УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов, В. М. Харламов

О вещественных структурах на жестких поверхностях

Построены примеры жестких поверхностей (т.е. поверхностей, деформационные классы которых состоят из одной поверхности), ведущих себя по-разному по отношению к вещественным структурам: в одном из примеров поверхность не имеет вещественной структуры, а в другом – имеет единственную вещественную структуру, которая не является максимальной относительно неравенства Смита–Тома. Таким образом, эти примеры дают отрицательные решения следующих проблем: существование вещественных поверхностей в каждом деформационном классе комплексных поверхностей и существование максимальной вещественной поверхности в каждом деформационном классе, содержащем вещественную поверхность. Кроме того, доказано, что среди поверхностей основного типа с $p_g = q = 0$ и $K^2 = 9$ нет вещественных.

Построенные поверхности дают новые контрпримеры к “Dif=Def”-проблеме.

Библиография: 14 наименований.

Введение

Типичная постановка задач вещественной алгебраической геометрии заключается в следующем: фиксируется деформационный класс комплексных многообразий и в этом классе изучаются те многобразия, которые могут быть снабжены вещественной структурой, и затем исследуются их топологические, а также другие, инвариантные относительно вещественных деформаций, свойства. Особенно интересны те многообразия, которые являются максимальными относительно неравенства Смита–Тома, так как они обладают замечательными топологическими свойствами (см., например, обзор [3]); для поверхностей это неравенство приведено в § 5. Таким образом, возникают два естественных вопроса: в каждом ли деформационном классе комплексных компактных многообразий содержится вещественное многообразие?; и в каждом ли комплексном деформационном классе, содержащем вещественные многообразия, найдется максимальное вещественное многообразие? Насколько известно, в размерности $\geqslant 2$ оба эти вопроса до сих пор оставались открытыми. Покажем, что ответы на эти вопросы отрицательны.

В наших примерах многообразия – это жесткие поверхности, где жесткость означает, что пространство модулей комплексных структур на подлежащем гладком многообразии является 0-мерным. Более того, в наших примерах поверхности являются сильно жесткими, т.е. факторпространство пространства модулей этих поверхностей по действию канонического комплексного сопряжения (меняющего

Работа была выполнена во время пребывания первого автора в Страсбургском университете и частично поддержана грантами INTAS-97-2072, NWO-RFBR-047-008-005 и РФФИ, № 99-01-01133.

комплексную структуру поверхности на комплексно-сопряженную и, тем самым, голоморфные функции – на антиголоморфные; ориентация подлежащего гладкого четырехмерного многообразия при этом не меняется) является одной точкой. Стоит отметить, что в первом из наших примеров пространство модулей состоит из двух сопряженных точек, а во втором примере оно сводится к одной вещественной точке (см. замечания в § 4). Кроме того, две сопряженные поверхности из первого примера дают еще один контрпример к "Dif=Def"-проблеме (первые контрпримеры к которой были построены Манетти [9]). Во всех наших примерах поверхности – это поверхности основного типа с $c_1^2 = 3c_2$ (так называемые поверхности Мияоки–Яо; утверждения о том, что они являются сильно жесткими и, более того, что эти поверхности определяются своим гомотопическим типом однозначно с точностью до голомофных и антиголоморфных диффеоморфизмов, общеизвестны; см., например, [1]). Следуя работе [5], мы строим такие жесткие поверхности, как (конечные абелевы) накрытия Галуа (раздутой) проективной плоскости, разветвленные вдоль некоторых конфигураций прямых. В § 1, 2 приведена исчерпывающая конструкция таких поверхностей в виде факторпространств накрытия Ферма. В § 3 изучается группа автоморфизмов и антиавтоморфизмов построенных поверхностей. В § 4 приведены три основных примера. В § 5 мы рассматриваем фальшивые проективные плоскости (т.е. поверхности основного типа с $c_2 = 3$ и $c_1^2 = 9$). Доказано, что они не имеют антиголоморфных диффеоморфизмов и, в частности, не могут быть снабжены вещественной структурой. Этот параграф содержит также несколько замечаний, относящихся к смежным темам.

Авторы благодарны И. Мияоке, привлекшего наш интерес к вещественной геометрии жестких поверхностей, и Т. Дельзану за полезные предложения во время подготовки данной статьи к публикации. Второй автор благодарен также Ф. Катанезе за интересное обсуждение деформационных проблем вещественной алгебраической геометрии.

§ 1. Накрытия Галуа плоскости, разветвленные над конфигурацией прямых

По определению *накрытие Галуа* гладкого алгебраического многообразия Y – это конечный морфизм $f\colon X \to Y$ нормального алгебраического многообразия X на Y такой, что вложение полей рациональных функций $\mathbb{C}(Y) \subset \mathbb{C}(X)$, индуцированное морфизмом f, является расширением Галуа. Как хорошо известно, конечный морфизм $f\colon X \to Y$ является накрытием Галуа с группой Галуа G тогда и только тогда, когда G совпадает с группой накрывающих преобразований, действующих транзитивно на каждом слое морфизма f. Кроме того, конечное разветвленное накрытие является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда неразветвленная часть этого накрытия (т.е. ограничение морфизма на дополнения к ветвлениям внизу и наверху) является накрытием Галуа. Более того, разветвленное накрытие Галуа определяется с точностью до изоморфизма своей неразветвленной частью и морфизм накрытий из неразветвленной части одного разветвленного накрытия в неразветвленную часть другого может быть продолжен до морфизма разветвленных накрытий, если задано продолжение морфизма накрываемых многообразий в точки ветвления накрытия. Напомним также, что неразветвленное накрытие является накрытием Галуа с группой Галуа G тогда и только тогда, когда это топологическое накрытие ассоциировано с эпиморфизмом из фундаментальной группы накрываемого многообразия в G и, в частности, накрытия Галуа с абелевой группой Галуа G взаимно однозначно соответствуют эпиморфизмам из первой группы гомологий с целыми коэффициентами накрываемого многообразия в G. Все перечисленные свойства накрытий Галуа являются хорошо известными, и наиболее нетривиальная часть из них может быть получена, например, из теоремы Грауэрта–Реммерта [4] (детальное описание основных свойств разветвленных накрытий можно найти, например, в [12]).

В дальнейшем мы будем иметь дело только с накрытиями комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, разветвленными вдоль некоторой конфигурации прямых $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$. Подобно общим абелевым накрытиям Галуа, абелево накрытие Галуа $g\colon Y \to \mathbb{P}^2$ с абелевой группой Галуа G, разветвленное вдоль L, однозначно определяется некоторым эпиморфизмом $\varphi\colon H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \to G$ и существует для любого такого эпиморфизма. Так как $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$, то существует, в частности, накрытие $g_{u(m)}\colon Y_{u(m)} \to \mathbb{P}^2$, соответствующее естественному эпиморфизму

$$\varphi\colon H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

Назовем его *накрытием Ферма.* Следующее утверждение является непосредственным следствием общих результатов о разветвленных накрытиях, упомянутых в начале этого параграфа.

Предложение 1.1. *Если $g\colon Y \to \mathbb{P}^2$ является накрытием Галуа с группой Галуа $G \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$, разветвленным вдоль L, то $k \leqslant n-1$ и для любого эпиморфизма $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L) \to G$ существует однозначно определенное накрытие Галуа $f\colon Y_{u(m)} \to Y$, индуцированное этим эпиморфизмом и такое, что $g_{u(m)} = g \circ f$.*

Ниже будем иметь дело только с накрытиями Галуа с группой Галуа $G \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$ и будем строить их так, как это описано в приведенном выше предложении.

Простые петли λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, вокруг прямых L_i порождают $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$. Эти петли удовлетворяют соотношению

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0,$$

и без ограничения общности мы можем предполагать, что накрытие Ферма $g_{u(m)}\colon Y_{u(m)} \to \mathbb{P}^2$ определяется эпиморфизмом $\varphi\colon H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{n-1}$, отображающим λ_n в $(m-1, \dots, m-1)$ и λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, в $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i-ом месте. Выберем дополнительную прямую $L_\infty \subset \mathbb{P}^2$, находящуюся в общем положении по отношению к конфигурации прямых L, и введем аффинные координаты (x_1, x_2) в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$. Пусть $l_i(x_1, x_2) = 0$ – линейное уравнение прямой $L_i \cap \mathbb{C}^2$. Положим $z_i = (l_i l_n^{m-1})^{1/m}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда поле рациональных функций $K_{u(m)} = \mathbb{C}(Y_{u(m)}) = \mathbb{C}(x_1, x_2, z_1, \dots, z_{n-1})$ на $Y_{u(m)}$ является абелевым расширением поля рациональных фунций $k = \mathbb{C}(x_1, x_2)$ на $\mathbb{P}^2$ степени m^{n-1} с группой Галуа

$$G = \left\{ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \equiv 0 \pmod m \right\} \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{n-1}.$$

(Другими словами, прообраз $\mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ в $Y_{u(m)}$ изоморфен нормализации аффинного подмногообразия в $\mathbb{C}^{n+1}$, заданного в координатах $x_1, x_2, z_1, \dots, z_{n-1}$ уравнениями $z_1^m = l_1 l_n^{m-1}, \dots, z_{n-1}^m = l_{n-1} l_n^{m-1}$.)

