

УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов, М. Тайхер

Брэйд-монодромные разложения и диффеоморфные типы

В статье доказывается, что если две плоские каспидальные кривые B_1 и B_2 имеют эквивалентные брэйд-монодромные разложения на множители, то кривые B_1 и B_2 гладко изотопны в $\mathbb{CP}^2$. В качестве следствия получаем, что если дискриминантные кривые (кривые ветвления) B_1 и B_2 общих проекций на $\mathbb{CP}^2$ поверхностей общего типа S_1 и S_2 , вложенных в проективное пространство с помощью кратного канонического класса, имеют эквивалентные брэйд-монодромные разложения на множители, то S_1 и S_2 (рассматриваемые как вещественные четырехмерные многообразия) являются диффеоморфными.

Библиография: 8 наименований

Введение

Пусть $S \subset \mathbb{CP}^r$ – неособая проективная алгебраическая поверхность степени $\deg S = N$. Хорошо известно, что для почти всех проекций $pr: \mathbb{CP}^r \rightarrow \mathbb{CP}^2$ ограничения $f: S \rightarrow \mathbb{CP}^2$ этих проекций на S удовлетворяют следующим условиям:

- i) f является конечным морфизмом степени $\deg f = \deg S$;
- ii) f разветвлен вдоль неприводимой кривой $B \subset \mathbb{CP}^2$, особые точки которой суть лишь обыкновенные каспы и ноуды;
- iii) $f^*(B) = 2R + C$, где кривая R неприводима и неособа, а C приведена;
- iv) морфизм $f|_R: R \rightarrow B$ совпадает с морфизмом нормализации кривой B .

Мы будем называть такой морфизм f *общим морфизмом*, а его кривую ветвления B – *дискриминантной кривой* морфизма f .

Скажем, что два общих морфизма (S_1, f_1) , (S_2, f_2) с одной и той же дискриминантной кривой B являются эквивалентными, если существует изоморфизм $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ \varphi$.

Следующее утверждение известно как гипотеза Кизини (Chisini).

ГИПОТЕЗА КИЗИНИ. Пусть B – дискриминантная кривая общего морфизма $f: S \rightarrow \mathbb{CP}^2$ степени $\deg f \geq 5$. Тогда f однозначно определяется парой $(\mathbb{CP}^2, B)$.

Легко видеть, что аналогичное утверждение для общих морфизмов проективных кривых на $\mathbb{CP}^1$ неверно. С другой стороны, в [3] было показано, что гипотеза Кизини выполнена для дискриминантных кривых почти всех общих морфизмов произвольной проективной поверхности. В частности, если S – произвольная поверхность общего типа с обильным каноническим классом, то гипотеза Кизини выполнена для дискриминантных кривых общих морфизмов $f: S \rightarrow \mathbb{CP}^2$, заданных

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов INTAS-OPEN-97-2072, РФФИ № 99-01-01133, а также поддержана институтом математики Макса Планка (Бонн, Германия), Исследовательским институтом математики им. Эмми Нётер, Университетом Бар-Илан и фондом Минерва.

трехмерной линейной подсистемой из m -канонического класса поверхности S , где $m \in \mathbb{N}$. Дискриминантные кривые таких общих морфизмов мы будем называть *m -каноническими дискриминантными кривыми*.

Пусть B – алгебраическая кривая в $\mathbb{CP}^2$ степени p . Топология вложения $B \subset \mathbb{CP}^2$ определяется *брэйд-монодромией* кривой B , которая описывается разложением “полного оборота” Δ_p^2 в полугруппе B_p^+ группы кос B_p из p нитей ($\Delta_p^2 = (X_1 \cdot \dots \cdot X_{p-1})^p$ в стандартных образующих группы кос). Если B – каспидальная кривая, то это разложение может быть записано в виде

$$\Delta_p^2 = \prod_i Q_i^{-1} X_1^{\rho_i} Q_i, \quad \rho_i \in (1, 2, 3), \quad (1)$$

где X_1 – положительный полуповорот в B_p .

Пусть

$$h = g_1 \cdot \dots \cdot g_r \quad (2)$$

– разложение в B_p^+ . Преобразование, которое меняет местами два соседних множителя в (2) по правилу $g_i \cdot g_{i+1} \mapsto (g_i g_{i+1} g_i^{-1}) \cdot g_i$, либо $g_i \cdot g_{i+1} \mapsto g_{i+1} (g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1})$, называется *заменой Гурвица*.

Для $z \in B_p$ обозначим $h_z = z^{-1} g_1 z \cdot z^{-1} g_2 z \cdot \dots \cdot z^{-1} g_r z$ и скажем, что разложение h_z получено из (2) одновременным сопряжением на z . Два разложения называются *эквивалентными по отношению замен Гурвица и сопряжения*, если одно из них может быть получено из другого в процессе конечного числа замен Гурвица с последующим одновременным сопряжением на некоторый элемент $z \in B_p$. Мы скажем, что два разложения вида (1) принадлежат одному и тому же *типу брэйд-разложения*, если они эквивалентны по отношению замен Гурвица и сопряжения. Основными вопросами в данном направлении являются следующие проблемы.

ПРОБЛЕМА 1. Пусть $B \subset \mathbb{CP}^2$ – каспидальная кривая. Определяет ли однозначно тип брэйд-разложения пары $(\mathbb{CP}^2, B)$ диффеоморфный тип этой пары и обратно?

ПРОБЛЕМА 2. Пусть $\Delta_p^2 = \mathcal{E}_1$ и $\Delta_p^2 = \mathcal{E}_2$ – два брэйд-монодромных разложения на множители. Существует ли конечный алгоритм распознавания: принадлежат или нет эти два брэйд-монодромных разложения одному и тому же типу брэйд-разложения?

Одним из основных результатов данной статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B_1, B_2 \subset \mathbb{CP}^2$ – две каспидальные алгебраические кривые. Предположим, что пары $(\mathbb{CP}^2, B_1)$ и $(\mathbb{CP}^2, B_2)$ имеют один и тот же тип брэйд-разложения. Тогда пары $(\mathbb{CP}^2, B_1)$ и $(\mathbb{CP}^2, B_2)$ диффеоморфны.

Хорошо известно, что существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные, четырехмерные гладкие многообразия, и одной из наиболее важных проблем четырехмерной геометрии является проблема нахождения инвариантов, различающих гладкие структуры на одном и том же топологическом многообразии. Мы надеемся, что в алгебраическом случае тип брэйд-разложения дискриминантной кривой общего морфизма проективной поверхности S на $\mathbb{CP}^2$ может быть использован в качестве такого инварианта гладкой структуры (индуцированной комплексной структурой) на S , рассматриваемой как четырехмерное действительное многообразие. Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ и $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ – два общих морфизма неособых проективных поверхностей и пусть $B_1, B_2 \subset \mathbb{CP}^2$ – дискриминантные кривые этих морфизмов. Предположим, что гипотеза Кизини верна для $(\mathbb{CP}^2, B_1)$. Тогда если пары $(\mathbb{CP}^2, B_1)$ и $(\mathbb{CP}^2, B_2)$ имеют один и тот же тип брэйд-разложения, то S_1 и S_2 диффеоморфны.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть S_1 и S_2 – две поверхности общего типа с обильным каноническим классом и пусть B_1 и B_2 – t -канонические дискриминантные кривые соответственно общих морфизмов $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ и $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$, заданных трехмерными линейными подсистемами из t -канонического класса на S_i , где $t \in \mathbb{N}$. Тогда если пары $(\mathbb{CP}^2, B_1)$ и $(\mathbb{CP}^2, B_2)$ имеют один и тот же тип брэйд-разложения, то S_1 и S_2 диффеоморфны.

Опишем кратко содержание статьи по параграфам. В §§ 1–4 мы напомним определения и некоторые факты, относящиеся к “брэйд-монодромной технике”, разработанной Б. Мойшезоном и вторым автором данной статьи. § 5 посвящен описанию образующих централизатора кратного полуповорота в группе кос. Это описание является ключевым моментом для доказательства теоремы 1. В § 6 мы напомним или докажем некоторые утверждения (возможно хорошо известные) о гладкой изотопии многообразий, которые будут использованы в доказательстве основных результатов. § 7 посвящен доказательству теоремы 1 и в § 8 мы докажем теорему 2.

§ 1. Брэйд-монодромия аффинной кривой

В данной статье мы будем использовать следующие обозначения: B – кривая в $\mathbb{C}^2$ или в $\mathbb{CP}^2$, $p = \deg B$, $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ – проекция на первую координату; $K(x) = \{y \mid (x, y) \in B\}$ ($K(x)$ – проекция на ось y множества $\pi^{-1}(x) \cap B$); $N = \{x \mid \#K(x) < p\}$; $M' = \{x \in B \mid \pi|_B \text{ не этально в точке } x\}$ ($\pi(M') = N$).

Предположим, что $\#(\pi^{-1}(x) \cap M') = 1$ для всех $x \in N$.

Пусть E (соответственно D) – замкнутый диск на оси x (соответственно на оси y) такой, что $M' \subset E \times D$, $N \subset \text{Int}(E)$ и что $\pi|_{(E \times D) \cap B}$ является собственным морфизмом степени p .

Выберем $u \in \partial E$ и положим $K = K(u) = \{q_1, \dots, q_p\}$.

В описанной выше ситуации можно ввести понятие “брэйд-монодромии”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (брэйд-монодромия кривой B относительно $E \times D$, π , u). Каждая петля $\gamma: [0, 1] \rightarrow E \setminus N$ с началом и концом в точке u может быть поднята до системы из p путей в $(E \setminus N) \times D$ с началом в точках $q_1, \dots, q_p$. Проектируя эти пути в D , мы получим p путей в D , определяющих движение p точек $\{q_1(t), \dots, q_p(t)\}$ в D , начинающихся и заканчивающихся в K .

Это движение определяет косу в $B_p[D, K]$ (см. [6, гл. III]). Таким образом, мы получаем отображение $\varphi: \pi_1(E \setminus N, u) \rightarrow B_p[D, K]$. Это отображение, очевидно, является групповым гомоморфизмом и по определению называется брэйд-монодромией кривой B относительно $E \times D$, π , u . Мы иногда будем обозначать φ через φ_u .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (брэйд-монодромия кривой B относительно π , u). Рассматривая полученную выше косу как элемент группы $B_p[\mathbb{C}_u, K]$, мы получаем гомоморфизм $\varphi: \pi_1(E \setminus N, u) \rightarrow B_p[\mathbb{C}_u, K]$, который будем называть брэйд-монодромией кривой B относительно π , u . Гомоморфизм φ мы также иногда будем обозначать через φ_u .

Чтобы привести пример вычисления брэйд-монодромии, мы напомним геометрическую модель группы кос и определение полуповорота.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (*группа кос* $B_p[D, K]$). Пусть D – замкнутый диск в $\mathbb{R}^2$, $K \subset D$, K – конечное множество. Пусть $\mathcal{B}$ – группа всех диффеоморфизмов β диска D таких, что $\beta(K) = K$, $\beta|_{\partial D} = \text{Id}_{\partial D}$. Мы скажем, что элемент β_1 эквивалентен β_2 , если β_1 и β_2 индуцируют один и тот же автоморфизм группы $\pi_1(D \setminus K, u)$. Факторгруппа группы $\mathcal{B}$ по этому отношению эквивалентности называется группой кос $B_p[D, K]$ ($p = \#K$). Элементы группы $B_p[D, K]$ называются косами. Обозначим через $\bar{\beta}$ косу, представленную диффеоморфизмом β .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (*полуповорот* $H(\sigma)$, *заданный путем* σ). Пусть D, K – как и выше, $a, b \in K$, $K_{a,b} = K \setminus \{a, b\}$, и пусть σ – простой (т.е. без самопересечений) путь в $D \setminus \partial D$, соединяющий a с b , такой, что $\sigma \cap K = \{a, b\}$. Выберем некоторую достаточно маленькую окрестность U пути σ , $K_{a,b} \cap U = \emptyset$, а также сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$ ($\mathbb{C}^1$ взято с обычной “комплексной” ориентацией) так, что $\psi(\sigma) = [-1, 1] = \{z \in \mathbb{C}^1 \mid \Re z \in [-1, 1], \Im z = 0\}$ и $\psi(U) = \{z \in \mathbb{C}^1 \mid |z| < 2\}$. Пусть $\alpha(r), r \geq 0$, – гладкая монотонная вещественная функция такая, что $\alpha(r) = 1$ для $r \in [0, \frac{3}{2}]$ и $\alpha(r) = 0$ для $r \geq 2$. Рассмотрим диффеоморфизм $h: \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$, действующий на $z \in \mathbb{C}^1$, $z = re^{i\varphi}$, по правилу $h(z) = re^{i(\varphi + \alpha(r)\pi)}$. Очевидно, что ограничение h на $\{z \in \mathbb{C}^1 \mid |z| \leq \frac{3}{2}\}$ совпадает с поворотом на угол π , а ограничение на $\{z \in \mathbb{C}^1 \mid |z| \geq 2\}$ является тождественным диффеоморфизмом. Диффеоморфизм $H(\sigma) = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$ будем называть полуповоротом.

Полуповорот $H(\sigma)$ определяет *геометрическую косу* $\bar{\sigma}$ (т.е. p непересекающихся путей в $D \times [0, 1]$ с началами в $K \times \{0\}$ и с концами в $K \times \{1\}$, $K = \{q_1, \dots, q_p\}$). Эта коса задается следующими формулами

$$\begin{aligned} (\delta_j(t), t) &= (q_j, t), & \text{если } q_j &\neq a, b; \\ (\delta_j(t), t) &= (\psi^{-1}(e^{\pi i t}), t), & \text{если } q_j &= a; \\ (\delta_j(t), t) &= (\psi^{-1}(-e^{\pi i t}), t), & \text{если } q_j &= b. \end{aligned}$$

Следующее предложение является основным примером брэйд-монодромии, связанным с простой двойной особой точкой алгебраической кривой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ-ПРИМЕР 1.1. Пусть $E = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1\}$, $D = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| \leq R\}$, $R \gg 1$, B – кривая, заданная уравнением $y^2 = x^\nu$, $u = 1$. Ясно, что в этом случае $p = 2$, $N = \{0\}$, $K = \{-1, +1\}$ и $\pi_1(E \setminus N, 1)$ порождается петлей $\Gamma = \partial E$ (с положительной ориентацией). Обозначим $\varphi: \pi_1(E \setminus N, 1) \rightarrow B_2[D, K]$ брэйд-монодрию кривой B относительно $E \times D$, π , u . Тогда $\varphi(\Gamma) = H^\nu$, где H – положительный полуповорот, заданный путем $[-1, 1]$ (“положительная образующая” группы $B_2[D, K]$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем записать $\Gamma = \{e^{2\pi i t}, t \in [0, 1]\}$. Поднимая Γ на B , мы получим два пути:

$$\delta_1(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \nu t/2}), \quad \delta_2(t) = (e^{2\pi i t}, -e^{2\pi i \nu t/2}).$$

Проектируя $\delta_1(t), \delta_2(t)$ на D , мы получим два пути:

$$a_1(t) = e^{\pi i t \cdot \nu}, \quad a_2(t) = -e^{\pi i t \cdot \nu}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Эти пути задают движение точек $\{1, -1\}$ в D . Это движение есть ν -я степень движения $\mathcal{M}$:

$$b_1(t) = e^{\pi i t}, \quad b_2(t) = -e^{\pi i t}, 0 \leq t \leq 1.$$

Коса в $B_2[D, \{1, -1\}]$, индуцированная движением $\mathcal{M}$, совпадает с полуповоротом H , соответствующим пути $[-1, 1] \subset D$. Таким образом, $\varphi(\Gamma) = H^\nu$.

Напомним определение и некоторые основные свойства геометрического свободного базиса фундаментальной группы проколотого диска.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (куст). Пусть $E, N = \{u_1, \dots, u_n\}$, u определены так же, как и выше. Рассмотрим в E упорядоченное множество простых путей $(T_1, \dots, T_n)$, соединяющих точки u_i с точкой u так, что

- 1) $T_i \cap T_j = u$, если $i \neq j$;
- 2) для некоторой окружности $c(u)$ маленького радиуса с центром в u каждое пересечение $T_i \cap c(u)$ состоит из одной точки, скажем w_i , и порядок нумерации в $(w_1, \dots, w_n)$ совпадает с порядком, индуцированным положительной (“против часовой стрелки”) ориентацией на $c(u)$.

Пусть c_j – граница замкнутого диска E_j с центром в точке u_j достаточно малого радиуса. Обозначим $T'_j = T_j \setminus (T_j \cap E_j)$ и $l(T_j) = T'_j \cdot c_j \cdot T_j'^{-1}$ замкнутую петлю (а также соответствующий элемент в $\pi_1(E \setminus N, u)$), в которой окружность c_j обходится в направлении против часовой стрелки.

