

УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов

О гипотезе Кизини

Гипотеза Кизини утверждает, что для каспидальной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$ общий морфизм f , $\deg f \geq 5$, гладкой проективной поверхности на $\mathbb{P}^2$, разветвленной вдоль B , единствен с точностью до изоморфизма. В статье доказано, что если $\deg f$ больше, чем значение некоторой функции, зависящей от степени, рода и числа каспов кривой B , то гипотеза Кизини выполнена для B . Это неравенство имеет место для почти всех общих морфизмов. В частности, оно выполняется для общих морфизмов поверхностей с обильным каноническим классом, заданных линейной подсистемой m -го канонического класса, $m \in \mathbb{N}$.

Кроме того, в статье приведены примеры пар кривых $B_{1,m}, B_{2,m} \subset \mathbb{P}^2$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 5$) плоских каспидальных кривых таких, что:

(i) $\deg B_{1,m} = \deg B_{2,m}$ и в $\mathbb{P}^2$ можно найти гомеоморфные друг другу трубчатые окрестности этих кривых, но пары $(\mathbb{P}^2, B_{1,m})$ и $(\mathbb{P}^2, B_{2,m})$ не гомеоморфны;

(ii) $B_{i,m}$ – дискриминантная кривая общего морфизма $f_{i,m}: S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$, $i = 1, 2$, поверхности общего типа S_i ;

(iii) S_1 и S_2 – гомеоморфные поверхности (рассматриваемые как четырехмерные действительные многообразия);

(iv) морфизм $f_{i,m}$ задается трехмерной линейной подсистемой из m -канонического класса поверхности S_i .

Библиография: 29 наименований.

Введение

Пусть $B \subset \mathbb{P}^2$ – неприводимая каспидальная плоская кривая над $\mathbb{C}$, т.е. кривая, все особые точки которой суть каспы (особые точки типа A_2 с локальным уравнением $y^2 = x^3$) и ноуды (особые точки типа A_1 с локальным уравнением $y^2 = x^2$). Обозначим через $2d$ степень кривой B , и пусть g – род ее десингуляризации, s – число каспов и n – число ноудов. Назовем B *дискриминантной кривой* общего морфизма, если существует конечный морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, $\deg f \geq 3$, удовлетворяющий следующим условиям:

(i) S – неособая неприводимая проективная поверхность;

(ii) f неразветвлен над $\mathbb{P}^2 \setminus B$;

(iii) $f^*(B) = 2R + C$, где R – неособая неприводимая кривая, а C – приведенная кривая;

(iv) $f|_R: R \rightarrow B$ совпадает с морфизмом нормализации кривой B .

Мы будем называть такой морфизм f *общим морфизмом*.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№ 99-01-01133) и INTAS.

Отметим, что если $S \subset \mathbb{P}^r$, морфизм f является ограничением на S общей проекции проективного пространства $\mathbb{P}^r$ на плоскость $\mathbb{P}^2$ и B – кривая ветвления морфизма f , то (S, f) – общий морфизм и B – его дискриминантная кривая.

Два общих морфизма (S_1, f_1) , (S_2, f_2) с одной и той же дискриминантной кривой B называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Мы будем говорить, что *общий морфизм f однозначно определяется своей дискриминантной кривой B* , если любые два общих морфизма с дискриминантной кривой B эквивалентны.

Следующее утверждение известно как гипотеза Кизини.

ГИПОТЕЗА 1. *Если $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общий морфизм степени $\deg f \geq 5$, то f однозначно определяется своей дискриминантной кривой.*

Если $B \subset \mathbb{P}^2$ – двойственная кривая к гладкой кубике, то B является дискриминантной кривой четырех неэквивалентных общих морфизмов (см. [9], [6]). Три из них имеют степень четыре, а четвертый имеет степень три. Это – единственный известный к настоящему моменту пример дискриминантной кривой нескольких неэквивалентных общих морфизмов. В п. 1.2 приведен еще ряд примеров кривых, являющихся дискриминантными кривыми неэквивалентных общих морфизмов (степени ≤ 4).

В общем случае, как это следует из [6], число неэквивалентных общих морфизмов с заданной дискриминантной кривой B не превосходит 2^{2g+c-1} .

Гипотеза Кизини была доказана Б. Мойшезоном для дискриминантных кривых общих проекций гладких гиперповерхностей в $\mathbb{P}^3$. Его доказательство использует полученное им в [19] представление фундаментальной группы дополнения в $\mathbb{P}^2$ к дискриминантной кривой общей проекции. Краткий обзор результатов, относящихся к гипотезе Кизини, и попыток доказать ее содержится в [6].

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть B – дискриминантная кривая общего морфизма $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени $\deg f = N$. Если*

$$N > \frac{4(3d + g - 1)}{2(3d + g - 1) - c}, \quad (1)$$

то f однозначно определяется своей дискриминантной кривой B , т.е. гипотеза Кизини верна для дискриминантной кривой B .

Теорема 1 показывает, что если степень общего морфизма с данной дискриминантной кривой B достаточно велика, то этот общий морфизм единствен для B . Почти все общие морфизмы, интересные с алгебро-геометрической точки зрения, удовлетворяют этому условию. Более точно, пусть $E = f^*(\mathbb{P}^1)$ – прообраз общей прямой $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$. Мы проверим неравенство (1) для общих морфизмов, заданных трехмерными линейными подсистемами различных линейных систем $|E|$ на поверхностях различных типов, чтобы получить следующие теоремы в качестве следствий основного результата.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – произвольная проективная неособая поверхность и L – произвольный обильный дивизор на S , $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общий морфизм, заданный трехмерной линейной подсистемой $\{E\} \subset |mL|$, $m \in \mathbb{Q}$, и пусть B – его дискриминантная кривая. Тогда существует такая константа m_0 (зависящая от L^2 , (K_S, L) , K_S^2 , p_a), что для дискриминантной кривой B морфизма f этот общий морфизм является единственным, если $m \geq m_0$. В частности, если $L = K_S$, то мы можем взять $m_0 = 2$.

ТЕОРЕМА 3. Общий морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ поверхности основного типа S с обильным каноническим классом K_S , заданный трехмерной линейной системой $\{E\}$, где $E \equiv mK_S$, $m \in \mathbb{N}$ ($\equiv$ означает численную эквивалентность), однозначно определяется своей дискриминантной кривой B .

ТЕОРЕМА 4. Общий морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ поверхности дель Пеццо S , заданный трехмерной линейной системой $\{E\}$, где $E \in |-mK_S|$, $m \in \mathbb{N}$, однозначно определяется своей дискриминантной кривой B .

ТЕОРЕМА 5. Произвольный общий морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ поверхности $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ однозначно определяется своей дискриминантной кривой B .

ТЕОРЕМА 6. Произвольный общий морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ КЗ-поверхности S однозначно определяется своей дискриминантной кривой B .

ТЕОРЕМА 7. Произвольный общий морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ поверхности Энриквеса S однозначно определяется своей дискриминантной кривой B , за исключением, возможно, случая $\deg f = 4$. В исключительном случае $\deg B = 12$, $g = 19$, $c = 36$, $n = 0$, и если такой общий морфизм существует, то:

- 1) существуют по крайней мере два общих морфизма с одной и той же дискриминантной кривой B ;
- 2) каждый общий морфизм f' с такой дискриминантной кривой B имеет $\deg f' \leq 4$.

В частности, гипотеза Кизини верна для всех дискриминантных кривых общих морфизмов поверхностей Энриквеса.

ТЕОРЕМА 8. Произвольный общий морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ абелевой поверхности S однозначно определяется своей дискриминантной кривой B , за исключением, возможно, случая $\deg f = 6$. В исключительном случае $\deg B = 18$, $g = 28$, $c = 72$, $n = 36$, и если для B существует общий, неэквивалентный f , морфизм f' , то $\deg f' \leq 6$.

ТЕОРЕМА 9. Общий морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ полного пересечения $S \subset \mathbb{P}^{k+2}$, индуцированный проекцией $\text{pr}: \mathbb{P}^{k+2} \rightarrow \mathbb{P}^2$, однозначно определяется своей дискриминантной кривой B .

ТЕОРЕМА 10. Гипотеза Кизини выполнена для дискриминантных кривых B , являющихся двойственными кривыми к плоским нодальным кривым (т.е. к кривым с лишь нодами в качестве особых точек), за исключением, возможно, следующих случаев:

- 1) $\deg B = 30$, $g = 10$, $c = 72$, $n = 324$;
- 2) $\deg B = 20$, $g = 6$, $c = 45$, $n = 120$;

3) $\deg B = 18$, $g = 5$, $c = 39$, $n = 92$;

4) $\deg B = 16$, $g = 4$, $c = 33$, $n = 68$.

Во всех исключительных случаях, если существуют неэквивалентные общие морфизмы с данной дискриминантной кривой B , эти морфизмы имеют степень ≤ 6 .

ТЕОРЕМА 11. *Гипотеза Кизини выполнена для дискриминантных кривых B рода $g \leq 3$.*

ТЕОРЕМА 12. *Гипотеза Кизини верна для дискриминантных кривых B , удовлетворяющих неравенству $d > 3(g - 1)$.*

К сожалению, в общем случае мы не имеем удовлетворительного описания (в алгебро-геометрических терминах) множества дискриминантных кривых с заданными степенью, родом и числом каспов. С другой стороны, множество дискриминантных кривых может быть полностью описано в терминах фундаментальной группы дополнения к ним в $\mathbb{P}^2$ (см. предложение 1 в п. 1.2). Однако алгебро-геометрическое описание множества дискриминантных кривых может быть дано в некоторых частных случаях. Например, в [29] Зариский доказал, что секстика с шестью каспами является дискриминантной кривой общего морфизма тогда и только тогда, когда эти 6 особых точек лежат на конике, и он доказал существование секстик с шестью каспами, не лежащими на одной и той же конике. В этой статье мы также дадим описание в терминах алгебраической геометрии множества дискриминантных кривых морфизмов, заданных трехмерными подсистемами m -го канонического класса для $m \geq 21$ (см. п. 4.2). Такие дискриминантные кривые мы будем называть *m -каноническими дискриминантными кривыми*.

Две плоские кривые $B_1, B_2 \subset \mathbb{P}^2$, $\deg B_1 = \deg B_2$, над $\mathbb{C}$ называются *парой Зариского*, если в $\mathbb{P}^2$ можно найти гомеоморфные друг другу трубчатые окрестности этих кривых, но пары $(\mathbb{P}^2, B_1)$ и $(\mathbb{P}^2, B_2)$ не гомеоморфны.

Первый пример такой пары был построен Зариским: это как раз упомянутые выше две плоские кривые B_1 и B_2 степени 6 с шестью обыкновенными каспами. В данной статье будет доказано существование большого числа различных пар Зариского, являющихся дискриминантными кривыми общих морфизмов на $\mathbb{P}^2$.

Пусть $(\mathbb{P}^2, B_1)$ и $(\mathbb{P}^2, B_2)$ – две гомеоморфные пары. Из предложения 1 следует, что если B_1 является дискриминантной кривой общего морфизма (S_1, f_1) , то B_2 также является дискриминантной кривой некоторого общего морфизма (S_2, f_2) . Более того, если морфизм (S_1, f_1) однозначно определяется своей дискриминантной кривой $B_1 \subset \mathbb{P}^2$, то то же самое верно и для морфизма (S_2, f_2) . Кроме того, в этом случае (см. предложение 8 в § 5) S_1 и S_2 гомеоморфны друг другу. Отсюда естественным образом возникает следующий вопрос.

ПРОБЛЕМА 1. *Пусть $S_1, S_2 \subset \mathbb{P}^r$ – две гомеоморфные (случай C) (соответственно диффеоморфные (случай D)) поверхности общего типа, вложенные с помощью m -канонического класса в проективное пространство, и пусть B_i – m -канонические дискриминантные кривые общих проекций поверхностей S_i на $\mathbb{P}^2$. Будут ли пары $(\mathbb{P}^2, B_1)$ и $(\mathbb{P}^2, B_2)$ гомеоморфны (соответственно диффеоморфны)?*

В случае С данная проблема имеет отрицательное решение, а именно имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 13. *Для каждого натурального числа k существует набор $(B_{1,m}, \dots, B_{k,m})$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 5$, состоящий из k m -канонических кривых $B_{i,m}$ таких, что пары $B_{i,m}$, $B_{j,m}$ при $i \neq j$ являются парами Зариского, но соответствующие этим кривым общие морфизмы $f_{i,m}: S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$, $i = 1, \dots, k$, являются морфизмами попарно гомеоморфных (но не диффеоморфных) поверхностей общего типа S_i .*

На самом деле будет доказано несколько более сильное, чем теорема 13, утверждение. А именно, будет доказано, что гладкие структуры, возникающие из комплексных структур на гомеоморфных поверхностях S_1 и S_2 общего типа (рассматриваемых как четырехмерные действительные многообразия) и составляющих пару Катанезе (определение пары Катанезе см. в § 6), различаются топологическими типами пар $(\mathbb{P}^2, B_{1,m})$ и $(\mathbb{P}^2, B_{2,m})$, где $B_{i,m}$ — m -канонические дискриминантные кривые общих морфизмов S_i на $\mathbb{P}^2$, заданных m -каноническим классом $|mK_{S_i}|$.