Положим
$$z^a = \prod_{i=1}^{n-1} z_i^{\alpha_i}$$
для мультииндекса $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant m-1$. Действие элемента $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G$ на $K_{u(m)}$ задается формулой
$$\gamma(z^a) = \mu^{(\gamma,a)} z^a,$$
где
$$(\gamma, a) = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \alpha_j$$
и $\mu = e^{2\pi i/m}$ – корень m-ой степени из единицы. Таким образом,
$$K_{u(m)} = \bigoplus_{0 \leqslant \alpha_i \leqslant m-1} \mathbb{C}(x_1, x_2) z^a$$
является разложением векторного пространства $K_{u(m)}$ над $\mathbb{C}(x_1, x_2)$ в конечную прямую сумму степени 1 представлений группы G.

Пусть $\varphi\colon H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$ – эпиморфизм, заданный на образующих формулами $\varphi(\lambda_i) = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,k})$, где $\alpha_{1,j} + \dots + \alpha_{n,j} \equiv 0 \mod m$ для каждого $j = 1, \dots, k$, и пусть $g\colon Y \to \mathbb{P}^2$ – соответствующее накрытие Галуа. Тогда согласно предложению 1.1 существует единственное накрытие Галуа $f\colon Y_{u(m)} \to Y$. Оно определяет вложение $f^*\colon \mathbb{C}(Y) \to K_{u(m)}$ поля рациональных функций $\mathbb{C}(Y)$ на Y в поле рациональных функций $K_{u(m)} = \mathbb{C}(Y_{u(m)})$. Ясно, что $\mathbb{C}(Y)$ совпадает с подполем $K_\varphi = \mathbb{C}(x_1, x_2, w_1, \dots, w_k)$ поля $K_{u(m)}$, где $w_j = z_1^{\alpha_{1,j}} \dots z_{n-1}^{\alpha_{n-1,j}}$, и
$$\mathrm{Gal}(K_{u(m)}/K_\varphi) = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,j}\gamma_i \equiv 0 \mod m,\ 1 \leqslant j \leqslant k \right\}.$$

По построению Y является нормальной поверхностью с изолированными особыми точками. Особые точки поверхности Y могут возникнуть только над r-кратными точками конфигурации L с $r \geqslant 2$, т.е. над точками, лежащими на r прямых $L_{i_1}, \dots, L_{i_r}$, принадлежащих конфигурации.

В дальнейшем назовем r элементов из $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$ *линейно независимыми над* $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, если они порождают в $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$ подгруппу, изоморфную $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ (и потому допускающую $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{k-r}$ в качестве дополнения).

Лемма 1.1. *Пусть p – двукратная точка конфигурации L, и пусть $\varphi(\lambda_{i_1})$ и $\varphi(\lambda_{i_2})$ линейно независимы над $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ в $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$. Тогда поверхность Y неособа в каждой точке из $f^{-1}(p)$.*

Доказательство. Пусть $p = L_{i_1} \cap L_{i_2}$. Выберем маленькую окрестность U точки p в $\mathbb{P}^2$, изоморфную диску, и локальные координаты y_1, y_2 в U так, что $y_j = 0$ является уравнением прямой L_{i_j}. Тогда $H_1(U \setminus (L_{i_1} \cup L_{i_2}), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. В каждой точке $q \in g^{-1}(p)$ росток $V \to U$ накрытия $Y \to \mathbb{P}^2$ является G'-накрытием, где G' есть образ группы $H_1(U \setminus (L_{i_1} \cup L_{i_2}), \mathbb{Z})$ при композиции $\varphi \circ i_*$ эпиморфизма φ с гомоморфизмом включения $i_* \colon H_1(U \setminus (L_{i_1} \cup L_{i_2}), \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z})$. Более того, это G'-накрытие определяется гомоморфизмом $\varphi \circ i_*$. Отождествляя $\varphi(\lambda_{i_1}), \varphi(\lambda_{i_2})$ со стандартными образующими группы $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$, получим изоморфизм между $V \to U$ и накрытием, заданным уравнениями $z_1^m = y_1$, $z_2^m = y_2$. Следовательно, V является неособой поверхностью.

В приведенных далее примерах, чтобы разрешить особые точки на Y, лежащие над r-кратными точками конфигурации L с $r \geqslant 3$, произведем раздутие всех r-кратных точек.

Пусть $\sigma \colon \widetilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$ – это раздутие, L_i' – собственный прообраз прямой L_i, E_p – исключительная кривая над r-кратной точкой p и $\varepsilon_p \in H_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} \setminus \sigma^{-1}(L), \mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z})$ – простая петля вокруг E_p.

В результате отождествления $H_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} \setminus \sigma^{-1}(L), \mathbb{Z})$ с $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z})$ эпиморфизм φ преобразуется в эпиморфизм $\varphi \colon H_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} \setminus \sigma^{-1}(L), \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$. Рассмотрим связанное с ним накрытие Галуа $f \colon X \to \widetilde{\mathbb{P}^2}$.

Лемма 1.2. *Пусть $p = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_r}$ – r-кратная точка в L. Тогда $\varepsilon_p = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r}$.*

Лемма 1.3. *Если для каждой r-кратной точки $p = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_r}$ в L, $r \geqslant 3$, и для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant r$, элементы $\varphi(\varepsilon_p)$ и $\varphi(\lambda_{i_j})$ являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ в $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$, то X неособо.*

Доказательства этих лемм ввиду их простоты будут опущены (чтобы установить соотношение, данное в лемме 1.2, достаточно рассмотреть общий пучок прямых; лемма 1.3 следует из леммы 1.1).

В качестве следствия получаем, что построенная поверхность X является разрешением особенностей поверхности Y. Действительно, накрытие f может быть включено в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \widetilde{\mathbb{P}^2} & \xrightarrow[\sigma]{} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

в которой π является регулярным отображением (ясно, что оно непрерывно, и поэтому регулярность следует, например, из регулярности на $X \setminus f^{-1}(\sigma^{-1}(L))$).

§2. $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$-накрытия Галуа, разветвленные над конфигурацией прямых, двойственных точкам перегиба гладкой кубики

В этом параграфе мы используем обозначения из § 1.

Пусть $L = L_1 \cup \dots \cup L_9$ – конфигурация девяти прямых в $\mathbb{P}^2$, двойственная девяти точкам перегиба гладкой кубики C, лежащей в двойственной плоскости. Пусть t_r,

$r \geqslant 2$, – число r-кратных точек конфигурации L, т.е. число точек, лежащих ровно на r прямых, принадлежащих конфигурации. Как известно (и легко проверить, используя групповой закон на кубике), для этой конфигурации $t_3 = 12$, $t_r = 0$, если $r \neq 3$, и ровно четыре особые точки конфигурации L лежат на каждой прямой L_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$. (Отметим, что конфигурация прямых, двойственная точкам перегиба гладкой кубики, является жесткой, т.е. любая такая конфигурация может быть переведена в другую с помощью линейного преобразования проективной плоскости.)

Если кубика C задана уравнением $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$, то прямые $L_1, \dots, L_9$ задаются уравнениями

$$\begin{array}{lll} L_1 = \{x_1 - x_3 = 0\}, & L_2 = \{x_1 - \mu^2 x_3 = 0\}, & L_3 = \{x_1 + \mu x_3 = 0\}, \\ L_4 = \{x_2 - \mu^2 x_3 = 0\}, & L_5 = \{x_2 - x_3 = 0\}, & L_6 = \{x_2 + \mu x_3 = 0\}, \\ L_7 = \{x_1 + \mu x_2 = 0\}, & L_8 = \{x_1 - \mu^2 x_2 = 0\}, & L_9 = \{x_1 - x_2 = 0\}, \end{array}$$

где $\mu = e^{\pi i/3}$.

Пересечение трех различных прямых L_i, L_j, L_k не пусто тогда и только тогда, когда $(i,j,k) \in T$, где

$$\begin{aligned} T = \big\{&(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (1,4,7), (2,5,8), (3,6,9), \\ &(1,5,9), (3,5,7), (1,6,8), (3,4,8), (2,4,9), (2,6,7)\big\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $p_{i,j,k}$, $(i,j,k) \in T$, точки пересечения прямых L_i, L_j, L_k.

Рассмотрим накрытие Галуа $g\colon Y \to \mathbb{P}^2$ с группой Галуа $G \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$, разветвленное вдоль L и заданное эпиморфизмом $\varphi\colon H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \to G$.