Мы скажем, что два таких множества путей $(T_1, \dots, T_n)$ и $(\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n)$ являются эквивалентными, если для всех $i = 1, \dots, n$

$$\ell(T_i) = \ell(\tilde{T}_i) \quad \text{в } \pi_1(E \setminus N, u).$$

Класс эквивалентности таких множеств называется кустом в $(E \setminus N, u)$. Куст, представленный множеством $(T_1, \dots, T_n)$, будет обозначаться $\langle T_1, \dots, T_n \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (геометрический базис, g -базис). Пусть E, N, u определены так же, как и ранее. Назовем g -базисом группы $\pi_1(E \setminus N, u)$ упорядоченный свободный базис $(\ell(T_1), \dots, \ell(T_n))$ группы $\pi_1(E \setminus N, u)$, где $\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ является кустом в $E \setminus N$ (см. рис. 1.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через $\wp$ элемент в $\pi_1(E \setminus N, u)$, представленной петлей ∂E (с положительной ориентацией). Существует единственный элемент в $B_n[E, N]$, обозначаемый Δ_n^2 или $\Delta_n^2[E, N]$, такой, что для любого g -базиса $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ группы $\pi_1(E \setminus N, u)$

$$(\Gamma_i) \Delta_n^2 = \wp \Gamma_i \wp^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [6, V.2.1].

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что Δ_n^2 действует на E как полный поворот вокруг всех точек из N .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Элемент Δ_n^2 принадлежит центру группы $B_n[E, N]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [6, V.4.1].

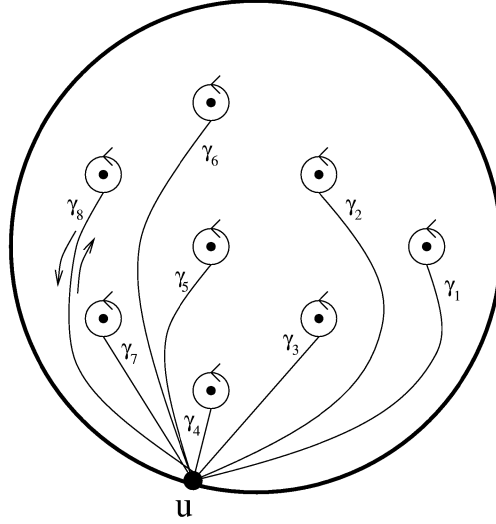


Рис. 1.1

ПРЕДЛОЖЕНИЕ-ПРИМЕР 1.2. Пусть B – объединение p прямых, пересекающихся в одной точке s_0 , $s_0 = (x(s_0), y(s_0))$. Пусть D , E , u , $K = K(u)$ – как и выше, и пусть φ – брэйд-монодромия кривой B относительно $E \times D$, π , u . Ясно, что N состоит из одной точки $x(s_0)$ и $\pi_1(E \setminus N, u)$ порождается петлей $\Gamma = \partial E$. Тогда $\varphi(\Gamma) = \Delta_p^2 = \Delta_p^2[D, K(u)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывно меняя s_0 и p прямых, проходящих через s_0 (а также в силу единственности Δ_p^2), мы можем свести доказательство к случаю $B = \cup L_k$, $L_k = \{(y, x) \in \mathbb{C}^2 \mid y = j_k x, j_k = e^{2\pi i k/p}, k = 0, \dots, p-1\}$. Тогда $N = \{0\}$. Мы можем взять $E = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid |x| \leq 1\}$, $u = 1$, $\Gamma = \partial E = \{x = e^{2\pi i t}, t \in [0, 1]\}$. Поднимая ∂E на B и затем проецируя его на D , мы получим p петель:

$$a_k(t) = e^{2\pi i(t+k/p)}, \quad k = 0, \dots, p-1, \quad t \in [0, 1].$$

Движение точек $a_k(0)$ вдоль петель $a_k(t)$ является полным поворотом, который определяет косу $\Delta_p^2[D, \{a_k(0)\}] = \Delta_p^2[D, K(1)]$. (Чтобы проверить последнее утверждение, надо рассмотреть соответствующее действие на группе $\pi_1(D \setminus K, v)$, где $v \in \partial D$.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (остов группы кос $B_p[D, K]$). Пусть D , $K = \{q_1, \dots, q_p\}$ – как и выше. Выберем систему простых гладких путей $(\sigma_1, \dots, \sigma_{p-1})$ в $D \setminus \partial D$, соединяющих точки q_i с q_{i+1} так, что $L = \cup \sigma_j$ является простым гладким путем. Упорядоченная система полуповоротов $(H_1, \dots, H_{p-1})$, заданных путями $\{\sigma_i\}_{i=1}^{p-1}$, называется остовом группы кос $B_p[D, K]$. Иногда такую систему путей $\{\sigma_i\}_{i=1}^{p-1}$ мы также будем называть остовом группы $B_p[D, K]$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $(H_1, \dots, H_{p-1})$ – остов группы $B_p[D, K]$. Тогда $B_p[D, K]$ порождается элементами $H_1, \dots, H_{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно найти, например, в [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (*обобщенный полуповорот $\Delta_{i,j}$, заданный путем $L_{i,j} = \bigcup_{r=i}^{j-1} \sigma_r$, $i < j$*). В обозначениях из предыдущего определения пусть $\{\sigma_r\}_{r=1}^{p-1}$ – остов группы $B_p[D, K]$, и пусть $i < j$. Выберем некоторую достаточно маленькую окрестность U пути $L_{i,j}$, а также сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$ так, что

- 1) $\psi(L_{i,j}) = [-1, 1] = \{z \in \mathbb{C}^1 \mid \operatorname{Re} z \in [-1, 1], \operatorname{Im} z = 0\}$;
- 2) $\psi(U) = \{z \in \mathbb{C}^1 \mid |z| < 2\}$;
- 3) множество $\{\psi(q_r)\}_{r=i}^j$ инвариантно относительно инволюции $\operatorname{Re} z \mapsto -\operatorname{Re} z$.

Пусть $\alpha(r)$, $r \geq 0$, – гладкая монотонная вещественная функция такая, что $\alpha(r) = 1$ для $r \in [0, \frac{3}{2}]$ и $\alpha(r) = 0$ для $r \geq 2$. Рассмотрим диффеоморфизм $h: \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$, действующий на $z \in \mathbb{C}^1$, $z = re^{i\varphi}$, по правилу $h(z) = re^{i(\varphi + \alpha(r)\pi)}$. Диффеоморфизм $\Delta_{i,j} = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$ будем называться полуповоротом, заданным путем $L_{i,j} = \bigcup_{r=i}^{j-1} \sigma_r$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полный поворот $\Delta_{i,j}^2 = (H_i \cdot \dots \cdot H_{j-1})^{j-i+1}$. В частности, $\Delta_{i,i+1} = H_i$ и $\Delta_{1,p}^2 = \Delta_p^2$, где полуповорот H_i и полный поворот $\Delta_p^2 = \Delta_p^2[D, K]$ были определены выше.

§ 2. Положительность брэйд-монодромии

В этом параграфе мы покажем, что брэйд-монодромия принимает значения в полугруппе B_p^+ , порожденной положительными (против часовой стрелки) полуповоротами. Мы сохраним те же самые обозначения, что и в §1, и введем несколько дополнительных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (*диффеоморфизм Лефшеца ψ_T , индуцированный путем T*). Пусть T – путь в $E \setminus N$, соединяющий точку x_0 с x_1 , $T: [0, 1] \rightarrow E \setminus N$. Существует непрерывное семейство диффеоморфизмов $\psi_{(t)}: D \rightarrow D$, $t \in [0, 1]$, такое, что $\psi_{(0)} = \operatorname{Id}$, $\psi_{(t)}(K(x_0)) = K(T(t))$ для всех $t \in [0, 1]$ и $\psi_{(t)}(y) = y$ для всех $y \in \partial D$. Чтобы подчеркнуть зависимость от t , мы будем писать $\psi_{(t)}: (D, K(x_0)) \rightarrow (D, K(T(t)))$,

$$\psi_T = \psi_{(1)}: (D, K(x_0)) \xrightarrow{\sim} (D, K(x_1)).$$

Так как $\psi_{(t)}(K(x_0)) = K(T(t))$ для всех $t \in [0, 1]$, мы имеем семейство канонических изоморфизмов $\psi_{(t)}^\nu: B_p[D, K(x_0)] \xrightarrow{\sim} B_p[D, K(T(t))] \quad \forall t \in [0, 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (*изоморфизм Лефшеца L_T , индуцированный путем T*).

$$L_T = \psi_T^\nu = \psi_{(1)}^\nu: B_p[D, K(x_0)] \xrightarrow{\sim} B_p[D, K(x_1)],$$

$$(\bar{\beta})L_T = \overline{\psi_T^{-1} \circ \beta \circ \psi_T}.$$

Легко проверить, что L_T зависит только от гомотопического класса пути T .

Изоморфизмы L_T и ψ_T зависят не только от T , но также и от кривой B . В случае, когда рассматривается несколько кривых, мы будем использовать обозначение $\psi_{T,B}$ и $L_{T,B}$, чтобы подчеркнуть их зависимость от B .

ЗАМЕЧАНИЕ. Существует другое, эквивалентное определение брэйд-монодромии $\varphi_u: \pi_1(E \setminus N, u) \rightarrow B_p[D, K]$. Возьмем любой элемент $\delta \in \pi_1(E \setminus N, u)$. Пусть $\underline{\delta}$ – петля, представляющая δ . Тогда, по определению, $\varphi(\delta)$ есть коса, представленная диффеоморфизмом $\psi_{\underline{\delta}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба ψ_δ и $\varphi(\delta)$ индуцированы “движением” вдоль δ .

ЛЕММА 2.1. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) $\psi_{T_1 T_2} = \psi_{T_1} \circ \psi_{T_2}$;
- 2) $H(\sigma)L_t = H((\sigma)\psi_T)$;
- 3) если T – замкнутая петля, то ψ_T определяет косу $\bar{\psi}_T$ в B_p и $(b)L_T = \bar{\psi}_T^{-1} b \bar{\psi}_T$ (композиция слева направо).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) очевидны.

3) Предположим $b = \beta$. По определению изоморфизма Лефшеца L_T , $(\bar{\beta})L_T = \psi_T^{-1} \circ \beta \circ \psi_T$. Так как ψ_T и β определяют косу, то $(b)L_T = \bar{\psi}_T^{-1} \circ \bar{\beta} \circ \bar{\psi}_T = \bar{\psi}_T^{-1} b \bar{\psi}_T$.

Пусть $M' = \{s_j\}_{j=1}^n$ – особые точки проекции $\pi|_B$, $\pi(M') = N$. Для каждого $j = 1, \dots, n$ пусть D'_j – маленький диск на оси y с центром в $y(s_j)$ такой, что $D_j \subseteq D$ и такой, что $(x(s_j) \times D'_j) \cap B = s_j$. Пусть E'_j – достаточно маленькая окрестность точки $x_j = x(s_j)$ на оси x такая, что $E'_j \cap N = x_j$ и для любого $x \in E'_j \setminus \{x_j\}$ число $\#\{(x \times \text{Int}(D'_j)) \cap B\}$ не зависит от x . Мы будем называть это число локальной степенью проекции π в точке s_j и обозначать $\deg_{s_j} \pi$. Пусть $m_j = \deg_{s_j} \pi$. Выберем точку $x'_j \in \partial E'_j$. Положим $K'(x'_j) = K(x'_j) \cap D'_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (вложение Лефшеца ψ_{T,s_j} , индуцированное s_j и T). Пусть $T: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \text{путь}$ в $E \setminus (N \cup (\text{Int } E'_j))$, соединяющий x'_j с точкой $u' \in E \setminus N$. Диффеоморфизм $\psi_{T,s_j} = \psi_T|_{D'_j}: (D'_j, K'(x'_j)) \rightarrow (D, K(u'))$ называется вложением Лефшеца, индуцированным путем T и точкой s_j .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $m_j = \deg_{s_j} \pi$. Возьмем m_j подъемов пути T на B , начинающихся в различных точках из $K'(x'_j)$. Эти подъемы являются вещественными кривыми в $T \times D$. Мы можем рассматривать ψ_T как “перетаскивание” $K'(x'_j)$ внутри $T \times D$ вдоль этих вещественных кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (мономорфизм Лефшеца L_{T,s_j} , индуцированный путем T). Пусть $s_0 \in N$, и пусть D'_0, x_0, E_0, m_0, u^1 – те же, что и в определении вложения Лефшеца. Рассмотрим вложение Лефшеца $\psi_{T,s_j}: (D'_j \times K(x'_j)) \rightarrow (D, K(u'))$, индуцированное s_j и T . Имеем

$$\psi_{T,s_j}(K'(x'_j)) \subset K(u') \quad \text{и} \quad (K(u') \setminus \psi_{T,s_j}(K(x'_j))) \cap \psi_{T,s_j}(\text{Int } D'_j) = \emptyset.$$

Мономорфизм Лефшеца, индуцированный путем T , есть канонический, корректно определенный гомоморфизм

$$L_T = L_{T,s_j} = \psi_T^\nu: B_{m_j}[D'_j, K'(x'_j)] \hookrightarrow B_p[D, K(u')],$$

индуцированный ψ_{T,s_j} и рассмотренными выше включениями.

Чтобы вычислить брэйд-монодромию, мы должны знать $\{\varphi(\delta_j)\}_{j=1}^n$ для g -базиса $\{\delta_j = \ell(\gamma_j)\}_{j=1}^n$, определяемого кустом $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ в $(E \setminus N, u)$. Мы можем представить δ_j в виде $\tilde{\gamma}_j^{-1} \circ \partial E'_j \circ \tilde{\gamma}_j$ (E'_j были определены ранее). Таким образом, чтобы знать $\varphi(\delta_j)$, достаточно знать мономорфизм Лефшеца $L_{\tilde{\gamma}_j}: B_{m_j}[D'_j, K'(x'_j)] \rightarrow B_p[D, K]$ и локальную брэйд-монодромию φ_{s_j} кривой $B \cap (E'_j \times D'_j)$ относительно $E'_j \times D'_j, \pi, x'_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (локальная брэйд-монодромия φ_{s_j} кривой B в точке s_j). Гомоморфизм $\varphi_{s_j}: \pi_1(E'_j \setminus \{x_j\}, x'_j) \rightarrow B_{m_j}[D'_j, K'(x'_j)]$ называется локальной брэйдмонодромией кривой $B \cap [E'_j \times D'_j]$ относительно $E'_j \times D'_j, \pi, x'_j$ ($K'(x'_j) = K(x'_j) \cap D'_j$).

Ясно, что φ_{s_j} определяется элементом $\varphi_{s_j}(\partial E'_j)$. Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2.2. Пусть T – произвольный путь в $E \setminus (N \cup \text{Int}(E'_j))$, соединяющий x'_j с u , и пусть $\delta = T^{-1} \circ \partial E'_j \circ T = \ell(T)$. Тогда $\varphi(\delta) = (\varphi_{s_j}(\partial E'_j))L_T$. В частности, $\varphi(\delta_j) = (\varphi_{s_j}(\partial E'_j))L_{\tilde{\gamma}_j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма фактически показывает, что брэйд-монодромия φ полностью определена, если мы знаем локальные брэйд-монодромии и гомоморфизмы Лефшеца для некоторого куста в $E \setminus N$.

ЛЕММА 2.3. Пусть s_j – особая точка кривой B с локальным уравнением вида $y^2 = x^\nu$, т. е. $m_j = \deg_{s_j} \pi = 2$. Тогда $\varphi(\delta_j) = (H_j)^\nu$, где H_j – положительный полуповорот в $B_p[D, K(u)]$, заданный некоторым путем σ , и, в частности, является положительной косой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 2.2 и предложения-примера 1.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\varphi: \pi_1(E \setminus N, u) \rightarrow B_p[D, K]$ – брэйд-монодромия кривой B и $\{\delta_j\}$ – g -базис группы $\pi_1(E \setminus N, u)$. Тогда $\varphi(\delta_j) \in B_p^+ = B_p^+[D, K]$ для всех j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данной кривой B мы можем найти достаточно близкую к B неособую кривую $B^{(1)}$ той же степени. Пусть $K^{(1)} = \{y \mid (u, y) \in B^{(1)}\}$ и $M^{(1)}, N^{(1)}$ – те же, что и в §1. Ввиду близости кривой B с $B^{(1)}$ мы можем отождествить $B_p[D, K]$ с $B_p[D, K^{(1)}]$. Каждая точка $s_j \in M$ рассыпается на конечное число особых точек $\{s_{ji}\} \subseteq M^{(1)}$, каждая из которых имеет локальное уравнение $x = y^2$. Каждая точка $x_j \in N$ рассыпается на точки $\{x_{ji}\}_i = \{\pi(s_{ji})\}_i \subseteq N^{(1)}$. Ясно, что $N^{(1)} = \{x_{ji}\}_{j,i}$. Пусть $\varphi^{(1)}$ – брэйд-монодромия кривой $B^{(1)}$ относительно $E \times D, \pi, u, N^{(1)}$. Мы можем найти g -базис $\{\delta_{ji}\}$ группы $\pi_1(E \setminus N^{(1)}, u)$ такой, что $\delta_j = \prod_i \delta_{ji}$ для каждого j . Естественное отождествление групп $B_p[D, K]$ и $B_p[D, K^{(1)}]$ приводит нас к равенствам $\varphi(\delta_j) = \prod_i \varphi^{(1)}(\delta_{ji})$ (мы используем тот факт, что $B^{(1)}$ очень близка к B). По лемме 2.3 каждый $\varphi^{(1)}(\delta_{ji})$ является положительным полуповоротом. Таким образом, $\varphi(\delta_j) = \prod_i \varphi^{(1)}(\delta_{ji}) \in B_p^+$ для каждого j .

