

УДК 512.7+515.1

В. С. Куликов, Вик. С. Куликов

**Общие накрытия плоскости с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями**

Изучаются представления алгебраической поверхности  $X$  с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями в виде общего накрытия  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ , т.е. конечного морфизма, который вне особых точек имеет лишь складки и сборки, в окрестности особых точек изоморфен проекции поверхности  $z^2 = h(x, y)$  на плоскость  $x, y$ , а кривая ветвления которого  $B \subset \mathbb{P}^2$ , кроме особенностей, произошедших из особенностей  $X$ , имеет лишь ноуды и простые каспы. Считается, что классики доказали, что так устроена общая проекция неособой поверхности  $X \subset \mathbb{P}^r$ . В работе этот результат доказывается для вложения поверхности  $X$  с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями, являющегося композицией исходного и вложения Веронезе. Обобщаются результаты работы [6], в которой исследуется гипотеза Кизини о том, что  $f$  однозначно восстанавливается по кривой  $B$ . Для этого изучаются расслоенные произведения общих накрытий. Выводится основное неравенство, ограничивающее степень накрытия в случае существования двух неэквивалентных накрытий с кривой ветвления  $B$ . Это неравенство применяется для доказательства гипотезы Кизини для  $m$ -канонических накрытий поверхностей основного типа при  $m \geq 5$ .

Библиография: 8 наименований.

**Введение**

Пусть  $S \subset \mathbb{P}^r$  – неособая проективная поверхность,  $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$  – ее общая проекция на плоскость,  $B \subset \mathbb{P}^2$  – кривая ветвления, которую мы будем называть *дискриминантной кривой*. Считается, что классики доказали (см. [8, с. 104]), что:

- (i)  $f$  – конечное накрытие, которое имеет в качестве особенностей лишь двойные точки (складки), либо особые точки каспидального типа (сборки);
- (ii) при этом  $f^*(B) = 2R + C$ , где двойная кривая  $R$  неособа и неприводима, а кривая  $C$  приведена;
- (iii) кривая  $B$  является каспидальной, т.е. имеет лишь ноуды и простые каспы; над ноудами лежат по две двойные точки, а над каспами – по одной точке каспидального типа;
- (iv) ограничение  $f$  на  $R$  имеет степень 1.

Произвольный конечный морфизм  $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$  называется *общим* (или *простым*) *накрытием*, если он устроен так же, как общая проекция, т.е. обладает перечисленными свойствами. Два накрытия плоскости  $(S_1, f_1)$  и  $(S_2, f_2)$  называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$  такой, что  $f_1 = f_2 \circ \varphi$ .

В данной работе мы рассматриваем обобщение понятия общего накрытия на случай поверхностей с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями. Прежде всего мы объясним, зачем нужно такое обобщение. Представление алгебраического многообразия в виде

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-01133), INTAS-OPEN-97-2072 и NWO-RFBR 047-008-005.

конечного накрытия проективного пространства является одним из эффективных способов изучения как самого многообразия, так и его модулей. Для сравнения напомним, что такой подход дает в случае кривых. Для кривой  $C$  рода  $g$  общее накрытие  $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$  – это накрытие, которое в каждом слое имеет не более чем одну точку ветвления, являющуюся двойной точкой (или особой точкой типа  $A_1$  для  $f$ ). Пусть  $B \subset \mathbb{P}^1$  – множество точек ветвления, а  $d = \deg B = \sharp(B)$ . Тогда по формуле Гурвица  $d = 2N + 2g - 2$ , где  $N = \deg f$ . Если  $N \geq g + 1$ , то любую кривую рода  $g$  можно представить в виде простого накрытия степени  $N$  над  $\mathbb{P}^1$ . Множество всех общих накрытий (с точностью до эквивалентности)  $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$  степени  $N$  с  $d$  точками ветвления параметризуется многообразием Гурвица  $H = H^{N,d}$ . Пусть  $\mathbb{P}^d \setminus \Delta$  ( $\Delta$  – дискриминант) – проективное пространство, параметризующее наборы  $d$  различных точек в  $\mathbb{P}^1$ , а  $M_g$  – многообразие модулей кривых рода  $g$ . Мы имеем два отображения: отображение  $h: H \rightarrow \mathbb{P}^d \setminus \Delta$ , сопоставляющее  $f$  множество точек ветвления  $B \subset \mathbb{P}^1$ , и отображение  $\mu: H \rightarrow M_g$ , сопоставляющее накрытию  $f$  класс изоморфности кривой  $C$ . Многообразие  $H$  было введено и исследовано Гурвицем в 1891 г. Он показал, что многообразие  $H$  является связным, а  $h$  – конечным неразветвленным накрытием. На современном функториальном языке этот вопрос рассмотрен также У. Фултоном в 1969 г. Отображение  $\mu$  является отображением “на” (и имеет слои размерности  $N + (N - g + 1)$ ). Отсюда следует неприводимость многообразия модулей  $M_g$ .

В случае поверхностей мы также можем рассмотреть аналог многообразия Гурвица  $H$  всех общих накрытий (с точностью до эквивалентности)  $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$  степени  $N$  и дискриминантными кривыми  $B$  степени  $d$  и с данным числом  $n$  ноудов и данным числом  $s$  каспов. Пусть  $\mathbb{P}^\nu$ ,  $\nu = \frac{d(d+3)}{2}$ , – проективное пространство, параметризующее кривые степени  $d$ , а  $h: H \rightarrow \mathbb{P}^\nu$  – отображение, сопоставляющее накрытию  $f$  его дискриминантную кривую  $B$ . В [6] изучается гипотеза Кизини, которая утверждает, что если  $B$  – дискриминантная кривая общего накрытия  $f$  степени  $N \geq 5$ , то  $f$  однозначно с точностью до эквивалентности определяется по кривой  $B$ . Другими словами, это означает, что отображение  $h$  является инъективным (и, кроме того,  $N = \deg f$  определяется по  $B$ ). В [6] доказано, что гипотеза Кизини верна для почти всех общих накрытий. В частности, она верна для общих накрытий, заданных кратным каноническим классом. Для построения пространства модулей поверхностей основного типа используются их кратно-канонические вложения. Как известно [3], если  $S$  – минимальная поверхность основного типа, то при  $m \geq 5$  линейная система  $|mK_S|$  стягивает лишь  $(-2)$ -кривые и дает бирациональное отображение  $S$  на поверхность  $X \subset \mathbb{P}^r$  (каноническую модель), имеющую лишь  $A$ - $D$ - $E$ -особенности (в другой терминологии, рациональные двойные точки, дювалевские особенности, простые особенности Арнольда и т.д.). Отсюда возникает необходимость обобщить понятие общего накрытия на случай поверхностей с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями.

В данной работе мы обобщаем классический результат об особенностях общей проекции неособой поверхности на случай поверхности с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями. Доказывается, что если поверхность  $X \subset \mathbb{P}^r$  имеет лишь  $A$ - $D$ - $E$ -особенности, то, быть может после подкрутки, для общей проекции  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  дискриминантная кривая  $B$  также имеет лишь  $A$ - $D$ - $E$ -особенности. Это вытекает из следующей чуть более общей теоремы.

**ТЕОРЕМА 0.1.** Пусть  $X \subset \mathbb{P}^r$  – поверхность, имеющая лишь изолированные особенности вида  $z^2 = h(x, y)$  (“двойные плоскости”),  $X \rightarrow \mathbb{P}^2$  – ограничение на  $X$  общей проекции  $\mathbb{P}^r \setminus L \rightarrow \mathbb{P}^2$  из общего линейного подпространства  $L$ ,  $\dim L = r - 3$ . Тогда:

- (i)  $f$  является конечным накрытием;
- (ii) в неособых точках поверхности  $X$  накрытие  $f$  имеет в качестве особенностей либо двойные точки (складки), либо особые точки каспидального типа (сборки); в окрестности этих точек  $f$  эквивалентно проекции поверхности  $x = z^2$ , соответственно  $y = z^3 + xz$  на плоскость  $x, y$ ;
- (iii) в окрестности точек  $s \in \text{Sing } X$  накрытие  $f$  аналитически эквивалентно проекции поверхности  $z^2 = h(x, y)$  на плоскость  $x, y$ ; из (ii) и (iii) следует, что дивизор ветвления  $R$  приведен, т.е.  $f^*(B) = 2R + C$ , где  $B = f(R)$ , а  $R$  и  $C$  – приведенные кривые;
- (iv) вне особых точек  $f(\text{Sing } X)$  дискриминантная кривая  $B$  является каспидальной;
- (v) ограничение  $f$  на  $R$  имеет степень 1.

На самом деле основная трудность в доказательстве этой теоремы лежит в классическом случае, когда поверхность  $X$  неособа. К сожалению, авторам неизвестно полное (и современное) доказательство этой теоремы, и, по-видимому, такого доказательства просто не существует. Поэтому ее доказательство даже в случае неособой поверхности представляет интерес. В статье мы доказываем ослабленный вариант теоремы 0.1, в котором исходное вложение “подкручено” на вложение Веронезе. Этого вполне достаточно для целей, описанных выше.

Таким образом, кривая  $B$  имеет, во-первых, “такие же” особенности, как и поверхность  $X$  (или кривая  $R$ ), которые локально задаются уравнением  $h(x, y) = 0$  и которые мы будем называть *s-особенностями*, в том числе *s-ноудами* и *s-каспами*, а, кроме того, на  $B$  могут быть ноуды и каспы, произошедшие из особенностей отображения  $f$ , которые мы будем называть *p-ноудами* и *p-каспами*. Над *p-ноудом* имеются две двойные точки накрытия  $f$ , в которых  $f$  локально задается как проекция поверхностей  $z_1 = x^2$  и  $z_2 = y^2$  на плоскость  $(x, y)$ .

Если  $S$  – поверхность с *A-D-E*-особенностями, то накрытие  $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$  называется *общим*, если оно удовлетворяет свойствам теоремы 0.1.

Во-вторых, мы обобщим центральный результат работы [6] на случай поверхностей с *A-D-E*-особенностями. Там доказано, что если общее накрытие  $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$  неособой поверхности  $S$  с дискриминантной кривой  $B$  имеет достаточно большую степень  $\deg f = N$ , именно при условии

$$N > \frac{4(3\bar{d} + g - 1)}{2(3\bar{d} + g - 1) - c}, \tag{1}$$

где  $2\bar{d} = \deg B$ ,  $g$  – геометрический род кривой  $B$ , а  $c$  – число каспов, то  $B$  является дискриминантной кривой единственного общего накрытия (гипотеза Кизини для кривой  $B$  верна).

В случае особых поверхностей мы не можем ожидать аналогичного результата, так как для кривой  $B$  четной степени с *A-D-E*-особенностями всегда существует двулистное накрытие, которое является общим. Однако если два общих накрытия

с данной дискриминантной кривой  $B$  имеют достаточно большие степени, то они эквивалентны. Более точно, мы докажем следующую теорему. Пусть имеются два общих накрытия  $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  и  $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  поверхностей с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями и одной и той же дискриминантной кривой  $B \subset \mathbb{P}^2$ . Пусть  $f_i^*(B) = 2R_i + C_i$ ,  $i = 1, 2$ . По отношению к паре накрытий  $f_1$  и  $f_2$  ноуды и каспы на  $B$  подразделяются на четыре типа:  $ss$ -,  $sp$ -,  $ps$ - и  $pp$ -ноуды и каспы. Например,  $sp$ -ноуд  $b \in B$  – это ноуд, который является  $s$ -ноудом для  $f_1$  и  $p$ -ноудом для  $f_2$ . Число  $sp$ -ноудов обозначается  $n_{sp}$ . Тогда  $n = n_{ss} + n_{sp} + n_{ps} + n_{pp}$ . Аналогичная терминология применяется для каспов.

ТЕОРЕМА 0.2. *Если  $f_1$  и  $f_2$  – два неэквивалентных общих накрытия, то*

$$\deg f_2 \leq \frac{4(3\bar{d} + g_1 - 1)}{2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1}, \quad (2)$$

где  $g_1 = p_a(R_1)$  – арифметический род кривой  $R_1$ , а  $\iota_1 = 2n_{sp} + 2c_{sp} + c_{pp}$ .

Мы применяем основное неравенство (2) для доказательства гипотезы Кизини в случае общих кратно-канонических накрытий. Пусть  $S$  – минимальная модель поверхности основного типа. По теореме Бомбьери [3] если  $m \geq 5$ , то  $m$ -каноническое отображение  $\varphi_m: S \rightarrow \mathbb{P}^{pm-1}$ , определенное полной линейной системой, численно эквивалентной  $|mK_S|$ , является бирациональным изоморфизмом, стягивающим лишь  $(-2)$ -кривые на  $S$ . Тогда каноническая модель  $X = \varphi_m(S)$  имеет лишь  $A$ - $D$ - $E$ -особенности. Общую проекцию  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  назовем *общим  $m$ -каноническим накрытием для  $S$* . Мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 0.3. *Пусть  $S_1$  и  $S_2$  – минимальные модели поверхностей основного типа с одинаковыми  $(K_S^2)$  и  $\chi(S)$ , и пусть  $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ ,  $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  – общие  $m$ -канонические накрытия с одной и той же дискриминантной кривой. Тогда при  $m \geq 5$  накрытия  $f_1$  и  $f_2$  эквивалентны.*

Рассмотрим подмногообразие  $\mathcal{H} \subset \text{Hilb} \times \text{Gr}$ , параметризующее  $m$ -канонические накрытия. Здесь  $\text{Hilb}$  – это подсхема схемы Гильберта, параметризующая численно  $m$ -канонические вложения  $X \subset \mathbb{P}^M$  поверхностей с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями с фиксированными  $(K_S^2)$  и  $\chi(S)$ ,  $\text{Gr}$  – грасманово многообразие центров проекций из  $\mathbb{P}^M$  на  $\mathbb{P}^2$ , а  $\mathcal{H}$  состоит из пар  $(X \subset \mathbb{P}^M, L)$  таких, что ограничение проекции с центром в  $L$  на  $X$  является общим накрытием. В силу теоремы 0.1 имеется взаимно однозначное соответствие между множеством неприводимых (соответственно связных) компонент в  $\text{Hilb}$  и в  $\mathcal{H}$ . Пусть  $h: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}^\nu$  – отображение, сопоставляющее накрытию его дискриминантную кривую. Обозначим  $\mathcal{D}$  многообразие плоских кривых степени  $d$  с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями, у которых число ноудов  $\geq n_p$ , а число каспов  $\geq c_p$ , где  $d, n_p, c_p$  определяются инвариантами поверхности  $S$  (см. § 6). Из теоремы 0.1 вытекает (см. [6, § 5])

СЛЕДСТВИЕ. *Отображение, индуцированное отображением  $h$ , из множества неприводимых (соответственно связных) компонент многообразия  $\mathcal{H}$  во множество неприводимых (соответственно связных) компонент многообразия  $\mathcal{D}$  является инъективным.*

Доказательство основного неравенства (2) в [6] в случае неособых поверхностей проводится следующим образом. Для сравнения накрытий  $f_1$  и  $f_2$  рассматривается нормализация  $X$  расслоенного произведения  $X_1 \times_{\mathbb{P}^2} X_2$ . Пусть  $g_i: X \rightarrow X_i$ ,

$i = 1, 2$ , – соответствующие отображения на сомножители. Прообраз  $g_1^{-1}(R_1) = R + C$  распадается на две части:  $R$  – это кривая, которая отображается с помощью  $g_2$  на  $R_2$ , а  $C$  – на  $C_2$ . Если  $f_1$  и  $f_2$  не эквивалентны, то поверхность  $X$  неприводима, а если  $X_i$  неособы, то  $X$  тоже неособа. Основное неравенство получается, если применить теорему Ходжа об индексе для пары дивизоров  $R$  и  $C$  на  $X$ . Мы используем ту же идею и в случае поверхностей с  $A-D-E$ -особенностями. Для этого мы проводим локальный анализ нормализации расслоенного произведения  $X$  в случае общих накрытий поверхностей с  $A-D-E$ -особенностями.

В § 1 мы обобщаем теорему об общей проекции на случай поверхностей с  $A-D-E$ -особенностями. В § 2 проводится локальный анализ нормализации расслоенного произведения  $X$ . В § 3 мы исследуем канонический цикл  $A-D-E$ -особенности, с помощью которого в § 4 мы вычисляем числовые инварианты общего накрытия на минимальном разрешении  $S$  поверхности  $X$ . В § 5 доказывается основное неравенство (2). Наконец, в § 6 доказывается гипотеза Кизини для  $m$ -канонических накрытий поверхностей основного типа.

### § 1. Особенности общей проекции поверхности с $A-D-E$ -особенностями

В этом параграфе мы приведем доказательство теоремы 0.1.

**1.1. Общая проекция в  $\mathbb{P}^3$ .** Пусть  $X \subset \mathbb{P}^r$  – поверхность степени  $\deg X = N$ , имеющая лишь изолированные гиперповерхностные особенности  $x_1, \dots, x_k$ , т.е. такие, для которых размерность касательного пространства  $\dim T_{X, x_i} = 3$ . Обозначим  $\pi_L: \mathbb{P}^r \setminus L \rightarrow \mathbb{P}^{e-1}$  проекцию из линейного подпространства  $L$  коразмерности  $e$ . Ее можно получить как композицию проекций из точки. Теорема 0.1 о проекции  $X$  на плоскость ( $e = 3$ ) есть одна из серии теорем об общих проекциях для различных  $e$ , начиная с проекции из точки ( $e = r$ ) и кончая проекцией на прямую ( $e = 2$ ), т.е. пучками Лефшеца.

Классический результат состоит в том, что если  $r > 5$  ( $= 2 \dim X + 1$ ), то проекция из общей точки дает изоморфное вложение  $X$  в  $\mathbb{P}^{r-1}$ . Отсюда следует, что если  $e \geq 6$ , то проекция из общего пространства  $L$  дает изоморфное вложение  $X$  в  $\mathbb{P}^{e-1}$ . В частности, поверхность  $X$  общей проекцией вкладывается в  $\mathbb{P}^5$ . При проекции в  $\mathbb{P}^4$ ,  $e = 5$ , на  $\pi_L(X)$  появляются изолированные особенности, которые нетрудно описать. Для доказательства теоремы 0.1 мы собираемся рассмотреть общую проекцию  $X$  в  $\mathbb{P}^3$ ,  $e = 4$ , и воспользоваться следующей теоремой.

**ТЕОРЕМА 1.1.** *Если  $X \subset \mathbb{P}^r$  – поверхность, имеющая лишь изолированные гиперповерхностные особенности  $x_i$ , то для общего подпространства  $L \subset \mathbb{P}^r$  коразмерности 4 ограничение проекции  $\pi_L: \mathbb{P}^r \setminus L \rightarrow \mathbb{P}^3$  дает бирациональное отображение  $X$  на поверхность  $Y \subset \mathbb{P}^3$ , которое является изоморфизмом вне двойной кривой  $D \subset X$ , не проходящей через точки  $x_i$ , а  $Y$  имеет, кроме точек  $\pi_L(x_i)$ , лишь обыкновенные особенности – двойную кривую  $\Delta = \pi_L(D)$ , на которой лежит конечное множество тройных точек и конечное множество пинчей. В окрестностях этих точек в подходящих локальных аналитических координатах  $Y$  имеет следующие нормальные формы:  $uv = 0$  для обыкновенных двойных точек,  $uvw = 0$  для обыкновенных тройных точек,  $u^2 - vw^2 = 0$  для пинчей (или “зонтиков Уитни”).*

Современное доказательство этой теоремы можно найти в [5, т. 2, с. 651–660]. Наличие особых точек  $x_i$  не добавляет особых хлопот: мы должны только позаботиться о том, чтобы центр проекции  $L$  не пересекался с касательными пространствами  $T_{X, x_i}$ ,  $\dim T_{X, x_i} = 3$ . Доказательство этой теоремы можно найти также в [7].

Мы хотим доказать, что для общей точки  $\xi \in \mathbb{P}^3$  композиция проекций  $\pi_L$  и  $\pi_\xi: \mathbb{P}^3 \setminus \xi \rightarrow \mathbb{P}^2$ , т.е. проекция  $\mathbb{P}^3 \setminus \pi_L^{-1}(\xi) \rightarrow \mathbb{P}^2$  с центром в  $\pi_L^{-1}(\xi)$ , при ограничении на  $X$ ,  $f = \pi_\xi \circ \pi_L|_X: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ , дает накрытие, удовлетворяющее свойствам, сформулированным в теореме 0.1.