Обозначим через $\sigma\colon \widetilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$ раздутие с центрами во всех 3-кратных точках $p_{i,j,k}$, $(i,j,k) \in T$, через $E_{i,j,k}$ – исключительный дивизор над $p_{i,j,k}$ и через L_i' – собственный прообраз прямой L_i. Пусть элемент $\varepsilon_{i,j,k} \in H_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} \setminus \sigma^{-1}(L), \mathbb{Z}) \simeq H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z})$ соответствует простому обходу вокруг $E_{i,j,k}$.

Эпиморфизм $\varphi\colon H_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} \setminus \sigma^{-1}(L), \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ определяет накрытие Галуа $f\colon X \to \widetilde{\mathbb{P}^2}$. Положим $C_i = f^{-1}(L_i')$ и $D_{i,j,k} = f^{-1}(E_{i,j,k})$.

В дальнейшем мы предполагаем, что эпиморфизм $\varphi\colon H_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} \setminus \sigma^{-1}(L), \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ удовлетворяет следующему условию:

(S) *элементы* $\varphi(\varepsilon_{i_1,i_2,i_3})$ *и* $\varphi(\lambda_{i_j})$, $j = 1,2,3$, *линейно независимы над* $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *для каждой тройки* $(i_1,i_2,i_3) \in T$.

Данное условие означает, что f разветвлен в каждой кривой C_i и каждой кривой $D_{i,j,k}$ с индексом ветвления, равным 5. Более того, согласно лемме 1.3 при этом условии поверхность X является неособой.

Лемма 2.1. *При сделанных предположениях*:

(i) $C_i^2 = -3$ *для каждого* $i = 1, \dots, 9$;

(ii) $D_{i_1,i_2,i_3}^2 = -1$ *для каждого набора* $(i_1,i_2,i_3) \in T$;

(iii) $K_X^2 = 333$, *где* K_X *– канонический класс поверхности* X;

(iv) *геометрические роды кривых* C_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$, *и* D_{i_1,i_2,i_3}, $(i_1,i_2,i_3) \in T$, *равны* $g(C_i) = 4$ *и* $g(D_{i_1,i_2,i_3}) = 2$.

Доказательство. (i) На каждой L_i лежит ровно четыре тройных точки конфигурации L. Следовательно, $(L_i', L_i') = -3$. С другой стороны,

$$\deg f \cdot (L_i', L_i') = (f^*(L_i'), f^*(L_i')) = (5C_i, 5C_i) = 25C_i^2.$$

Поэтому $C_i^2 = -3$.

Доказательство утверждения (ii) аналогично доказательству (i).

(iii) 3-канонический класс поверхности $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ равен $3K_{\widetilde{\mathbb{P}^2}} = -\sum L_i$.

По формуле для канонического класса прообраза имеем

$$K_X = f^*(K_{\widetilde{\mathbb{P}^2}}) + 4\biggl(\sum C_i + \sum D_{i_1,i_2,i_3}\biggr),$$

и поэтому

$$3K_X = 7\sum C_i + 12\sum D_{i_1,i_2,i_3}. \tag{2.1}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} 9 \cdot K_X^2 &= 49\sum C_i^2 + 144\sum D_{i_1,i_2,i_3}^2 + 168\sum (C_i, D_{i_1,i_2,i_3}) \\ &= 49 \cdot (-3) \cdot 9 + 144 \cdot (-1) \cdot 12 + 168 \cdot 4 \cdot 9. \end{aligned}$$

Следовательно, $K_X^2 = 333$.

Из (2.1) следует, что

$$(C_i, K_X) = 9, \qquad (D_{i_1,i_2,i_3}, K_X) = 3, \tag{2.2}$$

и утверждение (iv) следует из формулы присоединения.

Лемма 2.2. *Поверхность X является поверхностью общего типа с обильным каноническим классом.*

Доказательство. Согласно критерию Накаи–Мойшезона достаточно показать, что $(K_X, C) > 0$ для любой алгебраической кривой $C \subset X$. Из (2.1) и (2.2) следует, что $(K_X, C) \geqslant 0$ для любой кривой C. Предположим, что существует неприводимая кривая C такая, что $(K_X, C) = 0$. Тогда пересечение кривой C и эффективного дивизора $3K_X = 7\sum C_i + 12\sum D_{i_1,i_2,i_3}$ пусто. Следовательно, кривая $\sigma(f(C))$ не пересекается ни с одной из прямых L_i, $i = 1, \dots, 9$, что невозможно.

Лемма 2.3. *Эйлерова характеристика $e(X)$ поверхности X равна 111, и, в частности, выполнено соотношение $K_X^2 = 3e(X)$.*

Доказательство. Так как $e(\widetilde{\mathbb{P}^2}) = 15$ и $e(L_i) = e(E_{i_1,i_2,i_3}) = 2$, то из аддитивности эйлеровой характеристики следует, что

$$\begin{aligned} e(X) &= 25e\bigl(\widetilde{\mathbb{P}^2} \setminus (\cup C_i \cup D_{i_1,i_2,i_3})\bigr) + 5\sum e(C_i \setminus \cup D_{i_1,i_2,i_3}) \\ &\quad + 5\sum e(D_{i_1,i_2,i_3} \setminus \cup C_i) + \sum (C_i, D_{i_1,i_2,i_3}) \\ &= 25(15 - 9 \cdot 2 - 12 \cdot 2 + 9 \cdot 4) + 5 \cdot 9(2 - 4) + 5 \cdot 12(2 - 3) + 9 \cdot 4 = 111. \end{aligned}$$

Соотношение $K_X^2 = 3e(X)$ следует из леммы 2.1, (iii).

Следствие 2.1. *Поверхность X является сильно жесткой (т.е. поверхностью, чье пространство модулей сводится либо к X и $\overline{X}$, либо просто к X, где $\overline{X}$ означает комплексно-сопряженную поверхность).*

§ 3. Автоморфизмы накрытий

Пусть $f\colon X \to \widetilde{\mathbb{P}^2}$ является $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$-накрытием Галуа, рассмотренным в § 2. Обозначим через Kl группу голоморфных и антиголоморфных диффеоморфизмов $X \to X$. Ясно, что если Kl содержит по крайней мере один антиголоморфный элемент, то голоморфные элементы в Kl составляют подгруппу Aut индекса 2. Другими словами, мы имеем короткую точную последовательность $1 \to \mathrm{Aut} \to \mathrm{Kl} \to H \to 1$, где $H = \mathbb{Z}/2$ либо $H = 0$. Обозначим через $\mathrm{kl}\colon \mathrm{Kl} \to H$ соответствующий гомоморфизм в этой последовательности. Напомним, что согласно определению вещественная структура – это антиголоморфная инволюция, и отметим также, что группа H может быть нетривиальна и для многообразий, не обладающих вещественной структурой.

Группа Kl действует наиболее естественно на $X \times \overline{X}$, $X \sqcup \overline{X}$ ($\overline{X}$ – поверхность, комплексно-сопряженная поверхности X) и на связанных с ними группах, таких как Div, Pic и H^*, а также на $\mathbb{C}(X \times \overline{X})$ и $\mathbb{C}(X \sqcup \overline{X})$ (последнее множество функций не является полем, так как $X \sqcup \overline{X}$ – приводимая поверхность). Существует несколько путей, как с помощью этих действий определить действие группы Kl, продолжающее действие Aut на $\mathbb{C}(X)$, $\mathrm{Div}(X)$, $\mathrm{Pic}(X)$ и $H^*(X)$. Выбираем тот, который наиболее приспособлен для данного исследования. Кроме того, именно он является более традиционным в алгебраической геометрии.

Чтобы продолжить действие группы $\mathrm{Aut}(X)$ на $\mathbb{C}(X)$ до действия $\mathrm{Kl}(X)$, свяжем с каждым антиголоморфным диффеоморфизмом h $\mathbb{C}$-антилинейное отображение $h^!\colon \mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}(X)$, заданное формулой $h^!(f)(x) = \overline{f(h(x))}$, $f \in \mathbb{C}(X)$, $x \in X(\mathbb{C})$. Это действие $h^!$ может быть продолжено на голоморфные дифференциальные формы, если положить

$$h^!(df) = dh^!(f).$$

Антиголоморфный диффеоморфизм h определяет действие на $\mathrm{Div}(X)$: если дивизор $C \in \mathrm{Div}(X)$ задан локальными уравнениями (U_α, f_α), то $h(C)$ задается уравнениями $(h^{-1}(U_\alpha), \overline{f_\alpha \circ h})$. Имеем

$$h^{-1}(\operatorname{div} f) = \operatorname{div} h^!(f), \qquad f \in \mathbb{C}(X). \tag{3.1}$$

В соответствии с (3.1) $h\colon \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(X)$ индуцирует действие $h^!\colon \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$. Ясно, что канонический класс $K_X \in \mathrm{Pic}(X)$ инвариантен при действии $h^!$ для любого $h \in \mathrm{Kl}$ (здесь и далее мы пологаем $h^! = h^*$ для $h \in \mathrm{Aut}\, X$). Индекс пересечения дивизоров также сохраняется при действии любого элемента $h \in \mathrm{Kl}$ (заметим, что для $h \in \mathrm{Kl} \setminus \mathrm{Aut}$ действие $h^!$ на группе Нерона–Севери, рассматриваемой как подгруппа в $H^2(X, \mathbb{Z})$, совпадает с ограничением действия $-h^*\colon H^2(X) \to H^2(X)$ на эту подгруппу, где h^* – стандартное действие диффеоморфизма h на когомологиях).