Это позволяет надеяться на то, что и в общем случае гладкие структуры на гомеоморфных проективных поверхностях общего типа различаются с помощью топологических типов вложений в $\mathbb{P}^2$ соответствующих этим поверхностям m -канонических дискриминантных кривых.

В случае D проблема 1 к настоящему моменту остается открытой.

В § 1 мы напомним хорошо известные факты об общих морфизмах и их дискриминантных кривых, § 2 посвящен доказательству теоремы 1. В § 3 мы проверим неравенство (1) в различных случаях, чтобы доказать теоремы 2–12; § 4 содержит более детальное исследование случая, когда общий морфизм задан линейной подсистемой m -го канонического класса. В § 5 кратко обсуждается вопрос о числе неприводимых компонент пространства модулей дискриминантных кривых с фиксированными степенью, родом и числом каспов. Кроме того, мы применяем теорему 3 для нахождения новых примеров пар Зариского; § 6 посвящен доказательству теоремы 13.

Данная статья была написана во время пребывания автора в Институте математики Макса Планка (Бонн, ФРГ).

§ 1. Общие морфизмы и их дискриминантные кривые

1.1. Пусть B — дискриминантная кривая общего морфизма $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, $\deg f = N$, $E = f^*(\mathbb{P}^1)$. Имеем $(E^2)_S = N$.

ЛЕММА 1. *Степень $\deg B = 2d$ является четным числом, в частности $d \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Гурвица $2g(E) - 2 = -2N + \deg B$. Поэтому $\deg B$ — четное число.

Так как $g(E) \geq 0$, то мы имеем следующее неравенство:

$$\deg f \leq d + 1. \quad (2)$$

Напомним некоторые неравенства, связывающие род, степень и число каспов кривой B и вытекающие из формул Плюккера и результата Нори [21]. Пусть B^* – кривая, двойственная к B . Положим $\delta = \deg B^*$, γ – число каспов кривой B^* и ν – число ее ноудов. Из формул Плюккера

$$\begin{aligned}\delta &= 2d(2d-1) - 2n - 3c, \\ 2d &= \delta(\delta-1) - 2\nu - 3\gamma, \\ 2g &= (2d-1)(2d-2) - 2n - 2c, \\ 2g &= (\delta-1)(\delta-2) - 2\nu - 2\gamma\end{aligned}$$

следует, что

$$\delta = 4d - c + 2g - 2, \quad \gamma = 6d - 2c + 6g - 6.$$

Так как $\delta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, то имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие неравенства:*

$$c \leq 4d + 2g - 2, \quad c \leq 3d + 3g - 3.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. $c < 2(3d + g - 1)$.

ЛЕММА 3. $3d + g - 1 \leq 2c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B – дискриминантная кривая общего морфизма, то $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ не может быть абелевой группой. Поэтому из [21] следует, что $B^2 - 6c \leq 2n$. Для плоской каспидальной кривой B степени $\deg B = 2d$ имеем $g + c + n = (2d-1)(d-1)$. Следовательно, $B^2 - 2n = 4d^2 - 2n = 2c + 6d + 2g - 2 \leq 6c$.

ЛЕММА 4. *Имеют место следующие равенства:*

$$R^2 = 2d^2 - c - n \tag{3}$$

$$= 3d + g - 1. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $K_S = -3E + R$. Поэтому (4) следует из формулы присоединения:

$$\frac{(K_S + R, R)}{2} = \frac{(-3E + 2R, R)}{2} = -3d + R^2 = g - 1.$$

Мы получим (3), если вместо g подставим $g = (2d-1)(d-1) - c - n$.

ЛЕММА 5. *Имеет место неравенство*

$$N \leq \frac{4d^2}{3d + g - 1}, \tag{5}$$

и (5) является равенством тогда и только тогда, когда либо $E \equiv tK_S$ для некоторого $t \in \mathbb{Q}^*$, либо $K_S \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Ходжа об индексе

$$\begin{vmatrix} E^2 & (E, R) \\ (E, R) & R^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N & 2d \\ 2d & 3d + g - 1 \end{vmatrix} \leq 0,$$

т.е. $N \leq 4d^2/(3d + g - 1)$, и мы имеем равенство тогда и только тогда, когда E и R линейно зависимы в $\text{NS}(S) \otimes \mathbb{Q}$, где $\text{NS}(S)$ – группа Нерона–Севери поверхности S . В последнем случае так как $K_S = -3E + R$, то либо $E \equiv mK_S$ для некоторого m , либо $K_S \equiv 0$.

ЛЕММА 6. *Имеем*

$$\begin{aligned} K_S^2 &= 9N + 2d^2 - 12d - c - n \\ &= 9N - 9d + g - 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $K_S^2 = (-3E + R, -3E + R) = 9E^2 - 6(E, R) + R^2 = 9N - 12d + R^2$.

ЛЕММА 7. *Топологическая Эйлера характеристика равна:*

$$\begin{aligned} e(S) &= 3N + 4d^2 - 6d - 3c - 2n \\ &= 3N + 2(g - 1) - c. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая общий пучок прямых на $\mathbb{P}^2$ и его прообраз $\{E_t\}$ на S , мы получим формулу для $e(S)$:

$$\begin{aligned} e(S) + N &= \delta + 2(2 - 2g(E)) = 2d(2d - 1) - 3c - 2n - 2(K_S + E, E) \\ &= 2d(2d - 1) - 3c - 2n - 2(-2E + R, E) = 4N + 4d^2 - 6d - 3c - 2n. \end{aligned}$$

Из формулы Нётера $K_S^2 + e(S) = 12p_a$ следует

ЛЕММА 8. *Эйлера характеристика структурного пучка $\mathcal{O}_S$ равна:*

$$\begin{aligned} p_a &= 1 - q + p_g = N + \frac{d(d - 3)}{2} - \frac{c}{3} - \frac{n}{4} \\ &= N + \frac{3g - 3 - 9d - c}{12}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2 [20]. *Имеем*

$$c \equiv 0 \pmod{3}, \quad n \equiv 0 \pmod{4}.$$

ЛЕММА 9. *Дивизор R обилен на S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что $(R, \Gamma) > 0$ для любой неприводимой кривой Γ . Если $(R, \Gamma) \leq 0$, то по теореме Ходжа об индексе $\Gamma^2 < 0$ и $(R, \Gamma) = 0$, так как по лемме 4 индекс самопересечения $R^2 > 0$ и кривая R неприводима. Если $\Gamma^2 < 0$ и Γ – неприводимая кривая, то $(K_S, \Gamma) \geq -1$, т.е. $-3(E, \Gamma) + (R, \Gamma) \geq -1$, что противоречит равенству $(R, \Gamma) = 0$.

1.2. Зафиксируем какую-нибудь точку $p \in \mathbb{P}^2 \setminus B$ и обозначим через $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B, p)$ фундаментальную группу дополнения к кривой B . Выберем произвольную точку $x \in B \setminus \text{Sing } B$ и рассмотрим прямую $\Pi = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$, пересекающую B трансверсально в точке x . Пусть $\gamma \subset \Pi$ – окружность малого радиуса с центром в x . Выбор ориентации на $\mathbb{P}^2$ определяет ориентацию на γ . Пусть Γ – петля, состоящая из пути L в $\mathbb{P}^2 \setminus B$, соединяющего точку p с некоторой точкой $q \in \gamma$, из обхода вдоль γ в положительном направлении с началом и концом в q и возврата в p вдоль L в обратном направлении. Такие петли Γ (и соответствующие элементы в π_1) мы будем называть *геометрическими образующими*. Хорошо известно, что π_1 порождается геометрическими образующими и что если B – неприводимая кривая, то любые две геометрические образующие сопряжены в π_1 .

Для каждой особой точки s_i кривой B выберем окрестность $U_i \subset \mathbb{P}^2$ такую, что $B \cap U_i$ в этой окрестности задается (в локальных координатах в U_i) уравнением $y^2 = x^3$, если s_i – касп, и $y^2 = x^2$, если s_i – ноуд. Пусть p_i – произвольная точка в $U_i \setminus B$. Хорошо известно, что если s_i – касп, то $\pi_1(U_i \setminus B, p_i)$ изоморфна группе кос $B\Gamma_3$ из трех нитей и порождена двумя геометрическими образующими (скажем, a и b), которые удовлетворяют следующему соотношению:

$$aba = bab.$$

Если s_i – ноуд, то $\pi_1(U_i \setminus B, p_i)$ изоморфна группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, порожденной двумя коммутирующими геометрическими образующими.

Выберем гладкие пути γ_i в $\mathbb{P}^2 \setminus B$, соединяющие точки p_i с точкой p . Этот выбор определяет гомоморфизмы $\psi_i: \pi_1(U_i \setminus B, p_i) \rightarrow \pi_1$. Обозначим образ $\psi_i(\pi_1(U_i \setminus B, p_i))$ через G_i , если s_i – касп, и через Γ_i , если s_i – ноуд.

Общий морфизм степени N определяет гомоморфизм $\varphi: \pi_1 \rightarrow \mathfrak{S}_N$, где $\mathfrak{S}_N$ – симметрическая группа. Этот гомоморфизм φ определен однозначно с точностью до внутреннего автоморфизма группы $\mathfrak{S}_N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество неэквивалентных общих морфизмов степени N с одной и той же дискриминантной кривой B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством эпиморфизмов $\varphi: \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B) \rightarrow \mathfrak{S}_N$ (с точностью до внутренних автоморфизмов группы $\mathfrak{S}_N$), удовлетворяющих следующим условиям:*

- (i) *для каждой геометрической образующей γ ее образ $\varphi(\gamma)$ является транспозицией в $\mathfrak{S}_N$;*
- (ii) *для каждого каспа s_i группа $\varphi(G_i)$ порождена двумя транспозициями и изоморфна группе $\mathfrak{S}_3$;*
- (iii) *для каждого ноуда s_i группа $\varphi(\Gamma_i)$ порождена двумя коммутирующими транспозициями и изоморфна группе $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что каждый гомоморфизм $\varphi: \pi_1 \rightarrow \mathfrak{S}_N$ определяет конечный морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени N , неразветвленный над дополнением к B и такой, что S – нормальная поверхность, и обратно.

Условие (i) эквивалентно условию: $f^*(B) = 2R + C$, где R – неприводимая и C – приведенная кривые (см., например, [14] и [16]).

Условия (ii) и (iii) эквивалентны условию: S и R неособы в точках прообраза $f^{-1}(s_i)$ (см., например, [6]).

Так как S – неприводимая поверхность и $\deg f = N$, то $\varphi(\pi_1)$ действует транзитивно на множестве $\bar{N} = \{1, \dots, N\}$, а так как π_1 порождена геометрическими образующими, то $\varphi(\pi_1)$ порождена некоторым подмножеством транспозиций. Легко проверить, что подгруппа группы $\mathfrak{S}_N$, порожденная некоторым подмножеством транспозиций, действующих на $\bar{N}$ транзитивно, должна совпадать с $\mathfrak{S}_N$. Следовательно, φ является эпиморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу предложения 1 если $N = 2$, то двулистное накрытие $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, разветвленное вдоль неособой кривой $B \subset \mathbb{P}^2$, может также рассматриваться как общий морфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $B \subset \mathbb{P}^2$ – двойственная кривая к гладкой кубике, то по предложению 1, используя представление группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$, полученное в [28], легко показать, что B является дискриминантной кривой в точности четырех неэквивалентных общих морфизмов.

Основываясь на этом замечании, можно построить ряд примеров кривых, являющихся дискриминантными кривыми неэквивалентных общих морфизмов. Для этого рассмотрим общий морфизм $G: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, заданный тремя однородными формами $(G_1 : G_2 : G_3)$ степени k . Пусть $B_G \subset \mathbb{P}^2$ – дискриминантная кривая морфизма G , и пусть C' – двойственная кривая к гладкой кубике, находящаяся в общем положении с кривой B_G . Кривая $B = G^{-1}(C')$ является каспидальной кривой степени $\deg B = 6k^2$, рода $g = 9k(k-1) + 1$ с $c = 9k^2$ каспами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Кривая $B = G^{-1}(C') \subset \mathbb{P}^2$ является дискриминантной кривой четырех неэквивалентных общих морфизмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из того, что $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ изоморфна $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C')$. Действительно, в [17] доказано, что если кривые C' , B_G и $\mathbb{P}^1$ находятся в общем положении по отношению друг к другу, то

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (B_G \cup C' \cup \mathbb{P}^1)) \simeq \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (B_G \cup \mathbb{P}^1)) \times \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (C' \cup \mathbb{P}^1)),$$

где $\mathbb{P}^1$ – некоторая прямая в $\mathbb{P}^2$ (находящаяся в общем положении с C' и B_G). Морфизм $G: \mathbb{P}^2 \setminus G^{-1}(B_G \cup \mathbb{P}^1) \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus (B_G \cup \mathbb{P}^1)$ является неразветвленным накрытием и задается некоторой подгруппой конечного индекса Γ в $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (B_G \cup \mathbb{P}^1))$. Поэтому

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (B \cup G^{-1}(B_G \cup \mathbb{P}^1))) \simeq \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (C' \cup \mathbb{P}^1)) \times \Gamma.$$

Легко видеть, что ядро гомоморфизма $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (B \cup G^{-1}(B_G \cup \mathbb{P}^1))) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ порождается элементами из Γ и обходом вокруг кривой $G^{-1}(\mathbb{P}^1)$. Поэтому $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B) \simeq \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C')$. Следовательно, число неэквивалентных эпиморфизмов из $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ в симметрические группы совпадает с числом эпиморфизмов из $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C')$.

