ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2003, т. 241, с. 122–131

УДК 512.7

Обобщенная гипотеза Кизини[1]

©2003 г. Вик. С. Куликов[2]

Поступило в декабре 2002 г.

Сформулировано и рассмотрено некоторое обобщение (на случай нормальных поверхностей) гипотезы Кизини, утверждающей, что общее накрытие плоскости степени ≥ 5 однозначно определяется своей дискриминантной кривой. Справедливость обобщенной гипотезы проверена в двух случаях: если максимум степеней двух общих накрытий ≥ 12 либо если он ≤ 4. Найдены некоторые условия на число особых точек каспидальной кривой B, необходимые для существования общего накрытия данной степени с ветвлением в B. В частности, показано, что если B — чисто каспидальная кривая (т.е. все ее особые точки являются обыкновенными каспами), то B может быть дискриминантной кривой только общего накрытия степени ≤ 5.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть S — нормальная неприводимая проективная поверхность над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и $f\colon S \to \mathbb{P}^2$ — конечный морфизм на проективную плоскость $\mathbb{P}^2$. Два конечных морфизма (S_1, f_1), (S_2, f_2) эквивалентны, если существует изоморфизм $h\colon S_1 \to S_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ h$. Если степень $\deg f$ морфизма f больше 1, то f разветвлен над некоторой кривой $B \subset \mathbb{P}^2$. Фундаментальная группа $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B, p)$ дополнения к кривой B, $p \in \mathbb{P}^2 \setminus B$, действует на слое $f^{-1}(p)$, и тем самым определен гомоморфизм (*монодромия степени* $N = \deg f$) $\mu = \mu(f)\colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_N$ из π_1 в симметрическую группу $\mathfrak{S}_N$. Монодромия μ определяется морфизмом f однозначно с точностью до внутреннего автоморфизма симметрической группы. Согласно теореме Грауэрта–Реммерта [3] верно и обратное утверждение: гомоморфизм $\mu\colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_N$, образ которого $\operatorname{Im}\mu$ транзитивно действует на множестве из N элементов, является монодромией некоторого конечного морфизма $f\colon S \to \mathbb{P}^2$ степени $\deg f = N$.

Зафиксируем точку $p \in \mathbb{P}^2 \setminus B$. Выберем произвольную точку $x \in B \setminus \operatorname{Sing} B$ и рассмотрим проективную прямую $\Pi = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$, пересекающую B трансверсально в точке x. Пусть $\gamma \subset \Pi$ — окружность малого радиуса с центром в x. Выбор ориентации на $\mathbb{P}^2$ определяет ориентацию на γ. Пусть Γ — петля, состоящая из пути L в $\mathbb{P}^2 \setminus B$, соединяющего точку p с некоторой точкой $q \in \gamma$, обхода вдоль γ в положительном направлении с началом и концом в q и возврата в p вдоль L в обратном направлении. Такие петли Γ (и соответствующие элементы в π_1) мы будем называть *геометрическими образующими* фундаментальной группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B, p)$. Хорошо известно, что π_1 порождается геометрическими образующими и что если B — неприводимая кривая, то любые две геометрические образующие сопряжены в π_1. Конечный морфизм $f\colon S \to \mathbb{P}^2$, $\deg f = N$, разветвленный над B, называется *общим накрытием плоскости с дискриминантной кривой* B, если монодромия μ морфизма f обладает следующим свойством: μ является эпиморфизмом, причем образ $\mu(\Gamma)$ каждой геометрической образующей Γ является транспозицией в $\mathfrak{S}_N$. Отметим, что если B — дискриминантная кривая некоторого общего накрытия, то ее степень является четным числом, и что каждая кривая B четной степени является дискриминантной кривой по крайней мере одного общего накрытия: двулистного накрытия плоскости, разветвленного вдоль этой кривой. В общем

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00786) и INTAS (проекты 00-0259 и 00-0269).

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: kulikov@mi.ras.ru

случае прообраз $f^*(B)$ дискриминантной кривой B общего накрытия f распадается в сумму $f^*(B) = 2R + C$, где кривая $R \subset S$ является кривой ветвления морфизма f с индексом ветвления, равным 2, и C — некоторая приведенная кривая, вдоль которой морфизм f не разветвлен. Ограничение $f_{|R}$ на R является морфизмом степени 1.