Мы говорим, что $h \in \mathrm{Kl}(X)$ поднят с $\widetilde{\mathbb{P}^2}$, если существует такой диффеоморфизм $\widetilde{h} \in \mathrm{Kl}(\widetilde{\mathbb{P}^2})$, что является коммутативной следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \widetilde{\mathbb{P}^2} & \xrightarrow[\widetilde{h}]{} & \widetilde{\mathbb{P}^2} \end{array}$$

Предложение 3.1. *Каждый диффеоморфизм* $h \in \mathrm{Kl}(X)$ *поднят с* $\widetilde{\mathbb{P}^2}$. *В частности, если* X *обладает вещественной структурой, то для выбранной соответствующим образом вещественной структуры на* $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ *накрытие* f *определено над* $\mathbb{R}$.

Лемма 3.1. *Пусть* $h \in \mathrm{Kl}(X)$. *Тогда* h *оставляет неподвижными множества* $\cup C_i$ *и* $\cup D_{i_1,i_2,i_3}$.

Доказательство. Предположим, что $h(C_{i_0}) \not\subset \cup C_i$ для некоторого i_0. Тогда

$$\Bigl(h(C_{i_0}), \sum C_i\Bigr) = a, \qquad a \geqslant 0.$$

Так как $g(C_{i_0}) \neq g(D_{i_1,i_2,i_3})$, то $h(C_{i_0}) \neq D_{i_1,i_2,i_3}$. Поэтому

$$\Bigl(h(C_{i_0}), \sum D_{i_1,i_2,i_3}\Bigr) = b, \qquad b \geqslant 0.$$

Так как $h^!(K_X) = K_X$, то из леммы 2.1 и формулы присоединения следует, что

$$(h(C_{i_0}), K_X) = (C_{i_0}, K_X) = 9.$$

Таким образом, ввиду (2.1) и (2.2) должно выполняться равенство

$$7a + 12b = 27$$

для некоторых неотрицательных целых чисел a и b, что невозможно.

Доказательство того, что $h(D_{i_1,i_2,i_3}) \subset \bigcup_{(i_1,i_2,i_3)\in T} D_{i_1,i_2,i_3}$ для каждой тройки $(i_1,i_2,i_3) \in T$, аналогично доказательству, приведенному выше.

Доказательство предложения 3.1. Второе утверждение является непосредственным следствием первого. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно показать, что h действует на слоях накрытия f, т.е. что для почти всех $p \in \widetilde{\mathbb{P}^2}$ можно найти такие $q \in \widetilde{\mathbb{P}^2}$, что $h(f^{-1}(p)) = f^{-1}(q)$.

Зафиксируем точку $p_{i_0,j_0,k_0} \in \mathbb{P}^2$. Так как C_{i_0} и C_{j_0} пересекают D_{i_0,j_0,k_0}, то $h(C_{i_0})$ и $h(C_{j_0})$ пересекают $h(D_{i_0,j_0,k_0})$. Кривая C_{i_0} (соответственно, C_{j_0}) пересекает три других кривых D_{i_r,j_r,k_r}, $r = 1,2,3$ (соответственно, D'_{i_r,j_r,k_r}, $r = 1,2,3$), отличных от D_{i_0,j_0,k_0}. Таким образом, $h(C_{i_0})$ (соответственно, $h(C_{j_0})$) пересекает каждую из кривых $h(D_{i_r,j_r,k_r})$, $r = 1,2,3$ (соответственно, $h(D'_{i_r,j_r,k_r})$, $r = 1,2,3$).

По лемме 3.1 $h(C_{i_0}) = C_i$ и $h(C_{j_0}) = C_j$ для некоторых i и j. Имеем

$$\operatorname{div} f^*(l_{i_0} l_{j_0}^{-1}) = 5\Bigl(C_{i_0} + \sum_{r=1}^{3} D_{i_r,j_r,k_r}\Bigr) - 5\Bigl(C_{j_0} + \sum_{r=1}^{3} D'_{i_r,j_r,k_r}\Bigr)$$

и

$$\operatorname{div} f^*(l_i l_j^{-1}) = 5\Bigl(h(C_{i_0}) + \sum_{r=1}^{3} h(D_{i_r,j_r,k_r})\Bigr) - 5\Bigl(h(C_{j_0}) + \sum_{r=1}^{3} h(D'_{i_r,j_r,k_r})\Bigr).$$

Следовательно, существует константа k_{i_0,j_0} такая, что

$$h^!(f^*(l_i l_j^{-1})) = k_{i_0,j_0} f^*(l_{i_0} l_{j_0}^{-1}). \tag{3.2}$$

Выберем другую точку $p_{i_0',j_0',k_0'} \in \mathbb{P}^2$, $p_{i_0',j_0',k_0'} \in L_{i_0'} \cap L_{j_0'}$ и рассмотрим кривые $C_{i_0'}$ и $C_{j_0'}$, а также их образы $h(C_{i_0'}) = C_{i'}$, $h(C_{j_0'}) = C_{j'}$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что существует константа $k_{i_0',j_0'}$ такая, что

$$h^!(f^*(l_{i'} l_{j'}^{-1})) = k_{i_0',j_0'} f^*(l_{i_0'} l_{j_0'}^{-1}). \tag{3.3}$$

Так как каждая точка $p \in \widetilde{\mathbb{P}^2} \setminus \cup D_{i_1,i_2,i_3}$ может быть задана как пересечение слоев двух линейных рациональных функций $l_{i_0} l_{j_0}^{-1}$ и $l_{i_0'} l_{j_0'}^{-1}$, то из (3.2) и (3.3) следует, что для любой точки $p \in \widetilde{\mathbb{P}^2} \setminus \cup D_{i_1,i_2,i_3}$ найдется точка $q \in \widetilde{\mathbb{P}^2}$ такая, что $h(f^{-1}(p)) = f^{-1}(q)$.

§ 4. Три примера

Пример 4.1. *Невещественная жесткая поверхность.* Пусть $L = L_1 \cup \dots \cup L_9$ – конфигурация девяти прямых в $\mathbb{P}^2$, двойственная девяти точкам перегиба гладкой кубики C, лежащей в двойственной плоскости (см. § 2), и пусть $f\colon X_1 \to \widetilde{\mathbb{P}^2}$ – накрытие Галуа, ассоциированное с эпиморфизмом $\varphi_1\colon H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$, заданным на образующих формулами

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\lambda_1) = (1,1), \quad &&\varphi_1(\lambda_2) = (1,0), \quad &&\varphi_1(\lambda_3) = (1,1),\\
&\varphi_1(\lambda_4) = (3,3), \quad &&\varphi_1(\lambda_5) = (3,0), \quad &&\varphi_1(\lambda_6) = (0,1),\\
&\varphi_1(\lambda_7) = (0,1), \quad &&\varphi_1(\lambda_8) = (0,2), \quad &&\varphi_1(\lambda_9) = (1,1)
\end{aligned}$$

(см. § 1). Отметим, что $\sum \varphi_1(\lambda_i) = 0 \bmod 5$.

Предложение 4.1. *Поверхность X_1 является гладкой и сильно жесткой. Группа $\mathrm{Kl}(X_1)$ совпадает с группой накрывающих преобразований $G = \mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/5$. В частности, на поверхности X_1 нет не только никакой вещественной структуры, но даже никаких антиголоморфных диффеоморфизмов.*

Доказательство. Поверхность X_1 является гладкой ввиду леммы 1.3. Согласно леммам 2.1 и 2.3 имеем $K_{X_1}^2 = 333$ и $e(X_1) = 111$, и утверждение о жесткости следует из следствия 2.1.

Рассмотрим произвольный элемент $c \in \mathrm{Kl}(X_1)$. По предложению 3.1 c поднят с $\widetilde{\mathbb{P}^2}$, т.е. существует диффеоморфизм $\tilde{c} \in \mathrm{Kl}(\widetilde{\mathbb{P}^2})$ такой, что $f \circ c = \tilde{c} \circ f$.

