$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть многочлены $g(x, y)$ и $h(x, y)$ удовлетворяют условиям:

i) $J(g, h) \neq 0$;

ii) кривая $B_{g,h} \subset \mathbb{C}^2$ не проходит через начало координат.

Тогда почти все кривые D_λ из пучка кривых $g(x, y)^a + \lambda h(x, y)^b = 0$, где $a > 1$ и $b > 1$ – взаимно простые числа, являются неприводимыми и морфизм ψ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп

$$\psi_*: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_\lambda) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda),$$

где E_λ – кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $u^a + \lambda v^b = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть кривая D_λ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_\lambda)$ порождается двумя элементами, x_1 и x_2 , и имеет следующее копредставление:

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_\lambda) \simeq \langle x_1, x_2 \mid x_1^a = x_2^b \rangle.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть кривые в $\mathbb{C}^2$, заданные уравнениями $g(x, y) = 0$ и $h(x, y) = 0$, пересекаются в $\deg g(x, y) \deg h(x, y)$ различных точках. Тогда почти все кривые D_λ из пучка кривых $g(x, y)^a + \lambda h(x, y)^b = 0$, где $a > 1$ и $b > 1$ – взаимно простые числа, являются неприводимыми и фундаментальная группа имеет следующее копредставление:

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_\lambda) \simeq \langle x_1, x_2 \mid x_1^a = x_2^b \rangle.$$

Слова “почти все кривые” в теореме 1 и в следствиях 1 и 2 из нее означают следующее: для всех D_λ , $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, где λ_i , $1 \leq i \leq k$, – конечный набор (критических) точек в проколотой комплексной плоскости, для которых кривые E_λ в $\mathbb{C}^2$ из торического пучка $u^a + \lambda v^b = 0$ либо нетрансверсально пересекаются с $B_{g,h}$ хотя бы в одной точке, либо имеют число общих с $B_{g,h}$ точек меньше максимально возможного числа (для элементов этого пучка).

Обозначим $l_q(z_1, z_2, z_3)$ однородную форму степени q . Из следствия 2 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a > 1$ и $b > 1$ – взаимно простые числа, и пусть кривые в $\mathbb{P}^2$, заданные уравнениями $l_{bc}(z_1, z_2, z_3) = 0$ и $l_{ac}(z_1, z_2, z_3) = 0$, пересекаются трансверсально в abc^2 различных точках. Тогда

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{D}_\lambda) \simeq \langle x_1, x_2 \mid x_1^a = x_2^b, x_1^{ac} = 1 \rangle$$

для почти всех $\bar{D}_\lambda$ из пучков кривых $l_{bc}^a(z_1, z_2, z_3) + \lambda l_{ac}^b(z_1, z_2, z_3) = 0$.

Слова “почти все кривые” в теореме 2 означают: для всех $\bar{D}_\lambda$, не имеющих других особых точек, кроме базисных точек пучка $|\bar{D}_\lambda|$.

Теорема 2 была ранее доказана другими методами в [8] для $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, в [7] для $a = 2$, $b = 3$ и любого c , в [6] для произвольных взаимно простых чисел a и b , а $c = 1$, и в [5] – в общем случае.

Уравнение $f(x, y) = 0$ кривой D определяет морфизм $f: \mathbb{C}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}$, заданный уравнением $z = f(x, y)$. Индуцированный этим отображением гомоморфизм $f_*: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}$ является эпиморфизмом с конечно порожденным ядром $N = \ker f_*$, если общий слой морфизма f связан [3]. Если D – неприводимая кривая, то N совпадает с коммутантом группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$. В частности, для кривой $E_{a,b}$, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $u^a + v^b = 0$, коммутант N группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_{a,b})$ является свободной группой $\mathbb{F}$ ранга $\text{rg } \mathbb{F} = ab - a - b + 1$.

Известный принцип “полунепрерывности” Зарисского гласит, что если $\{D_b\}_{b \in B}$ – алгебраическое семейство плоских кривых, то для кривой D_{b_0} этого семейства, не имеющей кратных компонент, степень которой $\deg D_{b_0}$ совпадает со степенью $\deg D_b$ общей кривой D_b этого семейства, существует естественный эпиморфизм $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_{b_0}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_b)$.

Из этого принципа вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть кривая D , заданная в $\mathbb{C}^2$ уравнением $g(x, y)^a + h(x, y)^b = 0$, не имеет кратных компонент, и пусть $\deg D = \max(a \deg g, b \deg h)$. Тогда существует естественный эпиморфизм ядра $N = \ker f_*$ (коммутанта группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ в случае неприводимой кривой D) на свободную группу $\mathbb{F}$ ранга $\text{rg } \mathbb{F} = ab - a - b + 1$.

В случае, когда $\deg D \neq \max(a \deg g, b \deg h)$, имеет место чуть-чуть более слабое утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть кривая D , заданная в $\mathbb{C}^2$ уравнением $g(x, y)^a + h(x, y)^b = 0$, не имеет кратных компонент. Тогда существует естественный эпиморфизм ядра $N = \ker f_*$ на фундаментальную группу $\pi_1(S_g)$ римановой поверхности S_g рода $g \geq \frac{1}{2}(ab - a - b + 1)$.

Доказательство этой теоремы приведено в п. 3.8.

Теорема 1 является простым следствием (см. п. 3.6) следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть u и v – координаты в $\mathbb{C}^2$, и пусть кривая $B \subset \mathbb{C}^2$ не проходит через начало координат $o = (0, 0)$.

Тогда для почти всех кривых E_λ из торического пучка $u^a + \lambda v^b = 0$ имеют место естественные изоморфизмы

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda)) \simeq \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B) \times \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$$

такие, что проекции

$$\text{pr}_1: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B), \quad \text{pr}_2: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$$

индуцированы морфизмами $i_1: \mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus B$ и $i_2: \mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda$.

Доказательство основано на копредставлении фундаментальной группы дополнения к плоской алгебраической кривой, изложенном в [1], и во многом совпадает с доказательством основного результата работы [2]. Поэтому доказательства некоторых утверждений, необходимые для доказательства теоремы 4 и содержащиеся

в [1], [2], будут опущены. Вместе с тем все определения и формулировки утверждений из [1], [2], необходимые для доказательства теоремы 4, будут приведены в этой статье.

Доказательство теоремы 4 распадается на три части.

В §1 будет исследовано поведение кривых E_λ на бесконечности. Основываясь на этом исследовании, строится некоторое множество $\Lambda \subset \mathbb{C}^*$, состоящее из конечного набора действительных лучей, выходящих из начала координат и проходящих через критические точки λ_i .

В §2, основываясь на приведенном в [1] описании образующих для $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda))$ и соотношений между ними, показано, что для $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \Lambda$ в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda))$ можно так выбрать образующие $\gamma_{1,i}$, $i = 1, \dots, m$, и $\gamma_{2,i}$, $i = 1, \dots, n$, что $\gamma_{1,i}$ соответствуют образующим в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$, и соотношения между ними в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda))$ те же, что и в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$; аналогично, $\gamma_{2,i}$ соответствуют образующим в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B)$, и соотношения между ними в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda))$ те же, что и в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B)$. Кроме этих соотношений в фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda))$ имеются еще несколько определяющих соотношений типа: для некоторых пар γ_{1,i_1} , γ_{2,i_2} эти образующие коммутируют между собой. Эта часть доказательства почти дословно совпадает с соответствующей частью из [2].

Наконец, деформируя кривую E_λ , в §3 будет доказано, что любые две образующие $\gamma_{1,i}$ и $\gamma_{2,j}$ коммутируют между собой в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B \cup E_\lambda))$ для $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \Lambda$, а также будет показано, что эти группы изоморфны для всех $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Для доказательства теоремы 2 в §4 приведен алгоритм вычисления фундаментальной группы дополнения к торической кривой $E_{a,b}$, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $u^a + v^b = 0$, на основании которого теорема 2 является простым следствием из следствия 2. Упомянутый алгоритм позволяет вычислить фундаментальную группу дополнения к проективному замыканию $\overline{D}_\lambda$ в $\mathbb{P}^2$ любой кривой D_λ , удовлетворяющей условиям теоремы 1, если мы полностью контролируем порядок ветвления вдоль бесконечно удаленной прямой L_∞ и знаем ее “образ” при рациональном отображении $\psi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, определяемом многочленами $u = g(x, y)$ и $v = h(x, y)$ (подробности см. в п. 4.5). В частности, этот алгоритм приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\overline{E}_{a,b}$ – проективное замыкание в $\mathbb{P}^2$ кривой $E_{a,b}$, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $u^a + v^b = 0$, где $a > b > 1$ – взаимно простые натуральные числа. Тогда

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{E}_{a,b}) \simeq \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$$

– циклическая группа порядка a .

Теоремы 2 и 5 являются частными случаями более общего утверждения.

ТЕОРЕМА 6. Пусть многочлены $g(x, y)$ и $h(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для замыканий $\overline{D}_\lambda$ почти всех кривых D_λ из пучка $g(x, y)^a + \lambda h(x, y)^b = 0$ фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}_\lambda)$ является свободным произведением с объединенной подгруппой двух циклических групп конечного порядка.

§ 1. Поведение торических кривых E_λ на бесконечности

1.1. Рассмотрим пучок торических кривых E_λ , заданный уравнением $u^a + \lambda v^b = 0$. Пусть $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ – проективное пополнение, $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2 = L_\infty$ – бесконечно удаленная прямая и $\bar{E}_\lambda$ – проективное замыкание кривой E_λ в $\mathbb{P}^2$. Предположим, что $a > b$; для всех λ кривые $\bar{E}_\lambda$ и L_∞ пересекаются в единственной точке $(0 : 1 : 0)$, где $(y_1 : y_2 : y_3)$ – проективные координаты на $\mathbb{P}^2$ и $u = \frac{y_1}{y_3}$, $v = \frac{y_2}{y_3}$.

Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ – последовательность σ -процессов, разрешающая базисную точку на бесконечности пучка кривых $\bar{E}_\lambda$ так, что этот пучок в окрестности бесконечности задает регулярный морфизм. Пусть $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция этих σ -процессов. Пусть $L_0 = L_\infty$, L_i – исключительная кривая i -го σ -процесса, а $L_j = \sigma_i^{-1}(L_j)$ – собственный прообраз при $j < i$.

Непосредственно проверяется, что:

- i) первый σ -процесс σ_1 имеет своим центром точку $(0 : 1 : 0)$;
- ii) при $i > 1$ центр i -го σ -процесса лежит на пересечении двух кривых, L_j и L_k , $j < i$ и $k < i$, причем кривые L_j и L_k однозначно определяются номером σ -процесса и парой чисел a и b ;
- iii) необходимое для разрешения базисной точки число n σ -процессов зависит только от чисел a и b ;
- iv) для любого $\lambda \in \mathbb{C}^*$ собственный прообраз кривой $\bar{E}_\lambda$ пересекается с L_n (исключительной кривой последнего σ -процесса) в одной точке и не пересекается с L_j при $j < n$.

Отсюда следует

ЛЕММА 1. Для любых u_0 и v_0 последовательность σ -процессов, разрешающая базисную точку на бесконечности пучка кривых E_{λ, u_0, v_0} , заданного уравнением

$$(u - u_0)^a + \lambda(v - v_0)^b = 0,$$

так, что этот пучок в окрестности бесконечности задает регулярный морфизм, не зависит от u_0 и v_0 .

1.2. Для фиксированного λ рассмотрим двухпараметрическое семейство торических кривых $E_{u_0, v_0} = E_{\lambda, u_0, v_0}$, заданное уравнением $(u - u_0)^a + \lambda(v - v_0)^b = 0$. Обозначим p_{λ, u_0, v_0} точку пересечения кривой $\bar{E}_{u_0, v_0}$ с L_n .