1.3. Пусть $s_j \in B$ – касп и (x, y) – локальные координаты вокруг s_j такие, что $B \cap U_j$ задана уравнением $y^2 = x^3$. Выберем окрестность $V_j \subset S$ точки $p_j \in R$, $f(p_j) = s_j$, так, что $f = f|_{V_j}: V_j \rightarrow U_j$ – трехлистное накрытие, разветвленное вдоль $R \cap V_j$. Хорошо известно, что такое накрытие $f: V_j \rightarrow U_j = U$ единственно с точностью до эквивалентности и, в частности, f эквивалентно стандартному накрытию $\bar{f}: \bar{V} \rightarrow U$, заданному нормализованным уравнением третьей степени:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \{(w, x, y) \mid (x, y) \in U, \quad w^3 - 3xw + 2y = 0\}, \\ \bar{f}(w, x, y) &= (x, y).\end{aligned}$$

Многообразие $\bar{V}$ неособо и (x, w) являются локальными координатами в $\bar{V}$. Дивизор ветвления $\bar{R} = \{(x, w) \in \bar{V} \mid x - w^2 = 0\}$ морфизма $\bar{f}$ является гладкой кривой и $\bar{f}^{-1}(B) = 2\bar{R} + \bar{C}$, где $\bar{C} = \{(x, w) \in \bar{V} \mid 4x - w^2 = 0\}$. Отметим, что $\bar{R}$ и $\bar{C}$ касаются друг друга в начале координат $o = (0, 0)$ и кратность пересечения $\bar{R}$ и $\bar{C}$ в o равна двум.

Как было отмечено выше, $\pi_1(U \setminus B) \simeq \text{Br}_3 = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$. Поэтому $\bar{f}: \bar{V} \rightarrow U$ соответствует гомоморфизму $\bar{\varphi}: \pi_1(U \setminus B) \rightarrow \mathfrak{S}_3$, заданному на образующих $\bar{\varphi}(a) = (1, 2)$ и $\bar{\varphi}(b) = (2, 3)$.

Положим $\bar{W} = \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_1 + w_2 + w_3 = 0\}$. Уравнения

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{3}(w_1w_2 + w_1w_3 + w_2w_3), \\ y &= -\frac{1}{2}w_1w_2w_3, \\ w &= w_1\end{aligned}$$

определяют морфизмы $\tilde{f}: \bar{W} \rightarrow U$ и $g: \bar{W} \rightarrow \bar{V}$ такие, что $\tilde{f} = \bar{f} \circ g$, $\deg \tilde{f} = 6$ и $\deg g = 2$. Морфизм g является двулистным накрытием, разветвленным вдоль $\bar{C}$, $g^*(\bar{C}) = 2\tilde{C}_2$, где $\tilde{C}_2$ задана в координатах (w_1, w_2) уравнением $w_1 + 2w_2 = 0$, а $g^*(\bar{R}) = \tilde{R} + \tilde{C}_1$, где $\tilde{R}$ и $\tilde{C}_1$ заданы уравнениями $w_1 = w_2$ и $2w_1 + w_2 = 0$ соответственно.

Заметим, что $\tilde{f}$ соответствует гомоморфизму $\tilde{\varphi}: \pi_1(U \setminus B) \rightarrow \mathfrak{S}_6 = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_3)$, индуцированному гомоморфизмом $\bar{\varphi}$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

2.1. Предположим, что существуют два неэквивалентных общих морфизма (S_1, f_1) и (S_2, f_2) с одной и той же дискриминантной кривой B , $\deg f_1 = N_1$ и $\deg f_2 = N_2$. Положим $f_1^*(B) = 2R_1 + C_1$ и $f_2^*(B) = 2R_2 + C_2$. Рассмотрим расслоенное произведение

$$S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2 = \{(x, y) \in S_1 \times S_2 \mid f_1(x) = f_2(y)\}.$$

Пусть $X = \widetilde{S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2}$ – нормализация многообразия $S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$. Обозначим через $g_1: X \rightarrow S_1$, $g_2: X \rightarrow S_2$ и $f_{1,2}: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ соответствующие естественные морфизмы. Имеем $\deg g_1 = N_2$, $\deg g_2 = N_1$ и $\deg f_{1,2} = N_1N_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если (S_1, f_1) и (S_2, f_2) неэквивалентны, то X – неприводимое многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Морфизм $f_{1,2}$ соответствует гомоморфизму

$$\varphi_{1,2} = \varphi_1 \times \varphi_2: \pi_1 \rightarrow \mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2} \subset \mathfrak{S}_{N_1 N_2},$$

где $\varphi_1: \pi_1 \rightarrow \mathfrak{S}_{N_1}$ (соответственно φ_2) – эпиморфизм, соответствующий морфизму f_1 (соответственно f_2). Положим $G = \varphi_{1,2}(\pi_1)$. Группа G как подгруппа в $\mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2}$ действует на $\overline{N}_1 \times \overline{N}_2$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что для некоторой геометрической образующей γ ее образ $\varphi_{1,2}(\gamma) = ((1, 2), (1, 2))$ есть произведение транспозиций $(1, 2) \in \mathfrak{S}_{N_i}$. Пусть $p_i: G \rightarrow \mathfrak{S}_{N_i}$ – ограничение на G проекции $\text{pr}_i: \mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2} \rightarrow \mathfrak{S}_{N_i}$.

ЛЕММА 10. Пусть G – подгруппа в $\mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2}$, $N_i > 2$, такая, что:

- 1) $p_i: G \rightarrow \mathfrak{S}_{N_i}$ является эпиморфизмом для $i = 1, 2$;
- 2) $((1, 2), (1, 2)) \in G$.

Пусть $\text{St}_{(1,1)} \subset G$ – стабилизатор элемента $(1, 1) \in \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$. Тогда индекс группы $\text{St}_{(1,1)}$ в G равен

$$(G: \text{St}_{(1,1)}) = N_1 N_2,$$

за исключением случая, когда $N_1 = N_2 = N$ и $G = \Delta \subset \mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_N$ (с точностью до внутренних автоморфизмов одного из множителей), где Δ – диагональная подгруппа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\overline{N_i - 1} \simeq \{2, \dots, N_i\} \subset \{1, 2, \dots, N_i\}$ определяет вложение $\mathfrak{S}_{N_i-1} \subset \mathfrak{S}_{N_i}$. Имеем

$$\text{St}_{(1,1)} = G \cap (\mathfrak{S}_{N_1-1} \times \mathfrak{S}_{N_2-1}).$$

Положим

$$H_1 \times \{e_2\} = G \cap (\mathfrak{S}_{N_1} \times \{e_2\}), \quad \{e_1\} \times H_2 = G \cap (\{e_1\} \times \mathfrak{S}_{N_2}),$$

где e_i – единица группы $\mathfrak{S}_{N_i}$. Заметим, что $\ker p_2 = H_1 \times \{e_2\}$ и $\ker p_1 = \{e_1\} \times H_2$. Следовательно, $H_1 \times \{e_2\}$ и $\{e_1\} \times H_2$ – нормальные подгруппы в G . Так как $p_i: G \rightarrow \mathfrak{S}_{N_i}$ – эпиморфизм для $i = 1, 2$, то H_i – нормальная подгруппа в $\mathfrak{S}_{N_i}$.

Хорошо известно, что если H – нормальная подгруппа в $\mathfrak{S}_N$, то либо $H = \mathfrak{S}_N$, либо $H = \mathfrak{A}_N$ – знакопеременная группа, либо $H = \{e\}$, и если $N = 4$, то существует еще одна возможность: H – группа Клейна

$$K_4 = \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

Случай I: $H_1 = \mathfrak{S}_{N_1}$. Так как p_2 – эпиморфизм, то $G = \mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2}$. Поэтому $|G| = N_1! N_2!$ и $|\text{St}_{(1,1)}| = (N_1 - 1)!(N_2 - 1)!$. Следовательно, $(G: \text{St}_{(1,1)}) = N_1 N_2$.

Случай II: $H_1 = \mathfrak{A}_{N_1}$. Так как p_2 – эпиморфизм и $\ker p_2 = H_1 \times \{e\}$, то

$$|G| = \frac{N_1! N_2!}{2}.$$

Аналогично, если мы рассмотрим p_1 , то мы получим, что $|\ker p_1| = N_2!/2$, поэтому $H_2 = \mathfrak{A}_{N_2}$. Следовательно, $(\sigma_1, \sigma_2) \in G$ тогда и только тогда, когда σ_1 и σ_2 имеют один и тот же знак. Поэтому

$$|\mathrm{St}_{(1,1)}| = \frac{(N_1 - 1)! (N_2 - 1)!}{2}$$

и $(G: \mathrm{St}_{(1,1)}) = N_1 N_2$.

Случай III: $H_1 = \{e_1\}$. Следовательно, p_2 является изоморфизмом, и имеются две возможности: либо $H_2 = \{e_2\}$ и p_1 – также изоморфизм, либо $H_2 \neq \{e_2\}$. Если p_1 и p_2 – изоморфизмы, то $N_1 = N_2 = N$ и $G = \Delta \subset \mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_N$ с точностью до автоморфизма одного из сомножителей, а так как $((1, 2), (1, 2)) \in G$, то этот автоморфизм должен быть внутренним. Если $H_2 \neq \{e_2\}$, то $p_1 \circ p_2^{-1}: \mathfrak{S}_{N_2} \rightarrow \mathfrak{S}_{N_1}$ является эпиморфизмом (не изоморфизм). Так как $N_i > 2$, то $\mathfrak{S}_{N_2}$ должен совпадать с $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_{N_1} = \mathfrak{S}_3$ и $H_2 = K_4$. Завершение исследования этого случая мы оставляем читателю.

Случай IV: $N_1 = 4$ и $H_1 = K_4$. Случай $H_2 = \mathfrak{S}_{N_2}$ невозможен. Действительно, если мы рассмотрим p_1 , то мы получим $|G| = 4! N_2!$. С другой стороны, если рассмотреть p_2 , то $|G| = 4N_2!$. Противоречие.

Случай $H_2 = \mathfrak{A}_{N_2}$ также невозможен. Действительно, если мы рассмотрим p_1 , то $|G| = 4! N_2!/2$. С другой стороны, если рассмотреть p_2 , то $|G| = 4N_2!$. Противоречие.

Случай $H_2 = \{e_2\}$ совпадает (с точностью до индексации) со случаем III.

Случай, когда $N_2 = 4$ и $H_2 = K_4$, будет оставлен читателю.

Чтобы завершить доказательство предложения 2, отметим, что $\deg f_{1,2} = N_1 N_2$ и существует неприводимая компонента $X_{(1,1)}$ многообразия X такая, что

$$\deg f|_{X_{(1,1)}} = (G: \mathrm{St}_{(1,1)}).$$

Поэтому по лемме 9 $\deg f|_{X_{(1,1)}} = N_1 N_2$ и, следовательно, X неприводимо всегда, за исключением случая, когда $N_1 = N_2 = N$ и $G \simeq \Delta \subset \mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_N$. Но исключительный случай соответствует случаю, когда (S_1, f_1) и (S_2, f_2) эквивалентны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. X – неособая поверхность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо проверить гладкость X только в точках $z \in f_{1,2}^{-1}(B)$ таких, что $p_1 = g_1(z) \in R_1 \subset S_1$ и $p_2 = g_2(z) \in R_2 \subset S_2$. Положим $f_{1,2}(z) = s$ и выберем окрестность $V_1 \subset S_1$ точки p_1 (соответственно окрестность $V_2 \subset S_2$ точки p_2) и окрестность $U \subset \mathbb{P}^2$ точки s так, что $f_i(V_i) = U$ и в выбранных окрестностях существуют локальные голоморфные координаты, в которых уравнения, задающие морфизмы f_i , имеют простейший вид.

Пусть $s \in B$ – неособая точка кривой B или ноуд. Тогда $f_i: V_i \rightarrow U$ задается уравнениями

$$u_{i,1}^2 = v_1, \quad u_{i,2} = v_2,$$

где $v_1 = 0$ – уравнение кривой $B \cap U$ (или одной из ветвей B , если s – ноуд). Следовательно, $V_1 \times_U V_2$ в $V_1 \times V_2$ задается уравнениями

$$u_{1,1}^2 = u_{2,1}^2, \quad u_{1,2} = u_{2,2},$$

или, эквивалентно,

$$u_{1,1} = \pm u_{2,1}, \quad u_{1,2} = u_{2,2}.$$

Следовательно, $V_1 \times_U V_2$ состоит из двух неприводимых неособых компонент, одна из которых соответствует знаку “+”, а другая – знаку “–”. Следовательно, нормализация $\widetilde{V_1 \times_U V_2}$ многообразия $V_1 \times_U V_2$ есть несвязное объединение двух неособых поверхностей.