Как и в § 1, рассмотрим аффинные координаты x_1, x_2 в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ и линейные уравнения $l_i(x_1, x_2) = 0$ прямых $L_i \cap \mathbb{C}^2$. Тогда поле рациональных функций $\mathbb{C}(X_1)$ на X_1 может быть отождествлено с подполем

$$K_{\varphi_1} = \mathbb{C}(x_1, x_2, w_1, w_2)$$

поля $K_{u(5)}$, где $w_1^5 = l_1 l_2 l_3 l_4^3 l_5^3 l_9$ и $w_2^5 = l_1 l_3 l_4^3 l_6 l_7 l_8^2 l_9$, так, что

$$K_{\varphi_1} = \bigoplus_{a \in \mathrm{pr}\, A_1} \mathbb{C}(x_1, x_2) z^a \tag{4.1}$$

является подпространством векторного пространства

$$K_{u(m)} = \bigoplus_{a \in \mathrm{pr}\, A} \mathbb{C}(x_1, x_2) z^a$$

над $\mathbb{C}(x_1, x_2)$, где

$$A = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_9) \in \mathbb{Z}^9 \;\middle|\; 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 4 \;\text{ и }\; \sum \alpha_i = 0 \mod 5 \right\},$$

$\mathrm{pr}\colon A \mapsto \bar{A} \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^8$ – проекция, заданная $\mathrm{pr}(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_8)$ для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_9)$, и $A_1 \subset A$ состоит из $0 = (0,0,0,0,0,0,0,0,0)$ и из элементов

$$\begin{array}{llll}
(1,1,1,3,3,0,0,0,1), & (2,2,2,1,1,0,0,0,2), & (3,3,3,4,4,0,0,0,3), & (4,4,4,2,2,0,0,0,4),\\
(1,0,1,3,0,1,1,2,1), & (2,0,2,1,0,2,2,4,2), & (3,0,3,4,0,3,3,1,3), & (4,0,4,2,0,4,4,3,4),\\
(2,1,2,1,3,1,1,2,2), & (4,2,4,2,1,2,2,4,4), & (1,3,1,3,4,3,3,1,1), & (3,4,3,4,2,4,4,3,3),\\
(3,1,3,4,3,2,2,4,3), & (1,2,1,3,1,4,4,3,1), & (4,3,4,2,4,1,1,2,4), & (2,4,2,1,2,3,3,1,2),\\
(4,1,4,2,3,3,3,1,4), & (3,2,3,4,1,1,1,2,3), & (2,3,2,1,4,4,4,3,2), & (1,4,1,3,2,2,2,4,1),\\
(0,1,0,0,3,4,4,3,0), & (0,2,0,0,1,3,3,1,0), & (0,3,0,0,4,2,2,4,0), & (0,4,0,0,2,1,1,2,0).
\end{array}$$

Диффеоморфизм c индуцирует действие $c^!$ на $\mathbb{C}(X_1)$ такое, что ограничение $c^!$ на подполе $\mathbb{C}(\widetilde{\mathbb{P}^2}) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)$ совпадает с $\tilde{c}^{\,!}$ (см. § 3). По лемме 3.1 множества $\cup C_i$ и $\cup D_{i_1,i_2,i_3}$ инвариантны при действии c. Следовательно, множество $\cup L_i$ является инвариантным при действии $\tilde{c}$. Таким образом, $c^!$ действует на множестве одномерных подпространств $\mathbb{C}(x_1, x_2) z^a$, $a \in \mathrm{pr}\, A_1$, поля K_{φ_1} и поэтому индуцирует действие на A_1, которое мы также будем обозначать через $c^!$. Для $a \in A_1$ обозначим через $r_i(a)$, $i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, число координат вектора a, равных i.

Лемма 4.1. *Функция r_i инвариантна при действии $c^!$, т.е. $r_i(\alpha) = r_i(\beta)$ для $\beta = c^!(\alpha)$.*

Доказательство. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant 9$, координата α_j вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_9) \in A_1$ сравнима по модулю 5 с порядком нуля вдоль C_j каждой функции из $C(x_1, x_2) z^a$, $a = \mathrm{pr}\, \alpha$. Для доказательства леммы осталось заметить, что ввиду леммы 3.1 c переставляет кривые C_j.

Из леммы 4.1 следует, что действие $c^!$ на A_1 определяется некоторой перестановкой π чисел $1, \dots, 9$.

Рассмотрим элементы $\alpha = (1,1,1,3,3,0,0,0,1)$ и $\beta = (1,0,1,3,0,1,1,2,1)$. Легко видеть, что α является единственным элементом в A_1 с $r_0 = 3$, $r_1 = 4$, $r_2 = 0$, $r_3 = 2$, $r_4 = 0$. Соответственно, β является единственным элементом в A_1 с $r_0 = 2$, $r_1 = 5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1$, $r_4 = 0$. Поэтому по лемме 4.1 $c^!(\alpha) = \alpha$ и $c^!(\beta) = \beta$. Так как $r_2(\beta) = 1$ и $r_3(\beta) = 1$, то $\tilde{c}(L_4) = L_4$ и $\tilde{c}(L_8) = L_8$. Далее, $r_3(\alpha) = 2$ влечет $\tilde{c}(L_5) = L_5$ и $r_0(\beta) = 2$ влечет $\tilde{c}(L_2) = L_2$.

Полученные выше свойства инвариантности прямых L_2, L_4, L_5, L_8 означают, что эти прямые являются инвариантными относительно действия $\tilde{c}$. Следовательно, точки $p_{2,4,9} = L_2 \cap L_4$, $p_{2,5,8} = L_5 \cap L_8$, $p_{4,5,6} = L_4 \cap L_5$ и $p_{3,4,8} = L_4 \cap L_8$ являются неподвижными относительно действия $\tilde{c}$.

Так как $r_0(a) = 2$, то имеются две возможности: либо $\tilde{c}(L_6) = L_7$ и $\tilde{c}(L_7) = L_6$, либо $\tilde{c}(L_6) = L_6$ и $\tilde{c}(L_7) = L_7$.

Если $\tilde{c}(L_6) = L_7$ и $\tilde{c}(L_7) = L_6$, то их точка пересечения $p_{2,6,7}$ является неподвижной точкой. Но это невозможно. Действительно, в этом случае L_6 проходит через две различные неподвижные точки $p_{2,6,7}$ и $p_{4,5,6}$, и поэтому должна удовлетворять равенству $\tilde{c}(L_6) = L_6$.

Если L_6 и L_7 являются инвариантными прямыми, то все прямые L_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$, должны быть инвариантными. Действительно, так как L_5 и L_7 – инвариантные прямые, то их точка пересечения $p_{3,5,7}$ является неподвижной точкой. Поэтому L_3 является инвариантной прямой, так как L_3 проходит через две неподвижные точки $p_{3,4,8}$ и $p_{3,5,7}$. Следовательно, точки пересечений: $p_{3,6,9}$ прямых L_3 и L_6, $p_{1,2,3}$ прямых L_2 и L_3, $p_{1,4,7}$ прямых L_4 и L_7 и $p_{7,8,9}$ прямых L_7 и L_8 – также являются неподвижными точками. Отсюда вытекает, что L_1 и L_9, которые проходят соответственно через $p_{1,2,3}$, $p_{1,4,7}$ и $p_{3,6,9}$, $p_{7,8,9}$, являются инвариантными прямыми.

Итак, мы доказали, что девять точек перегиба гладкой кубики C являются неподвижными точками при действии на $\mathbb{P}^2$, индуцированном $\tilde{c}$. Следовательно, если $\tilde{c} \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\mathbb{P}^2})$, то $\tilde{c} = \mathrm{Id}$ и, следовательно c является накрывающим преобразованием. Если $\tilde{c} \notin \mathrm{Aut}(\widetilde{\mathbb{P}^2})$, то $\tilde{c}^2 \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\mathbb{P}^2})$ является тождественным преобразованием, и поэтому $\tilde{c}$ индуцирует вещественную структуру на $\mathbb{P}^2$ такую, что все точки перегиба гладкой кубики C являются вещественными относительно этой структуры, но это невозможно.

Следствие 4.1. *Пространство модулей комплексных структур на подлежащем гладком четырехмерном многообразии состоит из двух различных точек*: X_1 *и* $\overline{X}_1$. *В частности,* X_1 *и* $\overline{X}_1$ *дают контрпример к* “Dif=Def”-*проблеме*[1].

Замечание 4.1. Из предложения 4.1 и сильной жесткости Мостова можно получить (используя неравенство Смита для преобразований простого порядка, а также когомологические рассуждения), что X_1 не имеет нетривиальных диффеоморфизмов порядков, не равных 5.

Замечание 4.2. Иррегулярность поверхности X_1 равна нулю. Это следует, например, из [6].

Пример 4.2. *Вещественная немаксимальная жесткая поверхность.* Пусть кубика C задана уравнением $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ и прямые $L_1, \dots, L_9$ перенумерованы точно так же, как и в § 2. В частности, при этой нумерации прямые L_1, L_5 и L_9 являются вещественными. Пусть $f\colon X_2 \to \widetilde{\mathbb{P}^2}$ – накрытие Галуа, связанное с эпиморфизмом $\varphi_2\colon H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$, заданным формулами $\varphi_2(\lambda_i) = (a_{i,1}, a_{i,2})$,

---

[1] Первые контрпримеры к “Dif=Def”-проблеме были построены Манетти в [9].