Ниже мы будем предполагать, что B — неприводимая каспидальная кривая, т.е. кривая, все особые точки которой суть каспы (особые точки типа A_2 с локальным уравнением $y^2 = x^3$) и ноуды (особые точки типа A_1 с локальным уравнением $y^2 = x^2$). Обозначим через d степень кривой B, и пусть c — число ее каспов и n — число ноудов.

Для каждой особой точки s_i кривой B выберем окрестность $U_i \subset \mathbb{P}^2$ такую, что $B \cap U_i$ задается (в локальных координатах в U_i) уравнением $y^2 = x^3$, если s_i — касп, и $y^2 = x^2$, если s_i — ноуд. Пусть p_i — произвольная точка в $U_i \setminus B$. Известно, что если s_i — касп, то $\pi_1(U_i \setminus B, p_i)$ изоморфна группе кос Br_3 из трех нитей и порождена двумя геометрическими образующими (скажем, a и b), которые удовлетворяют следующему соотношению:

$$aba = bab.$$

Если s_i — ноуд, то $\pi_1(U_i \setminus B, p_i)$ изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, порожденной двумя коммутирующими геометрическими образующими.

Выберем гладкие пути γ_i в $\mathbb{P}^2 \setminus B$, соединяющие точки p_i с точкой p. Этот выбор определяет гомоморфизмы $\psi_i\colon \pi_1(U_i \setminus B, p_i) \to \pi_1$. Назовем образ $\psi_i(\pi_1(U_i \setminus B, p_i)) = G_i$ *локальной фундаментальной группой* особой точки s_i.

Пусть $f\colon S \to \mathbb{P}^2$ — общее накрытие с каспидальной дискриминантной кривой B, определяемое монодромией $\mu\colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_N$. Поверхность S может иметь особенности только в точках кривой ветвления R, лежащих над особыми точками кривой B. Более точно, S имеет особую точку над точкой $s_i \in \operatorname{Sing} B$ тогда и только тогда, когда образ $\mu(G_i)$ является подгруппой второго порядка в $\mathfrak{S}_N$, порожденной некоторой транспозицией (см., например, [6]). Точки $s_i \in \operatorname{Sing} B$, для которых образ $\mu(G_i)$ является подгруппой второго порядка в $\mathfrak{S}_N$, будем называть *особыми точками монодромии* μ и через $\operatorname{Sing}\mu \subset \operatorname{Sing} B$ будем обозначать множество ее особых точек. Положим $n = n_s + n_p$ и $c = c_s + c_p$, где n_s (соответственно c_s) — число особых ноудов (соответственно каспов) монодромии μ.

Как известно, если $\varphi\colon \mathfrak{S}_{N_1} \to \mathfrak{S}_{N_2}$ — эпиморфизм симметрических групп, $N_1 \neq 4$, то либо φ является изоморфизмом, либо $N_2 = 2$ и $\ker\varphi = \mathfrak{A}_{N_1}$ — знакопеременная группа. Если $N_1 = 4$, то существует еще одна возможность $\varphi = \kappa\colon \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ с ядром $\ker\kappa = K_4$, где K_4 — четверная группа Клейна,

$$K_4 = \{e,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}.$$

Пусть $\mu_i\colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_{N_i}$, $i = 1,2$, — две монодромии двух общих накрытий плоскости f_1 и f_2. Скажем, что пара (μ_1, μ_2) (соответственно (f_1, f_2)) является *исключительной парой*, если либо $\deg\mu_1 = \deg\mu_2 = 4$ и образ гомоморфизма $\mu_1 \times \mu_2\colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4$ совпадает с

$$G = \{(g_1, g_2) \in \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4 \mid g_1 g_2^{-1} \in K_4\},$$

либо (с точностью до нумерации) $\deg\mu_1 = 4$, $\deg\mu_2 = 3$ и $\mu_2 = \kappa \circ \mu_1$.

Обобщенная гипотеза Кизини. *Пусть $f_i\colon S_i \to \mathbb{P}^2$, $i = 1,2$, — два общих накрытия плоскости с одной и той же дискриминантной каспидальной кривой B. Предположим, что $\operatorname{Sing}\mu(f_1) = \operatorname{Sing}\mu(f_2)$. Тогда либо f_1 и f_2 эквивалентны, либо (f_1, f_2) образуют исключительную пару.*

Данная гипотеза является обобщением классической гипотезы Кизини (см. [2]), утверждающей, что если $f\colon S \to \mathbb{P}^2$ — общее накрытие плоскости степени $\deg f \geq 5$ с каспидальной дискриминантной кривой и $\operatorname{Sing}\mu(f) = \varnothing$ (т.е. S — неособая поверхность), то f однозначно определяется своей дискриминантной кривой.