Пусть $s = s_j \in B$ – каспи и (x, y) – локальные координаты вокруг s , выбранные в п. 1.3. Пусть $V_1 \subset S_1$ (соответственно для S_2) – окрестность точки $p_1 = p_{1,j}$ такая, что $f_1 = f_1|_{V_1}: V_1 \rightarrow U$ – трехлистное накрытие, разветвленное вдоль $R_1 \cap V_1$. Положим $Y = V_1 \times_U V_2$, и пусть $\tilde{Y}$ – нормализация поверхности Y . Обозначим через $g_i: \tilde{Y} \rightarrow V_i$ и $f_{1,2}: \tilde{Y} \rightarrow U$ соответствующие естественные морфизмы. Так как (V_1, f_1) и (V_2, f_2) эквивалентны, то $f_{1,2}$ соответствует гомоморфизму

$$\varphi_{1,2} = \varphi_1 \times \varphi_2: \pi_1(U \setminus B) \rightarrow \Delta \subset \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3 \subset \mathfrak{S}_9,$$

поэтому $\varphi_{1,2}(\pi_1(U \setminus B))$ действует на $\bar{9} \simeq \bar{3} \times \bar{3}$. Легко проверить, что имеется ровно две орбиты этого действия: одна из них – орбита точки $(1, 1)$, а другая – орбита точки $(1, 2)$. Следовательно, $\tilde{Y}$ является несвязным объединением многообразий $\tilde{Y}_{(1,1)}$ и $\tilde{Y}_{(1,2)}$. Легко видеть (см., например, [6, лемма 1.6]), что морфизм $(\tilde{Y}_{(1,1)}, f_{1,2})$ эквивалентен морфизму $(\bar{V}, \bar{f})$ (в обозначениях п. 1.3), а $g_i: \tilde{Y}_{(1,1)} \rightarrow V_i$ являются изоморфизмами для $i = 1, 2$; морфизм $(\tilde{Y}_{(1,2)}, f_{1,2})$ эквивалентен морфизму $(\bar{W}, \bar{f})$, а оба морфизма $(\tilde{Y}_{(1,2)}, g_i)$ эквивалентны морфизму $(\bar{W}, g)$. Следовательно, X – неособая поверхность.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если (S_1, f_1) и (S_2, f_2) с одной и той же дискриминантной кривой являются эквивалентными морфизмами, то:

- 1) X – неособая поверхность;
- 2) X является несвязным объединением двух неприводимых компонент: $X = X_{(1,1)} \sqcup X_{(1,2)}$, таких, что $g_i|_{X_{(1,1)}}: X_{(1,1)} \rightarrow S_i$ является изоморфизмом, $i = 1, 2$, и $\deg g_i|_{X_{(1,2)}} = N - 1$, где $N = N_1 = N_2$.

2.2. Пусть $\tilde{R} \subset X$ – кривая $g_1^{-1}(R_1) \cap g_2^{-1}(R_2)$, положим также $\tilde{C} = g_1^{-1}(C_1) \cap g_2^{-1}(C_2)$, $\tilde{C}_1 = g_1^{-1}(R_1) \cap g_2^{-1}(C_2)$ и $\tilde{C}_2 = g_1^{-1}(C_1) \cap g_2^{-1}(R_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеем*

$$\begin{aligned} \tilde{R}^2 &= 2(3d + g - 1) - c, \\ \tilde{C}_1^2 &= (N_2 - 2)(3d + g - 1) - c, \\ \tilde{C}_2^2 &= (N_1 - 2)(3d + g - 1) - c, \\ (\tilde{R}, \tilde{C}_i) &= c \quad \text{для } i = 1, 2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве следствия из локального исследования, проведенного в доказательстве предложения 3, вытекает, что $\deg g_{1|\tilde{R}} = 2$ и $g_{1|\tilde{R}}$ является этальным морфизмом.

Легко видеть, что $\tilde{R}$ и $\tilde{C}_i$ пересекаются только в точках, лежащих над каспами кривой B . Рассмотрим одну из таких точек, скажем $s = s_j$, и пусть $p_i = p_{i,j} \in R_i \cap f^{-1}(s)$. Пусть в обозначениях доказательства предложения 3 U – окрестность точки s . Легко видеть, что одна из ветвей кривой $\tilde{R} \cap \tilde{Y}$ принадлежит $\tilde{Y}_{(1,1)}$, а другая принадлежит $\tilde{Y}_{(1,2)}$. Так как $(\tilde{Y}_{(1,1)}, f_{1,2})$ и (V_i, f_i) эквивалентны, то $\tilde{Y}_{(1,1)} \cap \tilde{C}_i = \emptyset$ для $i = 1, 2$. Рассмотрим $\tilde{Y}_{(1,2)} \cap \tilde{R}$ и $\tilde{Y}_{(1,2)} \cap \tilde{C}_i$. Так как каждый морфизм $(\tilde{Y}_{(1,2)}, g_i)$ эквивалентен морфизму $(\bar{W}, g)$ ($(\bar{W}, g)$ был определен в п. 1.3), то мы можем отождествить $(\tilde{Y}_{(1,2)}, g_1)$ с $(\bar{W}, g)$. Тогда $\tilde{Y}_{(1,2)} \cap \tilde{R}$, $\tilde{Y}_{(1,2)} \cap \tilde{C}_1$ и $\tilde{Y}_{(1,2)} \cap \tilde{C}_2$ могут быть отождествлены соответственно с $\tilde{R}$, $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2 \subset \bar{W}$. Так как в окрестности $\bar{W}$ кратность пересечения кривых $\tilde{R}$ и $\tilde{C}_i$ равна 1, то $(\tilde{R}, \tilde{C}_i) = c$.

Чтобы вычислить $\tilde{R}^2$, рассмотрим снова локальный случай. Пусть $g: \bar{W} \rightarrow V$ – двулистное накрытие, заданное в локальных аналитических координатах уравнениями

$$w_1^2 = v_1, \quad w_2 = v_2.$$

Обозначим через $C \subset V$ кривую, заданную уравнением $v_1 = 0$, и через R кривую, заданную уравнением $w_2^2 = v_1$. Тогда C является кривой ветвления, $g^*(C) = 2\tilde{C}_2$ и $g^*(R) = \tilde{R} + \tilde{C}_1$, где $\tilde{C}_2$ задана уравнением $w_1 = 0$, а $\tilde{R}$ и $\tilde{C}_1$ заданы уравнениями $w_2 = \pm w_1$. Пусть $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ – композиция двух σ -процессов с центрами в точках такая, что $\sigma^{-1}(R + C) = R + C + L_1 + L_2$ – дивизор с нормальными пересечениями, где L_1 – исключительный дивизор первого σ -процесса, L_2 – исключительный дивизор второго σ -процесса, и для простоты обозначений мы снова обозначим через R и C соответственно собственные прообразы кривых $R \subset V$ и $C \subset V$. Так как мы осуществили два σ -процесса с центрами в точках, лежащих на R , индекс самопересечения R^2 уменьшится на 2 (если R рассматривается как полная кривая). Мы можем сделать два σ -процесса $\tilde{\sigma}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{V}$ (первый с центром в начале координат, а второй с центром в точке пересечения собственного прообраза кривой $\{w_2 = 0\}$ и исключительного дивизора первого σ -процесса). Легко проверить, что мы снова получаем морфизм $\tilde{g}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{V}$. Так как мы сделали только один σ -процесс с центром в точке, лежащей на $\tilde{W}$, то $\tilde{W}^2$ уменьшится на 1. Кроме того, $\tilde{g}|_{\tilde{R}}: \tilde{R} \rightarrow R$ является изоморфизмом (локально) и $\tilde{g}$ не разветвлен ни в одной из точек, лежащих на $\tilde{R}$.

Проведенное выше исследование позволяет нам вычислить $\tilde{R}^2$. Действительно, делая в каждой точке $p_{1,j} \in R_1$ два σ -процесса, как было описано выше, R_1^2 уменьшится на $2c$. Делая в каждой точке из $g_1^{-1}(p_{1,j}) \cap \tilde{R}$ два σ -процесса или так же, как и выше, или если окрестность рассматриваемой точки изоморфна многообразию $\tilde{Y}_{(1,1)}$, то мы делаем σ -процессы так, как мы делали это в V_1 , отождествив их в виду того, что $g_1: \tilde{Y}_{(1,1)} \rightarrow V_1$ является изоморфизмом. После осуществления всех этих σ -процессов $\tilde{R}^2$ уменьшится на $3c$, и мы можем найти окрестность $\tilde{V}_1$ собственного прообраза кривой R_1 и окрестность $\tilde{W}$ собственного прообраза кривой $\tilde{R}$ такие, что ограничение $\tilde{g}_{1|\tilde{W}}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{V}$ полученного морфизма $\tilde{g}_1$ на $\tilde{W}$ является

неразветвленным двулистным накрытием. Поэтому

$$\tilde{R}^2 - 3c = 2(R_1^2 - 2c).$$

Следовательно, применяя лемму 4, получим $\tilde{R}^2 = 2(3d + g - 1) - c$.

Так как $\deg g_1 = N_2$, то

$$N_2 R_1^2 = (\tilde{R} + \tilde{C}_1, \tilde{R} + \tilde{C}_1) = \tilde{R}^2 + 2(\tilde{R}, \tilde{C}_1) + \tilde{C}_1^2.$$

Следовательно,

$$\tilde{C}_1^2 = (N_2 - 2)(3d + g - 1) - c.$$

Предложение 4 доказано.

2.3. Чтобы завершить доказательство теоремы 1, применим теорему Ходжа об индексе. Так как по следствию 1 индекс самопересечения $\tilde{R}^2$ больше нуля, то

$$\left| \begin{array}{cc} \tilde{R}^2 & (\tilde{R}, \tilde{C}_i) \\ (\tilde{C}_i, \tilde{R}) & \tilde{C}_i^2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2(3d + g - 1) - c & c \\ c & (N_j - 2)(3d + g - 1) - c \end{array} \right| \leq 0,$$

т.е.

$$2(N_j - 2)(3d + g - 1)^2 - N_j(3d + g - 1)c \leq 0.$$

Поэтому

$$N_j[2(3d + g - 1) - c] \leq 4(3d + g - 1).$$

Следовательно, если существуют два неэквивалентных общих морфизма (S_1, f_1) и (S_2, f_2) , то их степени должны удовлетворять неравенству

$$N_j \leq \frac{4(3d + g - 1)}{2(3d + g - 1) - c}.$$

§ 3. Единственность общего морфизма для некоторых типов дискриминантных кривых

Запишем неравенство (1) в виде

$$N[2(3d + g - 1) - c] - 4(3d + g - 1) > 0. \quad (6)$$

3.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим $k = K_S^2$, $L^2 = a$ и $(K_S, L) = b$. Отметим, что $a > 0$. Если $E = mL$, то

$$N = \deg f = m^2 a. \quad (7)$$

Имеем $K_S = f^*(K_{\mathbb{P}^2}) + R = -3E + R$, т.е. $R = K_S + 3mL$. Следовательно,

$$R^2 = 9m^2 a + 6mb + k,$$

4 Серия математическая, №6 $(K_S, R) = 3mb + k$.

По формуле присоединения имеем

$$2(g-1) = (K_S + R, R) = 9m^2 + 9mb + 2k \quad (8)$$

и по лемме 4

$$3d + g - 1 = 9m^2a + 6mb + k. \quad (9)$$

Из (7), (8) и леммы 7 следует, что

$$c = 12m^2a + 9mb + 2k - e(S). \quad (10)$$

Подставим (7), (9) и (10) в (6). Имеем

$$\begin{aligned} & m^2a[6m^2a + 3mb + e(S)] - 4(9m^2a + 6mb + k) \\ &= m^2a \left[6m^2a + 3mb + e(S) - 36a - \frac{24b}{ma} - \frac{4k}{m^2a} \right] > 0. \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что существует такая константа m_0 , что последнее неравенство выполнено для $m \geq m_0$.

Доказательство теоремы в случае $L = K_S$ совпадает с доказательством теоремы 3.

3.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Положим $k = K_S^2$; тогда $E^2 = m^2k$ и поэтому

$$N = \deg f = m^2k. \quad (11)$$

Имеем $K_S = f^*(K_{\mathbb{P}^2}) + R = -3E + R$, поэтому $R \equiv (3m+1)K_S$. Следовательно, $\deg B = (E, R) = m(3m+1)k$, т.е.

$$d = \frac{m(3m+1)k}{2}. \quad (12)$$

По формуле присоединения $2(g-1) = (K_S + R, R)$. Следовательно,

$$g-1 = \frac{(3m+2)(3m+1)k}{2}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что

$$3d + g - 1 = (3m+1)^2k. \quad (14)$$

По лемме 8

$$c = (12m^2 + 9m + 3)k - 12p_a. \quad (15)$$

Подставим (11), (14) и (15) в (6). Имеем

$$\begin{aligned} & m^2k[(6m^2 + 3m - 1)k + 12p_a] - 4(3m+1)^2k \\ &= m^2k \left[(6m^2 + 3m - 1)k + 12p_a - 4 \left(3 + \frac{1}{m} \right)^2 \right] > 0. \end{aligned}$$

Если $m \geq 2$, то

$$\left[(6m^2 + 3m - 1)k + 12p_a - 4 \left(3 + \frac{1}{m} \right)^2 \right] \geq 29k + 12p_a - 49 > 0,$$

а так как $k \geq 1$ и $p_a \geq 1$, то последнее неравенство не выполняется только при $k = 1$ и $p_a = 1$. В исключительном случае если $m \geq 3$, то

$$\left[(6m^2 + 3m - 1)k + 12p_a - 4 \left(3 + \frac{1}{m} \right)^2 \right] > 62 + 12 - 45 > 0.$$

Случай $m = 2$, $k = p_a = 1$ невозможен. Действительно, в этом случае из (12)–(15) мы получим, что $\deg B = 14$, $g = 29$, $c = 57$ и число ноудов n должно быть неотрицательным. Но по формуле присоединения

$$n = \frac{1}{2}(\deg B - 1)(\deg B - 2) - g - c = 13 \cdot 6 - 29 - 57 < 0.$$

Противоречие. Следовательно, неравенство (1) для $m \geq 2$ выполнено всегда.