§3. Брэйд-монодромия проективной кривой

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (брэйд-монодромия проективной кривой). Пусть B – алгебраическая кривая степени p в $\mathbb{CP}^2$. Выберем бесконечно удаленную прямую L , находящуюся в общем положении с B ($\#(L \cap B) = p$), а также выберем аффинные координаты (x, y) в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{CP}^2 \setminus L$ так, что проекция $\pi(x, y) = x$ на ось x кривой $B \cap \mathbb{C}^2$ есть общая проекция (в частности, центр этой проекции в $\mathbb{CP}^2$ должен лежать вне B). Пусть $N = \{x \in \mathbb{C} \mid \pi^{-1}(x) \cap B \not\subseteq p\}$, E – замкнутый диск на оси x такой, что $N \subset \text{Int}(E)$ и D – замкнутый диск на оси y такой, что $\pi^{-1}(E) \cap B \subset E \times D$.

Выберем $u \in \partial E$. По определению брэйд-монодромия кривой B относительно L , u есть брэйд-монодромия кривой $B \cap (E \times D)$ относительно $E \times D$, π , u , т.е. гомоморфизм

$$\varphi: \pi_1(E \setminus N, u) \rightarrow B_p[D, K],$$

определенный в § 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть B – алгебраическая кривая степени p в $\mathbb{CP}^2$. Пусть L , π , u , D , E , $K(u)$ определены, как и выше, и пусть φ – брэйд-монодромия кривой B относительно L , π , u . Пусть $\delta_1, \dots, \delta_q$ – g -базис группы $\pi_1(E \setminus N, u)$. Тогда

$$\prod_{i=1}^q \varphi(\delta_i) = \Delta_p^2 = \Delta_p^2[u \times D, K(u) \cap B].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\prod_{i=1}^q \delta_i = \partial E$ (с положительной ориентацией), то мы должны доказать, что $\varphi(\partial E) = \Delta_p^2$. Мы можем считать, что диск E является достаточно большим, так что ∂E достаточно близка к ∞ . Непрерывно меняя коэффициенты уравнения кривой B так, что все кривые из этого непрерывного семейства трансверсально пересекают прямую L_∞ , мы можем свести доказательство к случаю p прямых, пересекающихся в одной точке, и применить предложение-пример 1.2.

ЛЕММА 3.1. Элемент $\Delta_p^2 \in B_p^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предложения 2.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (брэйд-монодромное разложение). Брэйд-монодромным разложением на множители, связанным с плоской проективной кривой, называется разложение Δ_p^2 в произведение вида $\Delta_p^2 = \prod_i \varphi(\delta_i)$, где φ – брэйд-монодромия проективной кривой и $\{\delta_j\}$ – некоторый g -базис группы $\pi_1(E \setminus N_1, u)$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Выбор g -базиса в $\pi_1(E \setminus N, u)$ и соответствующее этому базису разложение элемента Δ_p^2 в виде произведения определяют брэйд-монодромию кривой B . Для приложений обычно достаточно знать только это брэйд-монодромное разложение без ссылки на фиксацию g -базиса.

2) Разложение элемента Δ_p^2 в виде произведения не является разложением на неприводимые элементы из полугруппы B_p^+ за исключением случая, когда B является неособой кривой. В случае если B – неособая кривая, то каждый $\varphi(\delta_i)$ является положительным полуповоротом и эти элементы неприводимы в B_p^+ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть B – (обобщенная) каспидальная кривая в $\mathbb{CP}^2$ (т.е. все особые точки кривой B являются особыми точками типа $y^2 = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$). Тогда любое брэйд-монодромное разложение может быть записано в виде $\Delta_p^2 = \prod_i (Q_i^{-1} H_1^{\nu_i} Q_i)$, где H_1 – положительный полуповорот и каждое $\nu_i \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что мы рассматриваем общую относительно проективной кривой B проекцию $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}$. Каждая особенность отображения $\pi|_B$ имеет тип $y^2 = x_i^{\nu_i}$, $\nu_i \in \mathbb{N}$. Из леммы 2.3 следует, что $\varphi(\delta_i) = H_i^{\nu_i}$, где H_i – некоторый полуповорот. Каждые два полуповорота в B_p сопряжены друг другу, поэтому для всех i существует Q_i такое, что $H_i = Q_i^{-1} H_1 Q_i$. Таким образом, $\Delta_p^2 = \prod \varphi(\delta_i) = \prod Q_i^{-1} H_1^{\nu_i} Q_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве H_1 мы можем взять любой полуповорот.

§ 4. Тип разложения брэйд-монодромии

Согласно предложениям 3.1 и 2.1 мы знаем, что брэйд-монодромное разложение $\Delta_p^2[D, K] = \prod_i \varphi(\delta_i)$ является разложением на множители в $B_p^+[D, K]$ элемента $\Delta_p^2[D, K]$, которое связано с некоторым g -базисом группы $\pi_1(E \setminus N, u)$. Определим отношение эквивалентности на множестве B_p^+ -разложений на множители элемента Δ_p^2 . Для этого мы определим замены Гурвица на $G \times \cdots \times G$ (где G – группа) и на множестве разложений на множители.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (замены Гурвица R_k и R_k^{-1} на G^m). Пусть $\vec{t} = (t_1, \dots, t_m) \in G^m$. Мы скажем, что $\vec{s} = (s_1, \dots, s_m) \in G^m$ получен из $\vec{t}$ с помощью замены Гурвица R_k (либо $\vec{t}$ получен из $\vec{s}$ с помощью замены Гурвица R_k^{-1}), если

$$\begin{aligned} s_i &= t_i \text{ для } i \neq k, k+1, \\ s_k &= t_k t_{k+1} t_k^{-1}, \quad s_{k+1} = t_k. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (замена Гурвица в разложении на множители). Пусть G – группа, $t \in G$, и пусть $t = t_1 \cdot \dots \cdot t_m = s_1 \cdot \dots \cdot s_m$ – два разложения на множители элемента t . Мы скажем, что $s_1 \cdot \dots \cdot s_m$ получено из $t_1 \cdot \dots \cdot t_m$ с помощью замены Гурвица R_k , если $(s_1, \dots, s_m)$ получено из $(t_1, \dots, t_m)$ с помощью замены Гурвица R_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (гурвиц-эквивалентные разложения на множители). Два разложения на множители гурвиц-эквивалентны, если одно из них может быть получено из другого с помощью конечного числа замен Гурвица.

Мы начнем изучение этого отношения эквивалентности с утверждения о том, что брэйд-монодромия и замены Гурвица коммутируют друг с другом.

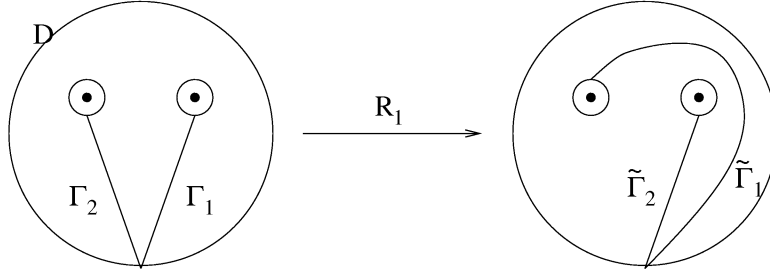


Рис. 4.1

ЛЕММА 4.1 (см. доказательство в [6, гл. II]). Пусть D , K , и определены, как и выше.

а) Если $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ является g -базисом в $\pi_1(D \setminus K, u)$, то элемент $\Gamma_1 \cdot \dots \cdot \Gamma_n$ представляется петлей ∂D (взятой с положительной ориентацией).

б) Если $\{\Gamma'_i\}$ и $\{\Gamma_i\}$ – два g -базиса в $\pi_1(D \setminus K, u)$, то каждый элемент Γ'_i сопряжен некоторому Γ_{j_i} .

в) Применяя замену Гурвица к g -базису, мы снова получим некоторый g -базис (см. рис. 4.1).

г) Любые два g -базиса могут быть получены один из другого с помощью конечного числа замен Гурвица.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть B – кривая в $\mathbb{C}^2$, и пусть N , E , D , π , и определены, как и выше. Пусть φ – брэйд-монодромия кривой B относительно $E \times D$, π , и. Положим $n = \#N$. Следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \{g\text{-базис в } \pi_1(E \setminus N, u)\} & \xrightarrow{\varphi^n} & (B_p[D, K])^n \\ R_k \downarrow & & R_k \downarrow \\ \{g\text{-базис в } \pi_1(E \setminus N, u)\} & \xrightarrow{\varphi^n} & (B_p[D, K])^n \end{array}$$

является коммутативной, где R_k – k -я замена Гурвица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует немедленно из определений и из соотношения

$$\varphi(\delta_k \delta_{k+1} \delta_k^{-1}) = \varphi(\delta_k) \varphi(\delta_{k+1}) (\varphi(\delta_k))^{-1}.$$

Различные брэйд-монодромные разложения на множители, связанные с кривой B и происходящие из различных g -базисов, гурвиц-эквивалентны друг другу:

ЛЕММА 4.2. Пусть B – кривая, L , π , E , D , N , u , K определены как в §3. Пусть φ – брэйд-монодромия кривой B относительно L , u , и пусть $\Delta_p^2[D, K] = \prod_i \varphi(\delta_i)$ и $\Delta_p^2[D, K] = \prod_i \varphi(\delta'_i)$ – два брэйд-монодромных разложения на множители элемента $\Delta_p^2[D, K]$, соответствующие φ и двум g -базисам группы $\pi_1(E \setminus N, u)$. Тогда эти два брэйд-монодромных разложения являются гурвиц-эквивалентными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два g -базиса $\{\delta_i\}$ и $\{\delta'_i\}$ группы $\pi_1(E \setminus N, u)$ могут быть получены друг из друга с помощью конечного числа замен Гурвица (лемма 4.1). По предложению 4.1 та же самая последовательность замен Гурвица преобразует $\{\varphi(\delta_i)\}$ в $\{\varphi(\delta'_i)\}$. Таким образом, два разложения на множители $\prod_i \varphi(\delta_i)$ и $\prod_i \varphi(\delta'_i)$ являются гурвиц-эквивалентными.

ЛЕММА 4.3. В обозначениях предыдущей леммы, если $\prod_i Z_i$ гурвиц-эквивалентно произведению $\prod \varphi(\delta_i)$, существует g -базис $\{\delta'_i\}$ в $\pi_1(E \setminus N, u)$ такой, что $Z_i = \varphi(\delta'_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε – последовательность замен Гурвица, преобразующая $\varphi(\delta_i)$ в $\{Z_i\}$. Применяя ε к $\{\delta_i\}$, получим некоторый g -базис $\{\delta'_i\}$. По предложению 4.1 $\varphi(\delta'_i) = Z_i$.

Собирая вместе изложенные выше результаты, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть B – проективная кривая в $\mathbb{CP}^2$, а $\varphi: \pi_1(E \setminus N, u) \rightarrow B_p[D, K]$ – связанная с ней брэйд-монодромия. Множество всех связанных с B брэйд-монодромных разложений на множители элемента $\Delta_p^2[D, K]$ (вида $\Delta_p^2 = \prod_i \varphi(\delta_i)$, где $\{\delta_i\}$ – g -базисы группы $\pi_1(E \setminus N, u)$) совпадает с полным

классом эквивалентности (по отношению замен Гурвица и сопряжения) разложений на множители элемента Δ_p^2 в B_p^+ .

Пусть B – алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, и пусть $\varphi: \pi_1(E \setminus N, u) \rightarrow B_p[D, K]$ – связанная с ней брэйд-монодромия, определяемая брэйд-монодромным разложением на множители элемента $\Delta_p^2 = \prod_i \varphi(\delta_i)$, где $\{\delta_i\}$ – некоторый g -базис группы $\pi_1(E \setminus N, u)$. Действуя на (D, K) диффеоморфизмом β , мы получим новое брэйд-монодромное разложение $\Delta_p^2 = \prod_i \beta^{-1} \varphi(\delta_i) \beta$, связанное с кривой B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (*тип брэйд-монодромного разложения*). Два брэйд-монодромных разложения на множители называются *эквивалентными по отношению замен Гурвица и сопряжения*, если одно из них может быть получено из другого в процессе конечного числа замен Гурвица с последующим одновременным сопряжением на некоторый элемент $\beta \in B_p$. Два брэйд-монодромных разложения принадлежат одному и тому же *типу брэйд-разложения*, если они эквивалентны по отношению замен Гурвица и сопряжения.

§ 5. Централизатор кратных полуповоротов

В этом параграфе мы приведем описание образующих централизатора кратного полуповорота в группе кос, которое будет использовано в доказательстве теоремы 1. Мы воспользуемся теми же обозначениями, что и в § 1.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $(H_1, \dots, H_{p-1})$ – остов группы кос $B_p[D, K]$, заданный путями $\{\sigma_i\}_{i=1}^{p-1}$, и пусть $X = H_1^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда централизатор $C(X)$ элемента X в $B_p[D, K]$ порождается элементами $\Delta_{1,j}^2$, $j = 3, \dots, p$, и H_j , $j = 1, 3, \dots, p-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогичный результат был доказан (с использованием других методов) в [8, утверждение III.2.3]. Обозначим $C_1(X)$ подгруппу в $B_p[D, K]$, порожденную элементами $H_1, \Delta_{1,j}^2$, $j = 3, \dots, p$, и множеством всех полуповоротов $H(\sigma)$, заданных простыми путями σ с началом и концом в K , не пересекающимися с σ_1 , и $C_2(X)$ подгруппу, порожденную элементами $\Delta_{1,j}^2$, $j = 3, \dots, p$, и H_j , $j = 1, 3, \dots, p-1$. Очевидно, $C_2(X) \subset C_1(X) \subset C(X)$ и нам надо доказать обратные включения.

Так как $C(X^2) \subset C(X)$, то теорему 5.1 достаточно доказать для четных ν .

Не ограничивая общности, мы можем считать, что

$$D = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + v_2^2 \leq p^2\}, \quad K = \{(0, 0), \dots, (p-1, 0)\},$$

$$\sigma_i = [i-1, i] = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid i-1 \leq v_1 \leq i, v_2 = 0\}.$$

Обозначим $\sigma_0 = [-p, 0] = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -p \leq v_1 \leq 0, v_2 = 0\}$ и $\sigma_p = [p-1, p] = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p-1 \leq v_1 \leq p, v_2 = 0\}$. Выберем точку $u_0 \in \partial D$ так, чтобы u_0 не лежала на прямых $\{v_1 = i\}$, $i = 0, \dots, p-1$, и $\{v_2 = 0\}$. Рассмотрим элемент $\gamma \in \pi_1(D \setminus K, u_0)$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow D \setminus K$, $\gamma(0) = \gamma(1) = u_0$. Пошевелив слегка петлю γ , мы можем считать, что она находится в общем положении с прямыми $\{v_1 = i\}$, $i = 0, \dots, p-1$, и $\{v_2 = 0\}$. Выбранные координаты (v_1, v_2) определяют ориентацию на D и на этих прямых. Эта ориентация в каждой точке пересечения $y \in \gamma \cap L$ с ориентированной прямой L , находящейся с γ в общем положении, позволяет определить индекс пересечения $(\gamma, L)_y$, равный ± 1 . Пусть $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ – последовательность значений $t \in [0, 1]$, для которых

$\gamma(t)$ принадлежит одной из упомянутых выше прямых. Сопоставим этой петле последовательность $c(\gamma) = (a_0, \dots, a_n)$ (код петли γ), состоящую из символов $a_i \in \{u_0^{\pm 1}, o_0^{\pm 1}, \dots, o_p^{\pm 1}, h_0^{\pm 1}, \dots, h_{p-1}^{\pm 1}, l_0^{\pm 1}, \dots, l_{p-1}^{\pm 1}\}$, по следующим правилам:

- 1) $a_0 = u_0$ и $a_n = u_0^{-1}$;
- 2) $a_i = o_j^{\pm 1}$, если $\gamma(t_i) \in \sigma_j$ и степень совпадает с $(\gamma, \sigma_j)_{\gamma(t_i)}$;
- 3) $a_i = h_j^{\pm 1}$, если $\gamma(t_i) \in L_j$, где $L_j = \{v_1 = j, v_2 > 0\}$, и степень совпадает с $(\gamma_2, L_j)_{\gamma(t_i)}$;
- 4) $a_i = l_j^{\pm 1}$, если $\gamma(t_i) \in L_j$, где $L_j = \{v_1 = j, v_2 < 0\}$, и степень совпадает с $(\gamma, L_j)_{\gamma(t_i)}$.