**1.2. Расположение прямых по отношению к поверхности в  $\mathbb{P}^3$ .** Для описания проекции  $\pi_\xi$  нам нужно исследовать расположение прямых  $l \subset \mathbb{P}^3$  по отношению к поверхности  $Y$ . Прямая  $l$  называется *трансверсальной* к  $Y$  в точке  $y$ , если она трансверсальна к касательному конусу к  $Y$  в этой точке. Это значит, что  $(l \cdot Y)_y = 1$ , если  $y \notin \text{Sing } Y$ ,  $(l \cdot Y)_y = 2$ , если  $y \in \Delta \setminus \Delta_t$ , и  $(l \cdot Y)_y = 3$ , если  $y \in \Delta_t$ . Мы обозначаем через  $\Delta_t$  и  $\Delta_p$  множество тройных точек и множество пинчей. Если  $l$  не трансверсальна к  $Y$  в точке  $y$ , то мы скажем, что она касается  $Y$  в этой точке. Прямая  $l$  называется *простой касательной* к  $Y$  в точке  $y$ , если  $y \notin \text{Sing } Y$  и  $(l \cdot Y)_y = 2$ , либо если  $y \in \Delta \setminus (\Delta_t \cup \Delta_p)$  и  $(l \cdot Y)_y = 3$ , т.е.  $(l \cdot Y_i)_y = 2$  для одной из двух ветвей  $Y_i$  в точке  $y$ . Прямая  $l$  называется *стационарной*, соответственно *простой стационарной касательной* к  $Y$  в точке  $y$ , если  $y \notin \text{Sing } Y$  и  $(l \cdot Y)_y \geq 3$ , соответственно  $(l \cdot Y)_y = 3$ . Прямая  $l$  называется *простой касательной*, соответственно *простой стационарной касательной* к  $Y$ , если  $l$  трансверсальна к  $Y$  во всех точках, кроме одной, в которой  $l$  является простой касательной, соответственно простой стационарной касательной, а остальные точки пересечения  $l \cap Y$  неособы на  $Y$ . Наконец,  $l$  называется *простой бикасательной*, если  $l$  трансверсальна к  $Y$  во всех точках, кроме двух, в которых имеется простое касание, в этих точках касательные плоскости к  $Y$  не совпадают, а  $l \cap \text{Sing } Y = \emptyset$ . Мы хотим доказать, что для общей точки  $\xi \in \mathbb{P}^3$  все прямые  $l \ni \xi$  являются по отношению к  $Y$  не хуже чем простыми бикасательными и простыми стационарными касательными.

Для исследования расположения прямых  $l \subset \mathbb{P}^3$  по отношению к  $Y$  мы рассмотрим грасманово многообразие  $G = G(1, 3)$  и многообразие флагов  $\mathbb{F} = \{(\xi, l) \in \mathbb{P}^3 \times G \mid \xi \in l\}$ . Имеем две проекции  $\text{pr}_1: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{P}^3$  и  $\text{pr}_2: \mathbb{F} \rightarrow G$ , которые являются  $\mathbb{P}^2$ - и  $\mathbb{P}^1$ -расслоениями соответственно;  $\dim \mathbb{F} = 5$ , а  $\dim G = 4$ . В дальнейшем мы рассматриваем точки  $\xi \in \mathbb{P}^3$  как центры проектирований  $\pi_\xi: \mathbb{P}^3 \setminus \xi \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Слой  $\text{pr}_1^{-1}(\xi) \simeq \mathbb{P}^2$  проекцией  $\text{pr}_2$  изоморфно отображается на  $\mathbb{P}_\xi^2 \subset G$ . Для  $\xi \in \mathbb{P}^3$  имеем сечение  $s_\xi: \mathbb{P}^3 \setminus \xi \rightarrow \mathbb{F}$  проекции  $\text{pr}_1$ ,  $y \mapsto (y, \overline{\xi y})$ . Тогда  $\pi_\xi$  совпадает с ограничением проекции  $\text{pr}_2$  на  $s_\xi(\mathbb{P}^3 \setminus \xi)$ .

Мы рассмотрим сначала случай, когда поверхность  $Y$  неособа, а затем опишем необходимые изменения и дополнения в случае, когда на  $Y$  имеются двойная кривая  $\Delta$  и изолированные особенности  $s_i$ .

Рассмотрим фильтрацию многообразия  $\mathbb{F}$  подмногообразиями

$$Z_k = \{(\xi, l) \in \mathbb{F} \mid (l \cdot Y)_\xi \geq k\}.$$

Тогда  $Z_1 = \text{pr}_1^{-1}(Y)$ ,  $\dim Z_1 = 4$ . Над общей точкой  $l \in G$  отображение  $\varphi = \text{pr}_2|_{Z_1}: Z_1 \rightarrow G$  есть неразветвленное накрытие степени  $N$ . Если на  $Y$  не лежат прямые, то  $\varphi$  – конечное накрытие и  $Z_2$  есть дивизор ветвления этого накрытия.

Рассмотрим теперь ограничения проекции  $\text{pr}_1$ . Многообразию  $Z_2$  изоморфно проективизированному касательному расслоению,  $Z_2 \simeq \mathbb{P}(\Theta_Y)$ , и  $Z_2 \rightarrow Y$  есть  $\mathbb{P}^1$ -расслоение,  $\dim Z_2 = 3$ . В общей точке  $y \in Y$  в  $T_{Y,y}$  есть два асимптотических направления  $l_1$  и  $l_2$ , для которых  $(l_1 \cdot Y)_y \geq 3$  и  $(l_2 \cdot Y)_y \geq 3$ . Поэтому над общей точкой ограничение  $\text{pr}_1$  на  $Z_3$ ,  $\psi: Z_3 \rightarrow Y$ , есть двулистное накрытие, кривая ветвления которого  $P \subset Y$  – это параболическая кривая, состоящая из точек, в которых асимптотические направления совпадают. Несколько слоев проекции  $\text{pr}_1$  являются исключительными кривыми отображения  $\psi$ . Их проекции на  $Y$  – это точки  $y$ , в которых ограничение второго дифференциала локального уравнения  $Y$  на касательную плоскость  $T_{Y,y}$  есть нуль. Такие точки  $y$  мы назовем *точками уплощения* поверхности  $Y$ . Кривая  $H = \psi(Z_4) \subset Y$  состоит из точек  $y$ , в которых хотя бы одно из чисел  $(l_i \cdot Y)_y \geq 4$ . ( $H$  – кривая, если поверхность  $Y$  не квадрика.)

**1.3. Отсутствие не простых стационарных касательных.** Рассмотрим произведение  $Y \times \mathbb{F} \subset Y \times \mathbb{P}^3 \times G$  и проекции  $\text{pr}'_1$  и  $\text{pr}'_2$  на  $Y \times \mathbb{P}^3$  и  $Y \times G$ . Мы можем рассматривать многообразия  $Z_k$  как подмногообразия в  $Y \times G \subset \mathbb{P}^3 \times G$ . Рассмотрим многообразии

$$I_4 = \{(y; \xi, l) \in Y \times \mathbb{F} \mid (l \cdot Y)_y \geq 4\} = (\text{pr}'_2)^{-1}(Z_4).$$

Проекция  $\text{pr}'_2 = \text{id}_Y \times \text{pr}_2$  так же, как и  $\text{pr}_2: \mathbb{F} \rightarrow G$ , является  $\mathbb{P}^1$ -расслоением. Поэтому  $\dim I_4 = 2$  и  $\dim \Sigma_4 \leq 2$ , где  $\Sigma_4 = p_2(I_4)$ , а  $p_2$  – проекция  $Y \times \mathbb{P}^3 \times G$  на  $\mathbb{P}^3$ . Тогда если  $\xi \in \mathbb{P}^3 \setminus \Sigma_4$ , то для любой прямой  $l \ni \xi$  в любой точке  $y \in Y$  имеем  $(l \cdot Y)_y \leq 3$ .

**1.4. Отсутствие не простых бикасательных.** Рассмотрим многообразии  $\Sigma_{2,3} \subset \mathbb{P}^3$ , заматаемое не простыми бикасательными, и покажем, что  $\Sigma_{2,3} \leq 2$ . Рассмотрим произведение  $Y \times Y \times \mathbb{F} \subset Y \times Y \times \mathbb{P}^3 \times G$  и подмногообразия  $I_{i,j}$ , которые являются замыканиями

$$I_{i,j}^0 = \{(y_1, y_2; \xi, l) \in Y \times Y \times \mathbb{F} \mid (Y \cdot l)_{y_1} \geq i, (Y \cdot l)_{y_2} \geq j, y_1 \neq y_2\}.$$

Обозначим  $\text{pr}''_2$  проекцию  $Y \times Y \times \mathbb{F}$  на  $Y \times Y \times G$ , и пусть  $\text{pr}''_2(I_{i,j}) = \tilde{I}_{i,j}$ . Проекция  $\text{pr}''_2$  и ее ограничения на  $I_{i,j}$ ,  $I_{i,j} \rightarrow \tilde{I}_{i,j}$ , являются  $\mathbb{P}^1$ -расслоениями.

ЛЕММА 1.1. *Имеем  $\dim I_{2,3} \leq 2$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подмногообразия

$$Y \times Y \times G \supset \tilde{I}_{1,1} \supset \tilde{I}_{2,1} \supset \tilde{I}_{2,2} \supset \tilde{I}_{2,3},$$

и пусть  $q_1$  обозначает проекцию на первый сомножитель. Очевидно, что  $\tilde{I}_{1,1}$  – неприводимое многообразие размерности  $\dim \tilde{I}_{1,1} = 4$ , бирационально изоморфное  $Y \times Y$ . Проекция  $q_1: \tilde{I}_{2,1} \rightarrow Y$  есть расслоение на кривые  $q_1^{-1}(y) \simeq C_y$ , где  $C_y = Y \cap T_{Y,y}$ . Кривая  $C_y$  имеет особенность в точке  $y$ , которая является нодом для общей точки  $y$ .

Ограничение проекции на  $\tilde{I}_{2,2}$ ,  $q_1: \tilde{I}_{2,2} \rightarrow Y$ , есть также отображение “на”, и его слой над точкой  $y \in Y$  есть

$$q_1^{-1}(y) = \{(y, y', l) \mid l \subset T_{Y,y} \text{ и } l \text{ касается } C_y \text{ в точке } y'\}.$$

Мы хотим доказать, что  $q_1(\tilde{I}_{2,3})$  есть не все  $Y$ , т.е. вложение  $Y \subset \mathbb{P}^3$  обладает следующим свойством:

(L<sub>1</sub>) существует точка  $y \in Y$  такая, что все прямые  $l \subset T_{Y,y}$ , проходящие через  $y$ , имеют с  $C_y \setminus \{y\}$  лишь простые касательные.

Это будет доказано ниже, в п. 1.6 (предложение 1.2), в предположении, что вложение  $Y \subset \mathbb{P}^3$  получено проекцией из вложения, “подправленного” вложением Веронезе  $v_k$ ,  $k \geq 2$ .

Таким образом,  $\dim q_1(\tilde{I}_{2,3}) \leq 1$ . Общий слой отображения  $q_1: \tilde{I}_{2,3} \rightarrow Y$  нульмерен (если он одномерен, то  $Y$  – линейчатая поверхность, и мы получаем противоречие со свойством (L<sub>1</sub>)), поэтому  $\dim \tilde{I}_{2,3} \leq 1$  и, следовательно,  $\dim I_{2,3} \leq 2$ .

Обозначим  $\Sigma_{2,3} = p_3(I_{2,3})$ , где  $p_3$  – проекция  $Y \times Y \times \mathbb{P}^3 \times G$  на  $\mathbb{P}^3$ . Из леммы 1.1 следует, что  $\dim \Sigma_{2,3} \leq 2$ . Если  $\xi \notin \Sigma_{2,3}$ , то любая прямая  $l \ni \xi$ , которая касается  $Y$  в двух точках  $y_1$  и  $y_2$ , имеет в этих точках простое касание.

**1.5. Отсутствие 3-касательных.** Рассмотрим произведение  $Y \times Y \times Y \times \mathbb{F} \subset Y \times Y \times Y \times \mathbb{P}^3 \times G$  и подмногообразия  $I_{i,j,k}$ , которые являются замыканиями подмногообразий

$$I_{i,j,k}^0 = \{(y_1, y_2, y_3; \xi, l) \in Y \times Y \times Y \times \mathbb{F} \mid (Y \cdot l)_{y_1} \geq i, (Y \cdot l)_{y_2} \geq j, (Y \cdot l)_{y_3} \geq k\},$$

где  $y_1 \neq y_2 \neq y_3 \neq y_1$ . Обозначим  $\text{pr}_2^{(3)}$  проекцию  $Y \times Y \times Y \times \mathbb{F}$  на  $Y \times Y \times Y \times G$ , и пусть  $\tilde{I}_{i,j,k} = \text{pr}_2^{(3)}(I_{i,j,k}^0)$ . Как и выше, ясно, что  $\dim \tilde{I}_{1,1,1} = 4$ , а так как  $\text{pr}_1^{(3)}$  есть  $\mathbb{P}^1$ -расслоение, то  $\dim I_{1,1,1} = 5$ .

ЛЕММА 1.2. Имеем  $\dim I_{2,2,2} \leq 2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять рассмотрим проекции  $Y \times Y \times Y \times G$  и его подмногообразий

$$Y \times Y \times Y \times G \supset \tilde{I}_{1,1,1} \supset \tilde{I}_{2,1,1} \supset \tilde{I}_{2,2,1} \supset \tilde{I}_{2,2,2}$$

на первый множитель. Рассмотрим  $q_1: \tilde{I}_{2,2,2} \rightarrow Y$ . Прообраз точки  $y \in Y$  суть  $q_1^{-1}(y) = \{(y, y_2, y_3; l) \mid l \subset T_{Y,y}, l \text{ касается } C_y \text{ в точках } y_2, y_3 \in l\}$ . Как и в лемме 1, достаточно доказать, что  $q_1(\tilde{I}_{2,2,2})$  не совпадает со всем  $Y$ . Это значит, что существует точка  $y \in Y$ , которая обладает следующим свойством:

(L<sub>2</sub>) ни одна прямая  $l \subset T_{Y,y}$ , проходящая через  $y$ , не является бикасательной, т.е. не может касаться  $C_y \setminus \{y\}$  в двух различных точках.

Это будет доказано в следующем п. 1.6 (предложение 1.2) в предположении, что вложение  $Y \subset \mathbb{P}^3$  получено проекцией из вложения, “подправленного” вложением Веронезе  $v_k$ .

Обозначим  $\Sigma_{2,2,2} = p_4(I_{2,2,2})$ , где  $p_4$  – проекция  $Y \times Y \times Y \times \mathbb{P}^3 \times G$  на  $\mathbb{P}^3$ . Тогда  $\dim \Sigma_{2,2,2} \leq 2$ , и если  $\xi \notin \Sigma_{2,2,2}$ , то любая прямая  $l \ni \xi$  касается  $Y$  не более чем в двух точках.

**1.6. Вложения со свойством Лефшеца.** Свойства (L<sub>1</sub>) и (L<sub>2</sub>) означают, что существует точка  $y \in Y$ , для которой проектирование  $\pi_y$  кривой  $C_y \setminus \{y\} \subset T_{Y,y} \simeq \mathbb{P}^2$  из точки  $y$  является пучком Лефшеца. Таким образом, для доказательства лемм 1 и 2 нам необходимо доказать существование точки  $y \in Y$  со следующим “свойством Лефшеца” (L) относительно вложения в  $\mathbb{P}^3$ . Мы его сформулируем для поверхности  $X$  в проективном пространстве произвольной размерности.

Пусть имеется вложение  $X \subset \mathbb{P}^r$  поверхности в проективное пространство. Мы скажем, что *гиперплоскость*  $L_1 \subset \mathbb{P}^r$  *обладает свойством* (L), если кривая  $X \cap L_1$  имеет единственный нод, т.е.  $L_1$  касается  $X$  в единственной точке  $x$ , в которой кривая  $X \cap L_1$  имеет обыкновенную квадратичную особенность. Другими словами, точка  $[L_1] \in \check{\mathbb{P}}^r$ , соответствующая  $L_1$ , есть неособая точка двойственного многообразия  $X^\vee$ . Мы скажем, что *пара*  $(L_1, L_3)$ , где  $L_3 \subset L_1$  – линейное подпространство размерности  $r - 3$ , *обладает свойством* (L), если:  $L_1$  обладает свойством (L),  $x \in L_3$  и проекция кривой  $X \cap L_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  из центра  $L_3$  является пучком Лефшеца, т.е. каждый слой этого (рационального) отображения содержит не более одной особой точки и эта точка может быть лишь квадратичной (имеет кратность 2). Мы скажем, что *вложение*  $X \subset \mathbb{P}^r$  *обладает свойством* (L), если  $\exists x \in X$ , для которой  $L_1 = T_{X,x}$  обладает свойством (L) и  $L_1$  можно дополнить до пары  $(L_1, L_3)$  со свойством (L).

Ясно, что если пара  $(L_1, L_3)$  обладает свойством (L) и  $Y \subset \mathbb{P}^3$  получена из  $X$  проектированием из центра  $L_4 \subset L_3$ ,  $\dim L_4 = r - 4$ , то вложение  $Y \subset \mathbb{P}^3$  обладает свойством (L).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.** *Если  $S \subset \mathbb{P}^q$  – вложение неособой поверхности, а  $X = X_k \subset \mathbb{P}^{r_k}$  – ее композиция с вложением Веронезе  $v_k$ ,  $k \geq 2$ , заданным многочленами степени  $k$ , то вложение  $X \subset \mathbb{P}^{r_k}$  обладает свойством (L).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим гиперплоскость  $L_1$ , соответствующую точке  $[L_1] \in X^\vee \setminus \text{Sing } X^\vee$ . Тогда кривая  $C = X \cap L_1$  содержит единственную особую точку – нод  $x \in C$ . Пусть  $i: C \rightarrow X$  – вложение. Рассмотрим проекцию  $\pi_{k,x}: \mathbb{P}^{r_k} \setminus x \rightarrow \mathbb{P}^{r_k-1}$  из точки  $x$ . Для доказательства предложения 1.1 достаточно показать, что образ  $\pi_{k,x}(C)$  является неособой кривой в  $\mathbb{P}^{r_k-1}$ . Тогда если  $L'_3$ ,  $\dim L'_3 = r_k - 3$ , – центр проекции  $\mathbb{P}^{r_k-1} \setminus L'_3 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , являющейся пучком Лефшеца для  $\pi_{k,x}(C)$ , то, очевидно, пара  $(L_1, L_3)$ , где  $L_3 = \pi_{k,x}^{-1}(L'_3) \cap L_1$ , обладает свойством (L).

Пусть  $I_x$  – пучок идеалов точки  $x$  на  $S$  и  $\mathcal{O}_S(1)$  – пучок гиперплоских сечений. При отождествлении  $v_k: S \simeq X$  отображение  $\pi_{k,x}$  задается сечениями  $H^0(S, \mathcal{O}_S(k) \otimes I_x)$ . Пусть  $k = 2$ , и пусть  $\sigma: \bar{S} \rightarrow S$  –  $\sigma$ -процесс с центром в точке  $x$ . Мы можем считать, что  $\bar{S}$  вложено в  $\mathbb{P}^{r_2-1}$ , где  $r_2 - 1 = q(q + 3)/2$ , и рациональное отображение  $\sigma^{-1}: S \rightarrow \bar{S}$  задано сечениями  $H^0(S, \mathcal{O}_S(2) \otimes I_x)$ , т.е. совпадает с  $\pi_{2,x}$ . Отсюда следует предложение 1.1 в случае  $k = 2$ , так как собственный прообраз  $\bar{C} = \sigma^{-1}(C) \subset \bar{S}$  является неособой кривой. Кроме того, отметим, что сечения, поднятые на  $\bar{C}$ ,  $i^*(H^0(S, \mathcal{O}_S(2) \otimes I_x))$ , задают вложение  $\bar{C}$  в  $\mathbb{P}^{r_2-1}$ . Следовательно, и при  $k > 2$  сечения  $i^*(H^0(S, \mathcal{O}_S(k) \otimes I_x))$  также задают регулярное вложение  $\bar{C}$  в  $\mathbb{P}^{r_k-1}$ , так как имеет место естественное вложение

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(k-2)) \otimes H^0(S, \mathcal{O}_S(2) \otimes I_x) \subset H^0(S, \mathcal{O}_S(k) \otimes I_x),$$

и сечения  $H^0(S, \mathcal{O}_S(k-2))$  не имеют базисных точек и неподвижных компонент. Поэтому сечения, поднятые на  $\bar{C}$ ,  $i^*(H^0(S, \mathcal{O}_S(k) \otimes I_x))$ , разделяют точки и касательные направления кривой  $\bar{C}$ .

Скажем, что *линейное подпространство*  $L_4$  размерности  $r - 4$  *обладает свойством* (L) *относительно вложения*  $X \subset \mathbb{P}^r$ , если проекция  $\pi_{L_4}$  на  $\mathbb{P}^3$  из центра  $L_4$  отображает  $X$  на поверхность  $Y = \pi_{L_4}(X)$  с обыкновенными особенностями.

Как известно (см. [5]), в грассманиане  $G_4 = \text{Gr}(r-4, r)$  имеется открытое подмножество  $U$ , точки которого соответствуют линейным подпространствам со свойством (L).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.** *Если вложение  $X \subset \mathbb{P}^r$  обладает свойством (L), то существует линейное подпространство  $L_4$  со свойством (L), которое можно дополнить до флага  $L_1 \supset L_3 \supset L_4$  такого, что пара  $(L_1, L_3)$  обладает свойством (L). Другими словами, существует проекция на  $\mathbb{P}^3$ , для которой вложение  $Y \subset \mathbb{P}^3$ , где  $Y$  – образ поверхности  $X$ , обладает свойством (L).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим  $G_1 = \check{\mathbb{P}}^r$  двойственное пространство к  $\mathbb{P}^r$ ,  $G_3 = \text{Gr}(r-3, r)$  – грассманоно многообразие линейных подпространств  $L_3$  размерности  $r-3$ , а  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{1,3,4} \subset \check{\mathbb{P}}^r \times G_3 \times G_4$  – многообразие флагов  $L_1 \supset L_3 \supset L_4$ . Пусть  $X^\vee$  – двойственное многообразие,  $W \subset X \times X^\vee \subset \mathbb{P}^r \times \check{\mathbb{P}}^r$  – замкнутое подмногообразие,  $W = \{(x, L_1) : L_1 \supset T_{X,x}\}$ . Тогда проекция  $W \rightarrow X^\vee$  является изоморфизмом над  $X_0^\vee = X^\vee \setminus \text{Sing } X^\vee$ ,  $W_0 \simeq X_0^\vee$ .