ЛЕММА 2. Точка $p_{\lambda, u_0, v_0} = p_\lambda \in L_n$ остается неподвижной при изменении параметров u_0 и v_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можем считать, что $\lambda = 1$. Из леммы 1 следует, что кривые $\bar{E}_{\lambda, u_0, v_0} \in \bar{\mathbb{P}}^2$ принадлежат одной и той же линейной системе. Следовательно, индекс пересечения $(\bar{E}_{\lambda_0, u_0, v_0}, \bar{E}_{\lambda_1, u_1, v_1})_{\mathbb{P}^2} = d$ является константой. Обозначим

$$(E_{\lambda_0, u_0, v_0}, E_{\lambda_1, u_1, v_1})_{\mathbb{C}^2} = \sum_z (E_{\lambda_0, u_0, v_0}, E_{\lambda_1, u_1, v_1})_z$$

индекс пересечения кривых E_{λ_0, u_0, v_0} и E_{λ_1, u_1, v_1} в $\mathbb{C}^2$, где суммирование ведется по всем точкам z пересечения этих кривых в $\mathbb{C}^2$.

Кривые E_{1, u_0, v_0} определяют регулярный морфизм $\nu : \mathbb{C}^2 \rightarrow L_n$, переводящий точку (u_0, v_0) в точку p_{1, u_0, v_0} . Если образ $\nu(\mathbb{C}^2)$ не является точкой, то найдутся такие значения параметров (u_1, v_1) и (u_2, v_2) , что

$$(E_{1, 0, 0}, E_{1, u_1, v_1})_{\mathbb{C}^2} = d, \quad (E_{1, u_2, v_2}, E_{1, u_1, v_1})_{\mathbb{C}^2} < d.$$

Более того, неравенство $(E_{1,u_2,v_2}, E_{1,u_1,v_1})_{\mathbb{C}^2} < d$ означает, что кривые E_{1,u_1,v_1} и E_{1,u_2,v_2} определяют одну и ту же точку p на бесконечности. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что найдется такое значение λ , что $(E_{1,0,0}, E_{1,0,v_0})_{\mathbb{C}^2} < ab$, $(E_{1,0,v_0}, E_{1,u_0,v_0})_{\mathbb{C}^2} < ab$ и $(E_{1,0,0}, E_{\lambda,0,v_0})_{\mathbb{C}^2} = ab$ для $\lambda \neq 1$ и всех u_0, v_0 .

Проверим первое из этих неравенств (второе проверяется аналогично). Найдем точки пересечения кривых $E_{1,0,0}$ и $E_{1,0,v_0}$. Для этого нам нужно решить систему уравнений

$$\begin{aligned} u^a + v^b &= 0, \\ u^a + (v - v_0)^b &= 0 \end{aligned}$$

и показать, что число решений меньше ab . Обозначая $\xi_1, \dots, \xi_{b-1}$ корни уравнения

$$v^b - (v - v_0)^b = 0,$$

получаем, что решениями этой системы являются пары $(\sqrt[b]{-\xi_i}, \xi_i)$, т.е. число решений строго меньше ab . Решая аналогичную систему, точно так же проверяется равенство $(E_{1,0,0}, E_{\lambda,0,v_0})_{\mathbb{C}^2} = ab$. Эту проверку мы оставляем читателю. Лемма 2 доказана.

1.3. Рассмотрим снова пучок торических кривых E_λ , заданный уравнением $u^a + \lambda v^b = 0$. Этот пучок определяет рациональное отображение $\varphi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ со слоем $\overline{E}_\lambda$ над точкой $\lambda \in \mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}^1$. Продолжим последовательность σ -процессов $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ из п. 1.1, добавив к ним σ -процессы с центром в начале координат так, чтобы разрешить базисную точку (начало координат) отображения φ . В итоге получим композицию σ -процессов $\tilde{\sigma}: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и регулярный морфизм $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Пусть $B \subset \mathbb{C}^2$ – произвольная кривая, $\overline{B} \subset \mathbb{P}^2$ – ее проективное замыкание, а $\tilde{B} = \sigma^{-1}(\overline{B}) \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ – собственный прообраз. Кривая $\tilde{B}$ пересекается с L_n (определение L_n см. в п. 1.1) в конечном числе точек. Обозначим $\Lambda_B = \tilde{\varphi}(\tilde{B} \cap L_n) \cap \mathbb{C}^*$, и пусть

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}^* \mid t\lambda \in \Lambda_B \text{ для некоторого действительного } t > 0\}$$

– конечный набор действительных лучей в $\mathbb{C}^*$, выходящих из “выколотой” точки и проходящих через одну из точек, принадлежащих Λ_B .

Обозначим E_{λ,t,u_0,v_0} кривую в $\mathbb{C}^2$, заданную уравнением $(tu - u_0)^a + \lambda(tv - v_0)^b = 0$.

ЛЕММА 3. *Функция $\eta: (\mathbb{C}^* \setminus \Lambda) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, где $\eta(\lambda, t, u_0, v_0) = (E_{\lambda,t,u_0,v_0}, B)_{\mathbb{C}^2}$, является константой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $E_{\lambda,t,u_0,v_0} = E_{t^{b-a}\lambda, 1, t^{-1}u_0, t^{-1}v_0}$. Поэтому лемма 3 следует из определения множества Λ и из леммы 2, так как $t^{b-a}\lambda \notin \Lambda$, если $\lambda \notin \Lambda$, и $(E_{\lambda,0,0}, B)_{\mathbb{C}^2} = (\tilde{E}_{\lambda,0,0}, \tilde{B})_{\tilde{\mathbb{P}}^2}$ для $\lambda \notin \Lambda_B$.

1.4. Если кривая B не проходит через начало координат, то, очевидно, среди компонент кривой $\tilde{B}$ нет компонент слоев морфизма $\tilde{\varphi}$. Поэтому ограничение $\tilde{\varphi}$ морфизма $\tilde{\varphi}$ на $\tilde{B}$ является конечным морфизмом. Обозначим $\Lambda_{\text{sing}} \subset \mathbb{C}^*$ конечное множество точек, над которыми морфизм $\tilde{\varphi}$ не является этальным.

§ 2. Метод теней и экранов

Напомним основные определения и утверждения из [1], [2], необходимые для доказательства теоремы 4. На протяжении этого и следующего параграфов считаем, что кривая $E = E_\lambda$ из торического пучка кривых, заданного уравнением $u^a + \lambda v^b = 0$, пересекается с B в $\mathbb{C}^2$ трансверсально во всех общих для этих кривых точках, т.е. $\lambda \notin \Lambda_{\text{sing}}$, а также предполагаем, что $\lambda \notin \Lambda$. Обозначим $D = E \cup B$.

2.1. Пусть $l_{o,x}$ – действительный луч, выходящий из точки o и проходящий через точку $x \in \mathbb{C}^2$. Выберем точку $o \in \mathbb{C}^2$, $o \notin D$, так, чтобы эта точка и кривая D находились в общем положении по отношению друг к другу, т.е. чтобы выполнялись следующие условия [1]:

- 1) число точек пересечения (без учета кратности) любого луча $l_{o,x}$ и D не более трех;
- 2) существует лишь конечное число лучей $l_{o,x}$, пересекающих D ровно в трех точках;
- 3) для почти всех точек $x \in D$, кроме точек, принадлежащих конечному числу вещественных алгебраических кривых, $l_{o,x} \cap D = \{x\}$;
- 4) для каждой точки $s \in \text{Sing } D$ имеем $l_{o,s} \cap D = \{s\}$;
- 5) если луч $l_{o,x}$ касается D в точке x , то $l_{o,x} \cap D = \{x\}$;
- 6) если луч $l_{o,x}$ пересекает D в точках x и y , $x \neq y$, то касательные пространства $T_x D$ и $T_y D$ не параллельны;
- 7) пучок комплексных прямых в $\mathbb{P}^2$, проходящих через точку o , является пучком Лефшеца, т.е. для индекса пересечения $(\bar{L}, \bar{D})_x$ каждой прямой $\bar{L}$ из пучка и кривой $\bar{D}$ в каждой точке $x \in L \cap D$ выполнено

$$\begin{aligned} (\bar{L}, \bar{D})_x &\leq 2, \text{ если } x \text{ – неособая точка,} \\ (\bar{L}, \bar{D})_x &= \mu_x, \text{ если } x \in \text{Sing } \bar{D}, \end{aligned}$$

где μ_x – кратность особой точки x кривой $\bar{D} \in \mathbb{P}^2$.

ЛЕММА 4. Для любой кривой $D \subset \mathbb{C}^2$ существует точка $o \in \mathbb{C}^2$, находящаяся с D в общем положении.

Доказательство содержится в пп. 7 и 8 статьи [1].

Пусть (u_0, v_0) – координаты точки o . Выберем новую систему координат, положив

$$z_1 = u - u_0, \quad z_2 = v - v_0.$$

2.2. Пусть $\tilde{f}(z_1, z_2) = 0$ – уравнение кривой D ,

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = f_1(z_1, z_2)((z_1 + u_0)^a + \lambda(z_2 + v_0)^b),$$

где $f_1(z_1, z_2) = 0$ – уравнение кривой B и $f_2(z_1, z_2) = ((z_1 + u_0)^a + \lambda(z_2 + v_0)^b) = 0$ – уравнение кривой E .

Точка $z = (z_1, z_2) \in D$ называется *невидимой*, если для некоторого вещественного t , $0 < t < 1$, точка $tz = (tz_1, tz_2)$ также принадлежит D , т.е. на луче $l_{o,z}$ между точками o и z лежит еще одна точка $tz \in D$. Такую точку $tz \in D$ мы будем называть *экранирующей точкой*. Объединение всех экранирующих точек обозначим SD и назовем *экраном*, а замыкание всех невидимых точек $I^0 D$ обозначим ID .

Множества

$$\begin{aligned} SD &= S_{11} \cup S_{22} \cup S_{12} \cup S_{21}, \\ I^0 D &= I_{11}^0 \cup I_{22}^0 \cup I_{12}^0 \cup I_{21}^0, \end{aligned}$$

где S_{ij} и I_{ij}^0 задаются неявно системой уравнений

$$\begin{aligned} f_i(z_1, z_2) &= 0, \\ f_j(tz_1, tz_2) &= 0, \quad t > 0, \quad t \neq 1, \end{aligned} \tag{3}$$

при этом точка (z_1, z_2) – решение системы (3) при $t < 1$ – принадлежит I_{ij}^0 , а при $t > 1$ эта точка принадлежит S_{ij} . Если мы обозначим $D_1 = B$ и $D_2 = E$, то S_{ij} состоит из точек, лежащих на D_i и экранирующих некоторые точки, лежащие на D_j , а I_{ij}^0 состоит из невидимых точек, лежащих на D_i и экранируемых точками, лежащими на D_j .

Система (3) неявно задает q непрерывных кривых $\gamma_1(t), \dots, \gamma_q(t) \subset D$, точки которых параметризованы вещественным параметром t , $t > 0$, $t \neq 1$. Пусть эти кривые занумерованы таким образом, что

$$\begin{aligned} \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_p &= S_{12} \cup S_{21} \cup I_{12}^0 \cup I_{21}^0, \\ \gamma_{p+1} \cup \dots \cup \gamma_q &= S_{11} \cup S_{22} \cup I_{11}^0 \cup I_{22}^0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть $\lambda \notin \Lambda$. Тогда:

- 1) $q \leq \deg D(\deg D - 1)$;
- 2) $p = (B, E)_{\mathbb{C}^2}$;
- 3) для любого i отображение $\gamma_i: \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \rightarrow D$ является гладким погружением;
- 4) если $\gamma_i(t_1) = \gamma_j(t_2)$ при $i \neq j$, то $t_1 \neq t_2$;
- 5) $I_{12}^0 \cup I_{21}^0 = \bigcup_{i=1}^p \{\gamma_i(t) \mid t < 1\}$;
- 6) $S_{12} \cup S_{21} = \bigcup_{i=1}^p \{\gamma_i(t) \mid t > 1\}$;
- 7) для $1 \leq i \leq p$ значение $\gamma_i(t_0)$ определено при любом $t_0 > 0$, т.е. существует $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma_i(t) \in \mathbb{C}^2$; более того, $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma_i(t) \in D_1 \cap D_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждений 1)–6) содержится в пп. 6.3–6.8 статьи [1]. Утверждение 7) следует из леммы 3, так как кривая $E = E_\lambda$ выбрана так, что $\lambda \notin \Lambda$.