Код $c(\gamma) = (a_0, \dots, a_n)$ называется *приведенным*, если $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ для любого i . Каждому коду $c(\gamma) = (a_0, \dots, a_n)$ соответствует приведенный код $c_r(\gamma)$, полученный из $(a_0, \dots, a_n)$ после удаления всех пар a_i, a_{i+1} вида $a_i = a_{i+1}^{-1}$.

Назовем число $l_c(\gamma) = |c(\gamma)| = n$ длиной кода $c(\gamma) = (a_0, \dots, a_n)$.

Аналогично, каждому пути σ , соединяющему точки q_i и q_j в $D \setminus (K \setminus \{q_i, q_j\})$ можно сопоставить код $c(\sigma)$, добавив к определенным выше символам символы $q_l^{\pm 1}$, $l = 1, \dots, p$, и определить понятие приведенного кода, удовлетворяющего следующим условиям:

- 1) $a_1 = q_i$ и $a_n = q_j^{-1}$;
- 2) $a_2 \in \{h_{i-1}^{-1}, l_{i-1}^{-1}, h_{i+1}, l_{i+1}\}$;
- 3) $a_{n-1} \in \{h_{j-1}, l_{j-i}, h_{j+1}^{-1}, l_{j+1}^{-1}\}$;
- 4) $a_l \neq a_{l+1}^{-1}$ для любой пары a_l, a_{l+1} .

Определим знак $\text{sgn}(\sigma)$ кода $c_r(\sigma)$, положив $\text{sgn}(\sigma) = 1$, если $a_2 \in \{h_{i-1}^{-1}, l_{i-1}^{-1}\}$ и $\text{sgn}(\sigma) = -1$, если $a_2 \in \{h_{i+1}, l_{i+1}\}$.

ЛЕММА 5.1. *Петли γ_0 и γ_1 (соответственно пути σ' и σ'') гомотопны в $D \setminus K$ тогда и только тогда, когда $c_r(\gamma_1) = c_r(\gamma_2)$ (соответственно $c_r(\sigma') = c_r(\sigma'')$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим каждому коду $c(\gamma) = (a_0, \dots, a_n)$ элемент $a_0 \dots a_n$ свободной группы F , порожденной буквами

$$u_0, o_0, \dots, o_p, h_0, \dots, h_{p-1}, l_0, \dots, l_{p-1}, q_1, \dots, q_p.$$

Очевидно, приведенному коду соответствует приведенное слово в F . Хорошо известно, что для каждого элемента из F однозначно определено приведенное слово, представляющее этот элемент. Следовательно, для каждой петли однозначно определен приведенный код этой петли.

Если γ_0 и γ_1 гомотопны в $D \setminus K$, то, очевидно, существует такая гомотопия γ_s , что для почти всех $s \in [0, 1]$, кроме конечного числа значений $s \in \{s_1, \dots, s_k\}$, петли γ_s находятся в общем положении с прямыми $\{v_1 = i\}$, $i = 0, \dots, p-1$, и $\{v_2 = 0\}$, а для $s \in \{s_1, \dots, s_k\}$ петли γ_s касаются одной из прямых $\{v_1 = i\}$, $i = 0, \dots, p-1$, и $\{v_2 = 0\}$ в одной из точек пересечения и трансверсально пересекаются с этими прямыми в остальных точках пересечения. Отсюда легко видеть, что приведенные коды гомотопных петель равны. Обратное утверждение, что если приведенные коды петель γ_0 и γ_1 равны, то γ_0 и γ_1 гомотопны, является очевидным.

Случай двух путей разбирается аналогично.

Покажем вначале, что $C_1(X) = C(X)$. Рассмотрим произвольный элемент $G \in C(X)$.

ЛЕММА 5.2. Пусть диффеоморфизм h является представителем элемента $G \in C(X)$. Тогда простой путь $\sigma = h(\sigma_1)$ и σ_1 (рассматриваемые как неориентированные пути) гомотопны в (D, K) (гомотопия, оставляющая на месте точки из K).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$X = G^{-1}XG = (G^{-1}H(\sigma_1)G)^\nu = H(h(\sigma_1))^\nu = H(\sigma)^\nu,$$

т.е. $X = H_1^\nu$ может быть представлен как ν -я степень полуповорота, заданного путем σ . Поэтому лемма 5.2 следует из следующей леммы.

ЛЕММА 5.3. Пусть кратные полные повороты $H(h(\sigma_1))^\nu$ и $H(\sigma)^\nu$ представляют один и тот же элемент группы $B_p[D, K]$, где σ – некоторый простой путь. Тогда σ и σ_1 (рассматриваемые как неориентированные пути) гомотопны в (D, K) (гомотопия, оставляющая на месте точки из K).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим приведенный код $c_r(\sigma) = (q_i, a_2, \dots, a_{n-1}q_j^{-1})$. Если длина кода $|c_r(\sigma)| = 2$, то σ гомотопен некоторому пути σ_l , принадлежащему выбранному основу группы кос. Поэтому из равенства $H(h(\sigma_1))^\nu = H(\sigma_l)^\nu$ следует $l = 1$.

Покажем, что $|c_r(\sigma)| < 3$. Действительно, пусть $|c_r(\sigma)| \geq 3$. Тогда для некоторого $s \neq 0, 1$ среди элементов a_l , $l = 1, \dots, n$, входящих в приведенный код $c_r(\sigma)$, найдется элемент $a_{l_0} \in \{h_s^{\pm 1}, l_s^{\pm 1}\}$. Пусть $a_{l_0} = h_s^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ (случай $a_{l_0} = l_s^\varepsilon$ разбирается аналогично, а потому он будет опущен). Выберем точку u_0 так, что $s - 1 < v_1(u_0) < s$, $v_2(u_0) > 0$ и рассмотрим петлю $\gamma \in \pi_1(D \setminus K, u_0)$, приведенный код которой $c_r(\gamma) = (u_0, o_{s-1}, l_s, o_s^{-1}, h_s^{-1}, u_0^{-1})$ (γ совпадает с $(p - s)$ -й образующей некоторого g -базиса). Тогда $(\gamma)H(\sigma_1)^\nu = \gamma$ и, следовательно, $c_r((\gamma)H(\sigma_1)^\nu) = c_r(\gamma)$, так как мы можем выбрать петлю, представляющую элемент γ , так, что эта петля не пересекается с σ_1 . Вычислим код $c((\gamma)H(\sigma)^\nu)$. Для этого сопоставим парам (q_i, a_2) и (a_{n-1}, q_j^{-1}) , входящим в приведенный код $c_r(\sigma)$, четверку элементов $b_{(\sigma, \pm)} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, где

$$b_{(\sigma, +)} = \begin{cases} (o_{i-1}, l_i, o_i^{-1}, h_i^{-1}), & \text{если } a_2 = h_{i-1}^{-1}, \\ (l_i, o_i^{-1}, h_i^{-1}, o_{i-1}), & \text{если } a_2 = l_{i-1}^{-1}, \\ (o_i^{-1}, h_i^{-1}, o_{i-1}, l_i), & \text{если } a_2 = l_{i+1}, \\ (h_i^{-1}, o_{i-1}, l_i, o_i^{-1}), & \text{если } a_2 = h_{i+1}, \end{cases}$$

$$b_{(\sigma, -)} = \begin{cases} (o_{j-1}, l_j, o_j^{-1}, h_j^{-1}), & \text{если } a_{n-1} = h_{j-1}, \\ (l_j, o_j^{-1}, h_j^{-1}, o_{j-1}), & \text{если } a_{n-1} = l_{j-1}, \\ (o_j^{-1}, h_j^{-1}, o_{j-1}, l_j), & \text{если } a_{n-1} = l_{j+1}^{-1}, \\ (h_j^{-1}, o_{j-1}, l_j, o_j^{-1}), & \text{если } a_{n-1} = h_{j+1}^{-1}. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$c_1 c_2 = (a'_1, \dots, a'_{m_1}, a''_1, \dots, a''_{m_2})$$

для $c_1 = (a'_1, \dots, a'_{m_1})$ и $c_2 = (a''_1, \dots, a''_{m_2})$, и $c_1^{-1} = (a'^{-1}_{m_1}, \dots, a'^{-1}_1)$.

Положим

$$\begin{aligned} c_r(\sigma)_{(k+)} &= (a_{k+1}, \dots, a_{n-1}), & c_r(\sigma)_{(k-)} &= (a_2, \dots, a_k), \\ r_\sigma &= (a_2, \dots, a_{n-1})b_{(\sigma,-)}(a_2, \dots, a_{n-1})^{-1}b_{(\sigma,+)}, \\ r_{\sigma,k} &= c_r(\sigma)_{(k+)}b_{(\sigma,-)}c_r(\sigma)_{(k+)}^{-1}c_r(\sigma)_{(k-)}^{-1}b_{(\sigma,+)}c_r(\sigma)_{(k-)}, \\ R_1(\sigma, k) &= [(c_r(\sigma)_{(k+)}b_{(\sigma,-)}c_r(\sigma)_{(k+)}^{-1}), (c_r(\sigma)_{(k-)}^{-1}b_{(\sigma,+)}c_r(\sigma)_{(k-)})] \end{aligned}$$

и $R_\nu(\sigma, k) = r_{\sigma,k}^{\mu-1}R_1(\sigma, k)r_{\sigma,k}^{1-\mu}$, где $\nu = 2\mu$, $c_r(\sigma) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, $[c_1, c_2] = c_1c_2c_1^{-1}c_2^{-1}$ и каждый код $r_{\sigma,k}$ может быть получен из r_σ циклической перестановкой символов. Очевидно, $r_{\sigma,k}$ и $R_\nu(\sigma, k)$ являются приведенными кодами.

Не ограничивая общности, мы можем выбрать в качестве σ и γ такие пути, что $c(\sigma) = c_r(\sigma)$, а $\gamma = \delta \circ h_s \circ C_s \circ h_s^{-1} \circ \delta^{-1}$, где C_s – окружность малого радиуса с центром в q_s , h_s – путь вдоль прямой $v_1 = s$ и δ – кратчайший путь вдоль ∂D от u_0 до пересечения ∂D с лучом $\{v_1 = s, v_2 > 0\}$. Пусть $w_1 > w_2 > \dots > w_m > 0$ – набор значений координаты v_2 точек пересечения луча $\{v_1 = s, v_2 > 0\}$ с σ , и пусть $k_1, k_2, \dots, k_m$ – соответствующие этим значениям номера элементов a_{k_l} , входящие в код $c_r(\sigma)$ и равные по определению $h_s^{\varepsilon_{k_l}}$, $\varepsilon_{k_l} = \pm 1$. Тогда код

$$\begin{aligned} c((\gamma)H(\sigma)^\nu) &= \left(u_0, \prod_{l=1}^m R_\nu(\sigma, k_l)^{-\text{sgn}(\sigma)\varepsilon_{k_l}}, o_{s-1}, \right. \\ &\quad \left. l_s, o_s^{-1}, h_s^{-1}, \left(\prod_{l=1}^m R_\nu(\sigma, k_l)^{-\text{sgn}(\sigma)\varepsilon_{k_l}} \right)^{-1}, u_0^{-1} \right), \end{aligned}$$

если q_s не является началом пути σ . Если q_s является началом пути σ , то код $c((\gamma)H(\sigma)^\nu)$ равен

$$\left(u_0, \prod_{l=1}^{m-1} R_\nu(\sigma, k_l)^{-\text{sgn}(\sigma)\varepsilon_{k_l}}, \delta_0(\sigma), \left(\prod_{l=1}^{m-1} R_\nu(\sigma, k_l)^{-\text{sgn}(\sigma)\varepsilon_{k_l}} \right)^{-1}, u_0^{-1} \right)$$

в случае $a_2 = h_{s-1}^{-1}$, где $\delta_0(\sigma) = r_{\sigma}^{\mu-1}\delta'_0(\sigma)r_{\sigma}^{1-\mu}$ и

$$\begin{aligned} \delta'_0(\sigma) &= (a_2, \dots, a_{n-1})b_{(\sigma,-)}(a_2, \dots, a_{n-1})^{-1} \\ &\quad \times b_{(\sigma,+)}(a_2, \dots, a_{n-1})b_{(\sigma,-)}^{-1}(a_2, \dots, a_{n-1})^{-1}, \end{aligned}$$

и $c((\gamma)H(\sigma)^\nu)$ равен

$$\left(u_0, \prod_{l=1}^m R_\nu(\sigma, k_l)^{-\text{sgn}(\sigma)\varepsilon_{k_l}}, \delta(\sigma), \left(\prod_{l=1}^m R_\nu(\sigma, k_l)^{-\text{sgn}(\sigma)\varepsilon_{k_l}} \right)^{-1}, u_0^{-1} \right)$$

в случае $a_2 \neq h_{s-1}^{-1}$, где

$$\delta = \begin{cases} (o_{s-1}, \delta_0(\sigma), o_{s-1}^{-1}), & \text{если } a_2 = l_{s-1}^{-1}, \\ (o_{s-1}, l_s, \delta_0(\sigma), l_s^{-1}, o_{s-1}^{-1}), & \text{если } a_2 = l_{s+1}, \\ (o_{s-1}, l_s, o_s^{-1}, \delta_0(\sigma), o_s, l_s^{-1}, o_{s-1}^{-1}), & \text{если } a_2 = h_{s+1}. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\nu \gg 2$. Кроме того, так как $c_r(\sigma)$ является приведенным кодом, легко видеть, что $c_r(r_{\sigma, k_i} r_{\sigma, k_j}^{-1}) \neq \emptyset$ при $k_i \neq k_j$. Отсюда следует, что $c_r((\gamma)H(\sigma)^\nu) \neq c_r(\gamma) = (u_0, o_{s-1}, l_s, o_s^{-1}, h_s^{-1}, u_0^{-1})$.

Поскольку диффеоморфизм h , представляющий элемент $G \in C(X) \subset B_p[D, K]$, определен с точностью до изотопии, согласно лемме 5.3 мы можем считать, что $h(\sigma_1) = \sigma_1$, $h(q_i) = q_i$ для $i = 1, 2$.

Покажем, что существует такой диффеоморфизм g_2 , представляющий элемент $G_2 \in C_1(X)$, что $g_2 \circ h$ оставляет неподвижными пути σ_1 и σ_2 . Действительно, рассмотрим путь $h(\sigma_2)$. Точка q_2 является началом этого пути и некоторая точка $q_r \neq q_1, q_2$ является его концом. Пусть $s: [0, 1] \rightarrow D$ – некоторая параметризация этого пути такая, что $s(0) = q_r$. Рассмотрим приведенный код $c_r(h(\sigma_2)) = (a_1, \dots, a_n)$ пути $h(\sigma_2)$, $a_1 = q_r$, $a_n = q_2$. Пусть для некоторого i символ a_i равен $o_j^{\pm 1}$, где $1 < j < p$. Выберем среди всех таких i такое i_0 , что $a_{i_0} = o_{j_0}^{\pm 1}$ и выполнены следующие условия:

- i) если $j_0 = 2$, то на σ_2 между $s(t_{i_0})$ и q_3 нет других точек пересечения $h(\sigma_2)$ и σ_2 ;
- ii) если $j_0 = r$, то на σ_r между q_{r-1} и $s(t_{i_0})$ нет других точек пересечения $h(\sigma_2)$ и σ_r ;
- iii) если $j_0 = r + 1$, то на σ_{r+1} между $s(t_{i_0})$ и q_{r+1} нет других точек пересечения $h(\sigma_2)$ и σ_{r+1} ;
- iv) если $j_0 \neq 2, r, r + 1$, то на σ_{j_0} между q_{j_0-1} и $s(t_{i_0})$ либо между $s(t_{i_0})$ и q_{j_0} нет других точек пересечения $h(\sigma_2)$ и σ_{j_0} .