где

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(\lambda_1)=(0,1), \quad \varphi_2(\lambda_2)=(1,0), \quad \varphi_2(\lambda_3)=(1,0),\\
&\varphi_2(\lambda_4)=(0,1), \quad \varphi_2(\lambda_5)=(1,0), \quad \varphi_2(\lambda_6)=(0,1),\\
&\varphi_2(\lambda_7)=(1,2), \quad \varphi_2(\lambda_8)=(1,2), \quad \varphi_2(\lambda_9)=(0,3).
\end{aligned}$$

Предложение 4.2. *Поверхность X_2 является гладкой сильно жесткой поверхностью. Она может быть снабжена вещественной структурой. Эта структура единственна с точностью до сопряжения на элементы из группы накрывающих преобразований и не является максимальной (последнее означает, что $\sum \dim H_i(X_2(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) < \sum \dim H_i(X_2(\mathbb{C});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$). Группа $\mathrm{Kl}(X_2)$ является полупрямым произведением группы второго порядка $\mu_2 \simeq \mathbb{Z}/2$ и группы накрывающих преобразований $G \simeq \mathbb{Z}/5\times\mathbb{Z}/5$. Это $\mathbb{Z}/2$-расширение определено соотношениями $s\gamma s^{-1}=\gamma^{-1}$, $\gamma\in G$, $s\in\mu_2$, $s\neq 1$.*

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 4.1, X_2 является гладкой поверхностью ввиду леммы 1.3. Согласно леммам 2.1 и 2.3 мы имеем $K^2_{X_2}=333$ и $e(X_2)=111$, и утверждение о жесткости следует из следствия 2.1.

Как и выше, мы отождествляем поле рациональных функций $\mathbb{C}(X_2)$ на X_2 с подполем $K_{\varphi_2}=\mathbb{C}(x_1,x_2,w_1,w_2)$ в $K_{u(5)}$, где $w_1^5=l_2l_3l_5l_7l_8$ и $w_2^5=l_1l_4l_6l_7^2l_8^2l_9^3$. Тогда

$$K_{\varphi_2}=\bigoplus_{a\in \mathrm{pr}\, A_2}\mathbb{C}(x_1,x_2)z^a$$

является подпространством векторного пространства

$$K_{u(m)}=\bigoplus_{a\in \mathrm{pr}\, A}\mathbb{C}(x_1,x_2)z^a$$

над $\mathbb{C}(x_1,x_2)$, где A_2 состоит из $(0,0,0,0,0,0,0,0,0)$ и из элементов

$$\begin{aligned}
&(0,1,1,0,1,0,1,1,0), && (0,2,2,0,2,0,2,2,0), && (0,3,3,0,3,0,3,3,0), && (0,4,4,0,4,0,4,4,0),\\
&(1,0,0,1,0,1,2,2,3), && (2,0,0,2,0,2,4,4,1), && (3,0,0,3,0,3,1,1,4), && (4,0,0,4,0,4,3,3,2),\\
&(1,1,1,1,1,1,3,3,3), && (2,2,2,2,2,2,1,1,1), && (3,3,3,3,3,3,4,4,4), && (4,4,4,4,4,4,2,2,2),\\
&(1,2,2,1,2,1,4,4,3), && (2,4,4,2,4,2,3,3,1), && (3,1,1,3,1,3,2,2,4), && (4,3,3,4,3,4,1,1,2),\\
&(1,3,3,1,3,1,0,0,3), && (2,1,1,2,1,2,0,0,1), && (3,4,4,3,4,3,0,0,4), && (4,2,2,4,2,4,0,0,2),\\
&(1,4,4,1,4,1,1,1,3), && (2,3,3,2,3,2,2,2,1), && (3,2,2,3,2,3,3,3,4), && (4,1,1,4,1,4,4,4,2).
\end{aligned}$$

Обозначим $\alpha=(0,1,1,0,1,0,1,1,0)$ и $\beta=(1,0,0,1,0,1,2,2,3)$ и рассмотрим произвольный элемент $c\in\mathrm{Kl}(X_2)$, $c\neq\mathrm{Id}$. Те же самые рассуждения, что и в доказательстве предложения 4.1, показывают, что прямая L_9 и каждое из объединений $L_7\cup L_8$, $L_1\cup L_4\cup L_6$ и $L_2\cup L_3\cup L_5$ являются инвариантными при действии $\tilde{c}$.

Покажем, что равенства $\tilde{c}(L_7)=L_7$ и $\tilde{c}(L_8)=L_8$ невозможны. Действительно, в противном случае имеем $\tilde{c}(p_{1,4,7})=p_{1,4,7}$, так как конфигурация прямых $L_1\cup L_4\cup L_6\cup L_7\cup L_8$ имеет только две тройные точки $p_{1,4,7}$ и $p_{1,6,8}$. Отсюда следовало бы равенство $\tilde{c}(L_6)=L_6$, которое вместе с $\tilde{c}(L_9)=L_9$ влекло бы то, что L_1, а потому и L_4, и, следовательно, все прямые являются инвариантными относительно действия $\tilde{c}$, что противоречит условию $\tilde{c}\neq\mathrm{Id}$.

Поэтому мы имеем только одну возможность: $\tilde{c}(L_7) = L_8$ и $\tilde{c}(L_8) = L_7$. Так как пара тройных точек $\{p_{2,5,8}, p_{3,5,7}\}$ конфигурации $L_2 \cup L_3 \cup L_5 \cup L_7 \cup L_8$ инвариантна при действии $\tilde{c}$, то прямая L_5 является инвариантной, а прямые L_2 и L_3 переставляются. Те же самые аргументы показывают, что $\tilde{c}(L_1) = L_1$, $\tilde{c}(L_4) = L_6$ и $\tilde{c}(L_6) = L_4$.

Такое действие $\tilde{c}$ на $L = \cup L_i$ совпадает с действием, индуцированным стандартным комплексным сопряжением на $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ (как это следует из изложенного в § 2), и поэтому совпадает с ним. Это действие поднимается и определяет вещественную структуру s на X_2. Фактически X_2 может быть рассмотрено как минимальное разрешение особенностей проективного замыкания вещественной поверхности, заданной уравнениями

$$\begin{aligned}
w_1^5 &= (x_1^2 + x_1 + 1)(x_2 - 1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2),\\
w_2^5 &= (x_1 - 1)(x_2^2 + x_2 + 1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)^2(x_1 - x_2)^3.
\end{aligned}$$

Эта вещественная поверхность не является максимальной, так как ее вещественная часть гомеоморфна $\mathbb{RP}^2$ с 4 раздутыми точками (легко проверить, что среди раздутых точек $p_{i,j,k} \in T$ имеются только четыре вещественные точки). Так как каждый элемент $c \in \mathrm{Kl}(X_2)$ определяется диффеоморфизмом $\tilde{c}$ однозначно с точностью до композиции с накрывающим преобразованием, то группа $\mathrm{Kl}(X_2)$ порождается элементом s и накрывающими преобразованиями. Соотношения коммутирования $s\gamma = \gamma^{-1}s$ следуют из приведенных выше уравнений. Эти соотношения влекут то, что каждое $s\gamma$ является вещественной структурой и все эти вещественные структуры эквивалентны друг другу.

Замечание 4.3. Поверхности в приведенных выше примерах имеют одинаковые значения K^2 и e. Таким образом, они принадлежат одной и той же схеме Гильберта, тем самым они дают пример схемы Гильберта, связные компоненты которой имеют различные свойства относительно существования вещественных структур на поверхностях, представляющих эти компоненты. Отметим также, что в противоположность первому примеру во втором примере пространство модулей сводится к одной точке, которая является вещественной (и, более того, соответствует поверхности с вещественной структурой).

Пример 4.3. *Жесткая поверхность с двумя неэквивалентными вещественными структурами.* Две вещественные структуры на комплексной поверхности называются *эквивалентными*, если одна из них может быть преобразована в другую с помощью автоморфизма поверхности.

Пусть конфигурация прямых $L = L_1 \cup \dots \cup L_6$ является полным четырехсторонником. Отметим, что все полные четырехсторонники проективно эквивалентны друг другу. Для данной конфигурации имеем $t_2 = 3$, $t_3 = 4$ и $t_r = 0$ для $r \geqslant 4$. Занумеровав подходящим образом прямые, входящие в четырехсторонник, можно считать, что множество 2-кратных точек состоит из $\{L_1 \cap L_4,\ L_2 \cap L_5,\ L_3 \cap L_6\}$ и множество 3-кратных точек состоит из

$$\{L_1 \cap L_2 \cap L_6,\ L_2 \cap L_3 \cap L_4,\ L_1 \cap L_3 \cap L_6,\ L_4 \cap L_5 \cap L_6\}.$$

Пусть $f\colon X_3 \to \widetilde{\mathbb{P}^2}$ – накрытие Галуа, определяемое эпиморфизмом $\varphi_3\colon H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$, заданным на образующих λ_i группы $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z})$ формулами

$$\begin{aligned} &\varphi_3(\lambda_1) = (1,0), \quad &&\varphi_3(\lambda_2) = (1,0), \quad &&\varphi_3(\lambda_3) = (1,2), \\ &\varphi_3(\lambda_4) = (0,1), \quad &&\varphi_3(\lambda_5) = (0,1), \quad &&\varphi_3(\lambda_6) = (2,1), \end{aligned}$$

где $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ – раздутие $\mathbb{P}^2$ во всех 3-кратных точках конфигурации L. Как и выше, обозначим $\sigma\colon \widetilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$ это раздутие, $E_{i,j,k}$ – исключительный дивизор, лежащий над 3-кратной точкой $p_{i,j,k}$, и L'_i – собственный прообраз прямой L_i. Положим $C_i = f_3^{-1}(L'_i)$ и $D_{i,j,k} = f_3^{-1}(E_{i,j,k})$.