Из (3) легко видеть, что если $z = \gamma_i(t)$ для некоторого i , то точка tz лежит на некоторой кривой γ_j и $tz = \gamma_j(t^{-1})$. В дальнейшем будем считать, что кривые занумерованы таким образом, что если $z = \gamma_i(t)$, то точка tz лежит на той же кривой γ_i . В этом случае каждая кривая $\gamma_i(t)$ при $i \leq p$ обладает следующим свойством (см. [1, п. 6.10]):

*) если при $t < 1$ точки $\gamma_i(t)$ принадлежат D_1 (соответственно D_2), то при $t > 1$ точки $\gamma_i(t)$ принадлежат D_2 (соответственно D_1). Кроме того, если U – достаточно малая окрестность точки $s = \gamma_i(1)$, то $(U \cap D_j) \setminus \bar{\gamma}_i$ ($j = 1, 2$) является связным множеством, где $\bar{\gamma}_i = \{z = \gamma_i(t) \mid t \leq 1\}$.

2.3. Пространство $D \setminus ID$ распадается на связные компоненты $D_{11}, \dots, D_{1r}, D_{21}, \dots, D_{2s}$, где $D_{1i} \subset D_1$ и $D_{2j} \subset D_2$. Эти компоненты взаимно однозначно соответствуют образующим фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, o)$ в копредставлении, описанном в [1]. Напомним кратко это копредставление.

Пусть K_i – действительный конус над D_i ($i = 1, 2$) с вершиной в точке o ,

$$K_i \setminus \{o\} = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid f_i(tz) = 0 \text{ для некоторого } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

и пусть $K = K_1 \cup K_2$. Риманова поверхность D делит конус K на две части. Пусть

$$EK = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid f(tz) = 0 \text{ для некоторого положительного } t \in \mathbb{R}_+, t < 1\}$$

– та часть, которая не содержит начала координат o (тень кривой D в терминах [1]). Для каждой связной компоненты $D_{ij} \subset D \setminus ID$ обозначим

$$\tilde{K}_{ij} = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \exists \text{ положительное } t < 1 \text{ такое, что } tz \in D_{ij}\} \subset EK.$$

Каждая $\tilde{K}_{ij}$ является гладкой двусторонней [1] действительной гиперповерхностью в $\mathbb{C}^2$. Пусть

$$EID = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \exists \text{ положительное } t < 1 \text{ такое, что } tz \in ID\}$$

– тень от множества невидимых точек. Множества $K_{ij} = \tilde{K}_{ij} \setminus EID$ называются *стенками*. Каждая стенка K_{ij} является связным множеством, и если $D_{i_1j_1} \neq D_{i_2j_2}$, то $K_{i_1j_1} \cap K_{i_2j_2} = \emptyset$.

Для почти всех точек $z \in EID$ (кроме точек, лежащих на конечном числе лучей) тень EK локально в окрестности точки z распадается на две гладкие гиперповерхности, K' и K'' , пересекающиеся трансверсально вдоль $K' \cap K'' \subset EID$ (такие точки $z \in EID$ называются *гладкими точками* множества EID). Гиперповерхности $K' \setminus (K' \cap K'')$ и $K'' \setminus (K' \cap K'')$ распадаются на две связные компоненты каждая. Обозначим их K'_1, K'_2 и K''_1, K''_2 .

По определению множества EID для каждой гладкой точки $z \in EID$ на луче $l_{o,z}$ между точками o и z лежат ровно две точки, a и b , принадлежащие D , одна из которых (пусть это a) принадлежит SD , а другая точка принадлежит ID (см. [1, рис. 2]). Точка a принадлежит некоторой компоненте связности $D_{i_1j_1}$ и одно из множеств, $K' \setminus (K' \cap K'')$ или $K'' \setminus (K' \cap K'')$, содержится в $K_{i_1j_1}$ (пусть для определенности это $K' \setminus (K' \cap K'')$). Множества K'_1 и K'_2 также принадлежат некоторым стенкам $K_{i_2j_2}$ и $K_{i_3j_3}$ (быть может, $K_{i_2j_2} = K_{i_3j_3}$). Такие стенки называются *смежными* в точке $z \in EID$. Каждая тройка смежных в некоторой точке стенок $K_{i_1j_1}, K_{i_2j_2}, K_{i_3j_3}$ является упорядоченной тройкой, порядок в которой определяется ориентациями на этих стенках [1].

Как показано в [1], стенки K_{ij} взаимно однозначно соответствуют образующим некоторого копредставления (аналог копредставления Виртингера) фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, o)$, а определяющие соотношения между ними взаимно однозначно соответствуют тройкам смежных в некоторой точке стенок. Более точно, пусть $[a, b]$ – отрезок, пересекающий трансверсально стенку K_{ij} в точке $z \in K_{ij}$ с положительной стороны (двигаясь от a к b), не пересекает EK в других точках и имеет достаточно малую длину. Обозначим $\bar{l}_z$ замкнутую петлю, составленную из отрезков $[o, a]$, $[a, b]$ и $[b, o]$. Очевидно, для различных $z \in K_{ij}$ петли $\bar{l}_z$ определяют один и тот же элемент $\gamma_{ij} \in \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, o)$. Элементы γ_{ij} порождают $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, o)$, и соотношения между ними – это соотношения вида

$$\gamma_{i_1j_1} \gamma_{i_2j_2} \gamma_{i_3j_3}^{-1} = \gamma_{i_3j_3} \quad (4)$$

для каждой правильно упорядоченной тройки смежных в некоторой точке $z \in EID$ стенок $K_{i_1j_1}, K_{i_2j_2}, K_{i_3j_3}$.

2.4. Стежки K_{ij} однозначно соответствуют компонентам связности $D_{ij} \subset D \setminus ID$. Поэтому в дальнейшем каждую D_{ij} мы отождествим с образующей γ_{ij} фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, o)$, а каждой точке $z \in D_{ij}$ сопоставим составленную из отрезков замкнутую петлю $\bar{l}_{z_1}$, где $z_1 = tz \in K_{ij}$ для некоторого $t > 1$ (близкого к 1). Эту петлю в дальнейшем мы будем обозначать l_z .

Процесс разбиения множества $D \setminus ID$ на связные компоненты может быть произведен в два шага. На первом шаге разобьем римановы поверхности $D_i \setminus I_{ii}$ на связные компоненты $D_i^1, \dots, D_i^{\alpha(i)}$, а затем каждую $D_1^l \setminus I_{12}$ (соответственно $D_2^l \setminus I_{21}$) разобьем на связные компоненты D_{1j} (соответственно D_{2j}).

Компоненты $D_i^1, \dots, D_i^{\alpha(i)}$ взаимно однозначно соответствуют образующим фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_i, o)$ в описанном выше копредставлении.

ЛЕММА 6. Пусть $\lambda \notin \Lambda$, и пусть D_{ij_1} и D_{ij_2} лежат в одной и той же компоненте связности D_i^l . Тогда $\gamma_{ij_1} = \gamma_{ij_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совпадает с доказательством леммы 3 из [2].

Элемент $\gamma_{ij_1} = \gamma_{ij_2}$ группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, o)$, соответствующий компонентам D_{ij_1} и D_{ij_2} , лежащим в одной и той же компоненте связности D_i^l , в дальнейшем будем обозначать γ_i^l .

ЛЕММА 7. Пусть $\lambda \notin \Lambda$, и пусть замыкание компонент связности D_1^l и D_2^m содержит точку $s \in D_1 \cap D_2$. Тогда

$$\gamma_1^l \gamma_2^m = \gamma_2^m \gamma_1^l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО содержится в [1, п. 6.13].

Из лемм 6 и 7 следует, что в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, o)$ мы можем выбрать образующие $\gamma_1^1, \dots, \gamma_1^{\alpha(1)}, \gamma_2^1, \dots, \gamma_2^{\alpha(2)}$ так, что $\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^{\alpha(i)}$ ($i = 1, 2$) взаимно однозначно соответствуют образующим группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_i, o)$. Соотношения между образующими $\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^{\alpha(i)}$ в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, o)$ те же, что и в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_i, o)$. Кроме этих соотношений имеется еще несколько соотношений следующего типа: пара образующих $\gamma_1^{j_1}$ и $\gamma_2^{j_2}$ коммутирует друг с другом, если замыкания компонент $D_1^{j_1}$ и $D_2^{j_2}$ содержат точку из $D_1 \cap D_2$, и других соотношений нет.

§ 3. Линейная деформация кривой E_λ

Чтобы завершить доказательство теоремы 4, нам надо показать, что любые две образующие $\gamma_1^{j_1}$ и $\gamma_2^{j_2}$ коммутируют друг с другом. Для этого рассмотрим группу $\text{GL}(2, \mathbb{C})$. Выбранная выше система координат в $\mathbb{C}^2$ с началом координат в точке o определяет линейное действие группы $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ на $\mathbb{C}^2$. Это действие продолжается до действия на $\mathbb{P}^2$; при этом для любого $g \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ $gL_\infty = L_\infty$.

3.1. Рассмотрим в $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ подгруппу нижних треугольных матриц

$$\Delta = \left\{ g \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \mid g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \right\}.$$

Элементы $g \in \Delta$ оставляют на месте прямую $L_{z_1=0}$. Поэтому точка $(0 : 1 : 0) = L_\infty \cap \bar{E}_\lambda$ остается неподвижной при действии группы Δ (мы предполагаем, что показатель a в уравнении E_λ больше b).

Рассмотрим в Δ открытое по Зарисскому множество

$$G = \{g \in \Delta \mid D_1 \text{ и } gD_2 \text{ пересекаются трансверсально в } (B, E_\lambda)_{\mathbb{C}^2} \text{ точках}\},$$

где $D_1 = B$, $D_2 = E_\lambda$ и gD_2 – образ кривой D_2 при действии элемента $g \in \Delta$ в $\mathbb{C}^2$. Отметим, что G непусто, так как содержит некоторую окрестность единичного элемента группы Δ . Кроме того, G является связным множеством, так как Δ – неприводимое алгебраическое многообразие, а G – открытое по Зарисскому в Δ подмножество.

Рассмотрим в $G \times \mathbb{P}^2$ три гиперповерхности:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= G \times \bar{D}_1, & \tilde{D}_2 &= G\bar{D}_2 = \{(g, x) \in G \times \mathbb{P}^2 \mid g^{-1}(x) \in \bar{D}_2\}, \\ \tilde{L}_\infty &= GL_\infty = \{(g, x) \in G \times \mathbb{P}^2 \mid g^{-1}(x) \in L_\infty\}. \end{aligned}$$

Пусть $p: G \times \mathbb{P}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{L}_\infty) \rightarrow G$ – ограничение на $G \times \mathbb{P}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{L}_\infty)$ проекции $\text{pr}_1: G \times \mathbb{P}^2 \rightarrow G$. Очевидно, для каждого $g \in G$ слой $p^{-1}(g) \simeq \mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup gD_2)$.

ЛЕММА 8. *Морфизм $p: G \times \mathbb{P}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{L}_\infty) \rightarrow G$ является C^∞ -локально тривиальным расслоением. Более того, над некоторой окрестностью U любой точки $g_0 \in G$ тривиализация может быть выбрана так, что $\{(g, o) \mid g \in U\}$ является постоянным сечением этой тривиализации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы использует стандартную технику тривиализации расслоения в окрестности U_g компактного слоя $\text{pr}^{-1}(g)$ путем склейки с помощью гладкого разбиения единицы, подчиненного покрытию $\{U_i\}$, глобальных векторных полей в U_g из векторных полей, определенных на открытых множествах U_i , $U_g = \cup U_i$, и потому будет опущено.