В [6] было показано, что классическая гипотеза Кизини выполнена для дискриминантной кривой B общего накрытия $f\colon S \to \mathbb{P}^2$ степени

$$\deg f > \frac{2(3d+2g-2)}{(3d+2g-2)-c}, \tag{1}$$

где g — геометрический род кривой B, и, кроме того, в [8] было замечено, что из неравенства Богомолова–Мияоки–Яу непосредственно следует, что правая часть неравенства (1) всегда принимает значения меньше 12, т.е. классическая гипотеза Кизини верна для дискриминантных кривых общих накрытий плоскости степени больше 11.

Если B — двойственная кривая к гладкой кубике, т.е. $d = \deg B = 6$ и $c = c(B) = 9$, то, используя приведенное в [10] копредставление группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$, можно показать, что B является дискриминантной кривой восьми неэквивалентных общих накрытий, три из которых имеют степень 4, четыре имеют степень 3 и еще одно степень 2. Множества особых точек монодромий накрытий степени 4 и одного из накрытий степени 3 пусты, каждые два из этих накрытий образуют исключительную пару. Ни одно из остальных трех накрытий степени 3, ни накрытие степени 2 не являются компонентами исключительных пар накрытий. Этот пример, а также существование двулистных накрытий плоскости с ветвлением в кривых четной степени показывают, что условие совпадения множеств особых точек монодромий в обобщенной гипотезе Кизини является необходимым для справедливости последней.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Обобщенная гипотеза Кизини выполнена для общих накрытий* $f_i\colon S_i \to \mathbb{P}^2$, $i = 1, 2$, *если либо* $\max(\deg f_1, \deg f_2) \geq 12$, *либо* $\max(\deg f_1, \deg f_2) \leq 4$.

Доказательству теоремы 1 посвящен раздел 1. В разд. 2 исследован случай чисто каспидальной кривой (т.е. все ее особые точки являются обыкновенными каспами). Доказывается, что если чисто каспидальная кривая является дискриминантной кривой общего накрытия плоскости, то степень этого накрытия не превосходит 5.

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

1.1. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, напомним некоторые известные свойства общих накрытий. Пусть $f\colon S \to \mathbb{P}^2$, $\deg f = N$, — общее накрытие плоскости с дискриминантной каспидальной кривой B и монодромией $\mu\colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_N$, $f^*(B) = 2R + C$. Монодромия μ, кроме накрытия f, определяет также накрытие Галуа $g\colon \widetilde{S} \to \mathbb{P}^2$ степени $\deg g = N!$, разветвленное над B, с группой Галуа $\operatorname{Gal}(g) = \mathfrak{S}_N$. Морфизм g может быть разложен в композицию $g = f \circ h$, где $h\colon \widetilde{S} \to S$ — накрытие Галуа, разветвленное над C, с группой Галуа $\operatorname{Gal}(h) \simeq \mathfrak{S}_{N-1}$.

Из определения общего накрытия следует, что прообраз $g^*(B)$ может быть представлен в виде

$$g^*(B) = 2\sum_{1\leq i<j\leq N} B_{(i,j)}$$

так, что каждая кривая $B_{(i,j)}$ является множеством неподвижных точек транспозиции $(i,j) \in \mathfrak{S}_N$, переставляющей i и j, и $\mathfrak{S}_N$ действует на множестве кривых $\{B_{(i,j)}\}$ (положим $B_{(i,j)} = B_{(j,i)}$) по правилу

$$\sigma(B_{(i,j)}) = B_{(\sigma(i),\sigma(j))}, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_N.$$

Поверхность $\widetilde{S}$ имеет особые точки (см. [7]) только над особыми точками $s_i \in \operatorname{Sing}\mu$, и над каждой $s_i \in \operatorname{Sing}\mu$ лежит ровно $N!/2$ особых точек соответственно типа A_1, если s_i —

нодальная точка кривой B, и типа A_2, если s_i является каспом. Пусть $\nu\colon \overline{S} \to \widetilde{S}$ — минимальное разрешение особых точек поверхности $\widetilde{S}$. Морфизмы g и ν включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \overline{S} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & \widetilde{S} \arrow[d, "g"] \\ \widetilde{\mathbb{P}}^2 \arrow[r, "\tau"'] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