Обозначим  $Z \subset X \times \mathbb{F}$  замкнутое подмногообразие

$$Z = \{(x; L_1 \supset L_3 \supset L_4) : (x, L_1) \in W, L_3 \ni x\},$$

а  $Z_0 \subset Z$  – открытое подмножество:  $(x, L_1) \in W_0$ . Тогда  $Z$  – неприводимое многообразие. Рассмотрим проекцию  $Z_0 \rightarrow W_0$ . Ее слои не пусты в силу предыдущего предложения, и в каждом слое содержится открытое множество точек  $z$ , для которых  $(L_1, L_3)$  обладает свойством (L) (так как центры проекций для пучков Лефшеца составляют открытое множество). Поэтому в  $Z$  содержится открытое множество  $Z_L$ , для точек которого пара  $(L_1, L_3)$  обладает свойством Лефшеца.

Очевидно, что  $Z \rightarrow G_4$  – сюръективное отображение. Поэтому  $p_4^{-1}(U)$ , где  $p_4$  – проекция  $Z$  на  $G_4$ , не пустое открытое по Зарискому множество. Тогда  $Z_L \cap p_4^{-1}(U)$  непусто, и если  $(x; L_1 \supset L_3 \supset L_4)$  – точка из этого множества, то  $L_4$  обладает нужными свойствами.

### 1.7. Проектирование в окрестности общей точки двойной кривой $\Delta$ .

Пусть теперь  $Y \subset \mathbb{P}^3$  имеет обыкновенные особенности вдоль двойной кривой  $\Delta$  и изолированные особенности  $s_i \in Y \setminus \Delta$ ,  $i = 1, \dots, k$ , которые являются двойными плоскостями. Подмногообразия инцидентности, определенные в предыдущих пунктах, мы понимаем как замыкания соответствующих многообразий, определенных первоначально для открытой поверхности  $Y \setminus \text{Sing } Y$ .

Рассмотрим  $Y \times \mathbb{F}$ . В дополнение к обозначениям п. 1.3 пусть  $q_1$  и  $q_2$  обозначают проекции  $Y \times G$  на  $Y$  и  $G$ . Рассмотрим пересечение  $\tilde{A} = (\Delta \times G) \cap Z_3$ . Тогда ограничение проекции  $Y \times G \rightarrow Y$  на  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{A} \rightarrow \Delta$ , над общей точкой есть накрытие степени 4: точке  $y \in \Delta$  соответствуют по две асимптотические прямые к каждой из двух ветвей  $Y$  в точке  $y$ . Поэтому  $\tilde{A}$  – кривая. Пусть  $A = (\text{pr}'_2)^{-1}(\tilde{A})$ . Это есть линейчатая поверхность. Пусть  $\Sigma_\Delta = p_2(A)$ . Тогда если  $\xi \notin \Sigma_\Delta$ , то в общей точке  $y \in \Delta$  прямые  $l \ni \xi$  имеют с ветвями  $Y$  не хуже чем простые касания.

Обозначим  $\Sigma_0$  объединение плоскостей в  $\mathbb{P}^3$ , входящих в касательные конусы в оставшихся точках  $\Delta$ , в том числе в тройных точках и пинчах, а также в особых точках  $s_i \in Y$ .

### 1.8. Проектирование в окрестности тройных точек.

Если  $\xi \notin \Sigma_0$ , то в окрестности точки  $y \in \Delta_t$  все прямые  $l \ni \xi$  трансверсальны всем трем ветвям  $Y$  в точке  $y$ , и поэтому локально эти ветви отображаются на  $\mathbb{P}^2$  изоморфно.

**1.9. Проектирование в окрестности пинчей.** В окрестности пинча  $y \in Y$  имеются аналитические координаты, в которых  $Y$  локально задается уравнением  $u^2 = vw^2$ . Двойная кривая  $\Delta \subset Y$  — это прямая  $u = w = 0$ , а касательный конус  $C_{Y,y}$  к  $Y$  в точке  $y$  имеет уравнение  $u = 0$ . Нормализация  $\mathbb{C}^2 \rightarrow Y$  в окрестности пинча задается формулами  $u = tw$ ,  $v = v$ ,  $w = w$ . Поскольку  $X$  неособа и  $\pi_L$  — конечное отображение, мы можем считать, что проекция  $\pi_L$  и является нормализацией. Если точка  $\xi$  не принадлежит касательному конусу  $C_{Y,y}$ , то локально проекция  $\pi_\xi$  есть отображение степени 2. Проекция  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  в окрестности прообраза пинча есть двулистное накрытие неособых многообразий и поэтому локально задается уравнениями  $v = t^2$ ,  $w = w$ . Таким образом, кривая  $\bar{R} \subset Y$  проходит через пинчи, и при общей проекции пинчи проектируются в неособые точки дискриминантной кривой  $B$ .

**1.10. Нормальные формы общей проекции в точках кривой ветвления.**

ЛЕММА 1.3 [1]. Пусть  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  — неособая поверхность, а  $(\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  — гладкий морфизм, ограничение которого  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2$  есть конечный морфизм степени  $\mu$ . Тогда можно выбрать локальные координаты  $x, y$  в  $\mathbb{C}^2$  и  $x, y, z$  в  $\mathbb{C}^3$  так, что  $X$  задается уравнением

$$y = z^\mu + \lambda_1(x)z^{\mu-2} + \dots + \lambda_{\mu-2}(x)z,$$

а  $f$  есть проекция вдоль оси  $z$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это есть лемма 1 из [1]. Она получается, если накрытие  $f$  рассмотреть как двухпараметрическое семейство 0-мерных гиперповерхностных особенностей кратности  $\mu$ , которое, следовательно, индуцируется из миниверсальной деформации особенности  $A_{\mu-1}$ .

Мы доказали, что в общей точке  $P$  кривой ветвления проекция  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  имеет степень  $\mu = 2$ , а в отдельных точках — степень  $\mu = 3$ . Из леммы 1.3 при  $\mu = 2$  получаем, что в общей точке кривой ветвления проекция  $f$  эквивалентна проекции поверхности  $X: x = z^2$  на  $(x, y)$ -плоскость, т.е. является складкой. При  $\mu = 3$  мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Для неособой поверхности  $X$  конечное накрытие  $X \rightarrow \mathbb{C}^2$  степени 3 локально является проекцией на  $(x, y)$ -плоскость одной из поверхностей

$$y = z^3 + x^k z, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{или} \quad y = z^3 \quad (k = \infty).$$

В случае  $k \neq \infty$  кривая ветвления  $C$  приведена и имеет в локальных координатах  $x, z$  на  $X$  уравнение  $3z^2 + x^k = 0$ . Кривая  $C$  неособа только при  $k = 1$ . Дискриминантная кривая  $B$  имеет уравнение  $4x^{3k} + 27y^2 = 0$ , т.е. является каспом. Это обыкновенный касп только при  $k = 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.3 имеем, что  $X$  задается уравнением  $y = z^3 + \lambda_1(x)z$ . Получаем указанную нормальную форму накрытия  $f$ , где  $k$  — порядок нуля функции  $\lambda_1(x)$  в точке  $x = 0$ . Кривая ветвления  $C$  имеет уравнение  $J = 0$ , где  $J = 3z^2 + x^k$  — якобиан отображения  $f$ . Дискриминантная кривая  $B$  определяется идеалом Фиттинга  $F_0(f_*\theta_C)$  пучка  $f_*\theta_C$ . Чтобы найти уравнение  $B$  — образующую идеала Фиттинга, нужно взять представление  $f_*\theta_X \xrightarrow{J} f_*\theta_X \rightarrow f_*\theta_C \rightarrow 0$

пучка  $f_*\mathcal{O}_C$ , где  $(f_*\mathcal{O}_X)_0 = \mathbb{C}\{x, z\} = \mathbb{C}\{x, y\} \cdot 1 \oplus \mathbb{C}\{x, y\}z \oplus \mathbb{C}\{x, y\}z^2$ , и вычислить определитель  $\mathbb{C}\{x, y\}$ -линейного отображения  $J$ , совпадающего с умножением на якобиан  $J$ .

Теперь покажем, что для общей проекции дискриминантная кривая  $B$  имеет лишь обыкновенные ноуды и каспы. Пусть точка  $b \in B$  соответствует бикасательной  $l$  при проектировании  $\pi_\xi: \mathbb{P}^3 \setminus \xi \rightarrow \mathbb{P}^2$  из точки  $\xi$ . Пусть  $l$  касается  $Y$  в точках  $P_1$  и  $P_2$ , которым соответствуют ветви  $B_1$  и  $B_2$  дискриминантной кривой  $B$  в точке  $b$ . Нам нужно показать, что для общей проекции точка  $b$  является ноудом, т.е. ветви  $B_1$  и  $B_2$  имеют различные касательные. Выясним, где могут лежать центры  $\xi$  “плохих” проекций. Пусть прямая  $\lambda \subset \mathbb{P}^2$  является общей касательной к ветвям  $B_1$  и  $B_2$  в точке  $b$ . Тогда плоскость  $\pi_\xi^{-1}(\lambda)$  является бикасательной – она касается поверхности  $Y$  в точках  $P_1$  и  $P_2$ . Рассмотрим двойственную поверхность  $Y^\vee \subset \mathbb{P}^3$ . Тогда  $[\pi_\xi^{-1}(\lambda)] \in \text{Sing } Y^\vee = \gamma^\vee$ . Пусть  $\gamma = \tau^{-1}(\gamma^\vee)$ , где  $\tau: Y \rightarrow Y^\vee$  – отображение Гаусса. Пусть  $\Sigma_u \subset \mathbb{P}^3$  – линейчатая поверхность, заметаемая прямыми  $P_1P_2$ , где  $P_1, P_2 \in \gamma$ ,  $\tau(P_1) = \tau(P_2) = [\pi_\xi^{-1}(\lambda)]$ . Тогда если  $\xi \notin \Sigma_u$ , то в точках  $b$ , соответствующих бикасательным  $l$ , кривая  $B$  имеет лишь ноуды.

Пусть теперь точка  $b \in B$  соответствует стационарной касательной  $l$  в точке  $P \in Y$ . Как было отмечено выше, в окрестности точки  $P$  проекция  $\pi_\xi$  эквивалентна проекции на  $(x, y)$ -плоскость поверхности  $y = z^3 + x^k z$ . Нам нужно показать, что для общей проекции  $k = 1$ . Дело в том, что если  $k > 1$ , то точка  $P$  есть точка уплощения поверхности  $Y$ . Исключая из центров проектирования точки  $\xi$ , лежащие в касательных плоскостях к  $Y$  в точках уплощения, мы получим, что в окрестности точки с  $\mu = 3$  проекция  $f$  эквивалентна проекции на  $(x, y)$ -плоскость поверхности  $y = z^3 + xz$ , т.е. является сборкой.

### 1.11. Проектирование в окрестности изолированных особенностей двойных плоскостей.

**ЛЕММА 1.4.** *Если  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  – (изолированная) особенность двойной плоскости  $z^2 = h(x, y)$ ,  $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}^2$  – проекция из любой точки  $p \in \mathbb{C}^3$ , не лежащей в касательном конусе  $z = 0$ , то кривая ветвления  $\pi$  на  $X$  приведена, а дискриминант  $B \subset \mathbb{C}^2$  локально аналитически изоморфен особенности  $h(x, y) = 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Кратность особенности  $(X, 0)$  равна 2. Поэтому  $\pi$  является накрытием степени 2 и, следовательно, локально является проекцией двойной плоскости  $w^2 = g(u, v)$  на плоскость  $(u, v)$ . Таким образом, ростки особенностей  $f(x, y)$  и  $g(u, v)$  стабильно изоморфны, поэтому они изоморфны [2, ч. 1, с. 146].

## § 2. Локальное устройство расслоенных произведений

**2.1. Локальное устройство общего накрытия.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  – общее накрытие плоскости поверхностью  $X$  с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями, а  $B \subset \mathbb{P}^2$  – дискриминантная кривая,  $f^*(B) = 2R + C$ . Особые точки  $o \in \text{Sing } X$  мы будем называть  $s$ -точками поверхности  $X$  (от слова singularity). В окрестности  $s$ -точки  $o$  накрытие  $f$  эквивалентно проекции на  $(x, y)$ -плоскость поверхности  $z^2 = h(x, y)$ , где  $h(x, y)$  имеет одну из  $A$ - $D$ - $E$ -особенностей. Точке  $o$  соответствует особая точка кривой  $B$  такого же типа, как и точка  $o$ . По отношению к  $f$  неособые точки

$X$  подразделяются на *r-точки* (от слова regular), в которых морфизм  $f$  является этальным, и *p-точки* (от singularity of projection) – это точки кривой ветвления  $R$ ; *p-точки* являются либо складками (или *p-точками* типа  $A_1$ ), в окрестности которых  $f: (x, z) \mapsto (x, y)$ ,  $y = z^2$ , либо сборками  $o \in R \cap C$  (или *p-точками* типа  $A_2$ ), в окрестности которых  $f: (x, z) \mapsto (x, y)$ ,  $y = z^3 + xz$  (подробней об этом см. ниже, в п. 2.4).

На кривой  $B$ , кроме особых точек, произошедших из особых точек  $\text{Sing } X$ , которые мы будем называть *s-точками*, имеются еще дополнительные особые точки типа  $A_1$  (ноуды) и  $A_2$  (каспы), которые мы будем называть *p-ноудами* и *p-каспами*. Над общей точкой  $b \in B$  лежит одна складка и  $N - 2$  *r-точки*; над *p-ноудом* лежит две складки и  $N - 4$  *r-точки*; над *p-каспом* лежит одна сборка и  $N - 3$  *r-точки*; над *s-ноудом* и *s-каспом* так же, как и над любой *s-точкой*  $b \in B$ , лежит одна особая точка  $X$  и  $N - 2$  *r-точки*.

**2.2. Типы точек на расслоенном произведении.** По отношению к паре общих накрытий  $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  и  $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  с одной и той же дискриминантной кривой  $B \subset \mathbb{P}^2$  ноуды и каспы на  $B$  подразделяются уже на 4 типа: *ss-*, *sp-*, *ps-* и *pp-ноуды* и *каспы*. Например, *ps-ноуд* – это ноуд  $b \in B$  такой, что на  $X_1$  над  $b$  имеются две складки, а на  $X_2$  над  $b$  имеется особая точка типа  $A_1$ . Аналогичная терминология будет использоваться для классификации точек  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  на расслоенном произведении  $X^\times = X_1 \times_{\mathbb{P}^2} X_2$ : мы будем говорить об *rs-точках*, *ss-точках*, *sp-точках* и т.д. Например, мы говорим, что  $\bar{x}$  есть *ps-точка* типа  $A_2$ , если  $x_1 \in X_1$  есть *p-точка* типа  $A_2$ , а  $x_2 \in \text{Sing } X_2$  есть особая *s-точка* типа  $A_2$ .

В этом параграфе мы опишем устройство нормализации  $\nu: X = (X^\times)^{(\nu)} \rightarrow X^\times$  расслоенного произведения  $X^\times$ . Обозначим  $g_1, g_2$  и  $f$  морфизмы  $X$  на  $X_1, X_2$  и  $\mathbb{P}^2$ . Поскольку нормализация определяется локально, мы можем заменить  $\mathbb{P}^2$  на окрестность точки  $0 \in \mathbb{C}^2$  и считать, что  $X_1$  и  $X_2$  – это окрестности точек  $x_1 \in X_1$  и  $x_2 \in X_2$ . Переходим к перебору всех возможных типов точек  $\bar{x} = (x_1, x_2) \in X^\times$ . В дальнейшем перебор идет с точностью до перестановки сомножителей  $X_1$  и  $X_2$ .

Сначала рассмотрим совсем тривиальные случаи.

2.2.1. Если  $\bar{x}$  есть *r\*-точка* (где  $*$  =  $r, s, p$ ), то  $X^\times$  в точке  $\bar{x}$  локально устроено так же, как  $X_2$  в точке  $x_2$ , а  $f^\times: X^\times \rightarrow \mathbb{C}^2$  устроено так же, как  $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

2.2.2. Если  $\bar{x}$  есть  $(2 \times 2)$ -*точка*, т.е.  $x_1$  и  $x_2$  есть точки “двойных плоскостей”,  $z_1^2 = h(x, y)$ ,  $z_2^2 = h(x, y)$ , то  $X^\times = X_1 \times_{\mathbb{C}^2} X_2$  в окрестности точки  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  – это поверхность в  $\mathbb{C}^4 \ni (x, y, z_1, z_2)$ , задаваемая уравнениями  $z_1^2 = h(x, y)$ ,  $z_2^2 = h(x, y)$ . Отсюда  $z_1^2 = z_2^2$ , и поэтому  $X^\times = X_1^\times \cup X_2^\times$ , где  $X_1^\times: z_1^2 = h(x, y)$ ,  $z_2 = z_1$ ,  $X_2^\times: z_2^2 = h(x, y)$ ,  $z_1 = -z_2$ . Поверхности  $X_1^\times$  и  $X_2^\times$  пересекаются по кривой  $z_1 = z_2 = 0$ ,  $h(x, y) = 0$ . Мы получаем, что нормализация  $X = \tilde{X}^\times = X_1^\times \sqcup X_2^\times$  локально состоит из двух несвязных компонент  $X_1^\times$  и  $X_2^\times$ , изоморфных  $X_1$  и  $X_2$  (см. рис. 1).

В частности, мы получаем описание нормализации в окрестности *pp-точки*  $(x_1, x_2) \in X^\times$ , лежащей над неособой точкой кривой  $B$ ,  $B: x = 0$ ,  $g_1^*(R_1) = R' + R''$ ,  $g_2^*(R_2) = R' + R''$ .

Каждая *ss-точка* является  $(2 \times 2)$ -*точкой*. Таким образом, нормализация в окрестности *ss-точки* устроена так же, как в случае *pp-точки*:  $X$  локально состоит из двух несвязных компонент, изоморфных  $X_1$  и  $X_2$ .

Остается разобрать менее тривиальные случаи, когда  $\bar{x}$  есть  $pp$ - или  $sp$ -точка типа  $A_1$  или  $A_2$ . Этому посвящены следующие два подпункта.

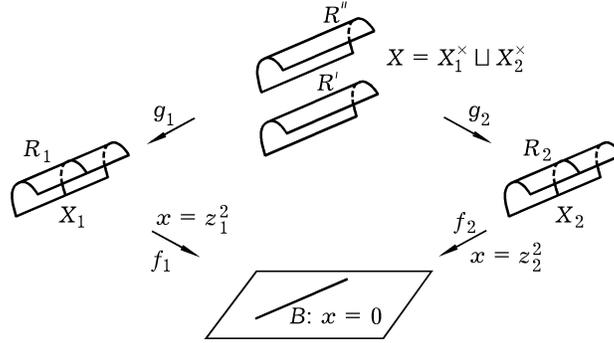


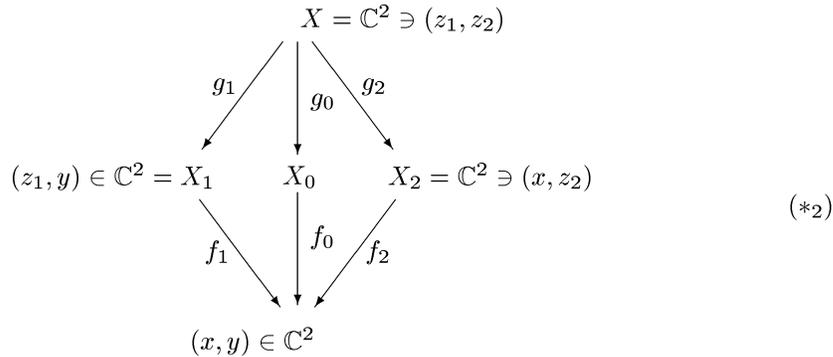
Рис. 1

**2.3. О расслоенном произведении двойных плоскостей.**

2.3.1. Обыкновенную квадратичную особенность – особенность типа  $A_1$  на поверхности  $X_0: z^2 = xy$  – можно рассматривать как двулистное накрытие плоскости  $f_0: X_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , разветвленное в ноде  $B: xy = 0$ . Как известно, саму особенность  $X_0$  можно рассматривать как факторособенность по действию циклической группы  $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ ,  $X_0 = X/\mathbb{Z}_2$ , где  $X = \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2)$ , а образующая  $\mathbb{Z}_2$  действует по правилу:  $z_1 \mapsto -z_1, z_2 \mapsto -z_2$ . Морфизм факторизации  $g_0: X \rightarrow X_0$  задается формулами

$$x = z_1^2, \quad y = z_2^2, \quad z = z_1 z_2.$$

Получаем четырехлистное накрытие  $f = f_0 \circ g_0: X \rightarrow \mathbb{C}^2$ , которое можно рассматривать как отображение факторизации по действию группы  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  на  $X$ . При этом факторизация  $g_0$  соответствует подгруппе второго порядка  $\mathbb{Z}_2 = G_0 = \{(1, 1), (-1, -1)\}$ , вложенной в  $G$  диагонально. В  $G$  имеются еще две подгруппы второго порядка  $G_1 = \{1\} \times \mathbb{Z}_2$  и  $G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \{1\}$ . Рассматривая  $X_1 = \mathbb{C}^2/G_1 \simeq \mathbb{C}^2$  и  $X_2 = \mathbb{C}^2/G_2 \simeq \mathbb{C}^2$ , мы получаем еще два разложения  $f$  и коммутативную диаграмму



где  $g_1: y = z_2^2, f_1: x = z_1^2, g_2: x = z_1^2, f_2: y = z_2^2$ . Обозначим  $B_1: x = 0, B_2: y = 0$  ветви кривой  $B: xy = 0$ , а  $R': z_1 = 0, R'': z_2 = 0$  – ветви их прообраза

$z_1 z_2 = 0$  на  $X$ . Диаграмма  $(*_2)$  показывает, что мы можем рассматривать  $X$  как нормализацию в трех случаях:

2.3.2.  $X$  есть нормализация в окрестности *ps*-точки типа  $A_1$ ,  $\bar{x} \in X_1^\times = X_1 \times_{\mathbb{C}^2} X_0$  (см. рис. 2),

$$\begin{aligned} f_1^*(B_1) &= 2R_1, & f_1^*(B_2) &= C_1, & g_1^*(R_1) &= R', & g_1^*(C_1) &= 2R'', \\ f_0^*(B) &= 2R_2 = 2(R_2' + R_2''), & g_0^*(R_2') &= R', & g_0^*(R_2'') &= R'' \end{aligned}$$

( $g_0$  неразветвлено вне точки  $0 \in X_0$ ).