3.2. Пусть $s: [0, 1] \rightarrow G$ – гладкий путь, соединяющий элементы e и g_1 , где e – единица группы $\text{GL}(2, \mathbb{C})$, $s(0) = e$, $s(1) = g_1$. Ограничение морфизма $p: G \times \mathbb{P}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{L}_\infty) \rightarrow G$ на кривую s , $p_s: s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2) \rightarrow s$, является C^∞ -тривиальным расслоением. Обозначим $q: G \times \mathbb{P}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{L}_\infty) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ проекцию на слой $p_s^{-1}(e)$, определяемую тривиализацией. Обозначим $\bar{q}_{s(\tau)}$ ограничение q на слой $p_s^{-1}(s(\tau))$ и $q_{s(\tau)} = \bar{q}_{s(\tau)}^{-1}$ – обратный гомеоморфизм.

Так как p_s является C^∞ -тривиальным расслоением, то для любого $\tau \in [0, 1]$ определены естественные изоморфизмы фундаментальных групп слоев $p_s^{-1}(e)$ и $p_s^{-1}(s(\tau))$,

$$q_{s(\tau)*}: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup D_2), o) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(\tau)D_2), o),$$

согласованные с изоморфизмами

$$i_{\tau*}: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(\tau)D_2), o) \rightarrow \pi_1(s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2), (e, o)),$$

индуцированными вложениями $i_\tau: \mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(\tau)D_2) \rightarrow s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2)$. Мы можем отождествить $\pi_1(s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2), (e, o))$ с $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup D_2), o)$. При этом отождествлении замкнутая петля $\gamma \subset \mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(\tau)D_2)$ отождествляется с $\bar{q}_{s(\tau)}(\gamma) \subset \mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ (более точно, петли $\bar{q}_{s(\tau)}(\gamma)$ и $\bar{\gamma}$ определяют один и тот же элемент в $\pi_1(s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2), (e, o))$, где $\bar{\gamma}$ – петля, состоящая из пути по сечению $(s(t), o)$, $0 \leq t \leq \tau$, затем по петле γ и назад в точку $o = (s(t), o)$ по сечению $(s(t), o)$).

3.3. Для доказательства теоремы 4 достаточно доказать, что для любых двух образующих $\gamma_1^{j_1}, \gamma_2^{j_2} \in \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup D_2), o)$ существует такой путь $s \subset G$, что элементы $q_{s(1)}(\gamma_1^{j_1})$ и $q_{s(1)}(\gamma_2^{j_2})$ коммутируют в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(1)D_2), o)$. Для этого обозначим $H \subset G$ подмножество тех элементов $g \in G$, для которых начало координат o не находится в общем положении с римановой поверхностью $D_1 \cup gD_2$, $H_{D_1} = \cup \{g \in G \mid \check{D}_1 \subset gK_2\}$, $H_{D_2} = \{g \in G \mid gD_2 \subset K_1\}$, где K_i – действительный конус над римановой поверхностью D_i , $\check{D}_1$ – неприводимая компонента поверхности D_1 и объединение взято по всем неприводимым компонентам $\check{D}_1 \subset D_1$. Обозначим

$$H_x = \{g \in G \mid g(x) \in K_1\},$$

$$TH_x = \{g \in G \mid g(x) \in K_1, \quad g(T_x D_2) \subset T_{g(x)} K_1\},$$

где $x \in D_2$, а $T_x D_2$, $T_{g(x)} K_1$ – касательные пространства к D_2 и K_1 в точках x и $g(x)$ соответственно. Аналогично, для $x \in D_1$ обозначим

$$\tilde{H}_x = \{g \in G \mid g^{-1}(x) \in K_2\},$$

$$T\tilde{H}_x = \{g \in G \mid g^{-1}(x) \in K_2, \quad g^{-1}(T_x D_1) \subset T_{g^{-1}(x)} K_2\}.$$

Кроме того, для любой точки $x \in D_2$ обозначим

$$EH_x = \{g \in G \mid g(x) \in EID_1\}$$

и для точки $x \in D_1$ обозначим

$$E\tilde{H}_x = \{g \in G \mid g^{-1}(x) \in EID_2\}.$$

ЛЕММА 9. *Пространства H , H_{D_1} , H_{D_2} , H_x , $\tilde{H}_x$, TH_x , $T\tilde{H}_x$, EH_x , $E\tilde{H}_x$ являются собственными вещественными алгебраическими подмногообразиями в G вещественной коразмерности:*

- 1) $\text{codim}_{\mathbb{R}} H_{D_i} \geq 3$;
- 2) $\text{codim}_{\mathbb{R}} T\tilde{H}_x \geq 3$ для общей точки $x \in D_1$;
- 3) $\text{codim}_{\mathbb{R}} TH_x \geq 3$ для общей точки $x \in D_2$;
- 4) $\text{codim}_{\mathbb{R}} E\tilde{H}_x \geq 2$ для общей точки $x \in D_1$;
- 5) $\text{codim}_{\mathbb{R}} EH_x \geq 2$ для общей точки $x \in D_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия 1)–7) в определении точки, находящейся в общем положении с римановой поверхностью $D_1 \cup D_2$, являются алгебраическими условиями. Конусы K_i и кривые SD_i также являются вещественными алгебраическими многообразиями. Поэтому H , H_{D_1} , H_{D_2} , H_x , $\tilde{H}_x$, TH_x , $T\tilde{H}_x$, EH_x , $E\tilde{H}_x$ являются вещественными алгебраическими подмногообразиями в G . Все эти подмногообразия являются собственными подмногообразиями, так как элементы некоторой окрестности единицы $e \in \Delta \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$ не содержатся в пространствах H , H_{D_1} и H_{D_2} . То же самое верно для H_x, TH_x , если $x \notin K_1$, и для $\tilde{H}_x, T\tilde{H}_x$, если $x \notin K_2$.

Покажем, что $\text{codim}_{\mathbb{R}} H_{D_i} \geq 3$. Пусть $i = 2$ (случай $i = 1$ рассматривается аналогично). Конус $K_1 \setminus \text{Sing } K_1$ естественным образом диффеоморфен произведению $(\bigcup_j D_1^j) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Этот диффеоморфизм определяет в касательном пространстве $T_x K_1$ каждой точки $x \in K_1 \setminus \text{Sing } K_1$ горизонтальное подпространство $T_{h,x} = T_x t D_1$ к $t D_1 = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid t^{-1}(z) \in D_1\}$, где $t \in \mathbb{R}$ таково, что $t^{-1}x \in D_1$.

Так как касательные пространства любых двух комплексных кривых в $\mathbb{C}^2$, проходящих через точку x , либо совпадают, либо порождают все $\mathbb{C}^2$, а $\dim_{\mathbb{R}} T_x K_1 = 3$, то в $T_x K_1$ имеется единственное комплексное направление, а именно $T_x tD_1$.

Пусть теперь для некоторого элемента $g \in \Delta$ комплексная кривая $gD_2 \subset K_1$. Из вышеизложенного следует, что в каждой точке $x \in gD_2$ касательное пространство $T_x gD_2$ равно $T_{h,x}$. Следовательно, кривая gD_2 является горизонтальным сечением, т.е. найдется такое $t \in \mathbb{R}$, что $\check{D}_1 = t^{-1}gD_2$, где $\check{D}_1$ – некоторая компонента кривой D_1 . отсюда следует, что $\dim_{\mathbb{R}} H_{D_2} = \dim_{\mathbb{R}} \text{Aut } D_2 + 1$, где $\text{Aut } D_2 = \{g \in \Delta \mid gD_2 = D_2\}$.

Покажем, что $\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut } D_2 \leq \dim_{\mathbb{R}} \Delta - 4$. Кривая $D_2 = E_\lambda$ имеет особую точку с координатами $(-u_0, -v_0) \neq (0, 0)$, и, не ограничивая общности, мы можем считать, что $u_0 \neq 0$ и $v_0 \neq 0$, так как точка o может быть выбрана из открытого всюду плотного множества в $\mathbb{C}^2$. Тогда для $g \in \text{Aut } D_2$, равного

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

должны выполняться равенства

$$u_0 g_{11} = u_0, \quad u_0 g_{21} + v_0 g_{22} = v_0,$$

так как g должен оставлять неподвижной особую точку кривой E_λ . Следовательно, имеем неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut } D_2 \leq \dim_{\mathbb{R}} \Delta - 4$.

Докажем, что выполнено неравенство 3) (доказательство для неравенства 2) аналогично). Используя представление $K_1 \setminus \text{Sing } K_1 \simeq (\cup D_1^j) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, легко видеть, что

$$\dim_{\mathbb{R}} TH_x = \dim_{\mathbb{R}} T_D H_x + 1,$$

где $T_D H_x = \{g \in \Delta \mid g(x) \in D_1, g(T_x D_2) = T_{g(x)} D_1\}$.

Вычислим $\dim_{\mathbb{R}} T_D H_x$ для общей точки $x \in D_2$. Сделав треугольное линейное преобразование, мы можем считать, что координаты точки x равны $(1, 0)$. Кроме того, если (v_1, v_2) – координаты касательного вектора $\bar{v} \in T_x D_2$, то $v_2 \neq 0$, так как мы можем считать, что комплексная прямая $T_x D_2$ не проходит через начало координат o .

Рассмотрим в $\mathbb{C}^2 \times \Delta$ алгебраическое подмногообразие

$$\widetilde{TH}_x = \{(z, g) \in \mathbb{C}^2 \times \Delta \mid g \in T_D H_x, z = g(x)\}.$$

Ограничение на $\widetilde{TH}_x$ проекции pr_2 является морфизмом многообразия $\widetilde{TH}_x$ степени 1. Рассмотрим ограничение проекции pr_1 на $\widetilde{TH}_x$. Для выбранной выше системы координат в $\mathbb{C}^2$ слой $\text{pr}_1^{-1}(z)$ над общей точкой $z = (z_1, z_2) \in D_1$ состоит из линейных преобразований

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} g_{11} &= z_1, & g_{21} &= z_2, \\ \frac{g_{11}v_1}{w_1} &= \frac{g_{21}v_1 + g_{22}v_2}{w_2}, \end{aligned}$$

где (w_1, w_2) – координаты касательного вектора к D_1 в точке z . Очевидно, матрица g находится однозначно из этих уравнений. Следовательно, $\dim_{\mathbb{R}} T_D H_x = 2$, и поэтому $\text{codim}_{\mathbb{R}} T H_x = 3$.

Проверим выполнение неравенства 5) (проверка неравенства 4) аналогична). Обозначим $L \subset KI_{11}$ объединение конечного числа лучей, выходящих из точки o и либо пересекающих D_1 в трех точках или в особой точке римановой поверхности D_1 , либо касающихся D_1 в некоторой точке, где KI_{11} – конус над I_{11} .

Пусть $LH_x = \{g \in G \mid g(x) \in L\}$. Легко видеть, что $\dim_{\mathbb{R}} LH_x = \dim_{\mathbb{R}} \Delta - 3$, если $L \neq \emptyset$.

Если $I_{11} \neq \emptyset$, то определено отображение $\rho: EH_x \setminus LH_x \rightarrow S_{11} \subset D_1$, переводящее $g \in EH_x \setminus LH_x$ в $\rho(g) = y$, где $y \in S_{11}$ – такая точка, что $g(x)$ лежит на луче, соединяющем точки o и y . Имеем $\dim_{\mathbb{R}} \rho^{-1}(y) = \dim_{\mathbb{R}} \Delta - 3$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{R}} EH_x = \dim_{\mathbb{R}} \Delta - 2$, так как $\dim_{\mathbb{R}} S_{11} = 1$.