в которой τ — композиция раздутий точек $s_i \in \operatorname{Sing}\mu$, а $\overline{g}$ — накрытие Галуа с группой Галуа $\operatorname{Gal}(\overline{g}) \simeq \operatorname{Gal}(g)$, разветвленное лишь в собственном прообразе $\tau^{-1}(B)$ кривой B. Обозначим через $\overline{B}$ объединение собственного прообраза $\tau^{-1}(B)$ кривой B со всеми неприводимыми компонентами исключительного дивизора $\tau^{-1}(\operatorname{Sing}\mu)$ и через $\overline{B}_{(i,j)}$ объединение собственного прообраза $\nu^{-1}(B_{(i,j)})$ кривой $B_{(i,j)}$ со всеми неприводимыми компонентами исключительного дивизора $\nu^{-1}(\operatorname{Sing} S) = (\tau\circ\overline{g})^{-1}(\operatorname{Sing}\mu)$, имеющими непустое пересечение с $\nu^{-1}(B_{(i,j)})$. Имеем

$$(f\circ\nu)^*(B) = 2\sum_{1\le i<j\le N} \overline{B}_{(i,j)},$$

и кривые $\overline{B}_{(i_1,j_1)}$, $\overline{B}_{(i_2,j_2)}$ с $(i_1,j_1)\ne(i_2,j_2)$ могут пересекаться друг с другом только в точках, лежащих над точками из $\operatorname{Sing} B \setminus \operatorname{Sing}\mu$.

Морфизм g может быть также разложен в композицию $g = g_d \circ g_a$, где $g_d\colon V_2 \to \mathbb{P}^2$ — двулистное накрытие плоскости, разветвленное вдоль B, а g_a — фактор-отображение относительно действия знакопеременной группы $\mathfrak{A}_N \subset \mathfrak{S}_N$, действующей на $\widetilde{S}$. Отметим, что g_a разветвлен только над точками из $g_d^{-1}(\operatorname{Sing} B \setminus \operatorname{Sing}\mu)$.

1.2. В случае $N=2$ имеем $f = g = g_d$ и $\operatorname{Sing}\mu = \operatorname{Sing} B$, множество кривых $\overline{B}_{(i,j)}$ сводится к единственной кривой $\overline{B}_{(1,2)}$ и неособая поверхность $\overline{S}$ является деформацией (см. [1]) двулистного накрытия плоскости, разветвленного вдоль неособой плоской кривой той же степени, что и B. Следовательно, $\overline{S}$ является односвязной поверхностью.

Отсюда, в частности, следует, что в случае $N>2$ множество $\operatorname{Sing}\mu$ не может совпадать с $\operatorname{Sing} B$. Действительно, если бы $\operatorname{Sing}\mu = \operatorname{Sing} B$, то, разрешая особые точки поверхностей $\widetilde{S}$ и V_2, морфизм g_a индуцировал бы неразветвленный конечный морфизм $\overline{g}_a\colon \overline{S} \to \overline{V_2}$ степени >1, где $\overline{V_2}$ — разрешение особенностей поверхности V_2. Но это невозможно, так как $\overline{V_2}$ является односвязной поверхностью.

1.3. Если $N=3$, то $\overline{g}\colon \overline{S} \to \overline{\mathbb{P}}^2$ является шестилистным накрытием. Полный прообраз

$$\overline{g}^*(B) = 2(\overline{B}_{(1,2)} + \overline{B}_{(1,3)} + \overline{B}_{(2,3)})$$

состоит из трех кривых, пересекающихся друг с другом трансверсально (см. [7]) в точках из $\overline{g}^{-1}(\operatorname{Sing} B\setminus\operatorname{Sing}\mu)$, и ограничение $\overline{g}_{|g^{-1}(\operatorname{Sing} B\setminus\operatorname{Sing}\mu)}\colon \overline{g}^{-1}(\operatorname{Sing} B\setminus\operatorname{Sing}\mu) \to \operatorname{Sing} B\setminus\operatorname{Sing}\mu$ накрытия $\overline{g}$ на $\overline{g}^{-1}(\operatorname{Sing} B\setminus\operatorname{Sing}\mu)$ является биекцией. Так как число точек в $\operatorname{Sing} B\setminus\operatorname{Sing}\mu$ равно c_p (множеству $\operatorname{Sing}\mu$ принадлежат все ноуды кривой B), $(\overline{g}^*(B), \overline{g}^*(B))_{\overline{S}} = 6d^2$, где $d = \deg B$, а $\operatorname{Gal}(\overline{g}) = \mathfrak{S}_3$ действует транзитивно на множестве кривых $\overline{B}_{(i,j)}$, то

$$(\overline{B}_{(i,j)}, \overline{B}_{(i,j)})_{\overline{S}} = \frac{d^2}{2} - 2c_p$$