Если $m = 1$, то

$$\left[(6m^2 + 3m - 1)k + 12p_a - 4 \left(3 + \frac{1}{m} \right)^2 \right] = 8k + 12p_a - 64 > 0,$$

и, следовательно, неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$2k + 3p_a > 16.$$

Так как $k = E^2 = N \geq 3$, то последнее неравенство не выполняется только для 1) $k = 3$, $p_a \leq 3$; 2) $k = 4$, $p_a \leq 2$; 3) $k = 5$, $p_a \leq 2$; 4) $k = 6$, $p_a = 1$.

Покажем, что все исключительные случаи реально не существуют. Действительно, в случае 1) и 2) из (12)–(15) следует, что $\deg B = 4k$, $g = 10k + 1$, $c = 12(2k - p_a)$ и число ноудов n должно быть неотрицательно. Но по формуле присоединения

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2}(\deg B - 1)(\deg B - 2) - g - c \\ &= (4k - 1)(2k - 1) - 10k - 1 - 24k + 12p_a \\ &= 4(2k^2 - 10k + 3p_a) < 0 \end{aligned}$$

для $k = 3$, $p_a \leq 3$ и $k = 4$, $p_a \leq 2$.

Во всех исключительных случаях, так как $m = 1$, должно выполняться неравенство $p_g \geq 3$, где p_g – геометрический род поверхности S . Следовательно, S – иррегулярная поверхность, и согласно [8] не существует иррегулярной поверхности основного типа S с $K_S = 5$ и $p_g \geq 3$. 4*

Покажем, что морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ иррегулярной поверхности S с $K_S = 6$ и $p_g \geq 3$ не является общим морфизмом¹. Действительно, согласно [8] в этом случае S изоморфна симметрическому квадрату $C^{(2)}$ кривой C рода $g = 3$, а рассматриваемый морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ совпадает с каноническим морфизмом $\Phi_{|K_{C^{(2)}}|}: C^{(2)} \rightarrow \mathbb{P}^2 = X$. Как известно, кривая C изоморфна плоской кривой $C \subset \mathbb{P}^2$ степени 4. Легко проверить, что в терминах вложения $C \subset \mathbb{P}^2$ пространство X может быть отождествлено с двойственной плоскостью $\mathbb{P}^{2*}$, а морфизм $\Phi_{|K_{C^{(2)}}|}$ отождествлен с морфизмом, переводящим точку $(p, q) \in C^{(2)}$ в точку $l_{p,q} \in \mathbb{P}^{2*}$, где $l_{p,q}$ — прямая в $\mathbb{P}^2$, проходящая через точки p и q . Следовательно, кривая ветвления B морфизма $\Phi_{|K_{C^{(2)}}|}$ совпадает с двойственной кривой C^* к C . Морфизм $\Phi_{|K_{C^{(2)}}|}$ может быть разложен в композицию двух морфизмов: морфизма факторизации $\pi: C^{(2)} \rightarrow C^{(2)}/i$ и некоторого морфизма $\psi: C^{(2)}/i \rightarrow \mathbb{P}^{2*}$, где $C^{(2)}/i$ — факторпространство по действию инволюции $i: C^{(2)} \rightarrow C^{(2)}$, переводящей точку $(p, q) \in C^{(2)}$ в (p', q') , где (p', q') — дополнительная к (p, q) пара точек пересечения кривой C с прямой $l_{p,q}$. Поэтому $\Phi_{|K_{C^{(2)}}|}$ не может быть общим морфизмом, так как разложение $\Phi_{|K_{C^{(2)}}|} = \psi \circ \pi$ не совместимо с условием (iv) в определении общего морфизма.

3.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Положим $k = K_S^2$; тогда $E^2 = m^2k$ и поэтому

$$N = \deg f = m^2k. \quad (16)$$

Имеем $K_S = f^*(K_{\mathbb{P}^2}) + R = -3E + R$, поэтому $R \in |(-3m+1)K_S|$. Следовательно, $\deg B = (E, R) = m(3m-1)k$, т.е.

$$d = \frac{m(3m-1)k}{2}. \quad (17)$$

По формуле присоединения $2(g-1) = (K_S + R, R)$. Следовательно,

$$g-1 = \frac{(3m-2)(3m-1)k}{2}. \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что

$$3d + g - 1 = (3m-1)^2k. \quad (19)$$

По лемме 8

$$c = (12m^2 - 9m + 3)k - 12. \quad (20)$$

Подставим (16), (19) и (20) в (6). Имеем

$$\begin{aligned} & m^2k[2(3m-1)^2k - (12m^2 - 9m + 3)k + 12] - 4(3m-1)^2k \\ &= m^2k \left[(6m^2 - 3m - 1)k + 12 - 4 \left(3 - \frac{1}{m} \right)^2 \right] \\ &= m^2k \left[\left(6 \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{11}{8} \right) k + 12 - 4 \left(3 - \frac{1}{m} \right)^2 \right] > 0. \end{aligned}$$

¹ Доказательство этого утверждения принадлежит Ф. Катанезе.

Если $m \geq 3$, то неравенство (1) выполнено, так как

$$\left[(6m^2 - 3m - 1)k + 12 - 4 \left(3 - \frac{1}{m} \right)^2 \right] > 26k + 12 - 36 > 0.$$

Если $m = 2$, то неравенство (1) выполнено, так как

$$\left[(6m^2 - 3m - 1)k + 12 - 4 \left(3 - \frac{1}{m} \right)^2 \right] = 17k + 12 - 25 > 0.$$

Если $m = 1$, то неравенство (1) также выполнено, так как в этом случае $k \geq 3$, поэтому

$$\left[(6m^2 - 3m - 1)k + 12 - 4 \left(3 - \frac{1}{m} \right)^2 \right] = 2k + 12 - 16 > 0.$$

3.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $f^{-1}(\mathbb{P}^1) = E \in |aL_1 + bL_2|$, где L_1 и L_2 – естественные образующие группы $\text{Pic } S$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $a \geq b > 0$. Тогда

$$N = \deg f = 2ab. \quad (21)$$

Имеем $K_S = -2L_1 - 2L_2$ и $K_S = f^*(K_{\mathbb{P}^2}) + R = -3E + R$, поэтому

$$R \in |(3a - 2)L_1 + (3b - 2)L_2|.$$

Следовательно, $\deg B = (E, R) = a(3b - 2) + b(3a - 2)$, т.е.

$$d = 3ab - a - b. \quad (22)$$

По формуле присоединения $2(g - 1) = (K_S + R, R)$. Следовательно,

$$g - 1 = 9(ab - a - b) + 8. \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что

$$3d + g - 1 = 18ab - 12a - 12b + 8. \quad (24)$$

По лемме 7

$$c = 24ab - 18a - 18b + 12. \quad (25)$$

Подставим (21), (24) и (25) в (6). Имеем

$$\begin{aligned} & 2ab[12ab - 6a - 6b + 4] - 4(18ab - 12a - 12b + 8) \\ &= 4ab \left[3a(b - 1) + 3b(a - 1) + \frac{12}{b} + \frac{12}{a} - 16 - \frac{8}{ab} \right] > 0. \end{aligned}$$

Если $a \geq b \geq 2$, то неравенство (1) выполнено, так как

$$\begin{aligned} & 3a(b - 1) + 3b(a - 1) + \frac{12}{b} + \frac{12}{a} - 16 - \frac{8}{ab} \\ & \geq 3a + 6(a - 1) + \frac{8}{a} + \frac{12}{b} - 16 = 9a + \frac{8}{a} + \frac{12}{b} - 22 > 0. \end{aligned}$$

Если $a > b = 1$, то неравенство (1) также выполнено, так как

$$\begin{aligned} & 3a(b - 1) + 3b(a - 1) + \frac{12}{b} + \frac{12}{a} - 16 - \frac{8}{ab} \\ &= 3(a - 1) + 12 + \frac{4}{a} - 16 = 3a + \frac{4}{a} - 7 > 0. \end{aligned}$$

Если $a = b = 1$, то f является двулиственным накрытием плоскости $\mathbb{P}^2$, разветвленным вдоль гладкой коники.

3.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6–8. Пусть

$$\deg f = N = E^2 = 2k \quad (26)$$

(E^2 – четное число, так как $2K_S$ тривиален). Имеем $K_S = f^*(K_{\mathbb{P}^2}) + R = -3E + R$, поэтому $R \equiv 3E$. Следовательно, $\deg B = 6k$, т.е.

$$d = 3k. \quad (27)$$

По формуле присоединения $2(g - 1) = R^2$. Следовательно,

$$g - 1 = 9k. \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует, что

$$3d + g - 1 = 18k. \quad (29)$$

По лемме 8

$$c = 24k - 12p_a. \quad (30)$$

Подставим (26), (29) и (30) в (6). Имеем

$$2k[12k + 12p_a] - 72k = 24k[k + p_a - 3] > 0,$$

и $k \geq 2$, так как $N > 2$. Если S – КЗ-поверхность, то неравенство (1) выполнено, так как $p_a = 2$.

Если S – поверхность Энриквеса, то $p_a = 1$, и неравенство (1) также выполнено, за исключением, возможно, случая $k = 2$. Для абелевой поверхности ($p_a = 0$) неравенство (1) выполнено, за исключением, возможно, случаев $k = 2$ и $k = 3$.

Для абелевой поверхности случай $k = 2$ невозможен, так как такая кривая B не может существовать. Действительно, в этом случае из (27), (28) и (30) следует, что $\deg B = 12$, $g = 19$, $c = 48$. Тогда

$$n = \frac{1}{2}(\deg B - 1)(\deg B - 2) - g - c = 55 - 19 - 48 < 0,$$

что невозможно.

Если S – поверхность Энриквеса, то в исключительном случае мы имеем $\deg f = 4$. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi: \pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B) \rightarrow \mathfrak{S}_4$, соответствующий морфизму f . Из (27), (28) и (30) следует, что $\deg B = 12$, $g = 19$ и $c = 36$, поэтому $n = 0$. Следовательно, по предложению 1 эпиморфизм $\varphi': \pi_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3$, являющийся композицией φ и естественного эпиморфизма $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_4/K_4$, где K_4 – четверная группа Клейна, соответствует общему морфизму $f': S' \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени 3 с той же самой дискриминантной кривой B .

Утверждение о степени общих морфизмов в исключительном случае следует из леммы 5.

3.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Пусть $S = X(m_1, \dots, m_k) \subset \mathbb{P}^{k+2}$ – полное пересечение мультистепени $(m_1, \dots, m_k)$, $m_i > 1$. Тогда для общей проекции f на $\mathbb{P}^2$

$$\deg f = N = \prod_{i=1}^k m_i. \quad (31)$$

По формуле присоединения имеем $K_S = (m_1 + \dots + m_k - k - 3)E$. Так как $K_S = f^*(K_{\mathbb{P}^2}) + R = -3E + R$, то $R = (m_1 + \dots + m_k - k)E$. Следовательно, $\deg B = (m_1 + \dots + m_k - k)E^2$, т.е.

$$d = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right) \prod_{i=1}^k m_i. \quad (32)$$

По формуле присоединения $2(g - 1) = R^2 + (R, K_S)$. Следовательно,

$$g - 1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right) \left(2 \sum_{i=1}^k (m_i - 1) - 3 \right) \prod_{i=1}^k m_i. \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует, что

$$3d + g - 1 = \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right)^2 \prod_{i=1}^k m_i. \quad (34)$$

По лемме 7

$$\begin{aligned} c &= 3N + 2(g - 1) - e(S) \\ &= 3 \prod_{i=1}^k m_i + \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right) \left(2 \sum_{i=1}^k (m_i - 1) - 3 \right) \prod_{i=1}^k m_i - e(S). \end{aligned} \quad (35)$$

Подставим (31), (34) и (35) в (6). Имеем

$$\prod_{i=1}^k m_i \left[3 \prod_{i=1}^k m_i \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right) + e(S) - 4 \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right)^2 \right] > 0.$$

Если $k \geq 2$, то

$$\begin{aligned} &\left[3 \prod_{i=1}^k m_i \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right) + e(S) - 4 \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right)^2 \right] \\ &> \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right) \left[3 \prod_{i=1}^k m_i - 4 \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right) \right] > 0 \end{aligned}$$

и, очевидно, последнее неравенство является верным.

Если $k = 1$, то $e(S) = m_1^3 - 4m_1^2 + 6m_1$, поэтому

$$\begin{aligned} &3 \prod_{i=1}^k m_i \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right) + e(S) - 4 \left(\sum_{i=1}^k (m_i - 1) \right)^2 \\ &= 3m_1(m_1 - 1) + m_1^3 - 4m_1^2 + 6m_1 - 4(m_1 - 1)^2 \\ &= m_1^3 - 5m_1^2 + 11m_1 - 4 \\ &= (m_1 - 2)^3 + (m_1 - 2)^2 + 3(m_1 - 2) + 6 \geq 6 > 0 \end{aligned}$$

для $m \geq 2$, т.е. неравенство (1) также выполнено в случае $k = 1$.