3.4. Докажем, что любые две образующие $\gamma_1^{j_1}$ и $\gamma_2^{j_2}$ коммутируют друг с другом в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup D_2))$ (определение элементов $\gamma_1^{j_1}$ и $\gamma_2^{j_2}$ дано в п. 2.4). Очевидно, для общей точки $\bar{x} \in D_2^{j_2}$ найдется такой элемент $\bar{g} \in \Delta$, что $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{y} \in D_1^{j_1}$. В силу непрерывности при малом шевелении точки $\bar{x}$ и элемента $\bar{g}$ точка $\bar{y} = \bar{g}(\bar{x})$ все еще будет принадлежать $D_1^{j_1}$. Поэтому из леммы 9 следует, что существуют такая точка $x_0 \in D_2^{j_2}$ и элемент

$$g_1 \in G \setminus (H \cup H_{D_1} \cup H_{D_2} \cup TH_{x_0} \cup T\tilde{H}_{y_0} \cup EH_{x_0} \cup E\tilde{H}_{y_0}),$$

где $y_0 = g_1(x_0) \in D_1^{j_1}$. Из леммы 9 также следует, что существует такой гладкий путь

$$s: [0, 1] \rightarrow G \setminus (H_{D_1} \cup H_{D_2} \cup TH_{x_0} \cup T\tilde{H}_{y_0} \cup EH_{x_0} \cup E\tilde{H}_{y_0}),$$

соединяющий элементы e и g_1 , что кривая $s \subset G$ пересекается с $H \cup H_{x_0} \cup \tilde{H}_{y_0}$ не более чем в конечном числе точек. Обозначим эти точки $g_{\tau_1} = s(\tau_1), \dots, g_{\tau_n} = s(\tau_n)$, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$. Отметим, что $\tau_n = 1$ и $g_1 \notin H$.

Зафиксируем такой путь s и выберем в $D_2^{j_2}$ точку x_1 так, что $s(1)(x_1) \notin K_1$. Тогда в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(1)D_2), o)$ определены два элемента: один из них – это $q_{s(1)*}(\gamma_2^{j_2})$, а другой элемент представляется замкнутой петлей $s(1)l_{x_1}$, где l_{x_1} – составленная из отрезков петля, определенная в п. 2.4. Аналогично, по точке $y_1 \in D_1^{j_1}$ такой, что $y_1 \notin s(1)K_2$, можно построить составленную из отрезков замкнутую петлю l_{y_1} , которая определяет некоторый элемент из $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(1)D_2), o)$.

ЛЕММА 10. *Петля $s(1)l_{x_1}$ является представителем элемента $q_{s(1)*}(\gamma_2^{j_2})$ в группе $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(1)D_2), o)$, а петля l_{y_1} представляет элемент $q_{s(1)*}(\gamma_1^{j_1})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что петля $s(1)l_{x_1}$ является представителем элемента $q_{s(1)*}(\gamma_2^{j_2})$ в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(1)D_2), o)$ (доказательство для петли l_{y_1} аналогично, и поэтому будет опущено). Очевидно, мы можем считать, что петли $s(t)l_{x_0}$ не пересекаются с D_1 для $t \in [0, 1] \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$.

Заметим, что если точки $x_1, x_2 \in D_2^{j_2}$ таковы, что $s(1)(x_1) \notin K_1$, $s(1)(x_2) \notin K_1$, то по лемме 6 петли $s(1)l_{x_1}$ и $s(1)l_{x_2}$ определяют один и тот же элемент в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(1)D_2), o)$. Поэтому лемму 10 достаточно доказать для случая, когда x_1

достаточно близка к x_0 и $s(1) \notin H_{x_1}$. Обозначим $T = \max t$, где максимум берется по тем значениям $t \in [0, 1]$, для которых $s(t) \in H \cup H_{x_1}$. Отметим, что $T < 1$.

Каждая петля $s(\tau)l_x$, если она не пересекается с D_1 , определяет некоторый элемент в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(\tau)D_2), o)$ (обозначим его тем же символом). Поэтому петля $s(\tau)l_x$ определяет элемент $i_{s(\tau)*}(s(\tau)l_x)$ в $\pi_1(s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2), (e, o))$, представляемый петлей, состоящей из пути по сечению $(s(t), o)$, $0 \leq t \leq \tau$, затем по петле $s(\tau)l_x$ и назад в точку $o = (s(0), o)$ по сечению $(s(t), o)$. Для доказательства леммы нам надо показать, что $i_{s(\tau)*}(s(\tau)l_x)$ совпадает с $i_{s(\tau)*} \cdot q_{s(\tau)*}(l_x)$ для почти всех $\tau \in [0, 1]$.

Очевидно, что если для $\tau \in [t_1, t_2]$ петля $s(\tau)l_x$ не пересекается с D_1 , то пленка $l_{x, [t_1, t_2]} = \{(s(\tau), \bar{x}) \in s \times \mathbb{C}^2 \mid s(\tau)^{-1}(\bar{x}) \in l_x, \tau \in [t_1, t_2]\}$ определяет гомотопическую эквивалентность петель $i_{s(t_1)*}(s(t_1)l_x)$ и $i_{s(t_2)*}(s(t_2)l_x)$ в $s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2)$.

Отсюда следует, что для значений $\tau \in (\max(T, \tau_{n-1}), 1)$ петли $i_{s(\tau)*}(s(\tau)l_{x_0})$ гомотопически эквивалентны в $s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2)$ петлям $i_{s(\tau)*}(s(\tau)l_{x_1})$, которые в свою очередь гомотопически эквивалентны петле $i_{s(1)*}(s(1)l_{x_1})$. Кроме того, для всех значений i , $1 \leq i \leq n$, найдется $\epsilon > 0$ такое, что петли $i_{s(\tau)*}(s(\tau)l_{x_0})$ гомотопически эквивалентны друг другу в $s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2)$ для всех значений $\tau \in [\tau_{i-1} + \epsilon, \tau_i - \epsilon]$.

Очевидно, для $\tau \in [0, \tau_1 - \epsilon]$ петли $i_{s(\tau)*}(s(\tau)l_{x_0})$ и $i_{s(\tau)*} \cdot q_{s(\tau)*}(\gamma_1^{j_1})$ гомотопически эквивалентны друг другу в $s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2)$. Более того, петли $i_{s(\tau)*} \cdot q_{s(\tau)*}(\gamma_1^{j_1})$ гомотопически эквивалентны друг другу для всех $\tau \in [0, 1]$. Поэтому для доказательства леммы 10 надо показать, что петли $i_{s(\tau_i - \epsilon)*}(s(\tau_i - \epsilon)l_{x_0})$ и $i_{s(\tau_i + \epsilon)*}(s(\tau_i + \epsilon)l_{x_0})$ для $i = 1, \dots, n-1$ определяют один и тот же элемент в $\pi_1(s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2), (e, o))$.

Для этого рассмотрим пересечение $\tilde{C}_{\tau_i} = s(\tau_i)D_2^{j_2} \cap K_1 \subset D_2 \cap K_1$. Так как $s(\tau_i) \notin H_{D_2}$, то $\tilde{C}_{\tau_i}$ — вещественная алгебраическая кривая, а так как $s(\tau_i) \notin TH_{x_0}$, то поверхность $s(\tau_i)D_2^{j_2}$ и конус K_1 пересекаются в точке $s(\tau_i)(x_0)$ трансверсально и, следовательно, $\tilde{C}_{\tau_i}$ — гладкая кривая в точке $s(\tau_i)(x_0)$. Поэтому для значений t , близких к τ_i , кривые $\tilde{C}_t = s(t)D_2^{j_2} \cap K_1 \subset D_2 \cap K_1$ являются гладкими кривыми в точках, близких к точке $s(\tau_i)(x_0)$. Пусть $C_t = D_2^{j_2} \cap (s(t))^{-1}K_1$.

Для достаточно малого $\epsilon > 0$ выберем точку $\bar{x} \in D_2^{j_2}$, близкую к точке x_0 , так, что $\bar{x} \notin C_{\tau_i + t}$ для всех $t \in [-\epsilon, +\epsilon]$. Тогда петли $i_{s(\tau_i + t)*}(s(\tau_i + t)l_{\bar{x}})$ определяют один и тот же элемент в $\pi_1(s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2), (e, o))$, так как мы можем считать, что петли $s(\tau_i + t)l_{\bar{x}}$ не пересекаются с конусом K_1 для всех $t \in [-\epsilon, +\epsilon]$. Петли $s(\tau_i + \epsilon)l_{\bar{x}}$ и $s(\tau_i + \epsilon)l_{x_0}$ (аналогично, $s(\tau_i - \epsilon)l_{\bar{x}}$ и $s(\tau_i - \epsilon)l_{x_0}$) определяют один и тот же элемент в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(\tau_i \pm \epsilon)D_2), o)$ согласно лемме 6. Следовательно, петли $i_{s(\tau_i + \epsilon)*}(s(\tau_i + \epsilon)l_{x_0})$ и $i_{s(\tau_i - \epsilon)*}(s(\tau_i - \epsilon)l_{x_0})$ определяют один и тот же элемент в $\pi_1(s \times \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2), (e, o))$. Тем самым лемма 10 доказана.

3.5. Так как $D_1^{j_1}$ и $s(1)D_2^{j_2}$ пересекаются в точке y_0 , то из лемм 7 и 10 следует, что элементы $q_{s(1)*}(\gamma_1^{j_1})$ и $q_{s(1)*}(\gamma_2^{j_2})$ коммутируют друг с другом в группе $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup s(1)D_2), o)$. Поэтому элементы $\gamma_1^{j_1}$ и $\gamma_2^{j_2}$ коммутируют друг с другом в группе $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_1 \cup D_2), o)$. Следовательно, теорема 4 доказана для всех кривых E_λ , $\lambda \notin \Lambda \cup \Lambda_{\text{sing}}$.

Для завершения доказательства теоремы 4 рассмотрим снова пучок торичес-

ких кривых E_λ , заданный уравнением $u^a + \lambda v^b = 0$, и определяемое им рациональное отображение $\varphi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Пусть $\tilde{\sigma}: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция σ -процессов, разрешающая базисные точки отображения φ , $\tilde{\varphi} = \varphi \cdot \tilde{\sigma}: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Обозначим $L = \tilde{\sigma}^{-1}(L_\infty) \cup L'$ объединение собственного прообраза бесконечно удаленной прямой и исключительных кривых морфизма $\tilde{\sigma}$.

Пусть $\bar{B} \subset \mathbb{P}^2$ – проективное замыкание кривой $B \subset \mathbb{C}^2$, а $\tilde{B} = \sigma^{-1}(\bar{B}) \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ – собственный прообраз. Рассмотрим в $\tilde{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{C}^*$ гиперповерхности

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{(z, \lambda) \in \tilde{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{C}^* \mid z \in L, \lambda \in \mathbb{C}^*\}, \\ \mathcal{B} &= \{(z, \lambda) \in \tilde{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{C}^* \mid z \in \tilde{B}, \lambda \in \mathbb{C}^*\}, \\ \mathcal{E} &= \{(z, \lambda) \in \tilde{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{C}^* \mid z \in E_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}^*\},\end{aligned}$$

и пусть

$$p: \tilde{\mathbb{P}}^2 \times (\mathbb{C}^* \setminus (\Lambda_B \cup \Lambda_{\text{sing}})) \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus (\Lambda_B \cup \Lambda_{\text{sing}})$$

– ограничение проекции $\text{pr}_2: \tilde{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ на $\tilde{\mathbb{P}}^2 \times (\mathbb{C}^* \setminus (\Lambda_B \cup \Lambda_{\text{sing}}))$.

Из определения множеств $\Lambda_B, \Lambda_{\text{sing}}$ (см. пп. 1.3 и 1.4) и из леммы 3 следует, что дивизор $\mathcal{E} + \mathcal{B} + \mathcal{L}$ в $p^{-1}(\mathbb{C}^* \setminus (\Lambda_B \cup \Lambda_{\text{sing}}))$ является дивизором с нормальными пересечениями в окрестности точек пересечения дивизоров $\mathcal{E} \cap \mathcal{B}$ и $\mathcal{E} \cap \mathcal{L}$, а ограничение p на каждую из кривых $\mathcal{E} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{E} \cap \mathcal{L}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{L}$, $\text{Sing } \mathcal{B}$ и $\text{Sing } \mathcal{L}$ является неразветвленным конечным морфизмом. Более того, легко видеть, что локально в некоторой окрестности точек, лежащих на этих кривых, p является локально тривиальным C^∞ -расслоением.

Для завершения доказательства теоремы 4 достаточно применить следующую лемму.