для всех $(i,j)\in\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ и

$$(\overline{B}_{(i_1,j_1)}, \overline{B}_{(i_2,j_2)})_{\overline{S}} = c_p$$

для $(i_1,j_1)\ne(i_2,j_2)$.

Лемма 1. *Для монодромии μ общего накрытия плоскости степени* 3 *число* $c_p \geq \frac{d^2}{6}$.

Доказательство. Если $c_p < \frac{d^2}{6}$, то $(\overline{B}^2_{(i,j)})_{\overline{S}} = \frac{d^2}{2} - 2c_p > 0$ и определитель

$$\begin{vmatrix} (\overline{B}^2_{(1,2)})_{\overline{S}} & (\overline{B}_{(1,2)}, \overline{B}_{(2,3)})_{\overline{S}} \\ (\overline{B}_{(2,3)}, \overline{B}_{(1,2)})_{\overline{S}} & (\overline{B}^2_{(2,3)})_{\overline{S}} \end{vmatrix} = \left(\frac{d^2}{2} - 2c_p\right)^2 - c_p^2 = \left(\frac{d^2}{2} - c_p\right)\left(\frac{d^2}{2} - 3c_p\right) > 0,$$

что противоречит теореме Ходжа об индексе.

1.4. Предположим, что существуют два неэквивалентных общих морфизма (S_1, f_1) и (S_2, f_2), $\deg f_1 = N_1$, $\deg f_2 = N_2$, с одной и той же дискриминантной каспидальной кривой B и совпадающими множествами особых точек монодромий $\operatorname{Sing}\mu(f_1) = \operatorname{Sing}\mu(f_2)$. Из доказательства леммы 10 в [6] следует, что для пары (f_1, f_2) неверна обобщенная гипотеза Кизини, только если индуцированный монодромиями $\mu_1 = \mu(f_1)$ и $\mu_2 = \mu(f_2)$ гомоморфизм $\mu_1 \times \mu_2 \colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2}$ является либо эпиморфизмом, либо гомоморфизмом на подгруппу индекса 2. Отметим сразу, что $\mu_1 \times \mu_2$ не может быть эпиморфизмом, так как иначе существовал бы эпиморфизм из π_1 на $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2})/(\mathfrak{A}_{N_1} \times \mathfrak{A}_{N_2})$. С другой стороны, $\pi_1/\pi_1' \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, так как B — неприводимая кривая степени d, где π_1' — коммутант группы π_1.

1.5. Рассмотрим вначале случай $N_1 = N_2 = 3$. Как и выше, эпиморфизмы $\mu_i \colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_3$, $i = 1, 2$, кроме общих накрытий $f_i \colon S_i \to \mathbb{P}^2$, определяют также накрытия Галуа $\widetilde{g}_i \colon \widetilde{S}_i \to \mathbb{P}^2$, $\deg \widetilde{g}_i = 6$, и $\nu_i \colon \overline{S}_i \to \widetilde{S}_i$ — их разрешения особенностей. Положим

$$\overline{g}_i^*(B) = 2(\overline{B}_{i,(1,2)} + \overline{B}_{i,(1,3)} + \overline{B}_{i,(2,3)}).$$