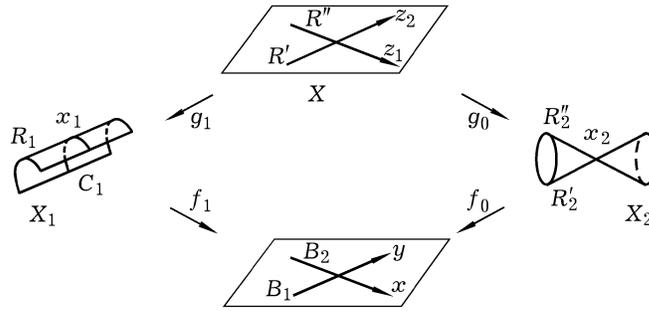


Рис. 2

2.3.3.  $X$  есть нормализация в окрестности *sp*-точки типа  $A_1$ ,  $\bar{x} \in X_2^\times = X_0 \times_{\mathbb{C}^2} X_2$  (случай, симметричный 2.3.2).

2.3.4.  $X$  есть нормализация в окрестности *pp*-точки типа  $A_1$ ,  $\bar{x} \in X^\times = X_1 \times_{\mathbb{C}^2} X_2$ , которая не является  $(2 \times 2)$ -точкой,  $f_1: x = z_1^2$ ,  $f_2: y = z_2^2$  (см. рис. 3),

$$\begin{aligned} f_1^*(B) &= 2R_1 + C_1, & g_1^*(R_1) &= R', & g_1^*(C_1) &= 2R'', \\ f_2^*(B) &= 2R_2 + C_2, & g_2^*(R_2) &= R'', & g_2^*(C_2) &= 2R'. \end{aligned}$$

Используя 2.3.2–2.3.4, мы можем теперь описать нормализацию  $X$  над окрестностью ноуда  $b \in B$ .

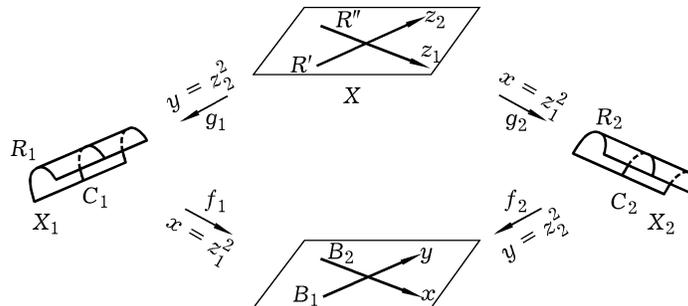


Рис. 3

2.3.5. Над окрестностью  $ps$ -ноуда  $b \in B$  (также  $sp$ -ноуда) нормализация  $X^\times$  в окрестности  $ps$ -точек устроена так (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} g_1^*(R'_1) &= R'^{\prime\prime}, & g_1^*(C'_1) &= 2R'^{\prime\prime}, & g_1^*(R''_1) &= R''^{\prime\prime}, & g_1^*(C''_1) &= 2R''^{\prime\prime}, \\ g_2^*(R'_2) &= R'^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime}, & g_2^*(R''_2) &= R'^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime}. \end{aligned}$$

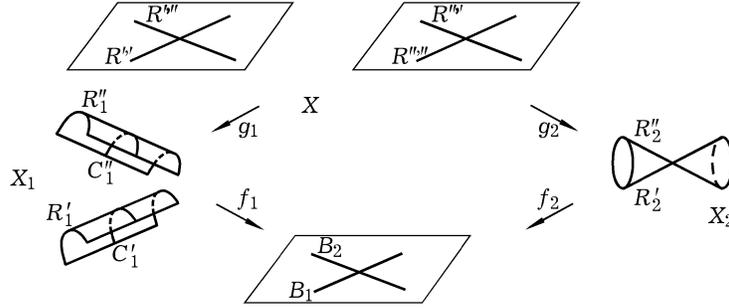


Рис. 4

На рис. 4 не изображены еще нормализации окрестностей  $pr$ -,  $rs$ - и  $rr$ -точек  $X^\times$ .

2.3.6. Над окрестностью  $pp$ -ноуда  $b \in B$  нормализация  $X^\times$  в окрестности  $pp$ -точек устроена так (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} g_1^*(R'_1) &= R'^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime} + C'^{\prime\prime}, & g_1^*(R''_1) &= R''^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime} + C''^{\prime\prime}, \\ g_2^*(R'_2) &= R'_2, & g_2^*(R''_2) &= R''_2, & g_2^*(R'^{\prime\prime}) &= R'^{\prime\prime}, & g_2^*(R''^{\prime\prime}) &= R''^{\prime\prime}, \\ g_2^*(C'^{\prime\prime}) &= C'_2, & g_2^*(C''^{\prime\prime}) &= C''_2, & g_1^*(C'^{\prime\prime}) &= C'_1, & g_1^*(C''^{\prime\prime}) &= C''_1. \end{aligned}$$

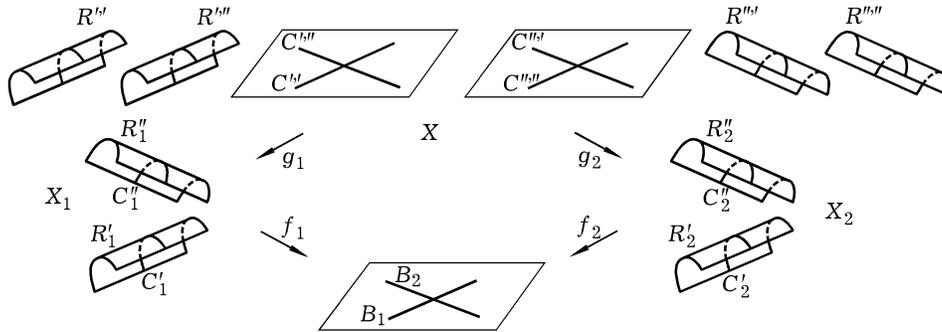


Рис. 5

**2.4. О накрытиях  $\mathbb{C}^2$ , не разветвленных вне каспа  $B: y^2 = x^3$ .** Для того чтобы описать нормализацию расслоенного произведения в окрестностях  $sp$ - и  $pp$ -точек типа  $A_2$  в естественном контексте, мы начнем с напоминания небольшого сюжета из теории особенностей.

2.4.1. *Каспидальная особенность отображения (сборка) и миниверсальная деформация особенности  $A_2$ .* Касп  $(B, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  определяется ростком функции  $x^3 - y^2$ , стабильно эквивалентным ростку функции  $x^3$ . Это – простая особенность типа  $A_2$ . Интересно, что касп (особенность типа  $A_2$ ) получается также на дискриминанте в базе миниверсальной деформации все той же особенности  $A_2$ .

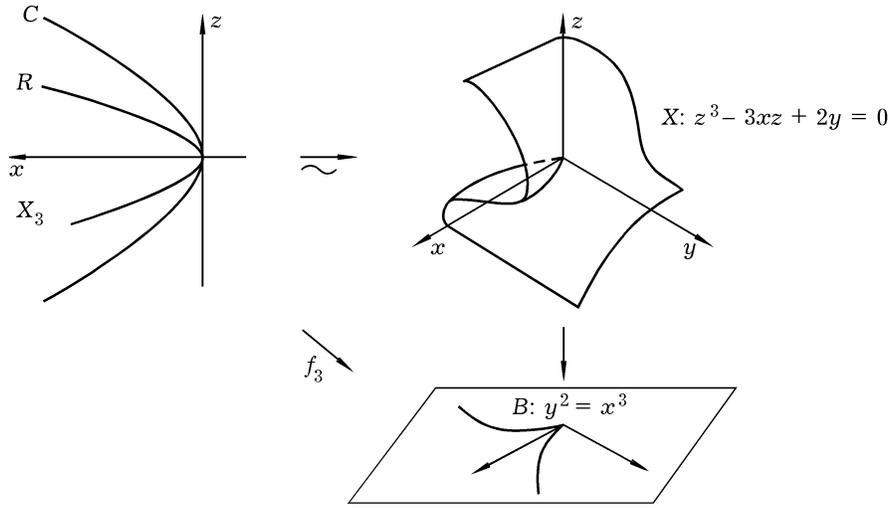


Рис. 6

Как известно, миниверсальная разветка функции  $t = z^3$  устроена так:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, \quad (z, a_2, a_3) \mapsto (z^3 + a_2z + a_3, a_2, a_3).$$

Ограничение этого отображения над  $\{0\} \times \mathbb{C}^2$  дает миниверсальную деформацию  $F$  нульмерной особенности  $z^3 = 0$ ,  $\mathbb{C}^3 \supset X \xrightarrow{F} \mathbb{C}^2$ . Здесь  $X$  – поверхность  $z^3 + a_2z + a_3 = 0$ , а  $F$  индуцирована проекцией на  $(a_2, a_3)$ . Поверхность  $X$  является графиком функции  $-a_3 = z^3 + a_2z$ ;  $z$  и  $a_2$  – локальные координаты на  $X$ ,

$$\begin{array}{ccc} (a_2, z) \in \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\sim} & X \subset \mathbb{C}^3 \\ & \searrow G & \downarrow F \\ & & (a_2, a_3) \in \mathbb{C}^2 \end{array}, \quad G := \begin{cases} a_2 = a_2, \\ -a_3 = z^3 + a_2z. \end{cases}$$

Мы получаем трехлистное накрытие  $G: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , кривая ветвления которого  $R$  задается уравнением  $3z^2 + a_2 = 0$ , а дискриминантная кривая  $B = G(R)$  имеет уравнение  $4a_2^3 + 27a_3^2 = 0$ . Для того чтобы привести уравнение кривой  $B$  к виду  $y^2 = x^3$ , мы сделаем замену

$$a_2 = -3x, \quad a_3 = 2y,$$

и обозначим  $\mathbb{C}^2 \simeq X$  через  $X_3$ , а  $G$  – через  $f_3$  (см. рис. 6). Мы получаем трехлистное накрытие  $f_3: X_3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,

$$f_3: x = x, \quad y = -\frac{1}{2}(z^3 - 3xz).$$

При этом  $x^3 - y^2 = x^3 - \frac{1}{4}(z^3 - 3xz)^2 = (x - z^2)^2(x - \frac{1}{4}z^2)$  и, следовательно,

$$f_3^*(B) = 2R + C,$$

где  $R: x = z^2$  – кривая ветвления, а  $C: x = \frac{1}{4}z^2$ . Отметим, что  $C$  и  $R$  имеют касание второго порядка,  $(C \cdot R) = 2$ .

В силу леммы 1.3 особая точка накрытия  $f_3$  однозначно характеризуется как особая точка трехлистного накрытия  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2$  неособой поверхностью  $X$ , дискриминантная кривая которого имеет обыкновенный касп.

2.4.2. *Отображение Виета  $f_6$ .* Мы предъявим хорошо известное регулярное накрытие  $\mathbb{C}^2$  с группой  $S_3$ , разветвленное в каспе  $B: y^2 = x^3$ , которое окажется нормализацией расслоенного произведения в окрестности  $sp$ -точки типа  $A_2$ . Это накрытие естественным образом появляется в теории особенностей.

Профакторизуем пространство  $\mathbb{C}^3$  по действию группы перестановок  $S_3$ . Получим отображение Виета

$$v: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad (z_1, z_2, z_3) \mapsto (a_1, a_2, a_3),$$

где  $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$ , т.е.

$$a_1 = -(z_1 + z_2 + z_3), \quad a_2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \quad a_3 = -z_1z_2z_3.$$

Отображение  $v$  – это отображение шестой степени, не разветвленное вне  $\Delta = \bigcup_{i \neq j} \{z_i = z_j\}$ , а  $v(\Delta) = D$  определяется дискриминантом многочлена третьей степени.

Действие группы  $S_3$  на  $\mathbb{C}^3$  приводимо:  $\mathbb{C}^3$  разлагается в прямую сумму:  $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2$ , инвариантных подпространств – прямой  $\mathbb{C} = \{z_1 = z_2 = z_3\}$  и плоскости  $\mathbb{C}^2 = \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ . Рассмотрим ограничение  $v$  на эту плоскость  $\mathbb{C}^2$ :

$$(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \supset \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\} = \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 = \{a_1 = 0\} \subset \mathbb{C}^3 \ni (a_1, a_2, a_3).$$

Обозначим  $\mathbb{C}^2 \cap \Delta = L$ ,  $\mathbb{C}^2 \cap D = B$ . Тогда  $L$  состоит из трех прямых:

$$L = L_1 + L_2 + L_3, \quad \text{где } L_i | z_j = z_k, \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

а кривая  $B: 4a_2^3 + 27a_3^2 = 0$  определяется дискриминантом многочлена  $z^3 + a_2z + a_3$ . Так как  $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus L) = \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$ ,  $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B) = \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus D) = \text{Вг}_3$ , мы получаем накрытие  $v: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  степени 6, неразветвленное вне  $B$ . Обозначим это отображение  $f_6$ . В координатах  $x, y$ , где  $a_2 = -3x$ ,  $a_3 = 2y$ , это отображение

$$\mathbb{C}^2 = \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\} = X_6 \xrightarrow{f_6} \mathbb{C}^2 \ni (x, y)$$

задается формулами

$$f_6: x = -\frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1), \quad y = -\frac{1}{2}z_1z_2z_3,$$

дискриминант  $B$  имеет уравнение  $y^2 = x^3$ , а  $f_6^*(B) = 2L = 2L_1 + 2L_2 + 2L_3$  (легко видеть, что  $x^3 - y^2 = \frac{1}{4 \cdot 27}(z_2 - z_1)^2(z_3 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2$  при условии  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ).

Рассмотрим двулистное накрытие, не разветвленное вне  $B$ ,

$$(x, y, w) \in \mathbb{C}^3 \supset X_2 \xrightarrow{f_2} \mathbb{C}^2 \ni (x, y),$$

где  $X_2$  определяется уравнением  $w^2 = x^3 - y^2$ , а  $f_2$  индуцировано проекцией. Так устроено общее накрытие  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  в окрестности  $s$ -точки типа  $A_2$ .

ЛЕММА 2.1 [4]. *Если  $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  – конечное накрытие неприводимой нормальной поверхностью  $X$ , не разветвленное вне каспа  $B \subset \mathbb{C}^2$ , кривая ветвления которого приведена, т.е.  $f^*(B) = 2R + C$  ( $R$  и  $C$  – приведенные кривые), то  $f$  эквивалентно одному из накрытий  $f_2, f_3$  и  $f_6$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается изучением возможных гомоморфизмов  $\rho: \pi_1 \rightarrow S_N$ , где  $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B) = \text{Gr}$  – фундаментальная группа каспидальной особенности, а  $N$  – степень накрытия.

Мы получаем еще одну характеристику накрытия  $f_3$  как конечного накрытия  $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  неприводимой нормальной поверхностью, не разветвленного вне каспа  $B$ , кривая ветвления которого  $R$  приведена и неособа.

2.4.3. *Описание нормализации расслоенного произведения в окрестности  $sp$ -точки типа  $A_2$ .* Отображение  $f_6$  пропускается через отображения  $f_2$  и  $f_3$ , и мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 & X_6 = \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\} & \\
 g_3 \swarrow & & \searrow g_2 \\
 \{w^2 = x^3 - y^2\} = X_2 & & X_3 = \{z^3 - 3xz + 2y = 0\} \\
 f_2 \searrow & f_6 \downarrow & \swarrow f_3 \\
 & (x, y) \in \mathbb{C}^2 \supset B: y^2 = x^3 &
 \end{array} \quad (*)$$

где  $g_2$  и  $g_3$  определяются формулами:  $x$  и  $y$  определяются теми же формулами, что и  $f_6$ , а  $z = z_1$  для  $g_2$  и  $w = \frac{1}{6\sqrt{3}}(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1 - z_3)$  для  $g_3$ . Легко видеть, что  $g_3$  есть факторизация по циклической подгруппе  $\mathbb{Z}_3 = \mathcal{A}_3 \subset S_3$ ,  $X_2 = X_6/\mathcal{A}_3$ , а  $g_2$  есть факторизация по циклической группе второго порядка  $\mathbb{Z}_2 \simeq S_2 = \{(1), (2, 3)\} \subset S_3$ .

Из универсального свойства расслоенных произведений имеем морфизм  $X_6 \rightarrow X_2 \times_{\mathbb{C}^2} X_3$ . Расслоенное произведение  $X_2 \times_{\mathbb{C}^2} X_3$  неприводимо, так как каждая его компонента  $Z$  должна отображаться на  $X_2$  и  $X_3$ , и поэтому степень накрытия  $Z \rightarrow \mathbb{C}^2$  должна делиться на 2 и 3, т.е. должна быть равна 6. Таким образом,  $X_6$  есть нормализация  $X_2 \times_{\mathbb{C}^2} X_3$ , а диаграмма  $(*)$  описывает нормализацию расслоенного произведения в окрестности  $sp$ -точки типа  $A_2$ .

Диаграмму  $(*)$  наглядно-схематически можно изобразить так, как показано на рис. 7.

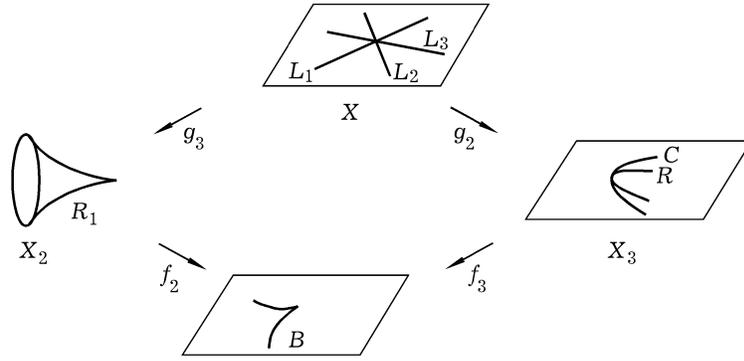


Рис. 7

Непосредственные вычисления показывают, что  $x - z^2 = \frac{1}{3}(z_2 - z_1)(z_1 - z_3)$ , а  $x - \frac{1}{4}z^2 = \frac{1}{12}(z_3 - z_2)^2$ , т.е.

$$g_2^*(R) = L_2 + L_3, \quad g_2^*(C) = 2L_1,$$

и, кроме того,  $g_3^*(R_1) = L_1 + L_2 + L_3$ .