ЛЕММА 11. *Морфизм*

$$p: \tilde{\mathbb{P}}^2 \times (\mathbb{C}^* \setminus (\Lambda_B \cup \Lambda_{\text{sing}})) \setminus (\mathcal{E} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus (\Lambda_B \cup \Lambda_{\text{sing}})$$

является C^∞ -локально тривиальным расслоением.

Доказательство этой леммы совпадает с доказательством леммы 8.

3.6. Выведем теорему 1 из теоремы 4. Многочлены $u = g(x, y)$ и $v = h(x, y)$ определяют морфизм $\psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Ограничение $\psi: \mathbb{C}^2 \setminus (D_{g,h} \cup D_\lambda) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus (B_{g,h} \cup E_\lambda)$ является неразветвленным топологическим накрытием конечной степени, где $D_{g,h} = \psi^{-1}(B_{g,h})$. Следовательно, ψ индуцирует вложение $\psi_*: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_{g,h} \cup D_\lambda)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B_{g,h} \cup E_\lambda))$ на подгруппу конечного индекса, равного $\deg \psi$. Для $\lambda \notin \Lambda_B \cup \Lambda_{\text{sing}}$ по теореме 4 имеем естественное разложение

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B_{g,h} \cup E_\lambda)) = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B_{g,h}) \times \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$$

такое, что проекции

$$\text{pr}_1: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B_{g,h} \cup E_\lambda)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B_{g,h}), \quad \text{pr}_2: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B_{g,h} \cup E_\lambda)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$$

индуцированы морфизмами $i_1: \mathbb{C}^2 \setminus (B_{g,h} \cup E_\lambda) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus B_{g,h}$, $i_2: \mathbb{C}^2 \setminus (B_{g,h} \cup E_\lambda) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda$. Поэтому мы можем отождествить группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_{g,h} \cup D_\lambda))$, $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B_{g,h})$ и $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$ с соответствующими подгруппами в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (B_{g,h} \cup E_\lambda))$.

Как известно, для кривой $D \subset \mathbb{C}^2$ фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ порождается обходами вокруг D , т.е. петлями, состоящими из некоторого пути l , соединяющего базисную точку с некоторой точкой, лежащей вблизи D , затем из петли γ вокруг D и пути l^{-1} – назад в базисную точку.

Так как морфизм ψ не разветвлен вдоль кривой E_λ , то любой обход вокруг E_λ поднимается до обхода вокруг D_λ . Следовательно, $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$ лежит в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_{g,h} \cup D_\lambda))$. Образы обходов вокруг $D_{g,h}$ лежат в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B_{g,h})$ и порождают в ней подгруппу H конечного индекса, равного $\deg \psi$. Получаем естественное разложение фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_{g,h} \cup D_\lambda))$ в прямое произведение:

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_{g,h} \cup D_\lambda)) = H \times \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda),$$

где H порождена обходами вокруг $D_{g,h}$, а $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$ порождена обходами вокруг D_λ . Для доказательства изоморфизма $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_\lambda) \simeq \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$ осталось заметить, что ядро гомоморфизма

$$i_*: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (D_{g,h} \cup D_\lambda)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_\lambda)$$

порождается обходами вокруг $D_{g,h}$, т.е. совпадает с H .

Если $D = D_1 \cup D_2$ – приводимая кривая, то обходы вокруг D_1 не сопряжены в $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ обходами вокруг D_2 . Поэтому неприводимость кривой D_λ для $\lambda \notin \Lambda_B \cup \Lambda_{\text{sing}}$ следует из того, что все обходы вокруг D_λ сопряжены друг другу, так как они взаимно однозначно соответствуют обходам вокруг неприводимой кривой E_λ при изоморфизме фундаментальных групп $\psi_*: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_\lambda) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda)$.

3.7. Вывод следствия 2 из теоремы 1 является легким упражнением. Действительно, так как кривые $g(x, y) = 0$ и $h(x, y) = 0$ пересекаются в $\deg g \deg h$ различных точках, то, во-первых, $J(g, h) \not\equiv 0$, а во-вторых, по теореме Безу степень морфизма ψ равна $\deg g \deg h$, и поэтому $B_{g,h}$ не проходит через начало координат, так как прообраз начала координат состоит ровно из $\deg g \deg h$ различных точек. Следовательно, выполнены все условия теоремы 1.

3.8. Докажем теорему 3. Для этого рассмотрим n -листное циклическое накрытие плоскости $\psi_n: X_n \rightarrow \mathbb{C}^2$, разветвленное вдоль кривой D , где $n = ab$. С одной стороны, это циклическое накрытие задается в $\mathbb{C}^3$ уравнением $z^{ab} = g(x, y)^a + h(x, y)^b$. Обозначим $X_{ab}^0 = \psi_{ab}^{-1}(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ прообраз дополнения к кривой D . С другой стороны, неразветвленное накрытие $\psi_{ab}: X_{ab}^0 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus D$ может быть определено как накрытие, индуцированное эпиморфизмом $(f_*)_n = (n) \cdot f_*: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, где $(n): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ – гомоморфизм факторизации.

Пусть $\bar{X}_{ab}$ – некоторое проективное замыкание поверхности X_{ab}^0 . Очевидно, $\ker f_* \subset \ker (f_*)_n = \pi_1(X_{ab}^0)$. Кроме того, легко видеть, что $\ker (f_*)_n$ порождается элементами из $\ker f_*$ и обходом γ^{ab} в $\bar{X}_{ab}$, где γ – некоторый обход в $\mathbb{C}^2$ вокруг кривой D . Следовательно, ограничение i_* на $\ker f_*$ эпиморфизма $\pi_1(X_{ab}^0) \rightarrow \pi_1(\bar{X}_{ab})$, индуцированного вложением $X_{ab}^0 \rightarrow \bar{X}_{ab}$, также является эпиморфизмом.

Пусть $\nu: \bar{X}_{ab} \rightarrow \bar{Y}_{ab}$ – рациональное отображение, определяемое функциями $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ и $w = z$, на неособую проективную поверхность, бирационально изоморфную поверхности Y_{ab} , заданной в $\mathbb{C}^3$ уравнением $w^{ab} = u^a + v^b$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что ν является морфизмом. Непосредственно проверяется, что $\bar{Y}_{ab}$ является линейчатой поверхностью, т.е. существует регулярное отображение $\mu: \bar{Y}_{ab} \rightarrow C_g$ на кривую C_g рода $g = \frac{1}{2}(ab - a - b + 1)$

с рациональными слоями – неприводимыми компонентами прообразов кривых из пучка $E_\lambda := \{u^a + \lambda v^b = 0\}$ при проекции Y_{ab} на $\mathbb{C}^2$, $(u, v, w) \rightarrow (u, v)$.

Образ $\nu(\bar{X}_{ab})$ не лежит в слое линейчатой структуры на $\bar{Y}_{ab}$, так как иначе на $\bar{X}_{ab}$ должно выполняться тождество $g^a \equiv \lambda h^b$ для некоторого λ , невозможное в силу того, что D не имеет кратных компонент. Следовательно, сквозное отображение $\mu \cdot \nu: \bar{X}_{ab} \rightarrow C_g$ является сюръективным морфизмом. Применяя теорему Штейна о факторизации, можем считать, что морфизм $\mu \cdot \nu: \bar{X}_{ab} \rightarrow C_g$ имеет связанные слои и $g \geq \frac{1}{2}(ab - a - b + 1)$. Из связности слоев морфизма $\mu \cdot \nu$ вытекает эпиморфность индуцированного гомоморфизма $(\mu \cdot \nu)_*: \pi_1(\bar{X}_{ab}) \rightarrow \pi_1(C_g)$. Композиция эпиморфизмов i_* и $(\mu \cdot \nu)_*$ дает искомый эпиморфизм.

§ 4. Фундаментальная группа дополнения к торическим кривым (проективный случай)

4.1. Рассмотрим снова пучок торических кривых E_λ , заданный уравнением $u^a + \lambda v^b = 0$. Пусть $\bar{E}_\lambda$ – проективное замыкание кривых E_λ в $\mathbb{P}^2$. Пучок $|E_\lambda|$ определяет рациональное отображение $\phi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ со слоем $\bar{E}_\lambda$ над точкой $\lambda \in \mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}^1$. Предполагая, что $a > b$, пучок $|\bar{E}_\lambda|$ имеет две базисные точки: одна из них – начало координат в $\mathbb{C}^2$, а другая – точка пересечения кривых $\bar{E}_\lambda$ с L_∞ , имеющая координаты $(0 : 1 : 0)$, где $(y_1 : y_2 : y_3)$ – проективные координаты на $\mathbb{P}^2$ и $u = \frac{y_1}{y_3}$, $v = \frac{y_2}{y_3}$.

Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ – минимальная последовательность σ -процессов, разрешающая базисную точку на бесконечности пучка кривых $|\bar{E}_\lambda|$, и пусть $\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_m$ – минимальная последовательность σ -процессов, разрешающая базисную точку в начале координат аффинной части так, что этот пучок задает регулярный морфизм. Пусть $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_m: \bar{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция всех этих σ -процессов, и пусть $\varphi = \phi \cdot \sigma: \bar{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Общий слой расслоения φ является неособой рациональной кривой.

Обозначим $L_0 = L_\infty$, L_i – исключительная кривая i -го σ -процесса, а $L_j = \sigma_i^{-1}(L_j)$ – собственный прообраз при $j < i$. Кривые $L_n = S_\infty$ и $L_m = S_0$ являются сечениями расслоения $\varphi: \bar{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, а все остальные L_i при $i \neq m, n$ являются компонентами двух вырожденных слоев: $F_{(1:0)} = \varphi^{-1}((1 : 0))$ и $F_{(0:1)} = \varphi^{-1}((0 : 1))$. Кроме этих двух слоев, расслоение φ не имеет других вырожденных слоев. Слой $F_{(1:0)}$ (соответственно $F_{(0:1)}$), кроме кривых L_i , имеет еще одну компоненту, а именно собственный прообраз $\sigma^{-1}(L_u)$ (соответственно $\sigma^{-1}(L_v)$) прямой в $\mathbb{C}^2$, заданной уравнением $u = 0$ (соответственно $v = 0$). Эти компоненты мы снова обозначим L_u и L_v . Кривая L_u входит в слой $F_{(1:0)}$ с кратностью a , а L_v входит в слой $F_{(0:1)}$ с кратностью b .

Отметим для дальнейшего, что сечения S_∞ и S_0 не пересекаются друг с другом в $\bar{\mathbb{P}}^2$, а слои $F_{(1:0)}$ и $F_{(0:1)}$ являются цепочками рациональных кривых, т.е. имеют следующий вид:

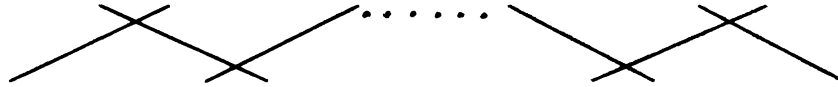


Рис. 1

Пусть $\tau = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_{m-1} : \mathbb{P}^2 \rightarrow Q_k$ – такая последовательность стягиваний исключительных кривых 1-го рода, лежащих в слоях $F_{(1:0)}$ и $F_{(0:1)}$, что Q_k является относительно минимальной линейчатой поверхностью.

ЛЕММА 12. *Существует такая последовательность стягиваний $\tau = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_{m-1} : \mathbb{P}^2 \rightarrow Q_k$, что сечения $\tau(S_\infty) = S_\infty$ и $\tau(S_0) = S_0$ не пересекаются друг с другом в Q_k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что сечения S_∞ и S_0 пересекаются в некоторой точке $z \in Q_k$ и z лежит в одном из слоев: в $F = F_{(1:0)}$ либо в $F = F_{(0:1)}$. Тогда один из σ -процессов τ_i должен раздувать точку z , так как S_∞ и S_0 не пересекаются в $\mathbb{P}^2$ (не ограничивая общности, мы можем считать, что это τ_1).