Рассмотрим нормализацию $S_{1,2}$ расслоенного произведения $\overline{S}_1 \times_{\overline{\mathbb{P}}^2} \overline{S}_2$. Пусть $h_i \colon S_{1,2} \to \overline{S}_i$ — естественные морфизмы, индуцированные проекциями расслоенного произведения на сомножители, $i = 1, 2$, и $g_{1,2} = \overline{g}_i \circ h_i \colon S_{1,2} \to \overline{\mathbb{P}}^2$ — их композиции с $\overline{g}_i$. Если f_1 и f_2 — неэквивалентные накрытия, то образ $G = \operatorname{Im}(\mu_1 \times \mu_2)$ гомоморфизма $\mu_1 \times \mu_2 \colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ является подгруппой индекса 2 в $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$. Согласно предложению 2 в [6] в этом случае поверхность $S_{1,2}$ неприводима и легко видеть, что морфизм $g_{1,2}$ является накрытием Галуа с группой Галуа $\operatorname{Gal}(g_{1,2}) = G$, а каждое из h_i также является накрытием Галуа с $\operatorname{Gal}(h_i) = H_i \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, где $H_i = \ker p_i$ — ядро ограничения на G проекции $p_i \colon \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_3$ на i-й, $i = 1, 2$, сомножитель. Применяя результаты из [7] о локальном поведении расслоенных произведений общих накрытий, получаем, что $S_{1,2}$ является неособой поверхностью, а морфизмы h_i являются неразветвленными накрытиями, $\deg h_i = 3$.

Прообраз $g_{1,2}^{-1}(s)$ каждой точки из $\operatorname{Sing} B \setminus \operatorname{Sing}\mu$ состоит из трех точек, на которых циклические группы H_i, $i = 1, 2$, действуют транзитивно. Выбрав образующую a_i циклической группы H_i, получаем, что либо $g_1 = a_1 a_2$, либо $g_2 = a_1 a_2^2$ оставляет неподвижными точки из $g_{1,2}^{-1}(s)$. Отметим, что если точка из $g_{1,2}^{-1}(s)$ неподвижна при действии элемента $g_i \in \operatorname{Gal}(g_{1,2})$ третьего порядка, то ее образ в $S_{1,2}/(g_i)$ при отображении факторизации $S_{1,2} \to S_{1,2}/(g_i)$ является особой точкой поверхности $S_{1,2}/(g_i)$ типа A_2. Обозначим c_p' (соответственно c_p'') число точек из $\operatorname{Sing} B \setminus \operatorname{Sing}\mu$, для которых g_1 (соответственно g_2) тривиально действует на $g_{1,2}^{-1}(s)$. Имеем $c_p = c_p' + c_p''$. Не ограничивая общности (заменив g_1 на g_2), можем считать, что

$$2c_p' \geq c_p.$$

Композиция $\overline{\mu} = \phi \circ (\mu_1 \times \mu_2)$ гомоморфизмов $\mu_1 \times \mu_2 \colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ и $\phi \colon G \to G/(g_1) \simeq \mathfrak{S}_3$ является монодромией накрытия Галуа $S_{1,2}/(g_1) \to \mathbb{P}^2$, соответствующего некоторому общему накрытию плоскости. Имеем

$$c_p(\overline{\mu}) = c_p'' < \frac{c_p}{2} \leq \frac{c}{2} < \frac{d^2}{6},$$

так как $d^2 > 3c$ для плоской кривой B степени d. Однако неравенство $c_p(\overline{\mu}) < \frac{d^2}{6}$ противоречит лемме 1, следовательно, не существует двух неэквивалентных монодромий μ_i общих трехлистных накрытий плоскости с $\operatorname{Sing}\mu_1 = \operatorname{Sing}\mu_2$.

1.6. Предположим теперь, что существуют два неэквивалентных общих накрытия плоскости (S_1, f_1) и (S_2, f_2), $\deg f_i = N_i$, $4 \geq N_i \geq 3$, с одной и той же дискриминантной каспидальной кривой B и совпадающими множествами особых точек монодромий $\operatorname{Sing}\mu_1 = \operatorname{Sing}\mu_2$, $\mu_i = \mu(f_i)$, $i = 1, 2$. Положим $\overline{\mu}_i = \mu_i$, если $\deg\mu_i = 3$, и $\overline{\mu}_i = \kappa \circ \mu_i$, если $\deg\mu_i = 4$, где κ — эпиморфизм из $\mathfrak{S}_4$ в $\mathfrak{S}_3$, ядром которого является четверная группа Клейна K_4. Пусть $\overline{f}_i \colon \overline{S}_i \to \mathbb{P}^2$ — общее накрытие, соответствующее эпиморфизму $\overline{\mu}_i$. Непосредственно проверяется, что $\operatorname{Sing}\overline{\mu}_i$ совпадает с объединением $\operatorname{Sing}\mu_i$ и множества ноудов кривой B. Следовательно, если $\operatorname{Sing}\mu_1 = \operatorname{Sing}\mu_2$, то $\operatorname{Sing}\overline{\mu}_1 = \operatorname{Sing}\overline{\mu}_2$, и если $\mu_1 \times \mu_2 \colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_{N_1} \times \mathfrak{S}_{N_2}$ было гомоморфизмом на подгруппу индекса 2, то $\overline{\mu}_1 \times \overline{\mu}_2 \colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ также является гомоморфизмом на подгруппу индекса 2, что невозможно согласно рассмотренному выше случаю. Следовательно, либо (f_1, f_2) является исключительной парой, либо f_1 и f_2 эквивалентны.