3.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Пусть $B^* \subset \mathbb{P}^{2*}$ – нодальная кривая рода g , $\deg B^* = \delta$ и B – двойственная кривая кривой B^* . Тогда [6] B – дискриминантная кривая некоторого общего морфизма f степени δ . Действительно, пусть S – нормализация поверхности

$$X = \left\{ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*} \mid \sum_i x_i y_i = 0, (y_1, y_2, y_3) \in B^* \right\}$$

и f индуцирован проекцией $\text{pr}_1: \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*} \rightarrow \mathbb{P}^2$. Ясно, что $(x_1, x_2, x_3) \notin B$, если прямая $\sum_i x_i y_i = 0$ не касается B^* , в этом случае $f^{-1}((x_1, x_2, x_3))$ имеет точно δ точек и

$$N = \deg f = \delta, \quad (36)$$

поэтому B – кривая ветвления морфизма f , и ясно, что f – общий морфизм.

Из формул Плюккера следует, что

$$d = \delta + (g - 1), \quad (37)$$

$$c = 3\delta + 6(g - 1). \quad (38)$$

Подставим (36)–(38) в неравенство (1). Имеем

$$\delta > \frac{4(3\delta + 4(g - 1))}{3\delta + 2(g - 1)} = 8 - \frac{12\delta}{3\delta + 2(g - 1)}.$$

Следовательно, неравенство (1) выполнено для $\delta \geq 8$.

Рассмотрим случай $\delta \leq 7$. При $\delta = 7$ неравенство (1) не выполняется, если

$$\frac{12\delta}{3\delta + 2(g - 1)} \leq 1 \implies 9\delta \leq 2(g - 1) \implies g \geq 33.$$

С другой стороны,

$$g \leq \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} < 33.$$

Следовательно, в случае $\delta = 7$ неравенство (1) является верным.

При $\delta = 6$ неравенство (1) не выполняется, если

$$\frac{12\delta}{3\delta + 2(g - 1)} \leq 2 \implies 3\delta \leq 2(g - 1) \implies g \geq 10.$$

С другой стороны,

$$g \leq \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Следовательно, в случае $\delta = 6$ неравенство (1) не является верным, только если $\nu = 0$, т.е., возможно, существуют два неэквивалентных общих морфизма только в случае, когда B имеет следующие инварианты: $\deg B = 30$, $g = 10$, $c = 72$,

$n = 324$. Для такой B , если существует другой (неэквивалентный морфизму f) общий морфизм f_1 степени $\deg f_1 = N_1$, имеем

$$N_1 \leq \frac{4(3d + (g - 1))}{6d + 2(g - 1) - c} = \frac{4(3 \cdot 15 + (10 - 1))}{6 \cdot 15 + 2(10 - 1) - 72} = 6.$$

При $\delta = 5$ неравенство (1) не выполняется, если

$$\frac{12\delta}{3\delta + 2(g - 1)} \leq 3 \implies \delta \leq 2(g - 1) \implies g \geq 4.$$

С другой стороны,

$$g \leq \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Следовательно, в случае $\delta = 5$ неравенство (1) не выполняется, если $\nu = 0$, или $\nu = 1$, или $\nu = 2$, т.е., возможно, существуют два неэквивалентных общих морфизма только в следующих трех случаях:

- 0) $\deg B = 20$, $g = 6$, $c = 45$;
- 1) $\deg B = 18$, $g = 5$, $c = 39$;
- 2) $\deg B = 16$, $g = 4$, $c = 33$.

Во всех случаях 0) – 2), если существуют два неэквивалентных общих морфизма f и f_1 с одной и той же дискриминантной кривой B , вычисления, аналогичные описанным выше, приводят к $\deg f_1 = N_1 \leq 5$.

При $\delta = 4$ имеем $g \leq 3$. Если $g = 3$, то $\deg B = 12$ и $c = 24$. Легко проверить, что если существуют два неэквивалентных общих морфизма f и f_1 с такой дискриминантной кривой B , то $\deg f_1 = N_1 \leq 5$. Покажем, что такая кривая не может быть дискриминантной кривой общего морфизма $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени 5. Действительно, в этом случае из лемм 6 – 8 следует, что $K_{S_1}^2 = -7$, $e(S_1) = -5$ и $p_a = -1$. Следовательно, S_1 – линейчатая поверхность над некоторой кривой C рода $g(C) = 2$. Пусть $\bar{S}_1$ – относительно минимальная модель поверхности S_1 . Тогда $e(\bar{S}_1) = -4$, поэтому $e(S_1) \geq -4$. Противоречие.

Случай $g \leq 2$ будет рассмотрен в доказательстве теоремы 11.

3.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11. В следующем пункте мы докажем теорему 12. По этой теореме гипотеза Кизини выполнена для кривой B рода $g \leq 1$, и если в случае $g = 2$ существуют два неэквивалентных общих морфизма f_1 и f_2 , то $d \leq 3$.

Рассмотрим случай $g = 2$ и $d = 3$. В этом случае неравенство, противоположное неравенству (1), принимает следующий вид:

$$N_i \leq \frac{40}{20 - c}.$$

Следовательно, если $N_i \geq 5$, то

$$5 \leq \frac{40}{20 - c} \iff 12 \leq c \leq 19.$$

С другой стороны,

$$c = (2d - 1)(d - 1) - g - n = 8 - n \leq 8.$$

Противоречие.

Кривая B с инвариантами $g = 2$ и $\deg B = 4$ (т.е. $d = 2$) не может быть дискриминантной кривой. Действительно, в этом случае либо $c = 1$, либо $n = 1$, что противоречит следствию 2.

Рассмотрим случай $g = 3$. По теореме 12 если существуют два неэквивалентных общих морфизма f_1 и f_2 таких, что $N_1 \geq 5$, то $d \leq 6$. Из лемм 2 и 3 следует, что

$$\frac{3}{2}d + 1 \leq c \leq 3d + 6, \quad (39)$$

и неравенство, противоположное неравенству (1), принимает следующий вид:

$$5 \leq \frac{12d + 8}{6d + 4 - c} \iff \frac{18d + 12}{5} \leq c \leq 6d + 3. \quad (40)$$

Если $d = 6$, то из (39) следует, что $10 \leq c \leq 24$. С другой стороны, из (40) имеем $c \geq 24$ и, следовательно, $c = 24$ и $n = 28$. Этот случай уже был рассмотрен в доказательстве теоремы 10.

Если $d = 5$, то из (39) следует, что $9 \leq c \leq 21$. С другой стороны, из (40) имеем $c \geq 21$ и, следовательно, $c = 21$ и $n = 12$. Из формул Плюккера следует, что $\delta = 10 \cdot 9 - 2 \cdot 12 - 3 \cdot 21 = 3$. Получаем противоречие с $g = 3$.

Если $d = 4$, то из (39) следует, что $7 \leq c \leq 18$. С другой стороны, из (40) имеем $c \geq 17$ и из следствия 2 получаем, что $c = 18$ и $n = 0$. Из формул Плюккера следует, что $\delta = 8 \cdot 7 - 3 \cdot 21 \leq 0$. Противоречие.

Если $d = 3$, то из (39) следует, что $6 \leq c \leq 15$. С другой стороны, из (40) имеем $c \geq 14$ и из следствия 2 получаем, что $c = 15$, что противоречит неравенству $g = (2d - 1)(d - 1) - c - n \geq 0$.

Если $d = 2$, т.е. $\deg B = 4$, то B – неособая кривая. Следовательно, B не может быть дискриминантной кривой.

3.9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Рассмотрим снова неравенство, противоположное неравенству (1):

$$N_i \leq \frac{4(3d + (g - 1))}{6d + 2(g - 1) - c}.$$

Следовательно, если существуют два неэквивалентных общих морфизма таких, что один из них имеет степень $N_i \geq 5$, то

$$\begin{aligned} \frac{4(3d + (g - 1))}{6d + 2(g - 1) - c} &\geq 5 \\ \implies 5c &\geq 18d + 6(g - 1) \implies \text{(лемма 2)} \\ \implies 15d + 15(g - 1) &\geq 18d + 6(g - 1) \\ \iff 3(g - 1) &\geq d. \end{aligned}$$

§ 4. Канонические дискриминантные кривые

4.1. Назовем кривую B (m -)канонической дискриминантной кривой, если B – дискриминантная кривая общего морфизма $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, заданного линейной системой $\{E\} \subseteq |mK_S|$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $B \subset \mathbb{P}^2$ – каспидальная кривая четной степени $2d$, и пусть $\tilde{\nu}: R \rightarrow B$ – ее нормализация. Положим $\mathfrak{e} = \tilde{\nu}^{-1}(\mathbb{P}^1 \cap B)$, $\mathfrak{c} = 2 \sum' \tilde{\nu}^{-1}(s_i)$ и $\mathfrak{n} = \sum'' \tilde{\nu}^{-1}(s_i)$, где $\sum'$ (соответственно $\sum''$) – суммирование по всем каспам $s_i \in B$ (соответственно по всем нодам).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть B и R – такие кривые, как описано выше. Если B – каноническая дискриминантная кривая, то:

- (i) $\frac{2d}{g-3d-1} := m \in \mathbb{N}$;
 - (ii) $\frac{(g-3d-1)^2}{3d+g-1} := k \in \mathbb{N}$;
 - (iii) $\frac{4d^2}{3d+g-1} := N \in \mathbb{N}$;
 - (iv) $N + \frac{3g-3-9d-c}{12} := p_a \in \mathbb{N}$;
 - (v) существует дивизор $\mathfrak{k} \in \text{Pic } R$ такой, что $K_R = (3m+2)\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{e} = m\mathfrak{k}$.
- Кроме того,

$$\dim H^0(R, \mathcal{O}_R(r\mathfrak{k})) = \frac{r(r-1)}{2} k + p_a$$

для $r = 2, \dots, 3m$.

- (vi) $\mathfrak{c} + \mathfrak{n} = [(2d-6)m-2]\mathfrak{k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (12) и (13) следует, что

$$\begin{cases} 2g-2 = (9m^2+9m+2)k \\ 6d = (9m^2+3m)k \end{cases} \implies g-1-3d = (3m+1)k \implies m = \frac{2d}{g-3d-1}.$$

Поэтому (ii) следует из (12), (iii) следует из (11), а (iv) – из (15).

Элемент $\mathfrak{k} \in \text{Pic } R$ является ограничением канонического класса K_S на R . Так как K_S обилен, то

$$\dim H^1(S, \mathcal{O}_S(-rK_S)) = 0$$

для $r > 0$. Поэтому из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S((r-3m-1)K_S) \longrightarrow \mathcal{O}_S(rK_S) \longrightarrow \mathcal{O}_R(rK_S) \longrightarrow 0$$

следует, что $H^0(S, \mathcal{O}_S(rK_S))$ изоморфно пространству $H^0(R, \mathcal{O}_R(rK_S))$ для $1 \leq r \leq 3m$. По теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(rK_S)) = \frac{r(r-1)}{2} K_S^2 + p_a$$

для $r > 1$.

Чтобы доказать (vi), раздѐм все особые точки кривой B . Обозначим композицию этих $c + n$ σ -процессов через $\sigma: \widetilde{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$, и пусть $L_i = \sigma^{-1}(s_i)$ – исключительные кривые, лежащие над $s_i \in \text{Sing } B$. Тогда $\sigma^*(B) = R + 2 \sum L_i$, где собственный прообраз R кривой B является неособой кривой, так как все особые точки кривой B суть каспы и ноуды. Имеем

$$\begin{aligned} K_{\widetilde{\mathbb{P}^2}} &= -3\sigma^*(\mathbb{P}^1) + \sum L_i, \\ R &= \deg B \sigma^*(\mathbb{P}^1) - 2 \sum L_i. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле присоединения

$$\mathcal{O}_R(K_R) = \mathcal{O}_R(K_{\widetilde{\mathbb{P}^2}} + R) = \mathcal{O}_R\left((\deg B - 3)\sigma^*(\mathbb{P}^1) - \sum L_i\right).$$

Но $\mathcal{O}_R(\mathfrak{c} + \mathfrak{n}) = \mathcal{O}_R(\sum L_i)$. Следовательно,

$$\mathcal{O}_R(\mathfrak{c} + \mathfrak{n}) = \mathcal{O}_R(((2d - 6)m - 2)\mathfrak{k}),$$

так как $\mathcal{O}_R(\sigma^*(\mathbb{P}^1)) = \mathcal{O}_R(\mathfrak{e}) = \mathcal{O}_R(m\mathfrak{k})$ и $\mathcal{O}_R(K_R) = \mathcal{O}_R((3m + 2)\mathfrak{k})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть B удовлетворяет условиям (i)–(vi) предложения 5. Если B – дискриминантная кривая общего морфизма $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени $\deg f = N$, то S является поверхностью общего типа с обильным каноническим классом, а f задается трехмерной линейной подсистемой в $|mK_S + \alpha|$, где $\alpha \in \text{Pic } S$ – элемент второго порядка. Более того, если m – четное число, то $\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f задан линейной системой $|E|$. Имеем

$$E^2 = N = \frac{4d^2}{3d + g - 1},$$

$R^2 = 3d + g - 1$ и $(E, R) = 2d$. Тогда

$$\begin{vmatrix} E^2 & (E, R) \\ (R, E) & R^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4d^2}{3d + g - 1} & 2d \\ 2d & 3d + g - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, по теореме Ходжа об индексе

$$R \equiv \frac{3d + g - 1}{2d} E \equiv \frac{3m + 1}{m} E.$$

Так как $K_S = -3E + R$, то

$$E \equiv mK_S, \quad R \equiv (3m + 1)K_S,$$

и если $E = mK_S + \alpha$, где $\alpha \equiv 0$, и $\mathcal{O}_R(K_S) = \mathcal{O}_R(\mathfrak{k} + \beta)$, где $\deg \beta = 0$, то

$$\mathcal{O}_R(E) = \mathcal{O}_R(m\beta + \alpha + m\mathfrak{k}) = \mathcal{O}_R(m\mathfrak{k}),$$

$$\mathcal{O}_R(R) = \mathcal{O}_R(K_S + 3E) = \mathcal{O}_R((3m + 1)\beta + 3\alpha + (3m + 1)\mathfrak{k}).$$

Следовательно, $\mathcal{O}_R(K_R) = \mathcal{O}_R((3m + 2)\beta + 3\alpha + (3m + 2)\mathfrak{k})$. Поэтому

$$\mathcal{O}_R(m\beta) = \mathcal{O}_R(-\alpha), \quad \mathcal{O}_R((3m + 2)\beta) = \mathcal{O}_R(-3\alpha).$$

Следовательно, $2\beta = 0$ и $\mathcal{O}_R(2\alpha) = \mathcal{O}_R$, и если m – четное число, то $\mathcal{O}_R(\alpha) = \mathcal{O}_R$.