Непосредственно проверяется, что элементарное преобразование $\text{elm}_z : Q_k \rightarrow Q'_k$, состоящее в том, что вначале раздувается точка z , а затем стягивается в точку собственный прообраз $\tau^{-1}(F)$ σ -процессом τ'_1 , изменяет индекс пересечения сечений S_∞ и S_0 следующим образом:

$$(S_0, S_\infty)_{Q_k} = (S_0, S_\infty)_{Q'_k} - 1.$$

Заменяя $(S_0, S_\infty)_{Q_k}$ раз последовательность $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_{m-1}$ на $\text{elm}_z \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_{m-1} = \tau'_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_{m-1}$, в итоге получим необходимую последовательность стягиваний.

4.2. На полученной относительно минимальной линейчатой поверхности Q_k имеем два непересекающихся сечения, S_∞ и S_0 , и три слоя, $F_{(1:0)}$, $F_{(0:1)}$ и F_λ . Если $k = 0$, т.е. если $Q_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – квадрика, то сечения S_∞ и S_0 являются слоями второй линейчатой структуры на Q_0 . Очевидно,

$$Q_0 \setminus (F_{(1:0)} \cup F_{(0:1)} \cup F_\lambda \cup S_\infty \cup S_0) = (\mathbb{P}^1 \setminus \{(1:0), (0:1), \lambda\}) \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\})$$

и

$$\pi_1(Q_0 \setminus (F_{(1:0)} \cup F_{(0:1)} \cup F_\lambda \cup S_\infty \cup S_0)) \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_1,$$

где $\mathbb{F}_q$ – свободная группа ранга q .

От поверхности Q_0 к поверхности Q_k можно перейти, сделав k элементарных преобразований с центрами, лежащими в слое $F_{(1:0)}$. Эти элементарные преобразования не меняют $Q_0 \setminus (F_{(1:0)} \cup F_{(0:1)} \cup F_\lambda \cup S_\infty \cup S_0)$. Следовательно,

$$\pi_1(Q_k \setminus (F_{(1:0)} \cup F_{(0:1)} \cup F_\lambda \cup S_\infty \cup S_0)) \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_1.$$

Обозначим x_1, x_2 образующие группы $\mathbb{F}_2$ и y образующую группы $\mathbb{F}_1$. В дальнейшем мы будем рассматривать $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_1$ как свободное произведение с объединенной подгруппой:

$$\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_1 \simeq (\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_1) *_{\mathbb{F}_1} (\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_1) = \langle x_1, y \mid [x_1, y] = 1 \rangle *_{\{y\}} \langle x_2, y \mid [x_2, y] = 1 \rangle.$$

Геометрически это означает следующее. Выберем трубчатые окрестности $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ слоев $F_{(1:0)}$ и $F_{(0:1)}$ в $Q_0 \setminus F_\lambda$ и рассмотрим некоторое сечение S_1 . Пусть $\bar{z}_1 = S_1 \cap F_{(1:0)}$, $\bar{z}_2 = S_1 \cap F_{(0:1)}$ и $z_\infty = S_1 \cap F_\lambda$. Тогда $S_1 \setminus \{z_\infty\} \simeq \mathbb{C}^1$. Выберем в этом сечении точку o так, что o , $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$ не лежат на одной действительной прямой. Пусть $l_1 \in \mathbb{C}^1$ (соответственно l_2) – отрезок, соединяющий точку o и точку z_1 ,

близкую к точке $\bar{z}_1$ (соответственно z_2 , близкую к $\bar{z}_2$). Пусть $T_1 = \bar{T}_1 \setminus F_{(1:0)}$ и $T_2 = \bar{T}_2 \setminus F_{(0:1)}$.

Замыкание T_1 в Q_k (обозначим его $\tilde{T}_1 \subset Q_k$ и, аналогично, $\tilde{T}_2$ – замыкание T_2) расслоено над диском Δ со слоем $F_{(1:0)}$. Пусть F_1 – слой, проходящий через точку z_1 (аналогично F_2 – слой, проходящий через точку z_2). Положим в дальнейшем $T_1 = \tilde{T}_1 \setminus (F_{(1:0)} \cup S_\infty \cup S_0) \subset Q_k$ и $T_2 = \tilde{T}_2 \setminus (F_{(0:1)} \cup S_\infty \cup S_0) \subset Q_k$. Тогда

$$\pi_1(T_1, z_1) \simeq \langle x_1, y \mid [x_1, y] = 1 \rangle,$$

где x_1 соответствует обходу в S_1 вокруг слоя $F_{(1:0)}$ и y представляется обходом в положительном направлении в слое F_1 вокруг точки $F_1 \cap S_\infty$, а

$$\pi_1(T_2, z_2) \simeq \langle x_2, y \mid [x_2, y] = 1 \rangle,$$

где x_2 соответствует обходу в S_1 вокруг слоя $F_{(0:1)}$ и y представляется обходом в слое F_2 вокруг точки $F_2 \cap S_\infty$. Отметим, что обходу в положительном направлении в слое F_i вокруг точки $F_i \cap S_0$ соответствует элемент $y^{-1} \in \pi_1(T_i, z_i)$.

Отождествление

$$\pi_1(Q_k \setminus (F_{(1:0)} \cup F_{(0:1)} \cup F_\lambda \cup S_\infty \cup S_0), o) \simeq \langle x_1, y \mid [x_1, y] = 1 \rangle *_{\{y\}} \langle x_2, y \mid [x_2, y] = 1 \rangle$$

происходит при помощи отождествления петли $\gamma \subset T_i$ с петлей $l_i \cdot \gamma \cdot l_i^{-1}$.

4.3. Рассмотрим полидиск $\Delta^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$. Положим $L_i := \{z_i = 0\}$. Тогда $\pi_1(\Delta^2 \setminus (L_1 \cup L_2)) \simeq \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_1$ и порождается обходами: x вокруг L_1 и y вокруг L_2 .

Пусть $\sigma: \tilde{\Delta}^2 \rightarrow \Delta^2$ – σ -процесс с центром в точке $L_1 \cap L_2$ и L – исключительная кривая этого σ -процесса. Имеем изоморфизм $\pi_1(\tilde{\Delta}^2 \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L)) \simeq \pi_1(\Delta^2 \setminus (L_1 \cup L_2))$.

ЛЕММА 13. *При изоморфизме $\pi_1(\tilde{\Delta}^2 \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L)) \simeq \pi_1(\Delta^2 \setminus (L_1 \cup L_2))$ обходу в $\tilde{\Delta}^2$ вокруг L соответствует элемент $g = xy$.*

Доказательство очевидно.

Назовем последовательность σ -процессов $\tau = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_m: \tilde{\Delta}^2 \rightarrow \Delta^2$ *цепной последовательностью*, если выполнены следующие условия:

- i) τ_1 имеет своим центром точку $L_1 \cap L_2$, и пусть L_3 – исключительная кривая этого σ -процесса;
- ii) обозначая L_{i+2} исключительную кривую i -го σ -процесса, центр каждого σ -процесса τ_j совпадает с пересечением некоторых кривых L_n и L_k при $n < j + 2$ и $k < j + 2$.

ЛЕММА 14. *Пусть $\tau = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_m: \tilde{\Delta}^2 \rightarrow \Delta^2$ – цепная последовательность σ -процессов, и пусть центр σ -процесса τ_i совпадает с пересечением кривых L_j и L_k .*

Тогда:

- i) если обходы в $\tilde{\Delta}^2$ вокруг кривых L_j и L_k представляют элементы $x^{a_1}y^{b_1}$ и $x^{a_2}y^{b_2}$ в $\pi_1(\tilde{\Delta}^2 \setminus (\cup_i L_i))$, то обход в $\tilde{\Delta}^2$ вокруг кривой L_{i+2} представляет элемент $x^{a_1+a_2}y^{b_1+b_2}$;
- ii) если пересечение $L_l \cap L_s \neq \emptyset$ в $\tilde{\Delta}^2$, то обходы вокруг кривых L_l и L_s порождают $\pi_1(\tilde{\Delta}^2 \setminus (\cup_i L_i))$.

Доказательство следует из леммы 13 (индукцией по числу σ -процессов).

4.4. Рассмотрим снова трубчатые окрестности $T_i \subset Q_k$. В замыкании $\bar{T}_1$ (аналогично для $\bar{T}_2$) выделены три кривых, $F_{(1:0)}$, S_∞ и S_0 . Выберем окрестности Δ_i^2 ($i = 1, 2$) в $\bar{T}_1$ точек пересечения $F_{(1:0)} \cap S_\infty$ и $F_{(1:0)} \cap S_0$. Очевидно, вложения индуцируют изоморфизмы фундаментальных групп $\pi_1(\Delta_1^2 \setminus (F_{(1:0)} \cup S_\infty)) \simeq \pi_1(T_1)$ и $\pi_1(\Delta_2^2 \setminus (F_{(1:0)} \cup S_0)) \simeq \pi_1(T_1)$, а ограничение на Δ_i^2 последовательности τ является цепной последовательностью σ -процессов. Применяя лемму 14, получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 15. Пусть кривая L_i входит в слой $F_{(1:0)}$ (аналогично для слоя $F_{(0:1)}$) с кратностью a_i . Тогда обход в $T_1 \subset \mathbb{P}^2$ вокруг кривой L_i представляет элемент $x_1^{a_i} y^{c_i} \in \pi_1(T_1)$, где c_i – некоторое целое число. Если L_i и L_j – соседние компоненты, т.е. $L_i \cap L_j \neq \emptyset$, то

$$\det \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ a_j & c_j \end{pmatrix} = \pm 1.$$

4.5. Приведем алгоритм нахождения копредставления фундаментальной группы дополнения в $\mathbb{P}^2$ к проективному замыканию торической кривой, удовлетворяющей условиям теоремы 1. Пусть кривая D_λ , заданная уравнением $g(x, y)^a + \lambda h(x, y)^b = 0$, удовлетворяет условиям теоремы 1, и пусть $\bar{D}$ – замыкание кривой D_λ в $\mathbb{P}^2$. Имеем естественный эпиморфизм фундаментальных групп $i_*: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_\lambda) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{D}_\lambda)$. Ядро этого эпиморфизма порождается обходами вокруг бесконечно удаленной прямой L_∞ . Следовательно, для нахождения копредставления группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{D}_\lambda)$ мы должны выразить обход вокруг бесконечно удаленной прямой как элемент в

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D_\lambda) \simeq \langle x_1, x_2 \mid x_1^a = x_2^b \rangle$$

через образующие x_1 и x_2 .

Ниже мы приводим алгоритм нахождения копредставления группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{D})$, состоящий из следующих шагов.

1) Разрешаем базисные точки пучка $\bar{E}_\lambda$ в $\mathbb{P}^2$ (см. п. 4.1), где пучок E_λ задан в $\mathbb{C}^2$ уравнением $u^a + \lambda v^b = 0$. Получаем линейчатую поверхность $\bar{\mathbb{P}}^2$, расслоенную над $\mathbb{P}^1$ со слоями $F_{(1:0)}$, $F_{(0:1)}$ и F_λ .

2) Регулярный морфизм $\psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, заданный многочленами $u = g(x, y)$ и $v = h(x, y)$, продолжаем до рационального отображения $\psi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{P}}^2$ и рассматриваем образ $\psi(L_\infty) \subset \bar{\mathbb{P}}^2$. Если $\psi(L_\infty)$ является точкой, то делаем σ -процесс с центром в этой точке и рассматриваем сквозное отображение $\psi := \sigma^{-1} \cdot \psi$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока образ $\psi(L_\infty)$ не станет одномерным. Этот процесс раздутий является конечным. Действительно, зафиксируем рациональную 2-форму ω на $\bar{\mathbb{P}}^2$, голоморфную в окрестности точки $\psi(L_\infty)$. Пусть $\nu(\omega)$ – кратность нуля этой формы в точке $\psi(L_\infty)$, а μ – кратность нуля формы $\psi^*(\omega)$ в общей точке кривой L_∞ . Имеем $\mu \geq \nu(\omega)$, если $\psi(L_\infty) = z$ – точка. Для доказательства конечности осталось заметить, что если σ – σ -процесс с центром в точке z и L – исключительная кривая этого σ -процесса, то кратность нуля ν_{z_1} формы $\sigma^*(\omega)$ в любой точке $z_1 \in L$ удовлетворяет неравенству $\nu_{z_1} \geq \nu(\omega) + 1$.