2.4.4. Описание нормализации расслоенного произведения в окрестности  $pp$ -точки типа  $A_2$ . Пусть  $x_1 \in X_1$  и  $x_2 \in X_2$  —  $p$ -точки типа  $A_2$  для  $f_1$  и  $f_2$ ,  $f_1^*(B) = 2R_1 + C_1$ ,  $f_2^*(B) = 2R_2 + C_2$  (см. рис. 8). В этом случае трехлистные накрытия  $f_1$  и  $f_2$  одинаковы (эквивалентны), а гомоморфизмы монодромии  $\varphi_1, \varphi_2: \pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B, y_0) \rightarrow S_3$  являются эпиморфизмами. Слой  $(f^\times)^{-1}(y_0)$  9-листного накрытия  $f^\times: X^\times = X_1 \times_{\mathbb{C}^2} X_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  состоит из пар  $f_1^{-1}(y_0) \times f_2^{-1}(y_0) = \{(i, j), 1 \leq i, j \leq 3\}$ , а гомоморфизм монодромии является (эквивалентен) диагональному гомоморфизму  $\varphi: \pi_1 \rightarrow S_3 \times S_3 \subset S_9$ . Так как  $\varphi_i$  — эпиморфизмы, то слой  $(f^\times)^{-1}(y_0)$  состоит из двух орбит относительно действия  $\pi_1$ : орбиты точки  $(1, 1)$ , которая состоит из трех элементов, и орбиты точки  $(1, 2)$ , которая состоит из шести элементов. Отсюда и из леммы 2.1 следует, что в окрестности точки  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  нормализация  $X$  произведения  $X^\times$  состоит из двух несвязных компонент,  $X = X_3 \sqcup X_6$ , причем на  $X_3$  морфизм  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2$  совпадает с  $f_3$ , морфизмы  $g_1$  и  $g_2$  являются изоморфизмами, а на  $X_6$  морфизм  $f = f_6$ , морфизмы  $g_1$  и  $g_2$  устроены так же, как  $g_2$  в диаграмме  $(*_3)$ .

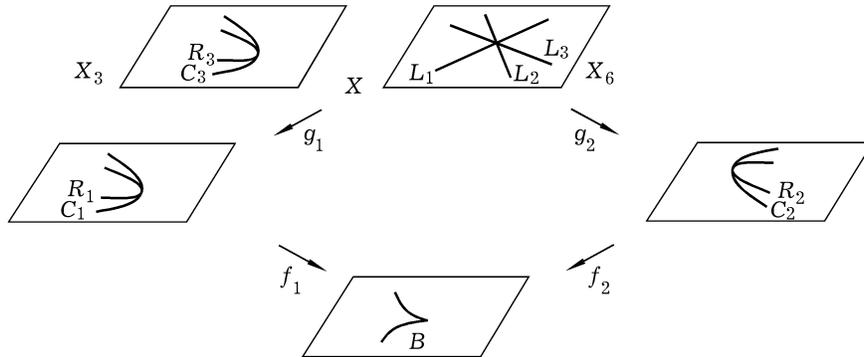


Рис. 8

На  $X^\times$  имеются четыре кривые:  $C_1 \times_B C_2$ ,  $R_1 \times_B C_2$ ,  $C_1 \times_B R_2$  и  $R_1 \times_B R_2$ , прообразы которых на нормализации  $X$  – это  $C_3$ ,  $L_2$ ,  $L_1$  и  $L_3$ ,  $R_3$ . При такой нумерации прямых  $L_i$  имеем

$$\begin{aligned} g_1^*(R_1) &= R_3 + L_2 + L_3, & g_1^*(C_1) &= C_3 + 2L_1, \\ g_2^*(R_2) &= R_3 + L_1 + L_3, & g_2^*(C_2) &= C_3 + 2L_2. \end{aligned}$$

2.4.5. *Подъем диаграммы (\*<sub>3</sub>).* Рассмотрим диаграмму (\*<sub>3</sub>). Для вычислений индексов пересечений в § 5 нам потребуется разрешить особую точку типа  $A_2$  поверхности  $X_2$  и “развести” кривые  $L_2$  и  $L_3$  на  $X$ . Разрешение особой точки типа  $A_2$ , как и всякой “двойной плоскости”, можно получить, если сначала взять разрешение  $\sigma: \bar{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  вложения кривой ветвления  $B \subset \mathbb{C}^2$ , а затем рассмотреть нормализацию  $X_2 \times_{\mathbb{C}^2} \bar{\mathbb{C}}^2$ .

На самом деле мы сделаем больше: мы поднимем всю диаграмму (\*<sub>3</sub>) на  $\bar{\mathbb{C}}^2$ .

1) Особая точка кривой  $B$  разрешается одним  $\sigma$ -процессом  $\sigma_1$ . Этого достаточно для того, чтобы разрешить особую точку на  $X_2$ , но для того, чтобы разрешить полный прообраз  $B$  до дивизора с нормальными пересечениями, нужно сделать еще два  $\sigma$ -процесса. Изобразим схематически процесс разрешения, “рисую” полный прообраз кривой  $B$  (см. рис. 9). Обозначим  $E_i$  кривую, вклеиваемую при  $i$ -м  $\sigma$ -процессе, а также ее собственный прообраз при следующих  $\sigma$ -процессах. У каждой кривой указаны два числа: отрицательное – индекс самопересечения, положительное – кратность в полном прообразе кривой  $B$ .

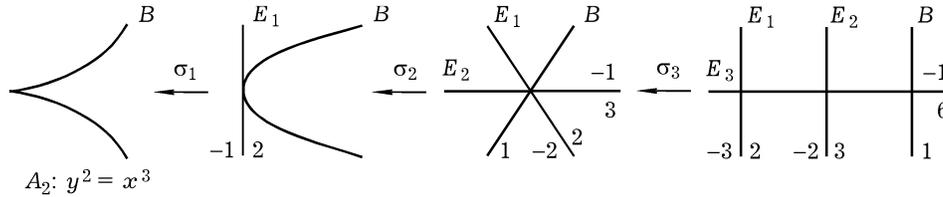
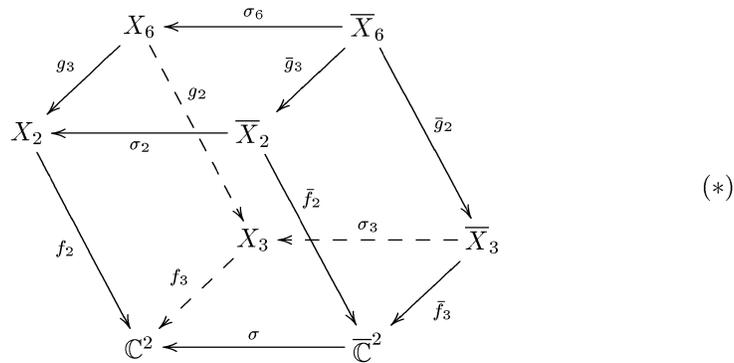


Рис. 9

2) Обозначим  $\sigma: \bar{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  композицию  $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ . Мы построим диаграмму (\*<sub>3</sub>) над  $\bar{\mathbb{C}}^2$  и получим следующую коммутативную диаграмму, в которой все морфизмы на правой грани – конечные накрытия:



Правый квадрат диаграммы (\*) получается как нормализация расслоенного произведения  $(*_3) \times_{\mathbb{C}^2} \overline{\mathbb{C}^2}$ , т.е.  $\overline{X}_i$  – это нормализация  $X_i \times_{\mathbb{C}^2} \overline{\mathbb{C}^2}$ , а морфизмы индуцированы морфизмами диаграммы  $(*_3)$  и проекциями. Мы опишем, как можно построить диаграмму (\*) не сразу (как нормализацию подъема), а постепенно. Чтобы легче было следить за описанием, приведем сразу ответ. Нарисуем правый квадрат диаграммы (\*), заменяя многообразия в его вершинах полными прообразами кривой  $B$ :

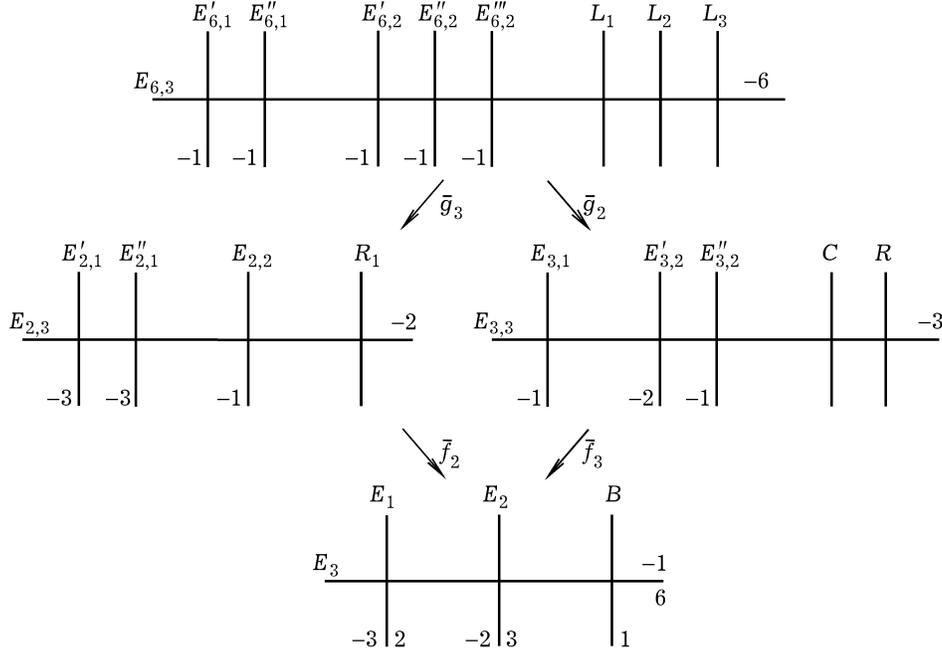


Рис. 10

Принцип обозначения таков. На  $\overline{\mathbb{C}^2}$  исключительные кривые  $E_1, E_2, E_3$  уже обозначены. При двойной нумерации  $E_{i,j}$  первый индекс показывает на каком многообразии  $X_i$  лежит кривая, а второй индекс – в какую кривую  $E_j$  она отображается на  $\overline{\mathbb{C}^2}$ .

3) Начнем описание диаграммы (\*) с  $\overline{X}_6$  (“сверху”). Для того чтобы развести прямые  $L_i$ , сделаем  $\sigma$ -процесс с центром в точке  $0 \in X_6 = \mathbb{C}^2 = \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ . При этом вклеится прямая  $E_{6,3} = \mathbb{P}^1 = \{t_1 + t_2 + t_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^2 \ni (t_1 : t_2 : t_3)$  и получится многообразие  $X'_6$ . Действие  $S_3$  на  $X_6$  продолжается на  $X'_6$  и, в частности, на  $\mathbb{P}^1$ . На  $\mathbb{P}^1$  имеются восемь исключительных точек, составляющих исключительные орбиты:

$$\begin{aligned} p_1 &= E_{6,3} \cap L_1 = (-2 : 1 : 1), & p_2 &= E_{6,3} \cap L_2 = (1 : -2 : 1), \\ & & p_3 &= E_{6,3} \cap L_3 = (1 : 1 : -2); \\ P_1 &= (0 : 1 : -1), & P_2 &= (1 : 0 : -1), & P_3 &= (1 : -1 : 0); \\ Q_1 &= (1 : \zeta : \zeta^2), & Q_2 &= (1 : \bar{\zeta} : \bar{\zeta}^2), \end{aligned}$$

где  $\zeta = \sqrt[3]{1}$  – примитивный корень, а  $\bar{\zeta} = \zeta^2$ . Обозначим  $\xi = (123)$  образующую циклической группы третьего порядка  $\mathbb{Z}_3 = \mathcal{A}_3 = \{(1), (123), (132)\} \subset S_3$ , а  $\varepsilon = (23)$  – образующую циклической группы второго порядка  $\mathbb{Z}_2 = S_2 = \{(1), (23)\} \subset S_3$ . Тогда

$$\begin{aligned} \xi(p_1) &= p_2, & \xi(p_2) &= p_3, & \xi(p_3) &= p_1; \\ \xi(P_1) &= P_2, & \xi(P_2) &= P_3, & \xi(P_3) &= P_1; \\ \xi(Q_1) &= (\zeta^2 : 1 : \zeta) = (1 : \zeta : \zeta^2) = Q_1, & \xi(Q_2) &= (\zeta : 1 : \zeta^2) = (1 : \zeta^2 : \zeta) = Q_2; \\ \varepsilon(p_1) &= p_1, & \varepsilon(p_2) &= p_3, & \varepsilon(p_3) &= p_2; \\ \varepsilon(P_1) &= P_1, & \varepsilon(P_2) &= P_3, & \varepsilon(P_3) &= P_2; & \varepsilon(Q_1) &= Q_2. \end{aligned}$$

Если профакторизовать  $X'_6$  по группе  $\mathbb{Z}_3 = \mathcal{A}_3$ , то неподвижные точки  $Q_1$  и  $Q_2$  дадут на  $X'_2 = X'_6/\mathcal{A}_3$  две циклические фактосособенности, при разрешении которых  $X''_2 \rightarrow X'_2$  вклеиваются кривые  $E'_{2,1}$  и  $E''_{2,1}$  с  $(E'_{2,1}) = -3$ ,  $(E''_{2,1}) = -3$ . Чтобы поднять  $X'_6 \rightarrow X'_2$  на  $X''_2$ , мы должны раздуть точки  $Q_1$  и  $Q_2$ ,  $X''_6 \rightarrow X'_6$ , и при этом получим  $X''_6 \rightarrow X''_2$ :

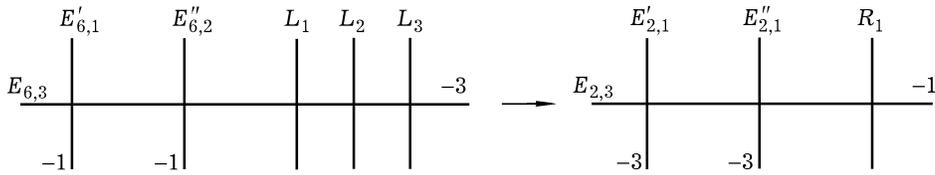


Рис. 11

4) Отображение  $f_2$  – это факторизация по циклической группе  $\mathbb{Z}_2 = S_2$ . Это действие продолжается на  $X''_2$ . Неподвижная точка на  $E_{2,3}$  – образ точки  $P_1$  на  $E_{6,3}$  дает на  $X''_2/\mathbb{Z}_2 (= \bar{\mathbb{C}}^{2'})$  особую точку типа  $A_2$ . При ее разрешении вклеивается  $(-2)$ -кривая  $E_2$  и получается  $\bar{\mathbb{C}}^2$ . Чтобы поднять  $X''_2 \rightarrow X''_2/\mathbb{Z}_2$  на разрешение  $\bar{\mathbb{C}}^2$ , мы должны раздуть точку на  $X''_2$ . При этом вклеивается  $(-1)$ -кривая  $E_{2,2}$  и получается  $\bar{X}_2$ . Чтобы получить  $\bar{g}_3: \bar{X}_6 \rightarrow \bar{X}_2$ , мы должны сделать три  $\sigma$ -процесса с центрами в точках  $P_1, P_2, P_3$  на  $X''_6$ , при которых вклеиваются три прямые  $E'_{6,2}, E''_{6,2}$  и  $E'''_{6,2}$ . Мы получаем левую часть  $\bar{g}_3$  и  $\bar{f}_2$  правого квадрата диаграммы (\*), изображенной на рис. 10. Отметим, что отображение  $\bar{g}_3$  ветвится вдоль кривых  $E'_{6,1}$  и  $E''_{6,1}$ , а отображение  $\bar{f}_2$  ветвится вдоль кривых  $E_{2,2}$  и  $R_1$ .

На поверхности  $\bar{X}_2$  можно стянуть сначала  $(-1)$ -кривую  $E_{2,2}$ , а затем  $(-1)$ -кривую  $E_{2,3}$ . При этом получается минимальное разрешение особой точки типа  $A_2$  на  $X_2$ :

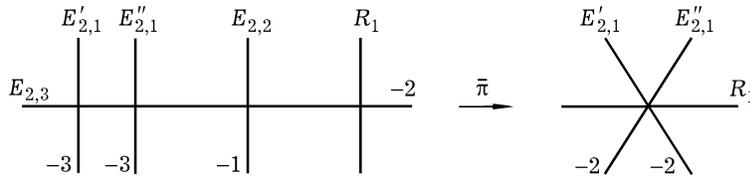


Рис. 12

5) Отображение  $\bar{g}_2$  – это факторизация по группе  $\mathbb{Z}_2 = S_2 = \{(1), (23)\}$ . Получается поверхность  $\bar{X}_3 = \bar{X}_6/S_2$ ,  $\bar{g}_2: \bar{X}_6 \rightarrow \bar{X}_3$ . Отображение  $\bar{g}_2$  ветвится вдоль кривых  $E'_{6,2}$  и  $L_1$ , которые отображаются на  $E'_{3,2}$  и  $C$  соответственно. Диаграмма замыкается отображением  $\bar{f}_3: \bar{X}_3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Поверхность  $\bar{X}_3$  получается из  $X_3 = \mathbb{C}^2$ , если раздуть сначала точку касания кривых  $C$  и  $R$ , при этом вклеится  $E'_{3,2}$ ; затем раздуть точку пересечения  $C$  и  $R$ , при этом вклеится  $E_{3,3}$ ; наконец, на  $E_{3,3}$  надо раздуть еще две точки:

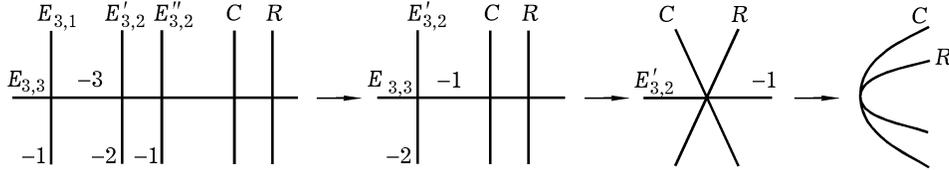


Рис. 13

### § 3. Канонический цикл дювалевской особенности

Для вывода основного неравенства для общих накрытий  $X$  плоскости  $\mathbb{P}^2$  с  $A$ - $D$ - $E$ -особенностями мы собираемся применить теорему Ходжа об индексе. Поэтому нам потребуется теория пересечений и, следовательно, разрешение особенностей  $X$ . В этом параграфе мы исследуем локальную ситуацию и выясним, как при разрешении меняются канонический класс и кривая ветвления.

**3.1. Определение канонического цикла.** Пусть  $(X, x)$  – двумерная  $A$ - $D$ - $E$ -особенность. Пусть  $\pi: \bar{X} \rightarrow X$  – ее минимальное разрешение,  $L = \pi^{-1}(x)$  – исключительная кривая. Как известно, канонический класс  $K_{\bar{X}}$  тривиален в окрестности  $L$ , т.е. мы можем выбрать дивизор в  $K_{\bar{X}}$ , носитель которого с  $L$  не пересекается. Другими словами, на  $\bar{X}$  имеется дифференциальная форма  $\omega$ , не имеющая ни полюсов, ни нулей в окрестности  $L$ . Такую форму можно, например, получить так. Как известно,  $(X, x)$  является фактосособенностью,  $X = \mathbb{C}^2/G$ , где  $G \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Форма  $du \wedge dv$  на  $\mathbb{C}^2 \ni (u, v)$  инвариантна относительно  $G$  и определяет форму на  $X$  ( $\varphi^*(\omega) = du \wedge dv$ , где  $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ ). Поэтому дивизор  $(\omega) = \sum k_i L_i$ . А так как  $L_i$  есть  $(-2)$ -кривые,  $(L_i \cdot (\omega)) = 0$ , мы получаем, что  $(\omega) = 0$ .

С другой стороны,  $(X, x)$  можно рассматривать как двойную плоскость, т.е. как двулистное накрытие  $X \xrightarrow{f} Y$  плоскости  $Y = \mathbb{C}^2$  (локально). Пусть  $z^2 = h(x, y)$  – уравнение  $(X, x)$ ,  $B: h(x, y) = 0$  – дискриминантная кривая,  $f^{-1}(B) = R$  – кривая ветвления, определенная уравнением  $z = 0$ . На  $X$  мы можем рассмотреть дифференциальную форму  $\omega = f^*(dx \wedge dy)$ , поднятую снизу. Тогда на  $\bar{X}$  дивизор  $(\omega) = (z) = \bar{R} + Z$ , где  $\bar{R} \subset \bar{X}$  – собственный прообраз  $R$ ,  $Z = \sum \gamma_i L_i$  – цикл на  $L = \pi^{-1}(x)$ . Дивизор  $Z$  мы будем называть *каноническим циклом* двумерной  $A$ - $D$ - $E$ -особенности. Таким образом,  $-Z$  – это цикл на исключительной кривой  $L$ , эквивалентный кривой ветвления  $\bar{R}$  в окрестности  $L$ . Вычислим канонический цикл для всех  $A$ - $D$ - $E$ -особенностей.