Как и в §1, рассмотрим аффинные координаты x_1, x_2 в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$, и пусть $l_i(x_1, x_2) = 0$ – линейные уравнения прямых $L_i \cap \mathbb{C}^2$. Тогда по лемме 1.3 поверхность X_3 изоморфна минимальному разрешению особенностей проективного замыкания поверхности, заданной уравнениями

$$w_1^5 = l_1 l_2 l_3 l_6^2, \tag{4.2}$$

$$w_2^5 = l_3^2 l_4 l_5 l_6. \tag{4.3}$$

Вычисления, аналогичные приведенным в доказательствах лемм 2.1 и 2.2, показывают, что X_3 является поверхностью общего типа с $K_{X_3}^2 = 45$ и $e(X_3) = 15$. Следовательно, X_3 является сильно жесткой поверхностью.

Лемма 4.2. *Пусть $h \in \mathrm{Kl}(X_3)$. Тогда h оставляет на месте множество $(\cup C_i) \cup (\cup D_{i_1,i_2,i_3})$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1.

Предложение 4.3. *Каждый диффеоморфизм $h \in \mathrm{Kl}(X_3)$ является поднятым с $\widetilde{\mathbb{P}^2}$. В частности, если X_3 обладает вещественной структурой, то для подходящим образом выбранной вещественной структуры на $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ накрытие f определено над $\mathbb{R}$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.1.

Предложение 4.4. *Поверхность X_3 обладает двумя неэквивалентными вещественными структурами.*

Доказательство. Рассмотрим две вещественные структуры на $\mathbb{P}^2$. Для первой из них все прямые L_i конфигурации L являются вещественными, а для второй – прямые L_3, L_6 являются вещественными и L_1, L_2, соответственно L_4 и L_5, являются комплексно-сопряженными. Эти две вещественные структуры индуцируют две вещественные структуры на X_3, так как в обоих случаях многочлены в (4.2) и (4.3) определены над $\mathbb{R}$.

Эти две вещественные структуры на X_3 не эквивалентны. Действительно, по лемме 4.2 каждый автоморфизм поверхности X_3 оставляет на месте множество $(\cup C_i) \cup (\cup D_{i_1,i_2,i_3})$, в то время как, с одной стороны, все кривые C_i, $i = 1, \dots, 6$, и все D_{i_1,i_2,i_3} являются вещественными относительно первой вещественной структуры, но, с другой стороны, только C_3 и C_6 (среди кривых $C_1, \dots, C_6$) являются вещественными относительно второй вещественной структуры.

§ 5. Невещественность фальшивых проективных поверхностей и несколько замечаний

5.1. Назовем поверхность основного типа с $p_g = q = 0$ и $K^2 = 9$ *фальшивой проективной плоскостью.* Существование фальшивых проективных плоскостей доказано Д. Мамфордом [11].

Теорема 5.1. *Фальшивая проективная плоскость не имеет антиголоморфных диффеоморфизмов.*

Доказательство. Пусть X – фальшивая проективная плоскость. Тогда (см. [10], [14]) универсальная накрывающая многообразия X является шаром.

Покажем сначала, что на X нет антиголоморфных инволюций. Предположим противное, т.е. пусть поверхность X снабжена вещественной структурой, и обозначим через $X_{\mathbb{R}}$ множество вещественных точек поверхности X. Применяя формулу следа Лефшеца к инволюции, задающей вещественную структуру, получаем, что $e(X_{\mathbb{R}}) = 1$. Следовательно, $X_{\mathbb{R}}$ не пусто и содержит по крайней мере одну компоненту, диффеоморфную либо сфере, либо вещественной проективной плоскости. Для того чтобы поднять вещественную структуру на универсальную накрывающую, выберем точку p на такой компоненте и отождествим точки универсальной накрывающей с классами гомотопных путей с началом в точке p. Вещественная часть накрытия накрывает (без ветвления) выбранную вещественную компоненту поверхности X. С другой стороны, так как универсальная накрывающая является шаром, ее вещественная часть не имеет компактных компонент.

Из вышесказанного следует, что если существует антиголоморфный диффеоморфизм h, то его порядок не может быть равен $2n$, где n – нечетное число. Действительно, если n – нечетное число, то h^n является антиголоморфной инволюцией. Поэтому теорема 5.1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 5.1. *Группа* $\operatorname{Aut} X$ *не имеет элементов четного порядка.*

Доказательство. Предположим, что существует $h \in \operatorname{Aut} X$ второго порядка. Одномерные компоненты C множества неподвижных точек автоморфизма h неособы. Согласно относительной пропорциональности Еноки–Хирцебруха [2] выполнено равенство

$$e(C) = 2C^2.$$

Поэтому $C = \varnothing$, так как иначе $C^2 > 0$, а $e(C) < 0$ (эти неравенства следуют, например, из равенства $C = rK$ при некотором положительном $r \in \mathbb{Q}$).

Так как $\dim H^i(X, \mathbb{C}) = 1$ для $i = 0, 2, 4$ и $\dim H^i(X, \mathbb{C}) = 0$ для $i = 1, 3$, то согласно топологической формуле Лефшеца число неподвижных точек автоморфизма h должно равняться 3 для любого нетривиального автоморфизма без одномерных компонент во множестве неподвижных точек. Далее, применяя голоморфную формулу Лефшеца к такому h (второго порядка), имеем

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\det(\operatorname{Id} - D_i)} = 1,$$

где D_i, $i = 1, 2, 3$, – матрицы Якоби автоморфизма h в неподвижных точках. С другой стороны, $\det(\mathrm{Id} - D_i) = 4$ в каждой неподвижной точке и, следовательно, формула Лефшеца дает $\frac{3}{4} = 1$, т.е. мы получаем противоречие, которое доказывает лемму и завершает доказательство теоремы 5.1.

Следствие 5.1. *Для любой фальшивой проективной плоскости пространство модулей комплексных структур на подлежащем четырехмерном многообразии состоит из двух различных точек*: X *и* $\overline{X}$.

5.2. Аргументы, использованные в доказательстве теоремы 5.1 и исключающие существование антиголоморфных инволюций, можно заменить следующим общим результатом.

Теорема 5.2. *Если* X *является компактной комплексной кэлеровой поверхностью отрицательной секционной кривизны, то для любой вещественной структуры на* X *вещественная часть поверхности* X *не имеет компонент, диффеоморфных сфере, вещественной проективной плоскости, тору или бутылке Клейна.*

Доказательство. Пусть $p\colon B \to X$ – универсальное накрытие. Согласно теореме Картана–Адамара пространство B диффеоморфно $\mathbb{R}^4$. Каждая связная компонента M прообраза $p^{-1}(F)$ компоненты F вещественной части поверхности X является вещественной компонентой для некоторой вещественной структуры на B. Следовательно, по теореме Смита M имеет гомологии, как у точки, и поэтому она диффеоморфна $\mathbb{R}^2$. Это исключает сферу и вещественную проективную плоскость в качестве F и влечет инъективность гомоморфизма $\pi_1(F) \to \pi_1(X)$. Для доказательства теоремы остается заметить, что $\pi_1(X)$, являющаяся фундаментальной группой компактного многообразия отрицательной кривизны, не содержит (см. [13]) подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Было бы интересно сравнить это наблюдение с гипотезой Коллара (и теоремой Витербо [8]), согласно которой алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 3$ является многообразием общего типа, если одна из компонент его вещественной части (относительно некоторой вещественной структуры) гиперболична.