3) Пусть $\psi(L_\infty) = L$ является кривой. Находим кратность ветвления отображения ψ вдоль L , где кратность ветвления q находится из формулы

$$\psi^*(L) = qL_\infty + \dots$$

4) Если $a \deg g < b \deg h$, то L лежит в слое $F_{(1:0)}$, если $a \deg g > b \deg h$, то L лежит в слое $F_{(0:1)}$, и если $a \deg g = b \deg h$, то либо L совпадает с сечением S_∞ , либо L является компонентой некоторого слоя $\overline{E}_\mu$, отличного от $F_{(1:0)}$ и $F_{(0:1)}$ (последний случай возникает, когда при некотором $\mu \in \mathbb{C}^*$ степень многочлена $g(x, y)^a + \mu h(x, y)^b$ меньше $a \deg g = b \deg h$).

Используя леммы 12 и 15, находим элементы $g_u = x_1^a y^{c_u}$, $g_v = x_2^b y^{c_v}$ и $g_\infty = x_i^d y^e$ в

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus F_{(1:0)} \cup F_{(0:1)} \cup F_\lambda \cup F_\mu \cup S_\infty \cup S_0), o) \\ \simeq \langle x_1, x_2, x_3, y \mid [x_1, y] = [x_2, y] = [x_3, y] = 1 \rangle,$$

представленные соответственно обходами вокруг кривых L_u, L_v и L , где $i = 1, 2, 3$, в зависимости от того, какому слою принадлежит L , x_3 соответствует обходу вокруг слоя F_μ , а $d = 0$ и $e = 1$, если $L = S_\infty$.

В итоге, применяя теорему 1, получаем копредставление

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}_\lambda) \simeq \langle x_1, x_2, y \mid [x_1, y] = [x_2, y] = x_1^a y^{c_u} = x_2^b y^{c_v} = x_i^{q^d} y^{q^e} = 1 \rangle, \quad (5)$$

в котором $d = 0$, если L лежит в слое F_μ или совпадает с сечением S_∞ .

4.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Выберем прямую $L_\infty \subset \mathbb{P}^2$ так, чтобы она трансверсально пересекалась с $\overline{D}_\lambda$ и не проходила через базисные точки пучка $|\overline{D}_\lambda|$. Обозначим $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ и $D_\lambda = \overline{D}_\lambda \cap \mathbb{C}^2$. Очевидно, для D_λ выполнены все условия следствия 2. Поэтому мы можем применить приведенный выше алгоритм нахождения копредставления группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}_\lambda)$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что выбранная L_∞ задана уравнением $z_3 = 0$. В этом случае рациональное отображение $\psi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ задается однородными формами

$$y_1 = l_{ac}(z_1, z_2, z_3), \\ y_2 = l_{bc}(z_1, z_2, z_3)z_3^{(a-b)c}, \\ y_3 = z_3^{ac},$$

и для нахождения копредставления группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}_\lambda)$ нам надо только понять, куда отображается L_∞ рациональным отображением $\sigma^{-1} \cdot \psi$ (определение σ см. п. 4.1) и каков порядок ветвления вдоль L_∞ .

ЛЕММА 16. 1) *Образ $\sigma^{-1} \cdot \psi(L_\infty)$ совпадает с сечением S_∞ .*

2) *Порядок ветвления отображения $\sigma^{-1} \cdot \psi$ вдоль (L_∞) равен c .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sigma^{-1} \cdot \psi(L_\infty)$ является точкой, то образы кривых $\overline{D}_\lambda$ при отображении $\sigma^{-1} \cdot \psi$ должны пересекаться в этой точке, так как они пересекаются с L_∞ и пучок $|\overline{D}_\lambda|$ не имеет базисных точек на L_∞ . Но образами кривых $\overline{D}_\lambda$ являются элементы пучка $|\overline{E}_\lambda|$, не имеющие общих точек в $\mathbb{P}^2$. Отсюда следует, что кривая $\sigma^{-1} \cdot \psi(L_\infty)$ должна совпадать с S_∞ .

Покажем, что собственный прообраз кривой S_∞ после разрешения базисных точек отображения $\sigma^{-1} \cdot \psi$ совпадает с L_∞ . Действительно, так как $\psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ является регулярным морфизмом, то в прообраз кривой S_∞ могут входить, кроме L_∞ , только исключительные кривые раздутия, разрешающего базисные точки отображения $\sigma^{-1} \cdot \psi$ на “бесконечности”. С этими кривыми общий элемент пучка

$|\overline{D}_\lambda|$ не пересекается, так как пучок $|\overline{D}_\lambda|$ не имеет базисных точек на “бесконечности”. С другой стороны, все кривые $\psi(\overline{D}_\lambda) = \overline{E}_\lambda$ пересекаются с S_∞ . Следовательно, собственный прообраз кривой S_∞ после разрешения базисных точек отображения $\sigma^{-1} \cdot \psi$ совпадает с L_∞ .

Покажем, что порядок ветвления отображения $\sigma^{-1} \cdot \psi$ вдоль L_∞ равен c . Индекс пересечения кривых $\overline{D}_\lambda$ и L_∞ равен $(\overline{D}_\lambda, L_\infty)_{\mathbb{P}^2} = abc$. Следовательно, степень ограничения на L_∞ отображения $\sigma^{-1} \cdot \psi$ равна abc , так как $(\overline{E}_\lambda, S_\infty)_{\mathbb{P}^2} = 1$. Степень $\deg \sigma^{-1} \cdot \psi = \deg \psi = abc^2$, так как однородные уравнения $l_{ac}(z_1, z_2, z_3) = 0$, $l_{bc}(z_1, z_2, z_3) = 0$ имеют abc^2 различных общих решений по условию теоремы. Следовательно, порядок ветвления отображения $\sigma^{-1} \cdot \psi$ вдоль L_∞ равен c . Лемма доказана.

Для нахождения копредставления группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus D_\lambda)$ применим приведенный выше алгоритм. Имеем

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}_\lambda) \simeq \langle x_1, x_2, y \mid [x_1, y] = [x_2, y] = x_1^a y^{c_u} = x_2^b y^{c_v} = y^c = 1 \rangle.$$

По лемме 15 $c_u \neq 0$ и $c_v \neq 0$, так как $a > b > 1$; кроме того, наибольшие общие делители $(a, c_u) = 1$ и $(b, c_v) = 1$. Поэтому найдутся такие целые p_1, q_1 и p_2, q_2 , что

$$ap_1 - c_u q_1 = 1, \quad (6)$$

$$bp_2 - c_v q_2 = 1. \quad (7)$$

Группы $G_1 = \langle x_1, y \mid [x_1, y] = x_1^a y^{c_u} = 1 \rangle$ и $G_2 = \langle x_2, y \mid [x_2, y] = x_2^b y^{c_v} = 1 \rangle$ являются бесконечными циклическими группами и порождаются соответственно элементами $z_1 = x_1^{q_1} y^{p_1}$ и $z_2 = x_2^{q_2} y^{p_2}$. В частности, в G_1 элемент $y = z_1^a$, а в G_2 элемент $y = z_2^b$. Следовательно,

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}_\lambda) \simeq \langle z_1, z_2 \mid z_1^a = z_2^b, z_1^{ac} = 1 \rangle.$$

4.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Применим приведенный выше алгоритм к отображению $\psi = \text{id}$. Пусть элемент $g_\infty = x_i^d y^e$ в группе

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda) \simeq \langle x_1, x_2, y \mid [x_1, y] = [x_2, y] = x_1^a y^{c_u} = x_2^b y^{c_v} = 1 \rangle$$

представляется обходом вокруг L_∞ . Отметим, прежде всего, что $i = 2$, так как по условию $a > b > 1$, поэтому L_∞ лежит в слое $F_{(0:1)}$. Кроме того, точка пересечения $(1 : 0 : 0) = L_\infty \cap L_v$ не является базисной точкой пучка $|\overline{E}_\lambda|$. Следовательно, кривые L_∞ и L_v имеют непустое пересечение в $\overline{\mathbb{P}}^2$. По лемме 15

$$\det \begin{pmatrix} b & c_v \\ d & e \end{pmatrix} = \pm 1.$$

Следовательно, элементы $g_v = x_2^b y^{c_v}$ и $g_\infty = x_2^d y^e$ порождают $G_2 = \langle x_2, y \mid [x_2, y] = 1 \rangle$. Отсюда следует, что

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{E}_\lambda) \simeq \langle x_1 \mid x_1^a = 1 \rangle.$$

4.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Применим приведенный выше алгоритм к отображению ψ , определяемому многочленами $g(x, y)$ и $h(x, y)$. Получим копредставление (5):

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}_\lambda) \simeq \langle x_1, x_2, y \mid [x_1, y] = [x_2, y] = x_1^a y^{c_u} = x_2^b y^{c_v} = x_i^{q_d} y^{q_e} = 1 \rangle.$$

Как и в доказательстве теорем 2 и 5, группы $G_1 = \langle x_1, y \mid [x_1, y] = x_1^a y^{c_u} = 1 \rangle$ и $G_2 = \langle x_2, y \mid [x_2, y] = x_2^b y^{c_v} = 1 \rangle$ являются бесконечными циклическими группами и порождаются соответственно элементами $z_1 = x_1^{q_1} y^{p_1}$ и $z_2 = x_2^{q_2} y^{p_2}$, где p_i и q_i удовлетворяют уравнениям (6) и (7). Кроме того, в G_1 элемент $y = z_1^a$, а в G_2 элемент $y = z_2^b$.

Рассмотрим отдельно два случая: кривая L (образ кривой L_∞) лежит либо в слое $F_{(0;1)}$, либо в $F_{(1;0)}$ (не ограничивая общности, считаем, что L лежит в $F_{(0;1)}$); и L либо совпадает с сечением S_∞ , либо является компонентой некоторого слоя F_μ .

В первом случае

$$\overline{G}_2 = \langle x_2, y \mid [x_2, y] = x_2^b y^{c_v} = x_2^{q_d} y^{q_e} = 1 \rangle$$

является циклической группой конечного порядка n_2 , где

$$n_2 = \pm \det \begin{pmatrix} a_2 & c_v \\ q_d & q_e \end{pmatrix},$$

и элемент $y = z_2^b$ имеет порядок $m = n_2 / (n_2, b)$. Отсюда и из (5) получаем

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}_\lambda) \simeq \langle z_1 \mid z_1^{n_1} = 1 \rangle *_{\{z_1^a = z_2^b\}} \langle z_2 \mid z_2^{n_2} = 1 \rangle,$$

где $n_1 = ma$.

Во втором случае

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}_\lambda) \simeq \langle z_1 \mid z_1^{n_1} = 1 \rangle *_{\{z_1^a = z_2^b\}} \langle z_2 \mid z_2^{n_2} = 1 \rangle,$$

где q – порядок ветвления отображения ψ вдоль L_∞ , а $n_1 = qea$ и $n_2 = qeb$.

Список литературы

1. Куликов Вик. С. Фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 2. С. 434–455.
2. Куликов Вик. С. О структуре фундаментальной группы дополнения к алгебраическим кривым в $\mathbb{C}^2$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 2. С. 469–481.
3. Куликов Вик. С. Многочлены Александра плоских алгебраических кривых // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 1. С. 76–101.
4. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
5. Némethi A. On the fundamental group of the complement of certain singular plane curves // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1987. V. 102. P. 453–457.
6. Oka M. Some plane curves whose complements have non-abelian fundamental groups // Math. Ann. 1975. V. 218. № 1. P. 55–65.
7. Turpin W. S. On the fundamental group of a certain class of plane curves // Amer. J. Math. 1937. V. 59. № 3. P. 529–544.
8. Zariski O. On the problem of existence of algebraic function of two variables possessing a given branch curve // Amer. J. Math. 1929. V. 51. P. 305–428.