**3.2. О разрешении особенностей двойных плоскостей.** Разрешение  $A$ - $D$ - $E$ -особенности, как и всякой двойной плоскости, можно получить с помощью разрешения особенности дискриминантной кривой  $B \subset Y = \mathbb{C}^2$ . Пусть  $\sigma: \bar{Y} \rightarrow Y$  – композиция  $\sigma$ -процессов такая, что полный прообраз кривой  $B$  есть

дивизор с нормальными пересечениями. Пусть  $\sigma^*(B) = \bar{B} + \sum_{i=1}^r \alpha_i l_i$ , где  $\bar{B}$  – собственный прообраз  $B$ , а  $l_i \simeq \mathbb{P}^1$ ,  $i = 1, \dots, r$ , обозначают исключительные кривые, а также их собственные прообразы, вклеиваемые при  $\sigma$ -процессах. Пусть  $\bar{X}$  – нормализация  $\bar{Y} \times_Y X$ , а  $\bar{f}$  и  $\pi$  индуцированы проекциями,

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(x) = L = L_1 \cup \dots \cup L_r \subset \bar{X} & \xrightarrow{\pi} & X \supset R \ni x, R: z = 0 \\ \bar{f} \downarrow & & \downarrow f \\ \sigma^*(B) = \bar{B} + \sum_{i=1}^r \alpha_i l_i \subset \bar{Y} & \xrightarrow{\sigma} & Y \supset B \end{array} \quad (\#)$$

Обозначим  $\bar{f}^{-1}(l_i) = L_i$ . Кривая  $L_i$  либо неприводима, либо состоит из двух компонент:  $L_i = L'_i + L''_i$ , где  $L'_i \simeq \mathbb{P}^1$ ,  $L''_i \simeq \mathbb{P}^1$ . Отображение  $\bar{f}$  – двулистное накрытие, разветвленное в кривой  $\bar{B} + \sum \alpha_i$  нечет.  $l_i$ . Кривые  $l_i$ , для которых  $\alpha_i$  нечетно, мы для большей наглядности будем обозначать также  $\bar{l}_i$ , а  $L_i$  – соответственно  $\bar{L}_i$ . Поверхность  $\bar{X}$  имеет особенности типа  $A_1$  над нодами кривой ветвления  $\bar{B} + \sum \bar{l}_i$ . Если эта кривая неособа, т.е. является несвязным объединением компонент (этого можно добиться, делая по одному  $\sigma$ -процессу в каждом ноде), то  $\bar{X}$  неособа и является разрешением особенности  $(X, x)$ . Пусть  $\bar{R}$  – собственный прообраз  $R$  относительно  $\pi$  (собственный прообраз  $\bar{B}$  относительно  $\bar{f}$ ). Имеем  $\bar{f}^*(\bar{l}_i) = 2\bar{L}_i$ , если  $\alpha_i$  нечетное, и  $\bar{f}^*(l_i) = L_i$ , если  $\alpha_i$  четное. Поэтому

$$((\sigma \circ \bar{f})^* h(x, y)) = (z^2) = 2\bar{R} + \sum_{\alpha_i \text{ нечет.}} 2\alpha_i \bar{L}_i + \sum_{\alpha_i \text{ чет.}} \alpha_i L_i$$

и, следовательно,  $(z) = \bar{R} + Z$ , где

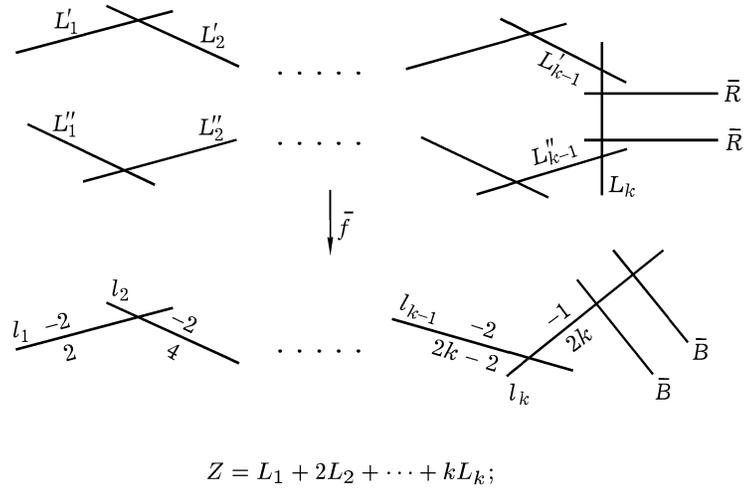
$$Z = \sum_{\alpha_i \text{ нечет.}} \alpha_i \bar{L}_i + \sum_{\alpha_i \text{ чет.}} \frac{1}{2} \alpha_i L_i.$$

Вычислим цикл  $Z$  для каждого из типов  $A$ - $D$ - $E$ -особенностей (несмотря на обилие работ, посвященных дювалевским особенностям, авторам неизвестно ни одной из них, в которых бы цикл  $Z$  вычислялся; поэтому нам придется провести эти вычисления).

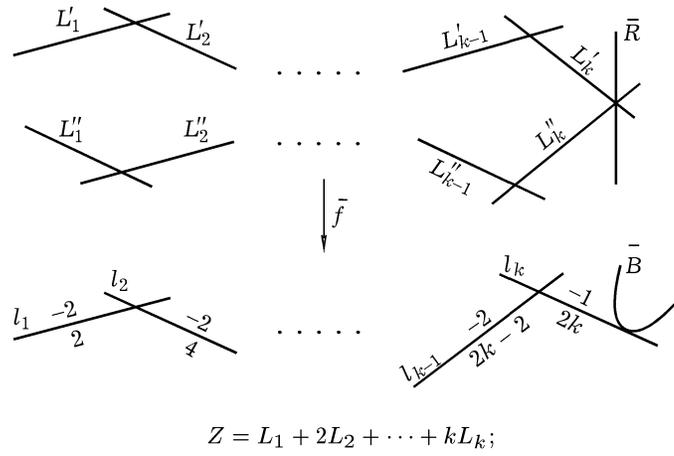
**3.3. Вычисление канонического цикла.** Рассмотрим минимальное разрешение для каждого из типов  $A$ - $D$ - $E$ -особенностей, описанное выше. Результаты вычисления  $\sigma^*(B)$ , исключительной кривой  $\pi^{-1}(x) = E$  и канонического цикла  $Z$  содержатся в следующей лемме.

**ЛЕММА 3.1.** *Ниже схематически изображен полный прообраз  $\sigma^*(B) = \bar{B} + \sum_{i=1}^r \alpha_i l_i$  (около каждой кривой  $l_i$  указано положительное число  $\alpha_i$  и отрицательное число  $(l_i^2)$ ), над ним изображена кривая  $\pi^{-1}(R)$ , состоящая из  $\bar{R}$  и  $(-2)$ -кривых, а также выписаны канонические циклы  $Z$ :*

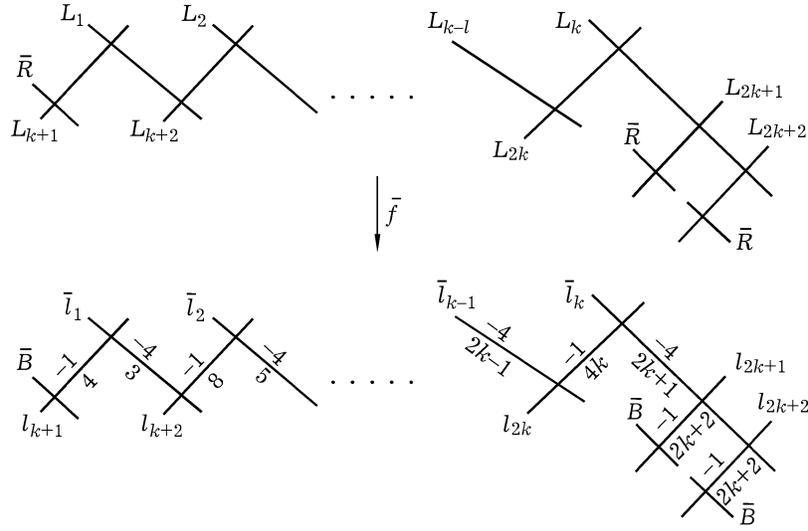
1) особенность  $A_{2k-1}: y^2 = x^{2k}$ ,  $k \geq 1$ ,



2) особенность  $A_{2k}: y^2 = x^{2k+1}$ ,  $k \geq 1$ ,

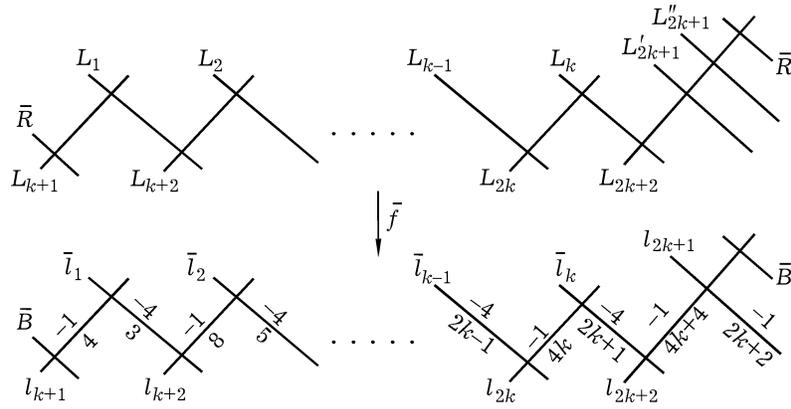


3) особенность  $D_{2k+2}$ :  $x(y^2 + x^{2k})$ ,  $k \geq 1$ ,



$$Z = 3L_1 + 5L_2 + \dots + (2k + 1)L_k + 2L_{k+1} + 4L_{k+2} + \dots + 2kL_{2k} \\ + (k + 1)L_{2k+1} + (k + 1)L_{2k+2};$$

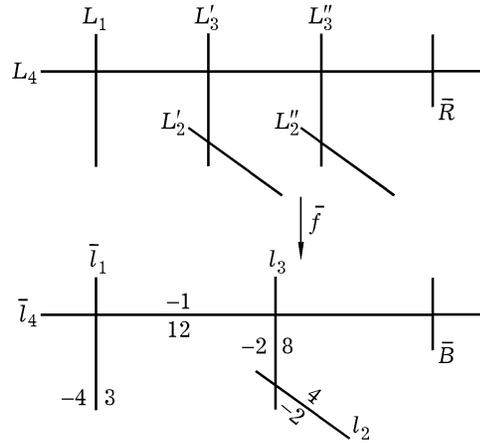
4) особенность  $D_{2k+3}$ :  $x(y^2 + x^{2k+1})$ ,  $k \geq 1$ ,



$$Z = 3L_1 + 5L_2 + \dots + (2k + 1)L_k + 2L_{k+1} + 4L_{k+2} + \dots + 2kL_{2k} \\ + (2k + 2)L_{2k+2} + (k + 1)L_{2k+1},$$

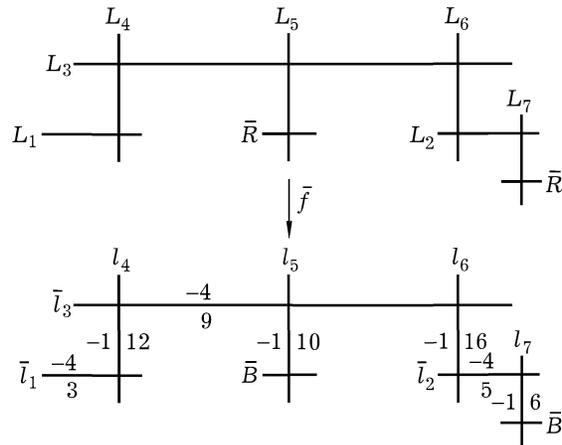
где  $L_{2k+1} = L'_{2k+1} + L''_{2k+1}$ ;

6) особенность  $E_6: x^3 + y^4$ ,



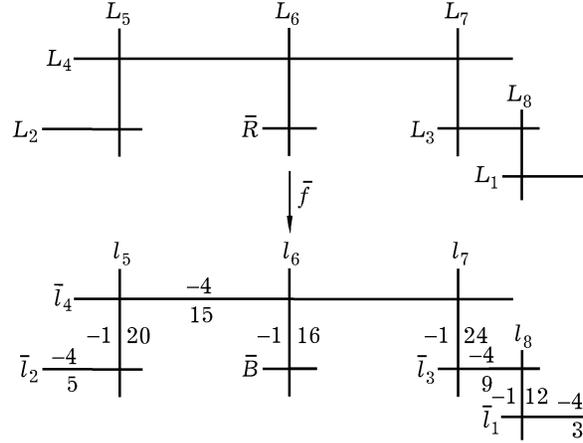
$$Z = 3L_1 + 2L_2 + 4L_3 + 6L_4;$$

7) особенность  $E_7: x(x^2 + y^3)$ ,



$$Z = 3L_1 + 5L_2 + 9L_3 + 6L_4 + 5L_5 + 8L_6 + 3L_7;$$

8) особенность  $E_8: x^3 + y^5$ ,



$$Z = 3L_1 + 5L_2 + 9L_3 + 15L_4 + 10L_5 + 8L_6 + 12L_7 + 6L_8.$$

**3.4. Дефект особенности.** Определим дефект  $\delta$   $A$ - $D$ - $E$ -особенности формулой

$$\delta = \frac{1}{2}(\bar{R} \cdot Z).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для различных  $A$ - $D$ - $E$ -особенностей дефект равен

$$\delta = \begin{cases} \left[ \frac{n+1}{2} \right] & \text{для типа } A_n; \\ \left[ \frac{n}{2} \right] + 1 & \text{для типа } D_n; \\ \left[ \frac{n+1}{2} \right] & \text{для типов } E_n, \quad n = 6, 7, 8. \end{cases}$$

В частности, для типов  $A_1$  (ноудов) и  $A_2$  (каспов)  $\delta = 1$ .

Можно показать, что на самом деле дефект  $\delta$  – это  $\delta$ -инвариант (род) одномерной особенности.

#### § 4. Числовые инварианты общего накрытия

Рассмотрим теперь глобальную ситуацию. Пусть поверхность  $X$  имеет лишь  $A$ - $D$ - $E$ -особенности,

$$\text{Sing } X = \sum_{k \geq 1} a_k A_k + \sum_{k \geq 4} d_k D_k + \sum_{k=6,7,8} e_k E_k,$$

что означает, что  $X$  имеет  $a_k$  особенностей типа  $A_k$ ,  $d_k$  – типа  $D_k$  и  $e_k$  – типа  $E_k$ . Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  – общее накрытие степени  $N$ , а  $B \subset \mathbb{P}^2$  – дискриминантная кривая. Пусть  $\deg B = d$ , и пусть  $B$  имеет  $n$  ноудов и  $s$  каспов, из которых  $n_s = a_1$  и  $c_s = a_2$  происходят из  $\text{Sing } X$ , а  $n_p$  и  $c_p$  являются  $p$ -ноудами и  $p$ -каспами. Пусть  $R \subset X$  – кривая ветвления,  $f^*(B) = 2R + C$ , а  $L \subset X$  – прообраз общей прямой  $l \subset \mathbb{P}^2$ . Пусть  $\pi: S \rightarrow X$  – минимальное разрешение особенностей  $X$ , а  $\bar{f} = f \circ \pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Обозначим  $\bar{R}$  и  $\bar{L}$  собственные прообразы  $R$  и  $L$  на  $S$ . Тогда  $\bar{R}$  есть нормализация кривой  $R$ , а  $\bar{L} \simeq L$ .

#### 4.1. Канонический класс $K_S$ и канонический цикл $Z$ . Пусть

$$Z = \sum_{x \in \text{Sing } X} Z_x$$

– канонический цикл поверхности  $S$ , где  $Z_x$  – канонические циклы особенностей  $x \in \text{Sing } X$ . Из п. 3.2 следует, что

$$K_S = (f \circ \pi)^* K_{\mathbb{P}^2} + \bar{R} + Z = -3\bar{L} + \bar{R} + Z. \quad (4.1)$$

Кроме того, поверхность  $X$  горенштейнова, дивизор  $R$  локально главный и

$$\pi^*(R) = \bar{R} + Z. \quad (4.2)$$

#### 4.2. Индексы пересечений.

ЛЕММА 4.1. Для дивизоров  $\bar{L}$ ,  $\bar{R}$  и  $Z$  на  $S$  индексы пересечений равны

$$(\bar{L}^2) = N, \quad \bar{L} \cdot \bar{R} = d, \quad \bar{L} \cdot Z = 0, \quad \bar{R} \cdot Z = 2\delta_X, \quad (Z^2) = -2\delta_X, \quad (4.3)$$

где

$$\delta_X = \sum_{x \in \text{Sing } X} \delta_x = \sum a_k \left[ \frac{k+1}{2} \right] + \sum d_k \left( \left[ \frac{k}{2} \right] + 1 \right) + \sum e_k \left[ \frac{k+1}{2} \right] \quad (4.4)$$

– дефект поверхности  $X$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, имеем  $(\bar{L}^2) = \deg f = N$ , а  $\bar{L} \cdot \bar{R} = \deg B = d$ . В силу 3.4 имеем  $\bar{R} \cdot Z = 2\delta_X$ . Так как дивизор  $Z$  исключительный,  $\pi(Z) = \text{Sing } X$ ,  $\dim \pi(Z) = 0$ , а  $\bar{L} = \pi^*(L)$ ,  $\bar{R} + Z = \pi^*(R)$ , то  $\bar{L} \cdot Z = 0$  и  $(\bar{R} + Z) \cdot Z = 0$ , а следовательно,  $(Z^2) = -(\bar{R} \cdot Z)$ .

Остается вычислить  $(\bar{R}^2)$ .

**4.3. Четность степени**  $\deg B = d = 2\bar{d}$ . Ограничение  $\bar{f}$  на  $\bar{L}$ ,  $\bar{L} \rightarrow l \simeq \mathbb{P}^1$ , есть накрытие степени  $N$ , которое имеет ветвление второго порядка в точках пересечения  $\bar{L}$  и  $\bar{R}$ . Так как  $\bar{L} \cdot \bar{R} = d$ , то из формулы Гурвица получаем  $2g(\bar{L}) - 2 = -2N + d$ . Отсюда следует, что  $\deg B = d$  четна. Пусть  $d = 2\bar{d}$ . Кроме того, так как

$$g(\bar{L}) = \frac{1}{2}d + 1 - N \geq 0,$$

мы получаем ограничение на степень накрытия:  $N \leq \bar{d} + 1$ .

**4.4. Индекс самопересечения  $(\bar{R}^2)$  и арифметический род кривой  $R$ .** Обозначим  $\delta$  дефект кривой  $B$ ,

$$\delta = \delta_B = \sum_{s \in \text{Sing } B} \delta_s = n + c + \delta_0, \quad (4.5)$$

где

$$\delta_0 = \sum_{x \in \text{Sing } B, x \text{ не } A_1 \text{ и } A_2} \delta_x. \quad (4.6)$$

Числа  $\delta$  и  $\delta_0$  – это предельные значения дефектов  $\delta_X$  поверхностей  $X$  с данной дискриминантной кривой  $B$ :  $\delta_0$  соответствует поверхности  $X$ , для которой все ноуды и каспы являются  $p$ -ноудами и  $p$ -каспами,  $n = n_p$ ,  $c = c_p$ , а  $\delta$  соответствует поверхности  $X$  (например, двулистному накрытию), у которой все ноуды и каспы являются  $s$ -ноудами и  $s$ -каспами,  $n = n_s$ ,  $c = c_s$ .

Сначала мы покажем, как геометрический род кривой  $B$ ,  $g = g(B) = g(\bar{R})$ , связан с дефектом  $\delta$ . Для этого мы рассмотрим поверхность  $X$ , которая является двулистным накрытием плоскости  $\mathbb{P}^2$  с дискриминантной кривой  $B$ . В этом случае  $(Z^2) = -(\bar{R} \cdot Z) = -2\delta$ , а  $f^*(B) = 2R$  и, следовательно,  $d \cdot \bar{L} \sim 2\bar{R} + 2Z$ , так как  $B \sim d \cdot l$ . Из (4.1) и формулы присоединения  $g(\bar{R}) = \frac{(\bar{R}, \bar{R} + K_{\bar{X}})}{2} + 1$  получаем

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta. \quad (4.7)$$

Отметим, что если известно, что дефект  $\delta$  совпадает с  $\delta$ -инвариантом одномерной особенности, то эта формула совпадает с известной формулой для геометрического рода  $g(R) \stackrel{\text{df}}{=} g(\bar{R})$  особой кривой  $R$ ,  $g(R) = p_a(R) - \sum_{x \in \text{Sing } R} \delta_x$ .

Вернемся к общему накрытию  $X$  степени  $N$ ,  $n = n_s + n_p$ ,  $c = c_s + c_p$ . Тогда

$$\delta_X = n_s + c_s + \delta_0 = \delta - n_p - c_p. \quad (4.8)$$

**ЛЕММА 4.2.** *Индекс самопересечения собственного прообраза кривой ветвления  $\bar{R} \subset S$  равен*

$$(\bar{R}^2) = 3\bar{d} + g - 1 - \delta_X, \quad (4.9)$$

а

$$(\bar{R} + Z)^2 = 3\bar{d} + g - 1 + \delta_X = 3\bar{d} + p_a(R) - 1, \quad (4.10)$$

где

$$p_a(R) = g + \delta_X = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - n_p - c_p \quad (4.11)$$

– арифметический род кривой  $R$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из (4.1) и формулы присоединения  $2g(\bar{R}) - 2 = (\bar{R}, \bar{R} + K_S) = (\bar{R}, -3\bar{L} + 2\bar{R} + Z)$  получаем  $(\bar{R}^2) = \frac{3}{2}(\bar{R} \cdot \bar{L}) + g - 1 - \frac{1}{2}(\bar{R} \cdot Z)$ . Применяя формулы (4.3), получаем доказательство.