Рассмотрим один из возможных случаев (остальные случаи аналогичны). Пусть, например, $j_0 \neq 2, r, r + 1$ и на σ_{j_0} между q_{j_0-1} и $s(t_{i_0})$ нет других точек пересечения $h(\sigma_2)$ и σ_{j_0} . Обозначим через $\widetilde{h(\sigma_2)}$ путь, состоящий из части пути $h(\sigma_2)$ от точки q_r (начало пути) до $s(t_{i_0})$ и далее – вдоль пути σ_{j_0} от точки $s(t_{i_0})$ до q_{j_0-1} . Выберем гладкий, достаточно близкий к $\widetilde{h(\sigma_2)}$ путь $\tilde{\sigma}$ такой, что $\tilde{\sigma}$ соединяет точку q_r (начало пути) с q_{j_0-1} , $\widetilde{h(\sigma_2)} \cap \tilde{\sigma} = \{q_r, q_{j_0-1}\}$ и при движении вдоль $\tilde{\sigma}$ от точки q_r путь $\widetilde{h(\sigma_2)}$ остается все время справа от $\tilde{\sigma}$. Осуществим поворот $H(\tilde{\sigma}) \in C_1(X)$. Пусть диффеоморфизм h_1 является представителем элемента $H(\tilde{\sigma})$. Легко видеть, что $h_1(h(\sigma_2))$ изотопен пути, имеющему код $c(h_1 \circ h) = (\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{n-i_0-l})$, где l – некоторое неотрицательное число и $\tilde{a}_0 = q_{j_0-1}$, $\tilde{a}_j = a_{j+i_0+l}$.

Обозначив $h_1 \circ h$ снова через h и повторив описанную выше процедуру, мы можем считать, что код $c(h(\sigma_2)) = (a_0, \dots, a_n)$ кривой $h(\sigma_2)$ удовлетворяет условию: для любого i символ $a_i \neq o_j^{\pm 1}$, где $0 < j < p$. В этом случае (предполагаем для определенности, что $a_1 = l_{r+1}$ и $a_{n-1} = l_0$, а остальные случаи рассматриваются аналогично) $c(h) = (q_r, l_{r+1}, \dots, l_{p-1}, o_p^{-1}, h_{p-1}^{-1}, \dots, h_0^{-1}, o_0, l_0, q_2^{-1})$. Непосредственно проверяется, что $(h(\sigma_2))\Delta_{r,p} \circ \Delta_{3,p} \circ \Delta_{1,2}^2$ изотопен пути σ_2 . Но $\Delta_{r,p} \circ \Delta_{3,p} \circ \Delta_{1,2}^2 \in C_2(X) \subset C_1(X)$. Следовательно, умножая G на $\Delta_{r,p} \circ \Delta_{3,p} \circ \Delta_{1,2}^2$, мы можем считать, что диффеоморфизм h , представляющий элемент $G \in C(X)$, оставляет на месте путь $L_{1,3}$.

Последовательно повторяя вышеизложенное для $\sigma_3, \dots, \sigma_{p-1}, \sigma_0$, мы можем считать, что диффеоморфизм h , представляющий элемент $G \in C(X)$, оставляет на месте путь $L_{0,p} = \sigma_0 \cup L_{1,p}$. В этом случае, рассматривая код пути $h(\sigma_p)$, легко видеть, что $h(\sigma_p)$ изотопен в (D, K) пути σ_p . Поэтому мы можем считать, что h

оставляет на месте все точки диаметра $L_{0,p+1} = \sigma_0 \cup L_{1,p} \cup \sigma_p$. Но в этом случае h является представителем единичного элемента в $B_p[D, K]$. Следовательно, $C_1(X) = C(X)$.

Чтобы доказать, что $C_1(X) = C_2(X)$, достаточно показать, что любой полуповорот $H(\sigma)$, заданный простым, не пересекающимся с σ_1 путем σ с началом и концом в K , принадлежит $C_2(X)$.

Заметим, что для любого $G \in B_p$ элемент $G^{-1}H(\sigma)G$ является полуповоротом, заданным путем $(\sigma)G$. Поэтому доказательство того, что любой такой полуповорот $H(\sigma) \in C_2(X)$, с применением индукции по длине кода $|c(\sigma)|$ дословно повторяет приведенные выше рассуждения.

§6. Гладкая изотопия расслоенного пространства

Пусть M – гладкое многообразие. По определению диффеоморфизм $F: M \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ (или просто $F_t: M \rightarrow M$) является гладкой изотопией, если:

- 1) $F(M \times \{t\}) = M \times \{t\}$ для всех $t \in [0, 1]$;
- 2) $F_0 = F|_{M \times \{0\}}: M \times \{0\} \rightarrow M \times \{0\}$ есть тождественное отображение.

Без ограничения общности, мы будем предполагать, что изотопия F_t удовлетворяет еще одному дополнительному условию:

- 3) $F_t = F_0$, если $t \leq \varepsilon$, и $F_t = F_1$, если $t \geq 1 - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Действительно, вместо гладкой изотопии F_t мы можем рассмотреть гладкую изотопию $\tilde{F}_t = F_{h(t)}$, где $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ – такая гладкая монотонная функция, что $h(t) = 0$, если $t \leq \varepsilon$, и $h(t) = 1$, если $t \geq 1 - \varepsilon$.

По определению композицией гладких изотопий F'_t и F''_t называется гладкая изотопия $F_t = F''_t \circ F'_t$ такая, что $F_t = F'_{2t}$, если $t \leq \frac{1}{2}$, и $F_t = F''_{2t-1} \circ F'_1$, если $t \geq \frac{1}{2}$.

Пусть U – некоторое открытое множество в M и ∂U – его граница. Пусть $F_t: \bar{U} \rightarrow \bar{U}$ – гладкая изотопия. Очевидно, что если ограничение гладкой изотопии $F_t: \bar{U} \rightarrow \bar{U}$ на некоторую окрестность границы ∂U является тождественным отображением для всех $t \in [0, 1]$, то F_t может быть продолжена до гладкой изотопии $\tilde{F}_t: M \rightarrow M$ так, что $\tilde{F}_t|_{M \setminus U}$ является тождественным отображением для всех t .

Пусть B_1 и B_2 – две плоские кривые. Как и в §1, пусть $K_i(x) = \{y \mid (x, y) \in B_i\}$, $i = 1, 2$, $(K_i(x) - \text{проекция на ось } y \text{ множества } \pi^{-1}(x) \cap B_i)$, $N_i = \{x \mid \#K_i(x) \leq p\}$.

$$M'_i = \{(x, y) \in B_i \mid \pi|_{B_i} \text{ не этально в точке } (x, y)\} \quad (\pi(M'_i) = N_i).$$

Пусть E_R (соответственно D_R) – замкнутый диск радиуса R с центром в начале координат o на оси x (соответственно на оси y) такой, что $M'_i \subset E_R \times D_R$, $N_i \subset \text{Int}(E)$. Предполагам, что $\#K_i(o) = p$.

Для каждого $u_{i,j} \in N_i$, $j = 1, \dots, n$, выберем диск $E_{i,j}$ малого радиуса $\varepsilon \ll 1$ с центром в $u_{i,j}$ и выберем простые пути $T_{i,1}, \dots, T_{i,n}$, соединяющие точки $u_{i,j}$ с o так, что $\langle T_{i,1}, \dots, T_{i,n} \rangle$ является кустом. Для каждого $j = 1, \dots, n$ мы выбираем маленькую трубчатую окрестность $U_{i,j}$ пути $T_{i,j}$ и диск E_o радиуса $\varepsilon \ll 1$ с центром в o так, что:

- 1) $U_{i,j_1} \cap U_{i,j_2} \subset E_o$ для $j_1 \neq j_2$;
- 2) $E_{i,j} \cap E_o = \emptyset$ для всех j ;
- 3) множество $U_{\Gamma_i} = \left(\bigcup_{j=1}^n U_{i,j} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n E_{i,j} \right) \cup E_o$ диффеоморфно диску, и его граница ∂U_{Γ_i} является гладкой простой петлей.

Такая окрестность U_{Γ_i} будет называться *трубчатой окрестностью* g -базиса $\Gamma_i = (l(T_{i,1}), \dots, l(T_{i,n}))$ фундаментальной группы $\pi_1(E_R \setminus N_i, o)$.

Следующие леммы хорошо известны.

ЛЕММА 6.1. В введенных выше обозначениях пусть $N_i \subset E_R$, $i = 1, 2$, – два конечных множества и пусть U_{Γ_i} – трубчатые окрестности g -базисов Γ_i группы $\pi_1(E_R \setminus K_i, o)$. Предположим, что $\#N_1 = \#N_2$. Тогда существует гладкая изотопия $f_t: E_R \rightarrow E_R$, $t \in [0, 1]$, такая, что:

- 1) f_t является тождественным отображением в некоторой окрестности границы E_R ;
- 2) $f_t(o) = o$ для всех $t \in [0, 1]$;
- 3) $f_1(E_{1,j}) = E_{2,j}$ для каждого $j = 1, \dots, n$;
- 4) $f_1(U_{\Gamma_1}) = U_{\Gamma_2}$.

ЛЕММА 6.2. Изотопия f_t из леммы 6.1 может быть продолжена до гладкой изотопии $F_t: E_R \times \mathbb{C}^1 \rightarrow E_R \times \mathbb{C}^1$ такой, что

- 1) $F_t|_{E_R \times D_R} = f_t \times \text{Id}$;
- 2) F_t – тождественное отображение вне $E_R \times D_{2R}$.

ЛЕММА 6.3. Пусть гладкие вещественные функции $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &< \alpha(u, v) < 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &< \beta(u, v) < 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{aligned}$$

для всех $(u, v) \in E_1 = \{\sqrt{u^2 + v^2} \leq 1\}$ и для некоторых положительных $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$. Тогда существует гладкая вещественная функция $f_{(\alpha, \beta)t}(z, u, v)$, $(z, t, u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \times E_1$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $f_t(z, u, v)$ является монотонной функцией для каждой фиксированной точки $(t, u, v) \in [0, 1] \times E_1$;
- 2) $f_t(z, u, v) \equiv z$, если $0 \leq z \leq \varepsilon_1$;
- 3) $f_t(z, u, v) \equiv z$, если $1 - \varepsilon_1 \leq z \leq 1$;
- 4) $f_t(z, u, v) = z + t(\beta(u, v) - \alpha(u, v))$, если $\alpha(u, v) - \varepsilon_2 \leq z \leq \alpha(u, v) + \varepsilon_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $\mathcal{B} = (b_1(x), \dots, b_p(x))$ – конечный набор не пересекающихся друг с другом гладких сечений проекции $\pi: E \times D_R \rightarrow E = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid |x| \leq 1\}$. Тогда существует гладкая изотопия $F_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$ такая, что:

- 1) $F_t(x, y) = (x, F_{t,x}(y))$ для всех t и x ;
- 2) $F_1(\mathcal{B})$ является набором постоянных сечений.

Более того, если все $b_j(x)$ являются постоянными сечениями (равными b_j) над некоторой окрестностью границы диска E , то изотопия F_t может быть выбрана таким образом, что:

- 3) F_t является тождественным отображением в некоторой окрестности границы множества $E \times D_R$ для всех $t \in [0, 1]$;
- 4) $F_1(x, b_j(x)) = (x, b_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение будет доказано, если мы докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6.4. Пусть $\mathcal{B} = (b_1(x), b_2, \dots, b_k)$ – набор не пересекающихся друг с другом гладких сечений проекции $\pi: E \times D_R \rightarrow E = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid |x| \leq 1\}$ такой, что $b_2, \dots, b_k$ являются постоянными сечениями. Тогда существует такая гладкая изотопия $F_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$, что:

- 1) $F_t(x, y) = (x, F_{t,x}(y))$ для всех t и x ;
- 2) $F_t(x, b_j) = (x, b_j)$ для всех t и j ;
- 3) $F_1(x, b_1(x))$ является постоянным сечением.

Более того, если $b_1(x)$ – постоянное сечение (равное b_1) над некоторой окрестностью границы диска E , то изотопия F_t может быть выбрана таким образом, что:

- 4) F_t является тождественным отображением над некоторой окрестностью границы множества $E \times D_R$ для всех $t \in [0, 1]$;
- 5) $F_1(x, b_j(x)) = (x, b_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $S = \{y \in D_R \mid y = b_1(x), x \in E\}$. Предположим вначале, что мы можем найти односвязную окрестность $U \subset D_R$ множества S такую, что $b_j \notin U$ для $j = 2, \dots, k$. По теореме Римана существует комплексно-аналитическое биективное отображение $\varphi: U \rightarrow U_1$, где $U_1 = \{z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C} \mid 0 < z_1 < 1, 0 < z_2 < 1\}$. Так как S компактно, то существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < z_l < 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad l = 1, 2,$$

для $z_1 + iz_2 \in \varphi(S)$. Мы имеем две гладкие функции $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ такие, что $\varphi(b_1(x)) = \alpha_1(x) + i\alpha_2(x)$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \alpha_l(x) < 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. По лемме 6.3 для любых двух гладких функций $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ (например, если $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ – постоянные функции такие, что $\varphi(b_1) = \beta_1 + i\beta_2$), удовлетворяющих неравенствам

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \beta_l(x) < 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad l = 1, 2,$$

существует гладкая изотопия $F_t: E \times U_1 \rightarrow E \times U_1$, заданная

$$\begin{aligned} F_t^*(x) &\equiv x, \\ F_t^*(z_1) &= f_{(\alpha_1, \beta_1)th(|x|)}(z_1, u, v), \\ F_t^*(z_2) &= f_{(\alpha_l, \beta_l)th(|x|)}(z_2, u, v), \end{aligned}$$

где $u + iv = x$ и $f_{(\alpha_l, \beta_l)t}(z_l, u, v)$ – функция, описанная в лемме 6.3, и $h(r)$ – гладкая вещественная монотонная функция такая, что $h(r) = 1$, если $r < \varepsilon$, и $h(r) = 0$, если $r > 1 - \varepsilon$. Легко видеть, что изотопия φ^*F_t удовлетворяет условиям 1)–4) леммы 6.4.

Мы не сможем найти такую односвязную окрестность U множества S , только если S “наматывается” вокруг одной из точек b_j , $j = 2, \dots, k$. Покажем, что в этом случае существует композиция изотопий, “разматывающая” S . Для этого зафиксируем точку $x_0 = 1 \in E$. Пусть $\gamma(t) = x_t$ – гладкий простой (без самопересечений) путь, соединяющий x_0 с некоторой точкой $x_1 \in E$. Обозначим через $n_{j,\gamma}(x_1)$ число полных поворотов вокруг точки b_j , двигающейся вдоль пути $b_1(\gamma(t))$. Очевидно, $n_j(x_1) = n_{j,\gamma}(x_1)$ зависит только от точки x_1 и не зависит от пути γ , соединяющего x_0 с x_1 , так как E односвязно и $b_1(x)$ – гладкая функция. Обозначим

$$E_{n_2, \dots, n_k} = \{x \in E \mid n_j(x) = n_j\},$$

и пусть $E_{\max}$ (соответственно $E_{\min}$) – множество $E_{n_2^0, \dots, n_k^0}$, где n_j^0 – локальный максимум (соответственно минимум) чисел $n_j(x)$ по всем j . Очевидно, если $E_{\max} = E_{\min} = E_{0, \dots, 0}$, то мы можем найти односвязную окрестность U множества S такую, что $b_j \notin U$ для $j = 2, \dots, k$. Положим $b_1 = b_1(x_0)$.

Обозначим через $\bar{l}_j$ прямую, проходящую через b_1 и b_j , и выберем координату u_j на $\bar{l}_j$ так, что $u_j(b_1) = 0$. Пусть $l_j = A_j y_1 + B_j y_2$ – такая линейная функция, что $\bar{l}_j = \{l_j(y_1, y_2) = 0\}$, где $y_1 = \Re y$ и $y_2 = \Im y$.

Пусть

$$S_j = S \cap \{y \in \bar{l}_j \mid u_j(y) < u_j(b_j), \text{ если } u_j(b_j) > 0, \\ \text{и } u_j(y) > u_j(b_j), \text{ если } u_j(b_j) < 0\}.$$

Обозначим $C_j = \{x \in E \mid y = b_1(x) \in S_j\}$. Рассмотрим множество $G = E \setminus \bigcup_{j=2}^k C_j$, являющееся несвязным объединением конечного числа связных компонент. Каждые две соседние компоненты G_m и G_l отделяются друг от друга некоторой связной компонентой C_j^0 множества C_j для одного из j . Если $n_j(m) = n_j(l)$, где $n_j(k) = n_j(x)$ для $x \in G_k$, то мы заменим G_m и G_l на объединение $G_m \cup G_l \cup C_j^0$.