Предложение 6 будет доказано, если мы докажем следующую лемму.

ЛЕММА 11 (см. дополнение к гл. V в [29]). Пусть S – гладкая проективная поверхность и $i: R \hookrightarrow S$ – гладкая неприводимая кривая. Если $\mathcal{O}_S(R)$ обилен, то $i^*: \text{Pic}^0 S \rightarrow \text{Pic} R$ является вложением, где $\text{Pic}^0 S \subset \text{Pic} S$ – подгруппа численно эквивалентных нулю классов дивизоров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 = H^1(S, \mathcal{O}_S(-R)) & & \text{Pic}^0 S & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & H^1(S, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(S, \mathcal{O}_S) & \longrightarrow & H^1(S, \mathcal{O}_S^*) & \longrightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow j^* & & \downarrow i^* & \\
 0 \longrightarrow & H^1(R, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(R, \mathcal{O}_R) & \longrightarrow & H^1(R, \mathcal{O}_R^*) & \longrightarrow H^2(R, \mathbb{Z}) \longrightarrow
 \end{array}$$

с точными строками морфизм j^* является вложением. Следовательно, если для $\alpha \in \text{Pic}^0 S$ образ $i^*(\alpha) = 0$, то $r\alpha = 0$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$, так как $\text{Tors } H^2(S, \mathbb{Z})$ является конечной абелевой группой и $H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(R, \mathbb{Z})$ является вложением. Элемент $\alpha \in \text{Pic} S$ имеет конечный порядок r и определяет неразветвленное абелево накрытие $\varphi: S_r \rightarrow S$ степени $\deg \varphi = r$. Если $\alpha \neq 0$ и $i^*(\alpha) = 0$, то $\varphi^{-1}(R)$ является несвязным объединением r неприводимых кривых, что противоречит обильности дивизора R .

4.2. В обозначениях п. 4.1 рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\mu: \text{Sym}^2 H^0(R, \mathcal{O}_R(\mathfrak{e})) \longrightarrow H^0(R, \mathcal{O}_R(2\mathfrak{e})).$$

Ядро $\ker \mu$ порождает однородный идеал I в координатном кольце

$$\mathfrak{R} = \bigoplus \text{Sym}^r H^0(R, \mathcal{O}_R(\mathfrak{e}))$$

однородных функций на проективном пространстве $\mathbb{P} = \mathbb{P}H^0(R, \mathcal{O}_R(\mathfrak{e}))$. Положим $S_I = \text{Proj } \mathfrak{R}/I$. Нормализация $\tilde{\nu}: R \rightarrow B$ определяет трехмерное подпространство

$$L = \tilde{\nu}^*(H^0(B, \mathcal{O}_B(\mathbb{P}^1 \cap B))) \subseteq H^0(R, \mathcal{O}_R(\mathfrak{e})).$$

Подпространство L задает проекцию $\text{pr}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}^2$ с базисным множеством $\mathbb{P}L \subset \mathbb{P}$. Пусть $f_I: S_I \rightarrow \mathbb{P}^2$ – ограничение pr на S_I .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть B удовлетворяет условиям (i)–(vi) предложения 5. Предположим, что $t \geq 21$ четно. Кривая B является t -канонической дискриминантной кривой тогда и только тогда, когда S_I – неособая поверхность степени $\deg S_I = N$ и f_I является общим морфизмом с дискриминантной кривой B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – очень обильный дивизор на S и D – численно эффективный дивизор. Из [10] следует, что если вложение S в $\mathbb{P}$ задано линейной системой $|K_S + 4A + D|$, то однородный идеал $I(S)$ порождается квадратиками.

Согласно [3] $A = 5K_S$ является очень обильным дивизором (мы предполагаем, что K_S обилён). Следовательно, если S вложено с помощью $|mK_S|$, $m \geq 21$, то $I(S)$ порождается квадратиками. С другой стороны, $R \in |(3m+1)K_S|$ и $R \subset S \subset \mathbb{P}$ вложена с помощью $|m\mathfrak{k}|$. Как уже было упомянуто в доказательстве предложения 5, морфизм ограничения

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(rmK_S)) \longrightarrow H^0(R, \mathcal{O}_R(rmK_S)) = H^0(R, \mathcal{O}_R(r\mathfrak{k}))$$

является изоморфизмом для $r = 1, 2$. Следовательно, множество квадрик, содержащих S , совпадает с множеством квадрик, содержащих R , и предложение 7 следует из предложений 5 и 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предложение 7 выполнено также и для нечетных $m \geq 21$, если ввиду предложения 6 мы слегка изменим определение m -канонической дискриминантной кривой. Более того, предложение 7 есть частный случай более общего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7'. Пусть B удовлетворяет условиям (i)–(iv) предложения 5. Предположим, что $m \geq 21$. Кривая B есть дискриминантная кривая морфизма, заданного трехмерной системой $|L|$, где L численно эквивалентен m -у каноническому классу тогда и только тогда, когда S_I – неособая поверхность степени $\deg S_I = N$ и f_I – общий морфизм с дискриминантной кривой B .

§ 5. О парах Зариского

5.1. Множество плоских кривых степени $2d$ естественным образом параметризовано точками проективного пространства $\mathbb{P}^{d(2d+3)}$. Подмножество плоских неприводимых касpidальных кривых степени $2d$ и рода g с s каспами и с некоторым числом (однозначно определяемым этими данными) ноудов соответствует квази-проективному подмногообразию $\mathcal{M}(2d, g, c) \subset \mathbb{P}^{d(2d+3)}$ [27]. Можно показать, что если две неособые точки одной и той же неприводимой компоненты многообразия $\mathcal{M}_{\text{red}}(2d, g, c)$ соответствуют кривым B_1 и B_2 , то пары $(\mathbb{P}^2, B_1)$ и $(\mathbb{P}^2, B_2)$ диффеоморфны. В частности, в этом случае фундаментальные группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_1)$ и $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_2)$ изоморфны.

Следующее предложение является простым следствием предложения 1 и локальных исследований в пп. 1.2 и 1.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $(\mathbb{P}^2, B_1)$ и $(\mathbb{P}^2, B_2)$ – две гомеоморфные пары и $\psi: (\mathbb{P}^2, B_1) \rightarrow (\mathbb{P}^2, B_2)$ – гомеоморфизм между ними. Если B_1 – дискриминантная кривая некоторого общего морфизма (S_1, f_1) , то B_2 также является дискриминантной кривой некоторого общего морфизма (S_2, f_2) . Более того, если общий морфизм (S_1, f_1) единствен для B_1 , то морфизм (S_2, f_2) является единственным общим морфизмом с дискриминантной кривой B_2 ,

кроме того, S_1 и S_2 гомеоморфны и, более того, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\Psi} & S_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

в которой:

- (i) Ψ является гомеоморфизмом;
- (ii) $\Psi(R_1) = R_2$, где R_i – кривая ветвления морфизма f_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомеоморфизм пар $\psi: (\mathbb{P}^2, B_1) \rightarrow (\mathbb{P}^2, B_2)$ индуцирует изоморфизм $\psi^*: \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_1)$ фундаментальных групп. Согласно предположению 1 множество неэквивалентных общих морфизмов степени N с дискриминантной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$ взаимно однозначно множеству эпиморфизмов из $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ в симметрическую группу Σ_N , удовлетворяющих некоторым условиям (подробности см. в п. 1.2). Так как для $B_1 \subset \mathbb{P}^2$ выполнена гипотеза Кизини, то для $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_1)$ существует единственный такой эпиморфизм, и он совпадает с индуцированным f_1 эпиморфизмом $f_{1*}: \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_1) \rightarrow \Sigma_N$, где $N = \deg f_1$. Следовательно, для B_2 также существует, и при том единственный, такой эпиморфизм, и он должен совпадать с $f_{1*} \circ \psi^* = f_{2*}: \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_2) \rightarrow \Sigma_N$. Отсюда следует, что гомеоморфизм $\psi: (\mathbb{P}^2, B_1) \rightarrow (\mathbb{P}^2, B_2)$ можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S_1 \setminus f_1^{-1}(B_1) & \xrightarrow{\Psi_0} & S_2 \setminus f_2^{-1}(B_2) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ \mathbb{P}^2 \setminus B_1 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^2 \setminus B_2 \end{array}$$

В [16] изложен метод восстановления поверхности S и конечного морфизма $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, разветвленного вдоль $B \subset \mathbb{P}^2$, по гомоморфизму $f_*: \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B) \rightarrow \Sigma_N$, основанный на представлении S в виде N экземпляров $\mathbb{P}^2$ со “стандартными разрезами”, склеенных вдоль этих разрезов (при этом мы должны воспользоваться содержащимся в [15] геометрическим описанием конечного копредставления группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ в терминах “теней” и “экранов”). Применяя этот метод, легко видеть, что гомеоморфизм Ψ_0 однозначно продолжается до гомеоморфизма Ψ с требуемым свойством. Предложение доказано.

5.2. Обратно, для поверхности $S \subset \mathbb{P}^r$ проекция $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ определяется точкой Грассманиана $\text{Gr}_{r+1, r-2}$ (базисным множеством проекции). Хорошо известно, что множество общих проекций находится во взаимно однозначном соответствии с некоторым открытым по Зарискому подмножеством U_S в $\text{Gr}_{r+1, r-2}$. Непрерывная вариация точки в U_S задает непрерывное семейство общих проекций поверхности S , кривые ветвления которых принадлежат одному и тому же непрерывному семейству плоских каспидальных кривых. Следовательно, дискриминантные кривые двух общих проекций поверхности $S \subset \mathbb{P}^r$ принадлежат одной и той же неприводимой компоненте пространства модулей $\mathcal{M}(2d, g, c)$.

Более того, если две поверхности S_1 и S_2 общего типа с одинаковыми $K_S^2 = k$ и $p_a = p$ вложены с помощью m -го канонического класса в одно и то же проективное пространство $\mathbb{P}^r$ и принадлежат одной и той же неприводимой компоненте грубого пространства модулей $\mathcal{M}_S(k, p)$ поверхностей с заданными инвариантами [12], то существуют общие проекции f_1 поверхности S_1 и f_2 поверхности S_2 , принадлежащие одному и тому же непрерывному семейству общих проекций. Следовательно, дискриминантные кривые двух общих проекций поверхностей S_1 и S_2 , принадлежащих одной и той же неприводимой компоненте пространства модулей $\mathcal{M}_S(k, p)$, принадлежат одной и той же неприводимой компоненте пространства $\mathcal{M}(2d, g, c)$ (см. [27]). По теореме 3 и предложениям 5 и 6 для поверхности общего типа с обильным каноническим классом тройка целых чисел (m, k, p) однозначно определяется инвариантами (d, g, c) m -канонической дискриминантной кривой; также верно и обратное утверждение. Следовательно, по предложению 1 и теореме 3

$$i(2d(k, p), g(k, p), c(k, p)) \geq i(k, p),$$

где $i(2d, g, c)$ (соответственно $i(k, p)$) – число неприводимых компонент пространства $\mathcal{M}(2d, g, c)$ (соответственно $\mathcal{M}_S(k, p)$).

В [4] Ф. Катанезе показал, что для каждого натурального h существуют такие k и p , что $\mathcal{M}_S(k, p)$ имеет по крайней мере h неприводимых компонент (подробнее об этом см. в следующем параграфе). Следовательно, для каждого натурального h существуют такие d, g, c , что $\mathcal{M}(2d, g, c)$ имеет по крайней мере h неприводимых компонент. Отметим, что оценки снизу для $i(k, p)$, полученные в [4] и [18], также имеют место и для $i(2d, g, c)$, где d, g и c – инварианты соответствующих m -х канонических дискриминантных кривых.

5.3. Недавно было опубликовано несколько статей (см., например, [1], [22], [25], [26]), посвященных парам Зариского. По определению Артал-Бартоло две плоские кривые $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ называются *парой Зариского*, если они одной и той же степени и имеют гомеоморфные трубчатые окрестности в $\mathbb{P}^2$, но пары $(\mathbb{P}^2, C_1)$ и $(\mathbb{P}^2, C_2)$ не гомеоморфны.