Из формул (4.1), (4.3) и (4.9) получаем

**СЛЕДСТВИЕ 4.1.** *Имеем*

$$(K_S^2) = 9N - 9\bar{d} + p_a(R) - 1, \quad (4.12)$$

или же, подставляя  $p_a(R)$  из (4.11),

$$(K_S^2) = 9N + \frac{1}{2}d(d-12) - n_p - c_p. \quad (4.12')$$

#### 4.5. Ограничение на степень накрытия.

ЛЕММА 4.3. *Для общего накрытия степени  $N$  с дискриминантной кривой степени  $d = 2\bar{d}$  рода  $g$ , имеем*

$$N \leq \frac{4\bar{d}^2}{3\bar{d} + g - 1 + \delta_X}, \quad (4.13)$$

где  $\delta_X$  – дефект особенностей поверхности  $X$ , причем равенство возможно тогда и только тогда, когда  $\bar{L} \equiv tK_S$  при некотором  $t \in \mathbb{Q}^*$ , либо  $tK_S \equiv 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему Ходжа об индексе к дивизорам  $\bar{L}$  и  $\pi^*(R) = \bar{R} + Z$  на  $S$ . Получим

$$\left| \begin{array}{cc} \bar{L}^2 & (\bar{L}, \bar{R} + Z) \\ (\bar{L}, \bar{R} + Z) & (\bar{R} + Z)^2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} N & d \\ d & 3\bar{d} + g - 1 + \delta_X \end{array} \right| \leq 0,$$

а это и есть требуемое неравенство. При этом равенство возможно, только если  $\bar{L}$  и  $\bar{R} + Z$  линейно зависимы в группе Нерона–Севери  $\text{NS}(\bar{X}) \otimes \mathbb{Q}$ . Так как  $K_S = -3\bar{L} + \bar{R} + Z$ , получаем утверждение о возможном равенстве.

#### 4.6. Эйлерова характеристика $e(S)$ .

ЛЕММА 4.4. *Эйлерова характеристика поверхности  $S$ , полученная при минимальном разрешении особенностей поверхности  $X$ , связана с дефектом  $\delta_X$  и инвариантами общего накрытия  $f$  соотношением*

$$e(S) = 3N + 2g - 2 + 2\delta_X - c_p, \quad (4.14)$$

где  $N = \deg f$ , а  $c_p$  – число  $p$ -каспов на  $B$  (или число сборок  $f$ ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается точно так же, как и в случае неособой поверхности  $X$  [6, § 1, лемма 7] при рассмотрении общего пучка прямых на  $\mathbb{P}^2$  и соответствующего пучка гиперплоских сечений на  $S$  и подъема морфизма  $\bar{f}: S \rightarrow \mathbb{P}^2$  до морфизма расслоений на кривые над  $\mathbb{P}^1$ . Доказательство можно получить и непосредственными вычислениями, если найти сначала  $e(X) = 3N - e(B) - n_p - c_p$ , рассматривая конечное накрытие  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ , стратификацию  $\mathbb{P}^2 = (\mathbb{P}^2 \setminus B) \cup (B \setminus \text{Sing } B) \cup \text{Sing } B$  и применяя свойство аддитивности эйлеровой характеристики.

Из формулы Нётера  $(K_S^2) + e(S) = 12p_a$  и формул (4.12) и (4.14) имеем  $12p_a = 12N - 9\bar{d} + 3p_a(R) - 3 - c_p$ . Подставляя  $p_a(R)$  из (4.11), получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Эйлерова характеристика структурного пучка  $\theta_S$  равна*

$$p_a = 1 - q + p_g = N + \frac{\bar{d}(\bar{d} - 3)}{2} - \frac{n_p}{4} - \frac{c_p}{3}. \quad (4.15)$$

Таким образом, как и в случае неособой поверхности  $X$ , получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Имеем  $n_p \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $c_p \equiv 0 \pmod{3}$ .*

§ 5. Доказательство основного неравенства

**5.1. Расслоенное произведение двух накрытий.** Пусть кривая  $B$  является общей дискриминантной кривой для двух общих накрытий  $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  и  $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  степеней  $\deg f_1 = N_1$  и  $\deg f_2 = N_2$ . Пусть

$$\text{Sing } B = nA_1 + cA_2 + \sum_{k>2} a_k A_k + \sum_{k \geq 4} d_k D_k + \sum_{k=6,7,8} e_k E_k.$$

По отношению к паре накрытий  $f_1$  и  $f_2$  ноуды и каспы на  $B$  подразделяются на четыре типа:

$$n = n_{ss} + n_{sp} + n_{ps} + n_{pp}, \quad c = c_{ss} + c_{sp} + c_{ps} + c_{pp}, \quad (5.1)$$

где  $n_{b\sharp}$  и  $c_{b\sharp}$  – число  $b\sharp$ -ноудов и  $b\sharp$ -каспов на  $B$ . В частности,  $n_{ss} + n_{sp} = a_1$  – число особенностей типа  $A_1$ , а  $c_{ss} + c_{sp} = a_2$  – число особенностей типа  $A_2$  на поверхности  $X_1$ .

Рассмотрим нормализацию  $X$  расслоенного произведения  $X^\times = X_1 \times_{\mathbb{P}^2} X_2$  и соответствующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & X \supset g_1^{-1}(R_1) = R + C & \\
 g_1 \swarrow & & \searrow g_2 \\
 f_1^*(B) = 2R_1 + C_1 \subset X_1 & & X_2 \supset f_2^*(B) = 2R_2 + C_2 \\
 f_1 \searrow & & \swarrow f_2 \\
 & B \subset \mathbb{P}^2 &
 \end{array} \quad (*_1)$$

Поверхность  $X$  является  $N_1 N_2$ -листным накрытием  $\mathbb{P}^2$  и имеет лишь *A-D-E*-особенности, которые лежат над  $\text{Sing } B$ .

**ЛЕММА 5.1.** *Если накрытия  $f_1$  и  $f_2$  неэквивалентны, то поверхность  $X$  неприводима.*

Доказательство дословно такое же, как в случае общих накрытий неособых поверхностей [6, предложение 2].

Обозначим

$$g_1^{-1}(R_1) = R + C, \quad (5.2)$$

где  $R$  – это часть, которая отображается на  $R_2$ ,  $g_2(R) = R_2$ , а  $C$  – это часть, которая отображается на  $C_2$ ,  $g_2(C) = C_2$ . Нас будут интересовать индексы пересечений  $R$  и  $C$  после разрешения особенностей  $X$  в окрестности кривой  $R + C$ .

Рассмотрим ограничение  $R + C \rightarrow R_1$  накрытия  $g_1$  над кривой  $R_1$ . Как следует из пп. 2.2.1 и 2.2.2, над общей точкой  $x_1 \in R_1$  это есть этальное накрытие степени  $N_2$ , причем  $R \rightarrow R_1$  – двулистное, а  $C \rightarrow R_1$  –  $(N_2 - 2)$ -листное накрытия. Точно так же обстоит дело над точкой  $x_1 \in R_1$ , которая является  $s$ -точкой на  $X_1$ , лежащей над  $ss$ -точкой кривой  $B$ .

Обозначим  $\tilde{\pi}: S \rightarrow X$  минимальное разрешение особых точек поверхности  $X$ , а  $\tilde{R}$  и  $\tilde{C}$  – собственные прообразы  $R$  и  $C$  на  $S$ . Наша цель – вычислить индексы пересечений  $(\tilde{R}^2)$ ,  $(\tilde{R} \cdot \tilde{C})$  и  $(\tilde{C}^2)$ , а также аналогичные индексы пересечений для дивизоров  $\tilde{\pi}^{-1}(R) = \tilde{R} + Z_R$  и  $\tilde{\pi}^{-1}(C) = \tilde{C} + Z_C$ , где  $Z_R$  и  $Z_C$  – суммы канонических циклов, соответствующих особым точкам  $x \in \text{Sing } X$  и лежащим на  $R$  и  $C$  соответственно.

**5.2. Устройство расслоенного произведения над окрестностью особой точки дискриминантной кривой.** Пусть  $U \subset \mathbb{P}^2$  – достаточно маленькая окрестность (в комплексной топологии) точки  $b \in \text{Sing } B$ . Прообраз  $f_1^{-1}(U)$  является несвязным объединением двух частей,  $f_1^{-1}(U) = V_1 \sqcup V'_1$ , где  $V_1$  – это часть, содержащая кривую ветвления  $R_1$ , а  $V'_1$  – часть, не содержащая  $R_1$  и этально отображаемая на  $U$ . Аналогично,  $f_2^{-1}(U) = V_2 \sqcup V'_2$ . Тогда  $f^{-1}(U)$  является несвязным объединением четырех открытых множеств: нормализаций расслоенных произведений  $W = \overline{V_1 \times_U V_2}$ ,  $W' = \overline{V_1 \times_U V'_2}$ ,  $\overline{V'_1 \times_U V_2}$ ,  $\overline{V'_1 \times_U V'_2}$ . При этом только  $W$  и  $W'$  пересекаются с интересующей нас кривой  $g_1^{-1}(R_1)$ . Открытые множества  $W \subset X$  детально изучены в § 2. Поверхность  $X$  в окрестности  $W$  неособа, за исключением случая  $ss$ -точек  $b$ . Открытое множество  $W'$  состоит из  $N_2 - k$  компонент ( $k = 2, 3, 4$  в зависимости от типа особой точки  $b$ ), изоморфно отображаемых на  $V_1$ . При этом  $W'$  не пересекается с  $R$ , а  $W' \cap C$  состоит из  $N_2 - k$  компонент, изоморфных  $V_1 \cap R_1$ .

Из изучения в § 2 локальных свойств поверхности  $X$  следует, что  $X$  и кривые  $R$  и  $C$  имеют следующее устройство над окрестностями особых точек  $b \in \text{Sing } B$  различных типов.

1) Над  $ss$ -точкой  $b$  окрестность  $W$  имеет две, а  $W'$  имеет  $N_2 - 2$  компоненты, изоморфно отображаемые на  $V_1$  с помощью отображения  $g_1$ . Соответственно  $R \cap W$  состоит из двух, а  $C \cap W'$  – из  $N_2 - 2$  компонент, изоморфных  $R_1 \cap V_1$ .

2) Над  $sp$ -точкой  $b \in B$  типа  $A_1$  окрестность  $W'$  состоит из  $N_2 - 4$  компонент, изоморфных  $V_1$  и имеющих особую точку типа  $A_1$ . Соответственно  $C$  состоит из  $N_2 - 4$  кривых с ноудальной особой точкой. Окрестность  $W$  состоит из двух компонент: см. рис. 4, на котором

$$R = R'^{\prime} + R''^{\prime}, \quad C = R'^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime}$$

(на рис. 4 левую и правую части надо поменять местами,  $g_1$  – это  $g_2$ , а  $g_2$  – это  $g_1$ ). Мы видим, что в окрестности  $W$  кривые  $R$  и  $C$  неособы и трансверсально пересекаются в двух точках.

3) Над  $ps$ -точкой  $b$  типа  $A_1$  окрестность  $V_1 \subset X_1$  состоит из двух компонент, на каждой из которых отображение  $f_1$  имеет складку. Окрестность  $W'$  состоит из несвязного объединения  $N_2 - 2$  кусков, изоморфных  $V_1$ . Окрестность  $W$  состоит из двух компонент: см. рис. 4, на котором

$$R = R'^{\prime} + R''^{\prime}, \quad C = \emptyset.$$

Мы видим, что в  $W$  кривая  $R$  неособа и не пересекается с  $C$ .

4) Над  $pp$ -точкой  $b$  типа  $A_1$  окрестность  $V_1 \subset X_1$  состоит из двух неприводимых компонент, на каждой из которых  $f_1$  имеет складку. Окрестность  $W'$  неособа и состоит из  $N_2 - 4$  компонент, изоморфных  $V_1$ . Окрестность  $W$  изображена на рис. 5, на котором

$$R = R'^{\prime} + R''^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime}, \quad C = C'^{\prime} + C''^{\prime}.$$

Мы видим, что кривые  $R$  и  $C$  неособы и не пересекаются.

5) Над  $sp$ -точкой  $b$  типа  $A_2$  окрестность  $V_1$  имеет особую точку типа  $A_2$ , а  $W'$  состоит из  $N_2 - 3$  компонент, изоморфных  $V_1$ . Окрестность  $W$  изображена на рис. 7, на котором

$$R = L_2 + L_3, \quad C = L_1.$$

Мы видим, что  $R$  имеет двойную точку,  $C$  неособа и трансверсально пересекает каждую из ветвей  $R$  в точке их пересечения и, следовательно,  $(R \cdot C) = 2$ .

6) Над  $ps$ -точкой  $b$  типа  $A_2$  окрестность  $V_1$  неособа, а  $W'$  состоит из  $N_2 - 2$  компонент, изоморфных  $V_1$ . Окрестность  $W$  изображена на рис. 7 (на котором левую и правую части надо поменять местами,  $g_1$  — это  $g_2$ , а  $g_2$  — это  $g_3$ ), где

$$R = L_2 + L_3, \quad C = \emptyset.$$

Мы видим, что  $R$  имеет двойную точку и с  $C$  не пересекается.

7) Над  $pp$ -точкой  $b$  типа  $A_2$  окрестность  $W'$  состоит из  $N_2 - 3$  компонент, изоморфных  $V_1$ . Окрестность  $W$  изображена на рис. 8, на котором

$$R = R_3 + L_3, \quad C = L_2.$$

Мы видим, что кривая  $R$  неособа и пересекается с  $C$  трансверсально в одной точке.

Из полученного локального описания следует, что в точках пересечения  $R$  и  $C$  поверхность  $X$  неособа и пересечение не пусто лишь над точками  $b \in B$  типов:  $sp$ -точками типа  $A_1$ , где  $(R \cdot C) = 2$ ,  $sp$ -точками типа  $A_2$ , где  $(R \cdot C) = 2$ , и над  $pp$ -точками типа  $A_2$ , где  $(R \cdot C) = 1$ . Поэтому

$$(\tilde{R} \cdot \tilde{C}) = 2n_{sp} + 2c_{sp} + c_{pp}. \quad (5.3)$$

**5.3. Подъем расслоенного произведения на разрешение дискриминантной кривой.** Для вычисления индексов пересечения на  $S$  мы сначала рассмотрим вспомогательную поверхность  $\bar{X}$ , которая является неминимальным разрешением поверхности  $X$ , а затем “спустимся” на  $S$ . Пусть  $\sigma: \bar{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  — композиция  $\sigma$ -процессов, разрешающая кривую  $B$  и необходимая для получения минимального разрешения двойной плоскости с кривой ветвления  $B$  (см. § 3), и, кроме того, пусть  $\sigma$  включает по два дополнительных  $\sigma$ -процесса в каждом каспе, не являющемся  $ss$ -каспом, как в п. 2.4.5. Рассмотрим подъем диаграммы  $(*_1)$  на  $\bar{\mathbb{P}}^2$ ,

именно рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S & & \\
 & \swarrow \tilde{\pi} & & \searrow \bar{\pi} & \\
 & X & \xleftarrow{\pi} & \bar{X} & \\
 g_1 \swarrow & & & & \searrow \bar{g}_1 \\
 X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & \bar{X}_1 & & \\
 f_1 \swarrow & & & & \searrow \bar{f}_1 \\
 \mathbb{P}^2 & & X_2 & \xleftarrow{\pi_2} & \bar{X}_2 \\
 & \swarrow f_2 & & \searrow \bar{f}_2 & \\
 & & \mathbb{P}^2 & \xleftarrow{\sigma} & \bar{\mathbb{P}}^2
 \end{array} \tag{5.4}$$

в которой  $\bar{X}_i$  и  $\bar{X}$  – нормализации  $X_i \times_{\mathbb{P}^2} \bar{\mathbb{P}}^2$  и  $X \times_{\mathbb{P}^2} \bar{\mathbb{P}}^2$ . Тогда морфизмы “на правой стенке” диаграммы (5.4) являются конечными накрытиями. Поверхность  $\bar{X}$  неособа, а  $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow S$  стягивает “лишние” исключительные кривые первого рода. Пусть  $\bar{R}_1$  – собственный прообраз  $R_1$  на  $\bar{X}_1$ , а  $\bar{R}$  и  $\bar{C}$  (соответственно  $\tilde{R}$  и  $\tilde{C}$ ) – собственные прообразы  $R$  и  $C$  на  $\bar{X}$  (соответственно на  $S$ ). Тогда  $\bar{g}_1^*(\bar{R}_1) = \bar{R} + \bar{C}$ , а  $\bar{R} \rightarrow \bar{R}_1$  и  $\bar{C} \rightarrow \bar{R}_1$  – конечные накрытия степени 2 и  $N_2 - 2$  соответственно, и  $\bar{R}$  и  $\bar{C}$  не пересекаются. Поэтому

$$(\bar{R}^2) = 2(\bar{R}_1^2), \quad (\bar{C}^2) = (N_2 - 2)(\bar{R}_1^2), \quad \bar{R} \cdot \bar{C} = 0. \tag{5.5}$$

На самом деле из пп. 3) и 4) видно, что над  $ps$ - и  $pp$ -ноудами  $b$  в окрестности  $R + C$  поверхность  $X$  неособа, кривые  $R$  и  $C$  неособы и не пересекаются. Поэтому можно считать, что  $ps$ - и  $pp$ -ноуды на кривой  $B$  и не раздувались (а на поверхности  $S$  остались особые точки, которые лежат над этими ноудами).

**5.4. Вычисление индексов пересечений.** Сначала найдем  $(\bar{R}_1^2)$ . Напомним, что в силу (4.9) на минимальном разрешении  $\tilde{X}_1$  поверхности  $X_1$  имеем

$$(\tilde{R}_1^2) = 3\bar{d} + g - 1 - \delta_1, \tag{5.6}$$

где  $\delta_1 = \delta_{X_1} = n_s + c_s + \delta_0$ , а  $n_s = n_{ss} + n_{sp}$  и  $c_s = c_{ss} + c_{sp}$  – числа особых точек типа  $A_1$  и  $A_2$  на поверхности  $X_1$ .

Пусть  $\pi_1 = \tilde{\pi}_1 \circ \bar{\pi}_1$ , где  $\tilde{\pi}_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$  – минимальное разрешение, а  $\bar{\pi}_1: \bar{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_1$  – стягивание “лишних” исключительных кривых. Поверхность  $\bar{X}_1$  отличается от поверхности  $\tilde{X}_1$  лишь над каспами кривой  $B$ , которые не являются  $ss$ -каспами. Пусть  $\bar{U} = \sigma^{-1}(U)$ , а  $\bar{V}_1 = \pi_1^{-1}(V_1)$ ,  $\tilde{V}_1 = \tilde{\pi}_1^{-1}(V_1)$  – окрестности  $\bar{X}_1$  и  $\tilde{X}_1$ , лежащие над  $\bar{U}$  и содержащие собственный прообраз  $R_1$ . Аналогично определяются  $\bar{V}'_1$  и  $\tilde{V}'_1$ .

Для  $sp$ -каска  $b \in B$  стягивание  $\bar{V}_1 \xrightarrow{\bar{\pi}_1} \tilde{V}_1$  изображено на рис. 12. Мы видим, что  $\bar{\pi}$  включает один  $\sigma$ -процесс с центром на  $R_1$ . Для  $ps$ - и  $pp$ -каспов  $b \in B$  стягивание

$\bar{V}_1 \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} \tilde{V}_1$  изображено на рис. 13 (где  $R$  – это  $R_1$ , а  $C$  – это  $C_1$ ). Мы видим, что для разведения ветвей  $R_1$  и  $C_1$  требуются два  $\sigma$ -процесса с центрами в  $R_1$ . Поэтому

$$(\bar{R}_1^2) = (\tilde{R}_1^2) - c_{sp} - 2c_{ps} - 2c_{pp}. \quad (5.7)$$

Теперь мы посмотрим, как меняются индексы пересечения  $(\bar{R}^2)$  и  $(\bar{C}^2)$  при стягивании  $\bar{\pi}$ . Для окрестности  $U \subset \mathbb{P}^2$  точки  $b \in \text{Sing } B$  обозначим  $\bar{W} = \pi^{-1}(W)$ ,  $\bar{W}' = \pi^{-1}(W')$ ,  $\tilde{W} = \tilde{\pi}^{-1}(W)$ ,  $\tilde{W}' = \tilde{\pi}^{-1}(W')$ . Тогда  $\tilde{g}_1^{-1}(\bar{V}_1) = \bar{W} \sqcup \bar{W}'$ . Мы последовательно проследим за стягиванием  $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow S$  в окрестностях  $\bar{W} \sqcup \bar{W}' \subset \bar{X}$  по отдельности для различных типов особых точек  $b \in \text{Sing } B$  (нумерация случаев соответствует нумерации случаев в п. 5.2).

2) Для  $sp$ -точки  $b$  типа  $A_1$  окрестность  $\bar{W}'$  является несвязным объединением  $N_2 - 4$  открытых множеств, изоморфных  $\bar{V}_1$ , – минимальному разрешению особых точек типа  $A_1$ . Окрестность  $W$  изображена на рис. 4, а  $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow W$  – это раздутие двух точек  $R'' \cap R'''$  и  $R'' \cap R''''$ . Поэтому стягивание  $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow W \simeq W$  увеличивает  $(\bar{R}^2)$  и  $(\bar{C}^2)$  на 2 для одной точки  $b$  и, следовательно, на  $2n_{sp}$  для всех точек этого типа.