Очевидно, существует такая связная компонента G^0 множества G со связной границей ∂G^0 и, следовательно, G^0 является односвязной. Более того, легко видеть, что существует такая односвязная окрестность U_0 множества $\{y \in D_R \mid y = b_1(x), x \in \bar{g}^0\}$, что $b_j \notin U_0$ для $j = 2, \dots, k$. Пусть j_0 таково, что ∂G^0 является подмножеством в $\{l_{j_0}(b_1(x)) = 0\}$. В силу выбора G^0 мы можем предположить, что $l_{j_0}(b_1(x)) \geq 0$ для всех $x \in G^0$. Так как $l_{j_0}(b_1(x))$ – гладкая функция, множество $\{l_{j_0}(b_1(x)) = \delta\}$ является гладкой кривой для достаточно близкого к нулю числа δ . Следовательно, не теряя общности, мы можем заменить G^0 на множество $\tilde{G}^0$ такое, что

- 1) G^0 почти совпадает с $\tilde{G}^0$ и содержится в $\tilde{G}^0$;
- 2) граница множества $\tilde{G}^0$ является подмножеством в $\{l_{j_0}(b_1(x)) = \delta\}$ для некоторого $\delta < 0$ близкого к нулю;
- 3) замыкание множества $b_1(\tilde{G}^0)$ содержится в U_0 , где U_0 – такое односвязное открытое множество, что $b_j \notin U_0$ для $j = 2, \dots, k$.

Как и выше, мы можем найти голоморфную координату $z = z_1 + iz_2$, $z = \varphi(y)$, в U_0 такую, что $U_0 \simeq \{0 < z_1 < 1\} \times \{0 < z_2 < 1\}$. Очевидно, для замыкания G^1 множества $\tilde{G}^0$ найдутся гладкие функции $\alpha: G^1 \rightarrow U_0$, $z = \varphi(b_1(x)) = \alpha_1(x) + i\alpha_2(x)$, и $\beta(x) = \beta_1(x) + i\beta_2(x)$ такие, что $\beta(x) = \varphi(b_1(x))$ для x , лежащих в окрестности границы ∂G^1 , и $l_{j_0}(\beta(x)) < 0$ для всех $x \in G^1$. Как и выше, применяя лемму 5.2, мы можем найти гладкую изотопию $F_t: G^1 \times U_0 \rightarrow G^1 \times U_0$ такую, что $F_1(x, b_1(x))$ не пересекается с множеством $\{(x, y) \mid x \in G^1, y \in \bigcup \bar{l}_j\}$ и F_t является тождественным отображением в окрестности границы $G^1 \times U_0$. Следовательно, эта изотопия может быть продолжена до изотопии на $E \times D_R$. Очевидно, для образа $F_1(b_1(x))$ сечения $b_1(x)$ мы можем повторить конструкцию множества G и заметить, что число связных компонент множества G уменьшилось. Следовательно, после конечного числа аналогичных шагов мы построим требуемую изотопию как композицию изотопий, построенных на каждом шаге.

Из изложенного выше следует

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Пусть $C \subset D$ – связное множество такое, что замыкание $\bar{C}$ множества C и граница ∂D диска D имеют непустое пересечение. Предположим,

что $n_j(x) = 0$ для всех $x \in C$ и для всех $j = 2, \dots, k$. Тогда на каждом шаге, кроме последнего, множество G^0 может быть выбрано так, что $C \not\subset G^0$.

Доказательство леммы 6.4 в случае, когда $b_1(x)$ является постоянным сечением над некоторой окрестностью границы диска E , следует из замечания 6.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Пусть $\mathcal{B}_1 = (b_{1,1}(x), \dots, b_{1,p}(x))$ и $\mathcal{B}_2 = (b_{2,1}(x), \dots, b_{2,p}(x))$ – наборы не пересекающихся друг с другом гладких сечений проекции $\pi: E \times D_R \rightarrow E = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid |x| \leq 1\}$ такие, что для всех j сечения $b_{1,j}(x)$ и $b_{2,j}(x)$ совпадают над некоторой окрестностью U границы диска E . Легко видеть, что гладкие изотопии $F'_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$ для $\mathcal{B}_1$ и $F''_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$ для $\mathcal{B}_2$ из предложения 6.1 могут быть выбраны таким образом, что F'_t и F''_t совпадают над U .

Пусть $\mathcal{B} = (b_1(x), \dots, b_p(x))$ – набор не пересекающихся друг с другом гладких сечений проекции $\pi: E \times D_R \rightarrow E = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid |x| \leq 1\}$. Обозначим

$$U_\varepsilon(b_j(x)) = \{(x, y) \in E \times D_R \mid |y - b_j(x)| < \varepsilon\}$$

трубчатую окрестность сечения $b_j(x)$ и положим $U_\varepsilon(\mathcal{B}) = \cup U_\varepsilon(b_j(x))$. Пусть $F_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$ – гладкая изотопия. Рассмотрим гладкое отображение $\tilde{F}_t: U_\varepsilon(\mathcal{B}) \times [0, 1] \rightarrow E \times D_R \times [0, 1]$, заданное

$$\tilde{F}_t(x, y) = (x, y + (F_t(b_j(x)) - b_j(x)),$$

если $(x, y) \in U_\varepsilon(b_j(x))$. Заметим, что $\tilde{F}'_{t|\mathcal{B}} = F_{t|\mathcal{B}}$.

Используя стандартную технику склеивания векторных полей, можно доказать, что верна следующая лемма.

ЛЕММА 6.5. Пусть изотопия $F_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$ удовлетворяет условиям предложения 6.1. Тогда для некоторого $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$ отображение $\tilde{F}'_t: U_{\varepsilon_1}(\mathcal{B}) \times [0, 1] \rightarrow E \times D_R \times [0, 1]$ может быть продолжено до гладкой изотопии $\tilde{F}_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$, удовлетворяющей всем условиям предложения 6.1.

ЛЕММА 6.6. Пусть $\mathcal{B}_i = (b_{i,1}(x), \dots, b_{i,p}(x))$, $i = 1, 2$, – два набора не пересекающихся друг с другом гладких сечений проекции $\pi: E \times D_R \rightarrow E = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid |x| \leq 1\}$. Тогда существует гладкая изотопия $F_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$ такая, что:

- 1) $F_t(x, y) = (x, F_{t,x}(y))$ для всех t и x ;
- 2) для каждого j существует такая окрестность U_j сечения $b_j(x)$, что $F_{1|U_j}$ голоморфна по y ;
- 3) $F_1(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$ над $E_{R_1} \subset E$ для некоторого $R_1 < 1$;
- 4) F_t – тождественное отображение в некоторой окрестности границы множества $E \times D_R$ для всех $t \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 6.1 и леммы 6.5 следует существование гладкой изотопии $\tilde{F}_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$, удовлетворяющей условиям 1), 2) леммы 6.6 и такой, что $\tilde{F}_1(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$. Пусть $h(r)$ – такая гладкая вещественная монотонная функция, что $h(r) = 1$, если $r \leq R_1 < 1 - \varepsilon$, и $h(r) = 0$, если $r \geq 1 - \varepsilon$. Тогда $F_t(x, y) = \tilde{F}_{h(|x|)t}(x, y)$ удовлетворяет всем условиям леммы 6.6.

ЛЕММА 6.7. Пусть $\mathcal{B}_i = (b_{i,1}(x), \dots, b_{i,p}(x))$, $i = 1, 2$, – два набора не пересекающихся друг с другом гладких сечений проекции $\pi: E \times D_R \rightarrow E = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid x_1 = \Re x \in [0, 1], x_2 = \Im x \in [0, 1]\}$ таких, что над $E_\varepsilon = \{0 \leq x_1 \leq \varepsilon\} \times \{0 \leq x_2 \leq 1\} \cap \{1 - \varepsilon \leq x_1 \leq 1\} \times \{0 \leq x_2 \leq 1\}$ сечения $(b_{1,1}(x), \dots, b_{1,p}(x)) = (b_{2,1}(x), \dots, b_{2,p}(x)) = (b_1, \dots, b_p)$, $x_1 \in [0, 1]$, суть совпадающие постоянные сечения. Пусть геометрические косы $\overline{\mathcal{B}}_1 = (b_{1,1}(x_1), \dots, b_{1,p}(x_1))$ и $\overline{\mathcal{B}}_2 = (b_{2,1}(x_1), \dots, b_{2,p}(x_1))$, $x_1 \in [0, 1]$, являются двумя представителями одного и того же элемента из группы кос B_p . Тогда существует гладкая изотопия $F_t: E \times D_R \rightarrow E \times D_R$ такая, что:

- 1) $F_t(x, y) = (x, F_{t,x}(y))$ для всех t и x ;
- 2) для каждого j существует такая окрестность U_j сечения $b_j(x)$, что $F_1|_{U_j}$ голоморфно по y ;
- 3) $F_1(\overline{\mathcal{B}}_1) = \overline{\mathcal{B}}_2$ над $\{0 \leq x_1 \leq 1\} \times \{|x_2| < \varepsilon_2\}$ для некоторого $\varepsilon_2 > 0$;
- 4) F_1 – тождественное отображение в некоторой окрестности границы множества $E \times D_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 6.1 существует гладкая изотопия $\tilde{F}_t$ такая, что $\tilde{F}_1(b_{1,j}(x)) = b_j$, $j = 1, \dots, p$, являются постоянными сечениями.

Зафиксируем точку $x_0 = (0, 0)$. Как и выше, для каждого сечения $\tilde{F}_1(b_{2,j_0}(x))$ мы можем определить функцию $n_{j_0,j}(x)$, равную числу поворотов вокруг точки b_j . Очевидно, $F_1(\overline{\mathcal{B}}_1)$ и $F_1(\overline{\mathcal{B}}_2)$ также являются представителями одного и того же элемента из B_p . Следовательно, для каждого сечения $\tilde{F}_1(b_{2,j_0}(x))$ число поворотов $n_{j_0,j}(x) = 0$ для $x \in \{1 - \varepsilon \leq x_1 \leq 1\} \times \{0 \leq x_2 \leq 1\}$. Поэтому лемма 6.7 следует из замечания 6.1 и леммы 6.6.

§ 7. Типы брэйд-монодромного разложения и диффеоморфизмы пар

Рассмотрим линейную проекцию $\pi: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ с центром в $z \in \mathbb{CP}^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (полуалгебраическая кривая (относительно π)). Замкнутое множество $B \subset \mathbb{CP}^2$, $z \notin B$, называется полуалгебраической кривой относительно проекции π , если для каждой точки $x \in B$ существует окрестность $U \subset \mathbb{CP}^2$ этой точки и аналитические координаты (z_1, z_2) в U , $x = (0, 0)$, такие, что:

- 1) $\pi|_U$ задается равенством $\pi(z_1, z_2) = z_1$;
- 2) либо $B \cap U$ является гладким сечением проекции $\pi|_U$ над $\pi(U)$, либо $B \cap U$ совпадает с множеством, заданным уравнением $f(z_1, z_2) = 0$, где $f(z_1, z_2)$ – некоторая аналитическая функция.

Полуалгебраическая кривая является (обобщенной) *каскадной* кривой, если в п. 2) функция f совпадает с $f = z_1^k - z_2^2$, $k \in \mathbb{N}$. Точка $(0, 0)$, в окрестности которой B задается уравнением $z_1^k - z_2^2 = 0$, называется *особой* точкой полуалгебраической кривой B . Очевидно, любая алгебраическая кривая $B \subset \mathbb{CP}^2$ является полуалгебраической относительно общей проекции.

Как и в алгебраическом случае, мы можем разрешить особые точки полуалгебраической кривой B с помощью композиции σ -процессов $\nu: \overline{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ (точки касания кривой B со слоями проекции π разрешать не надо) и получить неособую риманову поверхность $\overline{B} \subset \overline{\mathbb{P}}^2$. Композиция $(\pi \circ \nu)|_{\overline{B}}: \overline{B} \rightarrow \mathbb{P}^1$ позволяет ввести на $\overline{B}$ комплексную структуру так, что $(\pi \circ \nu)|_{\overline{B}}$ будет голоморфным отображением, однако, $\nu|_{\overline{B}}: \overline{B} \rightarrow \mathbb{P}^2$ не будет голоморфным, а будет только C^∞ -отображением.

Очевидно, как и в алгебраическом случае, для любой полуалгебраической кривой можно определить брэйд-монодромию относительно π , брэйд-монодромное разложение и брэйд-монодромный тип.

Пусть $\sigma: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ – σ -процесс с центром в z , $L = \sigma^{-1}(z)$. Обозначим снова через $\pi: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ композицию $\pi \circ \sigma$.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть две (обобщенные) каспидальные полуалгебраические кривые B_1 и B_2 имеют один и тот же брэйд-монодромный тип $\Delta(B_1) = \Delta(B_2)$. Тогда существует гладкая изотопия $F_t: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$ такая, что:

- 1) $F_t|_U$ – тождественное отображение для всех $t \in [0, 1]$, где U – некоторая окрестность исключительной кривой L ;
- 2) для каждой точки $p \in B_1$ существуют окрестности U_1 точки p и $U_2 = F_1(U_1)$ точки $F_1(p)$ с локальными комплексными координатами (x_i, y_i) в U_i , $i = 1, 2$, такие, что $\pi|_{U_i}$ совпадает с проекцией $(x_i, y_i) \mapsto x_i$ и $F_1^*(y_2) = \phi(x_1, y_1)$ является гладкой и, более того, голоморфной по y_1 комплексной функцией;
- 3) для каждой особой точки $s \in B_1$ существует окрестность $U \subset \mathbb{F}_1$ точки s такая, что $F_1|_U: U \rightarrow F(U)$ является голоморфным отображением;
- 4) $F_1(B_1) = (B_2)$.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть две (обобщенные) каспидальные полуалгебраические кривые B_1 и B_2 имеют один и тот же брэйд-монодромный тип $\Delta(B_1) = \Delta(B_2)$. Тогда существует диффеоморфизм пар $F: (\mathbb{CP}^2, B_1) \rightarrow (\mathbb{CP}^2, B_2)$, удовлетворяющий условиям 2) и 3) теоремы 7.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Назовем изотопию $F_t: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$ согласованной с полуалгебраической кривой B (относительно проекции π), если $F_t(B)$ является полуалгебраической кривой относительно π для любого $t \in [0, 1]$. Требуемая изотопия F_t будет получена как композиция последовательности согласованных с B_1 гладких изотопий.

Без ограничения общности мы можем предположить, что B_1 и B_2 вложены в одно и то же пространство $\mathbb{F}_1$ и что они являются каспидальными алгебраическими кривыми степени p относительно проекции π . Зафиксируем точку $\infty \in \mathbb{CP}^1$ такую, что $\pi^{-1}(\infty)$ является общим слоем проекции π относительно каждой кривой B_1 и B_2 . Обозначим $\mathbb{C}^1 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$ и $\mathbb{C}^2 = \mathbb{F}_1 \setminus (\pi^{-1}(\mathbb{C}^1) \cup L)$. Выберем координаты (x, y) в $\mathbb{C}^2$ так, что $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$ является проекцией на первую координату.

Как и в §6, положим $K_i(x) = \{y \mid (x, y) \in B_i\}$, $i = 1, 2$ ($K_i(x)$ – проекция на ось y множества $\pi^{-1}(x) \cap B_i$), $N_i = \{x \mid \#K_i(x) \leq p\}$, $M'_i = \{(x, y) \in B_i \mid \pi|_{B_i} \text{ не этально в } (x, y)\}$ ($\pi(M'_i) = N_i$).

Пусть E_R (соответственно D_R) – замкнутый диск радиуса R с центром в начале координат o на оси x (соответственно на оси y) такой, что $M'_i \subset E_R \times D_R$, $N_i \subset \text{Int}(E_R)$, и пусть $\#K_i(o) = p$.

Для каждой точки $u_{i,j} \in N_i$, $j = 1, \dots, n$, выберем диск $E_{i,j}$ радиуса $\varepsilon \ll 1$ с центром в $u_{i,j}$ и выберем пути $T_{i,1}, \dots, T_{i,n}$, соединяющие точки $u_{i,j}$ с o так, что $\langle T_{i,1}, \dots, T_{i,n} \rangle$ является кустом. Для каждого $j = 1, \dots, n$ выберем трубчатую окрестность $U_{i,j}$ пути $T_{i,j}$ и диск E_o радиуса $\varepsilon \ll 1$ с центром в o так, что множество $U_{\Gamma_i} = \left(\bigcup_{j=1}^n U_{i,j}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n E_{i,j}\right) \cup E_o$ диффеоморфно диску и его граница ∂U_{Γ_i} является трубчатой окрестностью g -базиса $\Gamma_i = (l(T_{i,1}), \dots, l(T_{i,n}))$ фундаментальной группы $\pi_1(E_R \setminus N_i, o)$.