Первый пример такой пары был получен О. Зариским, и это – как раз две кривые степени 6 с шестью каспами, упомянутые во введении.

В силу теоремы 3, применяя предложение 8, легко доказать существование большого числа различных пар Зариского. Для этого мы можем найти пары негомеоморфных минимальных поверхностей общего типа с обильным каноническим классом и одинаковыми K_S^2 и p_a и рассмотреть соответствующие им m -канонические дискриминантные кривые. Например, имеем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Для каждого целого $m \geq 5$ существует по крайней мере одна пятерка Зариского (даже не пара) плоских каспидальных кривых $B_{m,i}$, $i = 1, \dots, 5$, степени $m(3m + 1)$ и рода $g = (1/2)(3m + 1)(3m + 2) + 1$ с $c = 3(4m^2 + 3m - 3)$ каспами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует (см. [13], [24], [2]) пять негомеоморфных поверхностей S_i ($i = 1, \dots, 5$) общего типа с $p_g = 0$, $p_a = 1$ и $K_{S_i}^2 = 1$. Они различаются с помощью $\text{Tors } H_1(S_i, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$. Согласно [5] для каждого i , $1 \leq i \leq 5$, существуют поверхности S_i с обильным каноническим классом, имеющие данные

инварианты. Пусть $\phi_{m,i}: S_i \hookrightarrow \mathbb{P}^{m(m-1)/2}$ – m -каноническое вложение, $m \geq 5$ (см. [3]), и $f_{m,i}: S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общая проекция с дискриминантной кривой $B_{m,i}$. Применяя вычисления, проведенные в доказательстве теоремы 3, получаем, что кривая $B_{m,i}$ имеет

$$\deg B_{m,i} = m(3m+1), \quad g = \frac{1}{2}(3m+1)(3m+2)+1, \quad c = 3(4m^2+3m-3).$$

По предложению 8, так как S_i и S_j не гомеоморфны для $i \neq j$, пары $(\mathbb{P}^2, B_{m,i})$ и $(\mathbb{P}^2, B_{m,j})$ также не гомеоморфны.

Простейший путь построить две негомеоморфные поверхности S_1 и S_2 общего типа, для которых общие морфизмы, заданные линейными системами m -канонического класса, приводят к паре Зариского B_1 и B_2 , – это построить поверхности с разными иррегулярностями q_1 и q_2 , где $q_i = \dim H^1(S_i, \mathcal{O}_{S_i})$, и с одинаковыми K_S^2 и p_a . Например, пусть A – абелева поверхность и $C \subset A$ – такая неособая кривая, что класс кривой C в $\text{Pic } A$ делится на 2. Рассмотрим двулистное накрытие $\varphi: S \rightarrow A$, разветвленное вдоль C . Легко проверить, что S – поверхность общего типа с обильным каноническим классом и иррегулярностью $q \geq 2$. Если $C^2 = 8p$, то простейшие вычисления дают $K_S^2 = 4p$ и $p_a = p$. С другой стороны, У. Перссон доказал в [23], что для любых натуральных x, y , удовлетворяющих неравенствам

$$2x - 6 \leq y \leq 8(x - cx^{\frac{2}{3}}), \quad (41)$$

где $c = 9/\sqrt[3]{12}$, существует односвязная минимальная поверхность общего типа с $K^2 = y$ и $p_a = x$. Легко видеть, что $x = p$ и $y = 4p$ удовлетворяют (41), если $p \geq 486$.

§ 6. Доказательство теоремы 13

6.1. В [4] и [5] Катанезе исследовал простое бидвойное накрытие $\varphi: S \rightarrow Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ битипа $(a, b), (m, n)$, т.е. φ – конечное $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ накрытие Галуа квадрики $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, разветвленное вдоль двух общих кривых соответственно бистепеней $(2a, 2b)$ и $(2m, 2n)$. Пусть a, b, m, n – целые числа, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} a > 2n, \quad n \geq 3, \quad m > 2b, \quad b \geq 3, \\ a \equiv n \pmod{2}, \quad b \equiv m \pmod{2}. \end{aligned}$$

Положим

$$u = (n + a - 2), \quad v = (m + b - 2), \quad w = (a - n), \quad z = (m - b). \quad (42)$$

Согласно [4] для бидвойного накрытия $\varphi: S \rightarrow Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ битипа $(a, b), (m, n)$ поверхность S является односвязной поверхностью общего типа с каноническим классом

$$K_S = \varphi^*(\mathcal{O}_Q(u, v)) \quad (43)$$

и

$$K_S^2 = 8uv, \quad \chi = \chi(\mathcal{O}_S) = \frac{3}{2}uv + (u+v) + 2 - \frac{1}{2}wz, \quad (44)$$

где χ – Эйлера характеристика структурного пучка $\mathcal{O}_S$ на S .

Для u, v, w, z , удовлетворяющим (42), канонический класс K_S является 2-делимым в $H^2(S, \mathbb{Z})$, а индекс

$$r = r(S) = \max \left\{ s \in \mathbb{N} \mid \left(\frac{1}{s} \right) K_S \in H^2(S, \mathbb{Z}) \right\}$$

равен наибольшему общему делителю (u, v) .

Так как K_S является 2-делимым, то форма пересечения на $H_2(S, \mathbb{Z})$ является четной. Кроме того, по теореме Фридмана [11] два таких бидвойных накрытия S_1 и S_2 квадрики Q гомеоморфны тогда и только тогда, когда $K_{S_1}^2 = K_{S_2}^2$ и $\chi(\mathcal{O}_{S_1}) = \chi(\mathcal{O}_{S_2})$. В [4] и [5] было доказано, что для каждого целого k существует по крайней мере один набор $(S_1, \dots, S_k)$, состоящий из k бидвойных накрытий квадрики Q битипов (a_i, b_i) , (m_i, n_i) , удовлетворяющий описанным выше условиям и такой, что:

- (i) S_i и S_j гомеоморфны друг другу при $1 \leq i, j \leq k$;
- (ii) $r(S_i) \neq r(S_j)$ при $i \neq j$ (и, следовательно, S_i и S_j не диффеоморфны).

Мы будем называть наборы поверхностей общего типа, удовлетворяющие условиям (i) и (ii), *наборами Катанезе*.

ПРИМЕР. Два бидвойных накрытия S_1 битипа $(16, 22)$, $(52, 4)$ и S_2 битипа $(28, 10)$, $(28, 10)$ являются парой Катанезе. Из формул (1)–(3) следует, что эти поверхности имеют

$$\begin{aligned} K_S^2 = K_{S_i}^2 = 10368, \quad \chi = \chi(\mathcal{O}_{S_i}) = 1456, \\ r(S_1) = 18, \quad r(S_2) = 36. \end{aligned}$$

Рассмотрим m -каноническое вложение $\Phi_{|mK_{S_i}|}: S_i \rightarrow \mathbb{P}^r$, $m \geq 5$ (см. [3]), и пусть $f_{m,i}: S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ – ограничение на $\Phi_{|mK_{S_i}|}(S_i)$ общей проекции $\text{pr}: \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^2$. Обозначим через $R_{m,i} \subset S_i$ кривую ветвления общей проекции $f_{m,i}$ и через $B_{m,i} \subset \mathbb{P}^2$ дискриминантную кривую морфизма $f_{m,i}$.

Пусть общий морфизм $f_m: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ задан трехмерной линейной подсистемой m -канонического класса на S . Тогда из формулы присоединения

$$K_S = f^*(K_{\mathbb{P}^2}) + R_m$$

следует, что кривая ветвления $R_m \subset S$ морфизма f_m принадлежит $|(3m+1)K_S|$. Следовательно, если мы имеем два общих морфизма $f_{i,m}: S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$, заданных трехмерными линейными подсистемами из m -канонических классов на S_i и таких, что соответствующие пары $(\mathbb{P}^2, B_{1,m})$ и $(\mathbb{P}^2, B_{2,m})$ гомеоморфны, то по предложению 8 (согласно теореме 3 гипотеза Кизини выполнена для B_1) существует гомеоморфизм $\Psi: S_1 \rightarrow S_2$ такой, что $\Psi(R_{1,m}) = R_{2,m}$. В этом случае должно выполняться равенство $r(S_1) = r(S_2)$, так как Ψ индуцирует изоморфизм $\Psi_*: H_2(S_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(S_2, \mathbb{Z})$, для которого выполнено условие $\Psi_*(R_{1,m}) = R_{2,m}$. Но это невозможно, так как по определению $r(S_1) \neq r(S_2)$ для пары Катанезе S_1, S_2 . Теорема 13 доказана.

ПРИМЕР (продолжение). Применяя теорему 1 для m -канонических дискриминантных кривых общих морфизмов поверхностей S_1 и S_2 в рассмотренном выше примере, мы получим пары Зариского $(B_{1,m}, B_{2,m})$, $m \geq 5$, плоских каспидальных кривых. Применяя вычисления из доказательства теоремы 3, легко видеть, что m -канонические дискриминантные кривые $B_{i,m}$ имеют степень $\deg B_{i,m} = 10368m(3m + 1)$, геометрический род $g = 5184(3m + 2)(3m + 1) + 1$ и $c = 10368(12m^2 + 9m) - 13632$ обыкновенных каспов.

Список литературы

1. Artal-Bartolo E. Sur les couples de Zariski // J. Alg. Geom. 1994. V. 3. № 2. P. 223–247.
2. Barlow R. Some new surfaces with $p_g = 0$ // Duke Math. J. 1984. V. 51. № 4. P. 889–904.
3. Bombieri E. Canonical models of surfaces of general type // Publ. Math. IHES. 1973. V. 42. P. 171–219.
4. Catanese F. On the moduli space of surfaces of general type // J. Diff. Geom. 1984. V. 19. P. 483–515.
5. Catanese F. Connected components of moduli space // J. Diff. Geom. 1986. V. 24. P. 395–399.
6. Catanese F. On a Problem of Chisini // Duke Math. J. 1986. V. 53. № 1. P. 33–42.
7. Catanese F., Le Brun C. On the scalar curvature of Einstein manifolds // Math. Research Letters. 1997. V. 4. № 6.
8. Catanese F., Ciliberto C., Menedez Lopes M. On the classification of irregular surfaces of general type with nonbirational bicanonical map // Transactions of AMS. 1988. V. 350. № 1.
9. Chisini O. Sulla identita birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione // Rend. Ins. Lombardo. 1944. V. 77. P. 339–356.
10. Ein L., Lazarsfeld R. Syzygies and Koszul cohomology of smooth projective varieties of arbitrary dimension // Invent. Math. 1993. V. 111. P. 51–67.
11. Freedman M. H. The topology of four dimensional manifolds // J. Diff. Geom. 1982. V. 17. P. 357–453.
12. Gieseker D. Global moduli for surfaces of general type // Invent. Math. 1977. V. 43. P. 233–282.
13. Godeaux L. Sur une surface algebrique de genre zero et de bigenre deux // Atti Accad. Naz. Lincei. 1931. V. 14. P. 479–481.
14. Kulikov Vik. S. On the fundamental group of the complement of a hypersurface in $\mathbb{C}^n$ // Springer L.N.M. 1991. V. 1479. P. 122–130.
15. Куликов Вик. С. Фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 3. С. 434–455.
16. Куликов Вик. С. Геометрическая реализация C -групп // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 194–203.
17. Куликов Вик. С. О структуре фундаментальной группы дополнения к алгебраической кривой $\mathbb{C}^2$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 2. С. 469–480.
18. Manetti M. Degeneration of algebraic surfaces and applications to moduli problem: Tesi di perfezionamento. Scuola Normale Superiore. Pisa, 1996.
19. Moishezon B. Stable branch curves and braid monodromies // Springer L.N.M. 1981. V. 862. P. 107–192.
20. Moishezon B., Teicher M. Braid group technique in complex geometry. II: from arrangements of lines and conics to cuspidal curves // Springer L.N.M. 1991. V. 1479. P. 131–180.
21. Nori M. Zariski's conjecture and related problems // Ann. Sci. École Norm. Sup. Ser. 4. 1983. V. 16. P. 305–344.
22. Oka M. Two transforms of plane curves and their fundamental groups // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1996. V. 3. P. 399–443.

- 23. *Persson U.* Chern invariants of surfaces of general type // Compos. Math. 1981. V. 43. № 1. P. 3–58.
- 24. *Reid M.* Surfaces with $p_g = 0$, $K^2 = 1$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1978. V. 25. № 1. P. 75–92.
- 25. *Shimada I.* A note on Zariski pairs // Compos. Math. 1996. V. 104. № 2. P. 125–133.
- 26. *Tokunaga H.* A remark on E. Artal-Bartolo's paper: "On Zariski pairs" // Kodai Math. J. 1996. V. 19. P. 207–217.
- 27. *Wahl J.* Deformations of plane curves with nodes and cusps // Amer. J. Math. 1974. V. 96. P. 529–577.
- 28. *Zariski O.* On the topological discriminant group of a Riemann surface of genus p // Amer. J. Math. 1937. V. 59. P. 335–358.
- 29. *Zariski O.* Algebraic surfaces. Berlin–N.Y.: Springer-Verlag, 1971.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: victor@olya.ips.ras.ru

Поступило в редакцию
26.V.1998
22.IX.1998