5.3. Поверхности Мияоки–Яо могут быть источником интересных примеров, относящихся к "неравенству Регсдейла", т.е. примеров вещественных поверхностей X со значениями $\beta_1^{\mathbb{R}} = \dim H_1(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, близкими или бóльшими $h^{1,1}(X)$. (Первые примеры с $\beta_1^{\mathbb{R}} > h^{1,1}(X)$ были найдены в начале восьмидесятых годов Итенбергом [7].) Напомним, что вещественная поверхность X называется *максимальной* (или *M-поверхностью*), если неравенство Смита (см., например, обзор [3])

$$\sum \beta_i^{\mathbb{R}} \leqslant \sum \beta_i^{\mathbb{C}} = 2 + 4(h^{1,0} + \nu) + 2h^{2,0} + h^{1,1} \tag{5.1}$$

превращается в равенство, где ν – ранг 2-кручения в $H_1(X;\mathbb{Z})$ и $\beta_i^{\mathbb{C}} = \dim H_i(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Согласно формуле Лефшеца

$$\beta_0^{\mathbb{R}} - \beta_1^{\mathbb{R}} + \beta_2^{\mathbb{R}} = 1 + \operatorname{tr} P^{1,1} \tag{5.2}$$

для любой вещественной поверхности, где $P^{1,1}$ – примитивная часть в $H^{1,1}$ (которая, фактически, имеет коразмерность 1 в $H^{1,1}$). Следовательно, для M-поверхности выполнено равенство

$$\beta_1^{\mathbb{R}} = 1 + 2(h^{1,0} + \nu) + h^{2,0} + p_-^{1,1}, \tag{5.3}$$

где $p_-^{1,1}$ – размерность антиинвариантного подпространства в $P^{1,1}$ относительно действия вещественной структуры. С другой стороны, для поверхностей Мияоки–Яо имеет место равенство

$$3(2 + 2h^{2,0} - h^{1,1}) = 2 - 4h^{1,0} + 2h^{2,0} + h^{1,1}$$

и, таким образом,

$$h^{1,1} = h^{2,0} + h^{1,0} + 1. \tag{5.4}$$

В итоге для *максимальной вещественной поверхности Мияоки–Яо* выполняется равенство

$$\beta_1^{\mathbb{R}} = h^{1,1} + p_-^{1,1} + h^{1,0} + 2\nu. \tag{5.5}$$

Из этого равенства вытекает, что либо для всех максимальных вещественных поверхностей Мияоки–Яо с $h^{1,0} = 0$ выполнено равенство $p_-^{1,1} = \nu = 0$ (что было бы удивительно), либо существует (максимальная) вещественная поверхность Мияоки–Яо с $h^{1,0} = 0$ и $\beta_1^{\mathbb{R}} > h^{1,1}$ (что является более вероятным).

Следующие предложения показывают, что если максимальные вещественные поверхности Мияоки–Яо существуют, то их топология имеет сильные ограничения. Отметим также, что предложение 5.2 дает оценку снизу на $|e(F) - 1|$ для всех компонент F вещественной части максимальной вещественной поверхности Мияоки–Яо X, в то время как более традиционные результаты дают оценки сверху на $|e(X_{\mathbb{R}}) - 1|$, где $X_{\mathbb{R}}$ – множество всех вещественных точек многообразия X (см., например, обзор [3]).

Предложение 5.1. *Не существует максимальных вещественных поверхностей Мияоки–Яо с* $h^{2,0} \leqslant 3$.

Доказательство. Пусть X – максимальная вещественная поверхность Мияоки–Яо. Обозначим через k число связных компонент поверхности $X_{\mathbb{R}}$. Из (5.2) следует, что

$$2k - \beta_1^{\mathbb{R}} = 1 + p_+^{1,1} - p_-^{1,1}. \tag{5.6}$$

Подставляя $\beta_1^{\mathbb{R}}$ из (5.5) в (5.6) и учитывая (5.4), получаем

$$2k = h^{1,1} + h^{1,0} + 2\nu + p_+^{1,1} + 1. \tag{5.7}$$

По теореме 5.2 (так как универсальная накрывающая поверхности X является шаром [10], [14]) $\dim H_1(S;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \geqslant 3$ для любой связной компоненты S поверхности $X_{\mathbb{R}}$. Следовательно, $\beta_1^{\mathbb{R}} \geqslant 3k$ и из (5.2) и (5.7) следует неравенство

$$2p_-^{1,1} \geqslant h^{1,1} + h^{1,0} + 2\nu + 3p_+^{1,1} + 3,$$

которое эквивалентно неравенствам

$$h^{1,1} \geqslant h^{1,0} + 2\nu + 5p_+^{1,1} + 5, \qquad h^{2,0} \geqslant 2\nu + 5p_+^{1,1} + 4. \tag{5.8}$$

Следовательно, $h^{2,0} \geqslant 4$.

Предложение 5.2. *Пусть X – максимальная вещественная поверхность Мияоки–Яо. Тогда по крайней мере три связные компоненты поверхности $X_{\mathbb{R}}$ диффеоморфны сфере с тремя раздутыми точками.*

Доказательство. Обозначим через k_3 число связных компонент поверхности $X_{\mathbb{R}}$, диффеоморфных сфере с тремя раздутыми точками. Тогда по теореме 5.2

$$\dim H_1(S;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \geqslant 4$$

для всех других связных компонент S поверхности $X_{\mathbb{R}}$. Следовательно, $\beta_1^{\mathbb{R}} \geqslant 4k - k_3$. Из (5.5) и (5.7) следует, что в этом случае должно быть выполнено следующее неравенство:

$$h^{1,1} + h^{1,0} + 2\nu + p_-^{1,1} \geqslant 2h^{1,1} + 2h^{1,0} + 4\nu + 2p_+^{1,1} + 2 - k_3,$$

которое противоречит неравенству $h^{1,1} > p_-^{1,1}$, если $k_3 < 3$.

5.4. Поверхности Мияоки–Яо являются квазипростыми в следующем смысле: две вещественные структуры на этих поверхностях сопряжены с помощью автоморфизма тогда и только тогда, когда они сопряжены с помощью некоторого диффеоморфизма[2]. Это утверждение следует из сильной жесткости Мостова и из того, что изометрия компактного гиперболического риманова многообразия, действующая тождественно на фундаментальной группе, является тождественным отображением. (Отметим, что две вещественные структуры являются сопряженными с помощью элемента из Aut, как только они сопряжены с помощью элемента из Kl.)

[2]В общем случае вещественная квазипростота деформационного класса многообразий должна означать, что две вещественные структуры являются вещественно деформационно эквивалентными тогда и только тогда, когда они сопряжены при помощи некоторого диффеоморфизма.

Добавление при корректуре. Используя невещественную поверхность, построенную в § 4, либо фальшивые проективные плоскости (см. § 5), можно получить многообразия X произвольной размерности $\geqslant 3$, имеющие те же самые свойства, т.е. примеры таких X, что X и $\overline{X}$ принадлежат разным связным компонентам пространства модулей. Достаточно рассмотреть произведения этих поверхностей (чтобы получить примеры в произвольной четной размерности) или произведения этих поверхностей и кривой рода больше 1 (в случае нечетной размерности). Утверждение о компонентах пространства модулей будет следовать из хорошо известных свойств отображения Альбанезе и теоремы о жесткости Сиу.

Ф. Катанезе сообщил, что он также построил примеры поверхностей, для которых комплексное сопряжение переставляет компоненты в пространстве модулей этих поверхностей. Его поверхности накрываются бидиском $D \times D \subset \mathbb{C}^2$.

Список литературы

1. *Barth W., Peters C., Van de Ven A.* Compact Complex Surfaces. N. Y.: Springer-Verlag, 1984.
2. *Barthel G., Hirzebruch F., Höfer Th.* Geradenkonfigurationen und Algebraische Flöhen. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1987.
3. *Дегтярев А., Харламов В.* Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий // УМН. 2000. Т. 55. №4. С. 129–212.
4. *Grauert H., Remmert R.* Komplexe Raüme // Math. Ann. 1958. V. 136. P. 245–318.
5. *Hirzebruch F.* Arrangements of lines and algebraic surfaces // Arithmetics and Geometry. V. II. Prog. Math. № 36. Birkháuser, 1983. P. 113–140.
6. *Ishida M.-N.* The Irregularities of Hirzebruch's Examples of Surfaces of General Type with $c_1^2 = 3c_2$ // Math. Ann. 1983. V. 262. P. 407–420.
7. *Itenberg I.* Contre-exemples à la conjecture de Ragsdale // C. R. Acad. Sci. Paris. 1993. V. 317. P. 277–282.
8. *Kharlamov V.* Variétés de Fano réelles // Sém. Bourbaki. 2000. V. 872.
9. *Manetti M.* On the moduli space of diffeomorphic algebraic surfaces // Invent. Math. 2001. V. 143. P. 29–76.
10. *Miyaoka Y.* On algebraic surfaces with positive index // Classification of algebraic and analytic manifolds. Prog. Math. V. 39. Birkháuser, 1983. P. 281–301.
11. *Mumford D.* An algebraic surface with K ample, $K^2 = 9$, $p_g = q = 0$ // Amer. J. Math. 1979. V. 101. P. 233–244.
12. *Namba M.* Branched coverings and algebraic functions. N.Y.: Longman Scientific & Technical, 1987.
13. *Preissman A.* Quelques propriétés globales des espaces de Riemann // Comment. Math. Helv. 1943. V. 15. P. 175–216.
14. *Yau S-T.* Calaby's conjecture and some new results in algebraic geometry // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1977. V. 74. P. 1798–1799.

Поступило в редакцию
9.I.2001