Из лемм 6.1 и 6.2 следует, что $E_{i,j} = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid |x - x_{i,j}| < 2\}$, где $x_{i,j}$ – координата точки $u_{i,j}$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $T_{i,j} \cap E_{i,j}$ является радиусом в $E_{i,j}$. Продолжим этот радиус до диаметра $d_{i,j}$ и обозначим через $\tilde{T}_{i,j}$ путь, продолжающий $T_{i,j}$ вдоль этого диаметра, $T_{i,j} \subset \tilde{T}_{i,j}$.

Шаг I. Так как B_1 и B_2 имеют один и тот же брэйд-мономорфный тип, по лемме 4.3 мы можем выбрать (и фиксировать) g -базисы Γ_i , $i = 1, 2$, такие, что соответствующие им брэйд-мономорфные разложения на множители $\Delta(B_1)$ и $\Delta(B_2)$ эквивалентны относительно сопряжения. Пусть U_{Γ_i} – трубчатая окрестность g -базиса Γ_i .

ЛЕММА 7.1. Пусть $B \subset \mathbb{F}_1$ – полуалгебраическая кривая, и пусть $F_t: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$ – согласованная с ней гладкая изотопия такая, что F_t – тождественное отображение над дополнением к некоторой окрестности $U \subset \mathbb{CP}^1$, $o \notin U$. Тогда кривые B и $F_1(B)$ имеют одно и то же брэйд-мономорфное разложение на множители.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем непрерывное семейство гомоморфизмов $\varphi_t: \pi_1(E \setminus N, o) \rightarrow B_p[\mathbb{C}_o, K]$. Так как $B_p[\mathbb{C}_o, K]$ является дискретной группой, то брэйд-мономорфные разложения на множители кривых $F_t(B)$ не зависят от t .

Из лемм 6.1, 6.2 и 7.1 следует, что существует гладкая изотопия $F_t: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$, удовлетворяющая условиям 1)–3) теоремы 7.1 и такая, что:

- 1) $F_1(U_{\Gamma_1} \times \pi^{-1}(U_{\Gamma_1})) = U_{\Gamma_2} \times \pi^{-1}(U_{\Gamma_2})$;
- 2) $F_1(N_1 \times \pi^{-1}(N_1)) = N_2 \times \pi^{-1}(N_2)$;
- 3) типы особых точек $s_{1,j} \in F_1(B_1)$ и $s_{2,j} \in B_2$ над точкой $u_{2,j} = u_j \in N_2 = N$ совпадают;
- 4) B_1 и $F_1(B_1)$ имеют одно и то же (с точностью до сопряжения) брэйд-мономорфное разложение на множители.

Обозначим снова через B_1 ее образ $F_1(B_1)$.

Шаг II. По лемме 6.6 существуют гладкие изотопии $F'_t: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$ и $F''_t: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$, удовлетворяющие условиям 1)–3) теоремы 7.1, и такие, что $F'_1(B_1)$ совпадают с $F''_1(B_2)$ над E_o , где E_o – диск с центром в начале координат $o \in \mathbb{C}^1$. Более того, мы можем предполагать, что $F'_1(B_1)$ и $F''_1(B_2)$ являются постоянными сечениями над E_o : $K(u) = \{y_j \in D_R \mid y_j = 2j - 1, j \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq p - 1\}$ для всех $u \in E_o$.

Обозначим снова через B_1 и B_2 их образы $F'_1(B_1)$ и $F''_1(B_2)$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Изотопии F'_t и F''_t меняют брэйд-мономорфные разложения на множители, связанные с кривыми B_1 и B_2 , на эквивалентные относительно сопряжения, но не меняют их брэйд-мономорфные типы разложения.

Зафиксируем остов $(\sigma_1, \dots, \sigma_{p-1})$ группы $B_p[\mathbb{C}_o^1, K(o)]$,

$$\sigma_j = [2j - 3, 2j - 1] = \{y \in \mathbb{C}^1 \mid 2j - 3 \leq \operatorname{Re} y \leq 2j - 1, \operatorname{Im} y = 0\}.$$

Шаг III. Пусть в множестве $K_i(u_j) = \{q_{i,1}, \dots, q_{i,p-1}\}$ точка $q_{i,1}$ является особой точкой кривой B_i , где u_j – центр диска $E_j = E_{1,j} = E_{2,j}$, участвующий в определении трубчатой окрестности g -базиса.

ЛЕММА 7.2. Пусть $B = \{f(x, y) = 0\}$ – росток аналитической кривой в $U = E_\varepsilon \times D_\varepsilon$, и пусть $(0, 0)$ – особая точка кривой B кратности 2 в направлении $x = \operatorname{const}$ (т. е. $\#(B \cap (\{u\} \times D_\varepsilon)) = 2$ для каждой точки $u \in E_\varepsilon$). Тогда существует гладкая изотопия $F_t: U \rightarrow U$ такая, что:

- 1) $F_t = \text{Id}$ в окрестности границы множества U для всех $t \in [0, 1]$;
- 2) существует $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$ такое, что $F_1(B) = \{y^2 - x^k = 0\}$ для каждого $x \in E_{\varepsilon_1}$;
- 3) в $V = E_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_1}$ для каждого t отображение F_t является голоморфным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По подготовительной теореме Вейерштрасса мы можем предполагать, что B задана в окрестности U уравнением

$$y^2 + h_1(x)y + h_2(x) = 0, \quad (3)$$

где $h_i(x)$ – аналитические функции. Запишем (3) в виде

$$\left(y + \frac{1}{2}h_1(x)\right)^2 - \left(\frac{1}{4}h_1^2(x) - h_2(x)\right) = (y + g_1(x))^2 - x^k g_2(x) = 0,$$

где $g_2(0) = c = re^{i\varphi} \neq 0$.

Пусть F'_t – изотопия, заданная $F'_t(x, y) = (x, y + th(|x|)g_1(x))$, где $h(r)$ – гладкая монотонная функция такая, что $h(r) = 1$, если $r < \varepsilon_1 \ll \varepsilon$, и $h(r) = 0$, если $r > \varepsilon - \varepsilon_1$.

Можно показать, что гладкое отображение $\tilde{F}''_t : E_{\varepsilon_1} \times [0, 1] \rightarrow E_{\varepsilon} \times [0, 1]$, заданное

$$\tilde{F}''_t(x) = x((1 + (r - 1)t)e^{it\varphi} + t(g_2(x) - c))^{1/k},$$

может быть продолжено до гладкой изотопии $\tilde{F}''_t : E_{\varepsilon} \times [0, 1] \rightarrow E_{\varepsilon} \times [0, 1]$ так, что $\tilde{F}''_t$ является тождественным отображением в окрестности границы множества E_{ε} . Тогда композиция $F_t = F''_t \circ F'_t$, где F''_t задана в U следующим образом $F''_t(x, y) = (\tilde{F}''_t(x), y)$, удовлетворяет всем условиям леммы 7.2.

Из лемм 6.6 и 7.2 следует, что существуют гладкие изотопии $F'_t : \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$ и $F''_t : \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$, удовлетворяющие условиям 1)–3) теоремы 7.1 и такие, что:

- 1) $F'_1(B_1)$ и $F''_1(B_2)$ совпадают над $\bigcup_{j=1}^n E'_j$, где $E'_j \subset E_{1,j} = E_{2,j} = E_j$ – некоторые маленькие окрестности точек $u_{i,j} = u_j$;
- 2) применив леммы 6.1 и 6.2, мы можем считать, что $E'_j = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid |x - x_j| < 2\}$, где x_j – координата точки u_j ;
- 3) в окрестности точки $(x_j, 0)$ кривые $F'_1(B_1)$ и $F''_1(B_2)$ заданы уравнением $y^2 = (x - x_j)^k$;
- 4) остальные $p - 2$ ветви кривых $F'_1(B_1)$ и $F''_1(B_2)$ являются постоянными сечениями над $u \in E'_j$ и $K(u'_j) = \{y_1 = -1, \dots, y_j = 2j - 3, \dots, y_p = 2p - 3\}$ для $u'_j = \{x'_j = x_j + 1\}$.

Обозначим снова через B_1 и B_2 образы $F'_1(B_1)$ и $F''_1(B_2)$ соответственно и E'_j – через E_j . Не ограничивая общности, мы можем считать, что $u'_j \in T_j$. Обозначим через u''_j точку, лежащую на диаметре $\tilde{T}_j \cap E_j$ и симметричную точке u'_j относительно центра u_j . Пусть d'_j – часть диаметра, заключенного между u'_j и u''_j .

Шаг IV. Согласно лемме 7.1 и замечанию 7.1 описанные выше изотопии не изменили типы брэйд-монодромных разложений кривых B_1 и B_2 .

Запишем брэйд-монодромные разложения на множители для кривых B_1 и B_2 в выбранном выше g -базисе $\Gamma = \Gamma_2$:

$$\Delta^2 = \prod_{j=1}^n Q_j^{-1} H_1^{\nu_j} Q_j \quad \text{для } B_1,$$

$$\Delta^2 = \prod_{j=1}^n Q_j^{-1} Q_j^{-1} H_1^{\nu_j} Q_j Q \quad \text{для } B_2.$$

Покажем, что в нашем случае существует гладкая изотопия $F_t: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$, удовлетворяющая условиям 1)–3) теоремы 7.1 и такая, что:

- 1) F_t – тождественное отображение над дополнением к некоторой окрестности U_o точки o ;
- 2) $F_1(B_1) = B_2$ над некоторой окрестностью $U'_o \subset U_o$;
- 3) $F_1(B_1)$ и B_2 имеют одинаковые брейд-монодромные разложения на множествах.

Действительно, пусть $K = \{y_j \in \mathbb{C}^1 \mid y_j = 2j - 3, j = 1, 2, \dots, p\}$. Полуоборот $H_j = H(\sigma_j) \in B_p = B_p[\mathbb{C}_o^1, K(o)]$ может быть представлен геометрической косой $\bar{\sigma}_j(s_1)$ в $\mathbb{C}^1 \times [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{j,l}(s_1) &= l \quad \text{для } l = 1, \dots, j-1, j+2, \dots, p, \\ \bar{\sigma}_{j,j}(s_1) &= e^{\pi(\beta(s_1)+1)i} + 2j - 2, \\ \bar{\sigma}_{j,j+1}(s_1) &= e^{\pi\beta(s_1)i} + 2j - 2,\end{aligned}$$

где $s_1 \in [0, 1]$ и $\beta(s_1)$ – вещественная гладкая монотонная функция такая, что $\beta(s_1) = 0$ для $s_1 \in [0, \frac{1}{3}]$ и $\beta(s_1) = 1$ для $s_1 \geq \frac{2}{3}$.

Элемент H_j^{-1} может быть представлен геометрической косой $\bar{\sigma}_j^{-1}(s_1)$ в $\mathbb{C}^1 \times [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{j,l}^{-1}(s_1) &= l \quad \text{для } l = 1, \dots, j-1, j+2, \dots, p, \\ \bar{\sigma}_{j,j}^{-1}(s_1) &= e^{\pi(-\beta(s_1)+1)i} + 2j - 2, \\ \bar{\sigma}_{j,j+1}^{-1}(s_1) &= e^{-\pi\beta(s_1)i} + 2j - 2.\end{aligned}$$

Произведение $Q = H_{j_1}^{\delta_1} \cdot \dots \cdot H_{j_k}^{\delta_k}$, где $\delta_l = \pm 1$, может быть представлено геометрической косой $\bar{Q}(s_1)$ в $\mathbb{C}^1 \times [0, k]$:

$$\bar{Q}_l(s_1) = \bar{\sigma}_{j_m, l}^{\delta_{j_m}}(s_1 - m + 1) \quad \text{для } s_1 \in [m-1, m].$$

Пусть $U' \subset U_o$ – некоторая окрестность точки o , для которой существует такой диффеоморфизм $\varphi: U' \rightarrow V = (-1, 2k+1) \times (0, 2)$, что $\varphi(o) = (0, 0)$. Очевидно, пути T_j , представляющие тот же куст, могут быть выбраны таким образом, что $\varphi(T_j \cap U') \subset \{(v_1, v_2) \in V \mid v_1 \leq 0\}$. Пусть $\alpha(r)$, $r \geq 0$, – вещественная гладкая монотонная функция такая, что $\alpha(r) = 1$ для $r \in [0, \frac{4}{3}]$ и $\alpha(r) = 0$ для $r \geq \frac{5}{3}$. Для $\bar{Q} = \bar{\sigma}_{j_1}^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \bar{\sigma}_{j_k}^{\delta_k}$ рассмотрим гладкую изотопию $F_{\bar{Q}, t} =: V \times E_R \rightarrow V \times E_R$, где

$$F_{\bar{Q}, t} = F_{2k, \bar{\sigma}_{j_1}^{-\delta_1}, t} \circ \dots \circ F_{k+2, \bar{\sigma}_{j_{k-1}}^{-\delta_{k-1}}, t} \circ F_{k+1, \bar{\sigma}_{j_k}^{-\delta_k}, t} \circ F_{k, \bar{\sigma}_{j_k}^{\delta_k}, t} \circ \dots \circ F_{1, \sigma_{j_1}^{\delta_1}, t}$$

и $F_{l, \bar{\sigma}_j^{\delta_l}, t}$ задается функциями

$$F_{l, \bar{\sigma}_j^{\delta_l}, t}(s_1, s_2, y) = (s_1, s_2, f_{l, \bar{\sigma}_j^{\delta_l}, t}(s_1, s_2, y)),$$

где

$$f_{l, \bar{\sigma}_j^{\delta_l}, t}(s_1, s_2, y) = \begin{cases} y, & s_1 \leq l-1; \\ 2j-2 + (y-2j+2) \\ \quad \times e^{i\pi\delta_j\alpha(s_2)\beta(s_1-l+1)\alpha(|y-2j+2|)t}, & l-1 \leq s_1 \leq l; \\ 2j-2 + (y-2j+2) \\ \quad \times e^{i\pi\delta_j\alpha(s_2)\alpha(|y-2j+2|)t}, & s_1 \geq l, \end{cases}$$

если $l \leq k$, и

$$f_{l, \overline{\sigma}_j^l, t}(s_1, s_2, y) = \begin{cases} y, & s_1 \geq l; \\ 2j - 2 + (y - 2j + 2) \\ \quad \times e^{i\pi\delta_j\alpha(s_2)\beta(l-s_1)\alpha(|y-2j+2|)t}, & l - 1 \leq s_1 \leq l; \\ 2j - 2 + (y - 2j + 2) \\ \quad \times e^{i\pi\delta_j\alpha(s_2)\alpha(|y-2j+2|)t}, & s_1 \leq l - 1, \end{cases}$$

если $l \geq k + 1$. Можно проверить, что:

1) $F_{\overline{Q}, t}$ – тождественное отображение над окрестностью границы множества V для всех t ;

2) $F_{\overline{Q}, 1}(\overline{\mathcal{B}}) = \overline{Q}$, где $\overline{\mathcal{B}} = \{b_1(x(s_1, 0)) \equiv -1, \dots, b_p(x(s_1, 0)) \equiv 2p - 3\}$, $0 \leq s_1 \leq k$, – тривиальная геометрическая коса;

3) $F_{\overline{Q}, 1}(\mathcal{B}_1) = \{(s_1, s_2, -1), (s_1, s_2, 1), \dots, (s_1, s_2, 2p - 3)\}$ – постоянные сечения над $\{k - \frac{1}{3} < s_1 < k + \frac{1}{3}\} \times \{0 < s_2 < 2\}$.

Такую изотопию $F_{\overline{Q}, t}$ будем называть $\overline{Q}$ -скручиванием-раскручиванием постоянных сечений с носителем $\varphi^{-1}(V)$ и с центром (V_0, z_0) , где

$$V_0 = \varphi^{-1}\left(\left\{k - \frac{1}{3} < s_1 < k + \frac{1}{3}\right\} \times \{0 < s_2 < 2\}\right)$$

и $z_0 = \varphi^{-1}((k, 0))$.

Пусть $\tilde{F}_{\overline{Q}, t} = \varphi^*(F_{\overline{Q}, t})$. Обозначим снова через B_1 ее образ $\tilde{F}_{\overline{Q}, 1}(B_1)$.

В обозначениях определения g -базиса Γ и его трубчатой окрестности мы заменим g -базис Γ на эквивалентный ему, взяв z_0 вместо o и заменив каждый путь T_j на некоторый путь с началом в точке z_0 и совпадающий с T_j вне диска E_o . Окрестность E_o заменим на некоторый диск $E_{z_0} \subset V_0$ с центром в z_0 и выберем новые окрестности U_j , лежащие в старых U_j . В дальнейшем точку z_0 мы снова будем обозначать через o .