5) Для  $sp$ -точки  $b$  типа  $A_2$  окрестность  $\bar{W}$  изображена в верхней части рис. 10. Она получается из окрестности  $W$ , изображенной на рис. 7, раздутием точки пересечения прямых  $L_1, L_2$  и  $L_3$ , а затем раздутием пяти точек на вклеенной прямой  $E_{6,3}$ , не лежащих на собственных прообразах этих прямых. Стягивание  $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow \bar{W} \simeq W$  – это обратная процедура, т.е. стягивание пяти исключительных кривых первого рода, а затем стягивание кривой  $E_{6,3}$ . В этом случае  $R = L_2 + L_3$ , а  $C = L_1$ . Так как  $(R^2) = (L_2^2) + 2(L_2 \cdot L_3) + (L_3^2)$  и  $(L_2^2), (L_3^2)$  уменьшаются на 1, а  $L_2$  и  $L_3$  перестают пересекаться после  $\sigma$ -процесса с центром в точке  $L_2 \cap L_3$ , то стягивание  $\bar{\pi}$  увеличивает  $(\bar{R}^2)$  на 4 для одной точки  $b$  и на  $4c_{sp}$  для всех точек этого типа.

Окрестность  $\bar{W}'$  состоит из  $N_2 - 3$  компонент, изоморфных  $\bar{V}_1$ , для каждой из которых  $\bar{\pi}$  изображено на рис. 12. Как и выше для  $(\bar{R}_1^2)$ , мы видим, что стягивание  $\bar{\pi}$  увеличивает  $(\bar{C}^2)$  на  $(N_2 - 3) + 1$  (с учетом окрестности  $\bar{W}$ ) для одной точки  $b$  и на  $(N_2 - 2)c_{sp}$  для всех точек этого типа.

6) Для  $ps$ -точки  $b$  типа  $A_2$  окрестность  $\bar{W}$  и стягивание  $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow \tilde{W} \simeq W$  такие же, как в 5), но в этом случае  $R = L_2 + L_3$ , а  $C \cap W = \emptyset$ . Поэтому, как и в 5), мы получаем, что стягивание  $\bar{\pi}$  увеличивает  $(\bar{R}^2)$  на  $4c_{ps}$ .

Окрестность  $\bar{W}'$  состоит из  $N_2 - 2$  компонент, изоморфных  $\bar{V}_1$ , для каждой из которых  $\bar{\pi}$  изображено на рис. 13. Как и выше для  $(\bar{R}_1^2)$ , мы видим, что стягивание  $\bar{\pi}$  увеличивает  $(\bar{C}^2)$  на  $2(N_2 - 2)$  для одной точки  $b$  и на  $2(N_2 - 2)c_{ps}$  для всех точек этого типа.

7) Для  $pp$ -точки  $b$  типа  $A_2$  окрестность  $\bar{W}$  состоит из двух компонент: одной такой же, как в 5), и другой – такой же, как  $\bar{V}'_1$ , и изображенной на рис. 13 слева. Так как на  $W$ , изображенной на рис. 8,  $R = R_3 + L_3$ , а  $C = L_2$ , мы получаем, что стягивание  $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow \tilde{W} \simeq W$  увеличивает  $(\bar{R}^2)$  на  $1 + 2 = 3$  для одной точки  $b$  и на  $3c_{pp}$  для всех точек этого типа. Кроме того,  $(\bar{C}^2)$  увеличивается на  $c_{pp}$ .

Окрестность  $\bar{W}'$  состоит из  $N_2 - 3$  компонент, изоморфных  $\bar{V}'_1$  и изображенных на рис. 13 (на котором  $C$  – это  $R$ ). Поэтому, с учетом окрестности  $\bar{W}$ , стягивание  $\bar{\pi}$  увеличивает  $(\bar{C}^2)$  на  $2(N_2 - 3)c_{pp} + c_{pp} = (2N_2 - 5)c_{pp}$ .

Суммируя все изменения  $(\bar{R}^2)$  и  $(\bar{C}^2)$ , получаем

$$(\tilde{R}^2) = (\bar{R}^2) + 2n_{sp} + 4c_{sp} + 4c_{ps} + 3c_{pp}, \quad (5.8)$$

$$(\tilde{C}^2) = (\bar{C}^2) + 2n_{sp} + (N_2 - 2)c_{sp} + 2(N_2 - 2)c_{ps} + (2N_2 - 5)c_{pp}. \quad (5.9)$$

Применяя (5.5) и подставляя  $(\bar{R}_1^2)$  из (5.7), получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{R}^2) &= 2((\tilde{R}_1^2) - c_{sp} - 2c_{ps} - 2c_{pp}) + 2n_{sp} + 4c_{sp} + 4c_{ps} + 3c_{pp} \\ &= 2(\tilde{R}_1^2) + 2n_{sp} + 2c_{sp} - c_{pp}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{C}^2) &= (N_2 - 2)((\tilde{R}_1^2) - c_{sp} - 2c_{ps} - 2c_{pp}) + 2n_{sp} \\ &\quad + (N_2 - 2)c_{sp} + 2(N_2 - 2)c_{ps} + (2N_2 - 5)c_{pp} \\ &= (N_2 - 2)(\tilde{R}_1^2) + 2n_{sp} - c_{pp}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

**5.5. Вычисление индексов пересечений (продолжение).** Теперь найдем  $(\tilde{R} + Z_R)^2$ ,  $(\tilde{C} + Z_C)^2$  и  $(\tilde{R} + Z_R) \cdot (\tilde{C} + Z_C)$ , где дивизор  $Z_R$ , соответственно  $Z_C$ , равен  $\sum Z_x$ , где  $Z_x$  – канонический цикл точки  $x \in \text{Sing } X$ , а суммирование ведется по  $x \in R$ , соответственно  $x \in C$ . Аналогичные суммы  $\sum \delta_x$  обозначим  $\delta_R$  и  $\delta_C$  соответственно. В силу п. 4.2 имеем

$$(\tilde{R} \cdot Z_R) = -(Z_R^2) = 2\delta_R, \quad (\tilde{C} \cdot Z_C) = -(Z_C^2) = 2\delta_C.$$

Очевидно, что

$$(\tilde{R} + Z_R) \cdot (\tilde{C} + Z_C) = \tilde{R} \cdot \tilde{C}, \quad (5.12)$$

а

$$(\tilde{R} + Z_R)^2 = (\tilde{R}^2) + 2(\tilde{R} \cdot Z_R) + (Z_R^2) = (\tilde{R}^2) + 2\delta_R. \quad (5.13)$$

Аналогично,  $(\tilde{R}_C + Z_C)^2 = (\tilde{C}^2) + 2\delta_C$ .

Остается указать, сколько особых точек  $x \in \text{Sing } X$  лежит на  $R$ , соответственно на  $C$ . Из п. 5.2 следует, что над каждой  $ss$ -точкой на  $R$  лежит 2, а на  $C$  лежит  $N_2 - 2$  особые точки. На  $R$  других особых точек нет. На  $C$  имеются еще следующие особые точки: над  $sp$ -точкой типа  $A_1$  имеется  $N_2 - 4$  особые точки типа  $A_1$ , над  $sp$ -точкой типа  $A_2$  имеется  $N_2 - 3$  особые точки типа  $A_2$ . Мы получаем

$$\begin{aligned} \delta_R &= 2(\delta_0 + n_{ss} + c_{ss}) = 2(\delta_1 - n_{sp} - c_{sp}), \\ \delta_C &= (N_2 - 2)(\delta_0 + n_{ss} + c_{ss}) + (N_2 - 4)n_{sp} + (N_2 - 3)c_{sp} \\ &= (N_2 - 2)\delta_1 - 2n_{sp} - c_{sp}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Подставляя  $(\tilde{R}^2)$  из (5.10) и  $\delta_R$  из (5.14) в (5.13), получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{R} + Z_R)^2 &= 2(\tilde{R}_1^2) + 2n_{sp} + 2c_{sp} - c_{pp} + 4(\delta_1 - n_{sp} - c_{sp}) \\ &= 2((\tilde{R}_1^2) + 2\delta_1) - 2n_{sp} - 2c_{sp} - c_{pp}. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_C + Z_C)^2 &= (N_2 - 2)(\tilde{R}_1^2) + 2n_{sp} - c_{pp} + 2(N_2 - 2)\delta_1 - 4n_{sp} - 2c_{sp} \\ &= (N_2 - 2)((\tilde{R}_1^2) + 2\delta_1) - 2n_{sp} - 2c_{sp} - c_{pp}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$2n_{sp} + 2c_{sp} + c_{pp} = \iota_1, \quad (5.15)$$

и пусть

$$g_1 = p_a(R_1) = g + \delta_1 \quad (5.16)$$

– арифметический род кривой  $R_1$ . Так как в силу (5.6)  $(\tilde{R}_1^2) + 2\delta_1 = 3\bar{d} + g - 1 + \delta_1 = 3\bar{d} + g_1 - 1$ , то окончательно получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{R} + Z_R)^2 &= 2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1, \\ (\tilde{C} + Z_C)^2 &= (N_2 - 2)(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1, \quad (\tilde{R} + Z_R) \cdot (\tilde{C} + Z_C) = \iota_1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

### 5.7. Индекс самопересечения дивизора $\tilde{R} + Z_R$ больше нуля.

ЛЕММА 5.2. *Имеем*

$$(\tilde{R} + Z_R)^2 > 0. \quad (5.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что  $2\bar{d} = d = \deg B$ , а  $\delta_1 = \delta_0 + n_{sp} + c_{sp}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (\tilde{R} + Z_R)^2 &= 2(3\bar{d} + g - 1 + \delta_1) - 2n_{sp} - 2c_{sp} - c_{pp} \\ &= d + (2d + 2g - 2) + 2\delta_0 - c_{pp}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Теперь мы применим формулу Гурвица для общей проекции  $\varphi: B \rightarrow \mathbb{P}^1$  кривой  $B$  из точки  $P \in \mathbb{P}^2$  на прямую  $\mathbb{P}^1$ , точнее, для накрытия  $\bar{\varphi}: \bar{B} \rightarrow \mathbb{P}^1$ , где  $\bar{\varphi} = \varphi \circ n$ , а  $n: \bar{B} \rightarrow B$  – нормализация кривой  $B$ . Очевидно, что накрытие  $\bar{\varphi}$  ветвится в следующих точках. Во-первых,  $\bar{\varphi}$  имеет ветвление второго порядка в точках  $\bar{b} \in \bar{B}$ , которые соответствуют неособым точкам  $b \in B$ , для которых прямая  $\overline{Pb}$  касается  $B$ . Число таких точек  $\hat{d} = \deg \hat{B}$ , где  $\hat{B}$  – двойственная к  $B$  кривая. Во-вторых,  $\bar{\varphi}$  имеет ветвление порядка  $m_k$  в точках  $\bar{b}$ , которые соответствуют ветвям  $B_k$  кривой  $B$  в особых точках  $b$ . Здесь  $m_k$  – это кратность (порядок) соответствующей ветви. Обозначим

$$\nu = \sum_k (m_k - 1), \quad (5.20)$$

где суммирование ведется по всем ветвям кривой (в особых точках). Накрытие  $\bar{\varphi}$  имеет степень  $d = \deg B$ . По формуле Гурвица получаем

$$2g - 2 = -2d + \hat{d} + \nu. \quad (5.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. На самом деле мы вывели одну из формул Плюккера

$$\hat{d} = 2d + (2g - 2) - \nu$$

для плоской кривой с особенностями.

Очевидно, что для  $A$ - $D$ - $E$ -особенностей число  $\nu$  равно:

$$\begin{aligned} \nu(A_{2k-1}) = \nu(D_{2k+2}) &= 0, \quad \nu(A_{2k}) = \nu(D_{2k+3}) = \nu(E_7) = 1, \\ \nu(E_6) = \nu(E_8) &= 2. \end{aligned}$$

Поэтому для кривой  $B$  число  $\nu = \nu(B)$  равно

$$\nu = c + \nu', \quad \text{где } \nu' = \sum_{k>1} a_{2k} + \sum d_{2k+3} + 2e_6 + e_7 + 2e_8. \quad (5.22)$$

Возвращаясь к доказательству неравенства, из (5.19), (5.21) и (5.22) получаем

$$(\tilde{R} + Z_R)^2 = d + (\hat{d} + \nu) + 2\delta_0 - c_{pp} = d + \hat{d} + 2\delta_0 + \nu' + (c - c_{pp}) > 0. \quad (5.23)$$

**5.8. Вывод основного неравенства.** Применяя теорему Ходжа об индексе к дивизорам  $\tilde{R} + Z_R$  и  $\tilde{C} + Z_C$  на поверхности  $S$ , получаем

$$\left| \begin{array}{cc} 2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1 & \iota_1 \\ \iota_1 & (N_2 - 2)(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1 \end{array} \right| \leq 0.$$

Поэтому

$$2(N_2 - 2)(3\bar{d} + g_1 - 1)^2 - N_2(3\bar{d} + g_1 - 1)\iota_1 \leq 0$$

или

$$N_2[2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1] \leq 4(3\bar{d} + g_1 - 1). \quad (5.24)$$

Таким образом, если имеются два неэквивалентных общих накрытия  $f_1$  и  $f_2$ , то

$$N_2 \leq \frac{4(3\bar{d} + g_1 - 1)}{2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1}. \quad (5.25)$$

## § 6. Доказательство гипотезы Кизини для кратноканонических вложений поверхностей основного типа

### 6.1. Числовые инварианты в случае $m$ -канонического вложения.

Пусть  $S$  – минимальная модель поверхности основного типа с числовыми инвариантами  $(K_S^2) = k$  и  $e(S) = e$ . Пусть  $X$  – каноническая модель поверхности  $S$  и  $\pi: S \rightarrow X$  – стягивание  $(-2)$ -кривых. Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  – общее  $m$ -каноническое накрытие, т.е.  $f$  является общей проекцией на  $\mathbb{P}^2$  поверхности  $X = \varphi_m(S)$ , где  $\varphi_m: S \rightarrow \mathbb{P}^{p_m-1}$  –  $m$ -каноническое отображение, определенное полной линейной системой  $|mK_S|$ ,  $p_m = \frac{1}{2}m(m-1)k + \chi(S)$ . Как хорошо известно [3], по теореме Бомбьери  $\varphi_m(S) \simeq X$  при  $m \geq 5$  и  $\varphi_m$  совпадает с  $\pi$ .

Пусть  $B \subset \mathbb{P}^2$  – дискриминантная кривая. Мы сохраняем обозначения § 4. Тогда

$$\bar{L} = mK_S, \quad K_S \cdot Z = 0, \quad \bar{R} = (3m + 1)K_S - Z. \quad (6.1)$$

Из формулы (4.3) получаем

$$N = m^2k, \quad d = m(3m + 1)k. \quad (6.2)$$

Из формулы (4.10) находим

$$3\bar{d} + p_a(R) - 1 = (3m + 1)^2k, \quad (6.3)$$

$$p_a(R) - 1 = \frac{1}{2}(3m + 1)(3m + 2)k. \quad (6.4)$$

**6.2. Инварианты поверхности и дискриминантной кривой определяют инварианты накрытия.** Пусть теперь  $S_1$  и  $S_2$  – две поверхности основного типа с числовыми инвариантами  $k$  и  $e$ . Пусть  $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ ,  $i = 1, 2$ , – их общие  $m_i$ -канонические накрытия, имеющие одну и ту же дискриминантную кривую  $B \subset \mathbb{P}^2$ . Тогда из второй формулы (6.2) следует, что  $m_1 = m_2 = m$ . Тогда и  $\deg f_1 = \deg f_2 = N$ . Покажем, что и остальные числовые инварианты накрытий  $f_1$  и  $f_2$  одинаковые.

Из формулы (6.4) следует, что  $p_a(R_1) = p_a(R_2)$ , а так как  $p_a(R) = g + \delta_X$ , то и  $\delta_{X_1} = \delta_{X_2}$ .

Из формул (4.14) и (4.11) следует, что число  $p$ -каспов  $c_p$  и число  $p$ -ноудов  $n_p$  для обоих накрытий одинаково. Тогда  $n_p = n_{pp} + n_{ps} = n_{pp} + n_{sp}$ ,  $c_p = c_{pp} + c_{ps} = c_{pp} + c_{sp}$  и, следовательно,  $n_{ps} = n_{sp}$  и  $c_{ps} = c_{sp}$ .

**6.3. Основное неравенство в случае поверхностей основного типа.** В силу (5.24) для того, чтобы показать, что  $m$ -канонические проекции  $f_1$  и  $f_2$  эквивалентны, достаточно показать, что выполняется неравенство (здесь  $R$  – это  $R_1$ )

$$N(2(3\bar{d} + p_a(R) - 1) - \iota) > 4(3\bar{d} + p_a(R) - 1) \quad (6.5)$$

или

$$(N - 2)(3d + 2p_a(R) - 2) - N \cdot \iota > 0, \quad (6.6)$$

где

$$\iota = 2n_{sp} + 2c_{sp} + c_{pp} = 2n_{sp} + c_{sp} + c_p. \quad (6.7)$$

Получим оценку для числа  $\iota$ . Мы можем выразить  $c_p$  из формулы (4.14):

$$c_p = 3N + 2p_a(R) - 2 - e. \quad (6.8)$$

Для оценки  $2n_{sp} + c_{sp}$  мы воспользуемся неравенством Хирцебруха–Мияока [3, с. 215]: если на минимальной модели поверхности основного типа  $S$  лежат  $s$  не пересекающихся  $(-2)$ -кривых, то

$$s \leq \frac{2}{9}(3e(S) - (K_S^2)). \quad (6.9)$$

Так как для каждой из  $A_1$  и  $A_2$  точек на  $X$  мы можем взять по одной  $(-2)$ -кривой, то

$$n_s + c_s \leq \frac{2}{9}(3e - k). \quad (6.10)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.** Вместо неравенства Хирцебруха–Мияока можно использовать оценку  $2n_{sp} + c_{sp} \leq 2(h^{1,1} - 1) = 2(e - 2 + 4q - 2p_g - 1)$  и неравенства  $p_g \geq q$ ,  $p_g \leq \frac{1}{2}(K_S^2) + 2$  (неравенство Нётера).

Из (6.7), (6.8) и (6.10) получаем оценку

$$\iota \leq \frac{4}{9}(3e - k) + 3N + 2p_a(R) - 2 - e = \frac{1}{3}e - \frac{4}{9}k + 3N + 2p_a(R) - 2.$$

Применяя неравенство Нётера [3, с. 211]

$$e \leq 5k + 36, \quad (6.11)$$

получаем

$$\iota \leq \frac{11}{9}k + 12 + 3N + 2p_a(R) - 2. \quad (6.12)$$

Соединяя (6.12) и (6.6), получаем как следствие следующую лемму.

ЛЕММА 6.1. Если выполняется неравенство

$$3N(d - N) - 6d - 4(p_a(R) - 1) - \left(\frac{11}{9}k + 12\right)N > 0, \quad (6.13)$$

то общая  $m$ -каноническая проекция поверхности основного типа  $S$  с заданными  $k$  и  $e$  единственна.

**6.4. Доказательство теоремы 0.3.** Выразим неравенство (6.13) в терминах  $m$ . Подставим  $N$  и  $d$  из (6.2) и  $p_a(R) - 1$  из (6.4) в (6.13). Получим

$$3m^3(2m + 1)k^2 - 6m(3m + 1)k - 2(3m + 1)(3m + 2)k - \left(\frac{11}{9}k + 12\right)km^2 > 0,$$

т.е.

$$3m^3(2m + 1)k - 4(3m + 1)^2 - \left(\frac{11}{9}k + 12\right)m^2 > 0.$$

Деля на  $m^2$ , получаем

$$3m(2m + 1)k - \left(\frac{11}{9}k + 12\right) - 4\left(3 + \frac{1}{m}\right)^2 > 0,$$

или, деля на  $k$ , получаем

$$3m(2m + 1) > \frac{11}{9} + \frac{1}{k} \left(12 + 4\left(3 + \frac{1}{m}\right)^2\right). \quad (6.14)$$

Правая часть неравенства убывает при возрастании  $k$  и  $m$ . Это неравенство выполняется при всех  $k \in \mathbb{N}$ , если оно выполняется при  $k = 1$ . При  $k = 1$  и  $m = 3$  правая часть равна  $\frac{11}{9} + 12 + 4 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{173}{3} < 9 \cdot 7 = 63$ . Таким образом, неравенство (6.14), а следовательно, и неравенство (6.6) выполняются при  $m \geq 3$  и при любом  $k$ , и теорема 0.3 доказана.

Дополнительно можно отметить, что при  $m = 2$  неравенство (6.14) выполняется, если  $k > 2$ , а при  $m = 1$  — если  $k > 9$ .

#### Список литературы

1. Арнольд В. И. Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями, и особые проекции гладких поверхностей // УМН. 1979. Т. 34. № 2. С. 3–38.
2. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
3. Barth W., Peters C., Van de Ven A. Compact complex surfaces. Berlin: Springer, 1984.
4. Catanese F. On a Problem of Chisini // Duke Math. J. 1986. V. 53. № 1. P. 33–42.
5. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
6. Куликов Вик. С. О гипотезе Кизини // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 6. С. 83–116.
7. Moishezon B. Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes. LNM 603. Springer, 1977.
8. Zariski O. Algebraic surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

Московский государственный университет печати,  
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН  
E-mail: valentin@masha.ips.ras.ru,  
victor@olya.ips.ras.ru

Поступило в редакцию  
27.VII.1999