По построению $\overline{Q}$ -скручивания-раскручивания $F_{\overline{Q}, t}$ брэйд-монодромное разложение на множители, соответствующие кривой B_1 , имеет вид

$$\Delta^2 = \prod_{j=1}^n Q^{-1} Q_j^{-1} H_1^{\nu_j} Q_j Q,$$

т. е. соответствующие кривым B_1 и B_2 брэйд-монодромные разложения на множители совпадают.

Шаг V. Пусть u'_j – выбранная на шаге III точка, $u'_j \in T_j$, и пусть $U'_\Gamma \subset U_\Gamma$ – некоторая трубчатая окрестность g -базиса Γ такая, что $U'_\Gamma \cap U(\partial U_\Gamma) = \emptyset$, где $U(\partial U_\Gamma)$ – некоторая окрестность границы ∂U_Γ трубчатой окрестности U_Γ .

Покажем, что в нашем случае существует гладкая изотопия $F_t: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$, удовлетворяющая условиям 1)–3) теоремы 7.1 и такая, что:

- 1) F_t является тождественным отображением над дополнением к U_Γ ;
- 2) $F_1(B_1) = B_2$ над U'_Γ .

Чтобы показать это, рассмотрим для каждого j геометрические косы

$$\overline{\mathcal{B}}_1 = (b_{1,j,1}(x), \dots, b_{1,j,p}(x)) \quad \text{и} \quad \overline{\mathcal{B}}_2 = (b_{2,j,1}(x), \dots, b_{2,j,p}(x)),$$

где x движется вдоль $T'_j \subset T_j$ с начальной точкой o и конечной точкой u'_j . Эти геометрические косы представляют элементы $\beta_{i,j} \in B[\mathbb{C}_o, K]$, $i = 1, 2$. Так как множители в брэйд-монодромных разложениях на множители для кривых B_1 и B_2 совпадают между собой, то

$$\beta_{1,j}^{-1} H_1^{\nu_j} \beta_{1,j} = \beta_{2,j}^{-1} H_1^{\nu_j} \beta_{2,j} = Q_j^{-1} H_1^{\nu_j} Q_j.$$

Следовательно, $\beta_j = \beta_{1,j} \beta_{2,j}^{-1} \in C(H_1)$. По теореме 5.1 элемент β_j может быть записан в виде произведения $\beta_j = \mu_{j,1} \dots \mu_{j,k_j}$, где каждый $\mu_{j,i}$ совпадает либо с $H_r^{\delta_{j,i}}$, где $\delta_{j,i} = \pm 1$ и $r = 1, 3, \dots, p$, либо с поворотом $\Delta_{1,r}^{2\delta_{j,i}}$, $r = 3, \dots, p$, заданным остовом $(\sigma_1, \dots, \sigma_{p-1})$.

С каждым таким β_j мы можем связать некоторое “скручивание-раскручивание” пространства $V_j \times \mathbb{C}^1$ аналогично тому, как это было сделано на предыдущем шаге. А именно, рассмотрим снова $V_j = (-1, 2k_j + 1) \times (0, 2)$ и для каждого $\mu_{j,i}$ определим гладкие изотопии $F_{j,\mu_{j,i},t}: V_j \times \mathbb{C} \rightarrow V_j \times \mathbb{C}$, а элементу $\beta_j = \mu_{j,1} \dots \mu_{j,k_j}$ сопоставим композицию изотопий

$$\begin{aligned} F_{j,\beta_j,t} &= F_{j,2k_j,\mu_{j,1}^{-1},t} \circ \dots \circ F_{j,k_j+2,\mu_{j,k_j-1}^{-1},t} \\ &\quad \circ F_{j,k_j+1,\mu_{j,k_j}^{-1},t} \circ F_{j,k_j,\mu_{j,k_j},t} \circ \dots \circ F_{j,1,\mu_{j,1},t} \end{aligned}$$

следующим образом. Если $\mu_{j,l} = H(\sigma_r)^{\delta_{j,l}}$, то $F_{j,l,\mu_{j,l},t} = F_{l,\bar{\sigma}_r^{\delta_{j,l}},t}$, которая была определена на предыдущем шаге (число k , участвующее в определении $F_{l,\bar{\sigma}_r^{\delta_{j,l}},t}$, в нашем случае равно k_j). Если $\mu_{j,l} = \Delta_{1,r}^{2\delta_{j,l}}$, то $F_{j,l,\mu_{j,l},t}$ определяется аналогично, а именно, задается функциями

$$F_{j,l,\mu^{\delta_{j,l}},t}(s_1, s_2, y) = (s_1, s_2, f_{j,l,\mu^{\delta_{j,l}},t}(s_1, s_2, y)),$$

где

$$f_{j,l,\mu^{\delta_{j,l}},t}(s_1, s_2, y) = \begin{cases} y, & s_1 \leq l-1; \\ r-2 + (y-r+2) \times e^{2i\pi\delta_{j,l}\alpha(s_2)\beta(s_1-l+1)\gamma(|y-r+2|)t}, & l-1 \leq s_1 \leq l; \\ r-2 + (y-r+2) \times e^{2i\pi\delta_{j,l}\alpha(s_2)\alpha(|y-r+2|)t}, & s_1 \geq l, \end{cases}$$

если $l \leq k_j$, и

$$f_{l,\mu_{j,l}^{\delta_{j,l}},t}(s_1, s_2, y) = \begin{cases} y, & s_1 \geq l; \\ r-2 + (y-r+2) \times e^{2i\pi\delta_{j,l}\alpha(s_2)\beta(l-s_1)\gamma(|y-r+2|)t}, & l-1 \leq s_1 \leq l; \\ r-2 + (y-r+2) \times e^{2i\pi\delta_{j,l}\alpha(s_2)\gamma(|y-r+2|)t}, & s_1 \leq l-1, \end{cases}$$

если $l \geq k_j + 1$, где $\alpha(s)$, $\beta(s)$ и $\gamma(s)$, $s \geq 0$, – вещественные гладкие монотонные функции такие, что $\alpha(s) = 1$ для $s \in [0, \frac{4}{3}]$ и $\alpha(s) = 0$ для $s \geq \frac{5}{3}$, $\beta(s) = 0$ для $s \in [0, \frac{1}{3}]$ и $\beta(s) = 1$ для $s \geq \frac{2}{3}$, а $\gamma(s) = 1$ для $s \in [0, r-1]$ и $\gamma(s) = 0$ для $s \geq r - \frac{1}{2}$.

Выберем в диске E_j окрестность W_j , содержащую часть диаметра d'_j , соединяющего точки u'_j и u''_j , и такую, что существует диффеоморфизм $\phi_j: W_j \rightarrow V_j$ такой, что $\phi_j(d'_j) = \{(s_1, s_2) \in V_j \mid 0 \leq s_1 \leq 2k_j, s_2 = 0\}$ и $\phi_j(u_j) = (0, 0)$. Этот диффеоморфизм ϕ_j и изотопия $F_{j,\beta_j,t}$ позволяют определить гладкую изотопию $\tilde{F}_{j,\beta_j,t} = (\phi_j^{-1} \times \text{Id}) \circ F_{j,\beta_j,t} \circ (\phi_j \times \text{Id}): W_j \times \mathbb{C}^1 \rightarrow W_j \times \mathbb{C}^1$, которая может быть продолжена до гладкой изотопии, тождественной вне $W_j \times \mathbb{C}^1$. Пусть F_t – композиция построенных изотопий $\tilde{F}_{j,\beta_j,t}$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим снова через B_1 ее образ $F_1(B_1)$ и через E_j – некоторый диск в $V_{0,j}$, где $V_{0,j}$ – центр “скручивания-раскручивания” $\tilde{F}_{j,\beta_j,t}$, который определяется дословно, как и в шаге IV. Выберем в новой окрестности E_j новую точку, лежащую на T_j , и обозначим ее снова через u'_j . По построению изотопий $\tilde{F}_{j,\beta_j,t}$ для каждого j геометрические косы

$$\overline{\mathcal{B}}_1 = (b_{1,j,1}(x), \dots, b_{1,j,p}(x)) \quad \text{и} \quad \overline{\mathcal{B}}_2 = (b_{2,j,1}(x), \dots, b_{2,j,p}(x)),$$

где x движется вдоль $T'_j \subset T_j$ с начальной точкой o и конечной точкой u'_j , представляют уже один и тот же элемент в $B_p[\mathbb{C}_o^1, K]$. Следовательно, по лемме 6.7 существует гладкая изотопия $F_t: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$, удовлетворяющая условиям 1)–3) теоремы 7.1 и такая, что:

- 1) F_t является тождественным отображением над дополнением к объединению достаточно маленьких окрестностей U_j путей T'_j ;
- 2) F_t является тождественным отображением над $(\cup E_j) \cup E_o$;
- 3) $F_1(B_1) = B_2$ над некоторой трубчатой окрестностью $U'_\Gamma \subset U_\Gamma$ g -базиса Γ .

Обозначим снова через B_1 ее образ $F_1(B_1)$. Полученные B_1 и B_2 совпадают над трубчатой окрестностью U'_Γ g -базиса Γ .

Шаг VI. Дополнение $\mathbb{P}^1 \setminus U'_\Gamma$ является односвязным. Пусть U_∞ – такая односвязная окрестность множества $\mathbb{P}^1 \setminus U'_\Gamma$, что U_∞ диффеоморфна диску и такая, что $u_j \notin U_\infty$ для всех $j = 1, \dots, \#N$. Обозначим $V = \pi^{-1}(U_\infty)$. Тогда $\pi: V \rightarrow U_\infty$ является тривиальным расслоением со слоями $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^1$ и $L \cap V$ является сечением. Положим $V_0 = V \setminus L$ и $\mathcal{B}_i = V_0 \cap B_i$, $i = 1, 2$. Тогда $V_0 \simeq U_\infty \times \mathbb{C}^1$ и $\pi|_{V_0}$ совпадает с проекцией на второй множитель. Легко видеть, что $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ удовлетворяют всем условиям замечания 6.2. Следовательно, существует гладкая изотопия F_t , удовлетворяющая всем условиям теоремы 7.1.

§ 8. Типы брэйд-монодромного разложения и диффеоморфные типы поверхностей

В этом параграфе мы докажем теорему 2.

Пусть $F: (\mathbb{CP}^2, B_1) \rightarrow (\mathbb{CP}^2, B_2)$ – диффеоморфизм пар, удовлетворяющий условиям следствия 7.1. Этот диффеоморфизм индуцирует изоморфизм

$$F^*: \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus B_2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus B_1).$$

Из предложения 1 в [3] следует, что множество неэквивалентных общих морфизмов степени N с дискриминантной кривой $B \subset \mathbb{CP}^2$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством эпиморфизмов из $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus B)$ в симметрическую группу Σ_N , удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям (см. детали в [3]). Так как гипотеза Кизини выполнена для $B_1 \subset \mathbb{CP}^2$, то существует единственный такой эпиморфизм из $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus B_1)$ и он должен совпадать с эпиморфизмом $f_{1*}: \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus B_1) \rightarrow \Sigma_N$, индуцированным морфизмом f_1 , где $N = \deg f_1$. Поэтому для B_2 также существует единственный такой эпиморфизм и он должен совпадать с $f_{1*} \circ F^* = f_{2*}: \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus B_2) \rightarrow \Sigma_N$. Следовательно, диффеоморфизм $F: \mathbb{CP}^2 \setminus B_1 \rightarrow \mathbb{CP}^2 \setminus B_2$ может быть поднят до диффеоморфизма $\Psi_0: S_1 \setminus f_1^{-1}(B_1) \rightarrow S_2 \setminus f_2^{-1}(B_2)$.

В [4] изложен метод восстановления поверхности S и конечного морфизма $f: S \rightarrow \mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль кривой $B \subset \mathbb{CP}^2$, по заданному гомоморфизму $f_*: \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus B) \rightarrow \Sigma_N$. Этот метод основан на представлении S в виде N экземпляров $\mathbb{CP}^2$ со “стандартными разрезами”, склеенных друг с другом вдоль этих разрезов (чтобы осуществить такое склеивание, используется геометрическое описание конечного представления группы $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus B)$ в терминах “теней” и “экранов”, описанное в [5]). Используя этот метод, легко видеть, что диффеоморфизм Ψ_0 однозначно продолжается до гомеоморфизма $\Psi: S_1 \rightarrow S_2$.

Пусть $U \subset \mathbb{CP}^2$ – окрестность обыкновенного каспа кривой B_1 такая, что $F|_U$ является голоморфным отображением. Хорошо известно, что если $f: X \rightarrow U$ – трехлистное накрытие $U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}$, разветвленное вдоль кривой, заданной уравнением $y^2 = x^3$, и такое, что f не является накрытием Галуа, то такое f единственно. Следовательно, гомеоморфизм Ψ является голоморфным (в частности, Ψ гладкое отображение) в $f_1^{-1}(U)$. Аналогично, Ψ является гладким отображением в $f_1^{-1}(U)$, где U – окрестность ноуда кривой B_1 или точки касания кривой B_1 со слоем проекции π .

Пусть $z \in B_1$ – неособая точка, и пусть $U_1 \simeq \{(x_1, y_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |x_1| < 1, |y_1| < 1\}$ – окрестность точки z в $\mathbb{CP}^2$, где (x_1, y_1) – локальные голоморфные координаты в $\mathbb{CP}^2$ такие, что $y_1 = 0$ является локальным уравнением кривой B_1 и π в U_1 совпадает с $(x_1, y_1) \mapsto x_1$. Аналогично, пусть $U_2 = F(U_1)$ – окрестность точки $F(z)$, и пусть (x_2, y_2) – локальные голоморфные координаты в U_2 такие, что $y_2 = 0$ является локальным уравнением кривой B_2 и π в U_2 совпадает с $(x_2, y_2) \mapsto x_2$. Имеем: $x_2 = g_1(x_1)$ и $y_2 = g_2(x_1, y_1)$, где g_1 и g_2 – гладкие функции и g_2 голоморфна по y_1 . Следовательно, g_2 может быть записана в виде

$$g_2(x_1, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_1) y_1^n,$$

где все $a_n(x_1)$ – гладкие функции и $a_1(x_1) \neq 0$ в U_1 .

Каждый из прообразов $f_1^{-1}(U_1)$ и $f_2^{-1}(U_2)$ состоит из $N-1$ связной компоненты $U_{1,1}, \dots, U_{1,N-1}$ и $U_{2,1}, \dots, U_{2,N-1}$ соответственно. Пусть f_1 (соответственно f_2) не разветвлен в $\bigcup_{j=2}^{N-1} U_{1,j}$ (соответственно в $\bigcup_{j=2}^{N-1} U_{2,j}$). Следовательно, ограничение Ψ на $\bigcup_{j=2}^{N-1} U_{1,j}$ является гладким отображением. Кроме того, существуют локальные голоморфные координаты (u_1, v_1) в $U_{1,1}$ (соответственно (u_2, v_2) в $U_{2,1}$) такие, что f_1 задано в $U_{1,1}$ (соответственно f_2 задано в $U_{2,1}$) функциями $y_1 = u_1^2$, $x_1 = v_1$ (соответственно $y_2 = u_2^2$, $x_2 = v_2$). Отсюда следует, что Ψ задается функциями

$$u_2 = u_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(v_1) u_1^{2n-2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$v_2 = v_1.$$

Легко видеть, что $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(v_1) u_1^{2n-2} \right)^{\frac{1}{2}}$ является гладкой функцией, так как все $a_n(v_1)$ — гладкие функции и $a_1(v_1) \neq 0$.

Список литературы

1. Artin E. Theory of braids // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 101–126.
2. Birman J. Braids, Links and Mapping Class Groups. Princeton University Press, 1975.
3. Куликов Вик. С. О гипотезе Кизини // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 6. С. 84–116.
4. Куликов Вик. С. Геометрическая реализация C -групп // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 194–203.
5. Kulikov Vik. S. On the fundamental group of the complement of a hypersurface in $\mathbb{C}^n$ // Springer L.N.M. 1991. V. 1479. P. 122–130.
6. Moishezon B., Teicher M. Braid Groups, Singularities and Algebraic Surfaces. Birkhauser (to appear).
7. Moishezon B., Teicher M. Braid group techniques in complex geometry I. Line arrangements in $\mathbb{CP}^2$ // Contemporary Math. 1988. V. 78. P. 425–555.
8. Moishezon B., Teicher M. Braid group techniques in complex geometry V. The fundamental group of a complement of a branch curve of a Veronese generic projection // Communications in Analysis and Geometry. 1996. V. 4. № 11. P. 1–120.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: victor@olya.ips.ras.ru
 Университет Бар-Илан, Израиль
E-mail: teicher@macs.biu.ac.il

Поступило в редакцию
 29.XII.1998