1.7. Применяя теорему 0.2 из [7] к двум неэквивалентным общим накрытиям плоскости $f_i \colon S_i \to \mathbb{P}^2$, $i = 1, 2$, $\deg f_i = N_i$, с одной и той же дискриминантной кривой B и совпадающими множествами особых точек монодромий, имеем

$$\max(\deg f_1, \deg f_2) \leq 2\frac{d^2 - 2n_p - 2c_p}{d^2 - 2n_p - 3c_p}. \tag{2}$$

Кроме того, в [7] были вычислены основные инварианты минимальных десингуляризаций $\overline{S}_i$ поверхностей S_i. В частности, имеют место следующие формулы: квадрат самопересечения канонического класса поверхности $\overline{S}_i$ равен

$$K^2_{\overline{S}_i} = 9N_i + \frac{d(d-3)}{2} - n_p - c_p, \tag{3}$$

а ее эйлерова характеристика

$$e(\overline{S}_i) = 3N_i + d(d-3) - 2n_p - 3c_p. \tag{4}$$

Как и в [8], формулы (3) и (4) позволяют оценить сверху значения правой части неравенства (2). Действительно, если $\overline{S}_i$ — иррегулярная линейчатая поверхность, то $K^2_{\overline{S}_i} \leq 2e(\overline{S}_i)$. В этом случае из (3) и (4) получаем неравенство

$$9N_i + \frac{d(d-3)}{2} - n_p - c_p \leq 6N_i + 2d(d-3) - 4n_p - 6c_p,$$

которое равносильно неравенству

$$6N_i + 9d \leq 3d^2 - 6n_p - 10c_p.$$

Следовательно,

$$c_p < 3(d^2 - 2n_p - 3c_p),$$

так как $d = \deg B > 0$ и $N_i = \deg f_i > 0$. Отсюда следует, что если $\overline{S}_i$ — иррегулярная линейчатая поверхность, то

$$2\frac{d^2 - 2n_p - 2c_p}{d^2 - 2n_p - 3c_p} = 2 + \frac{2c_p}{d^2 - 2n_p - 3c_p} < 8. \tag{5}$$

Если же $\overline{S}_i$ не является иррегулярной линейчатой поверхностью, то согласно неравенству Богомолова–Мияоки–Яу

$$K^2_{\overline{S}_i} \le 3e(\overline{S}_i).$$

В этом случае из (3) и (4) получаем неравенство

$$\frac{d(d-3)}{2} - n_p - c_p \le 3d(d-3) - 6n_p - 9c_p,$$

которое равносильно неравенству

$$15d \le 5d^2 - 10n_p - 16c_p.$$

Следовательно,

$$c_p < 5(d^2 - 2n_p - 3c_p).$$

В этом случае имеем

$$2\frac{d^2 - 2n_p - 2c_p}{d^2 - 2n_p - 3c_p} = 2 + \frac{2c_p}{d^2 - 2n_p - 3c_p} < 12. \tag{6}$$

Из неравенств (2), (5) и (6) следует, что если

$$\max(\deg f_1, \deg f_2) \ge 12,$$

то f_1 и f_2 являются эквивалентными накрытиями.

2. СЛУЧАЙ ЧИСТО КАСПИДАЛЬНОЙ ДИСКРИМИНАНТНОЙ КРИВОЙ

2.1. Пусть $f\colon S \to \mathbb{P}^2$, $\deg f = N$, — общее накрытие плоскости с дискриминантной каспидальной кривой B и монодромией $\mu\colon \pi_1 \to \mathfrak{S}_N$, $f^*(B) = 2R + C$. Поверхность S является особой поверхностью, если $\operatorname{Sing}\mu \ne \varnothing$. Над каждой точкой $s_i \in \operatorname{Sing}\mu$ лежит ровно одна особая точка $\overline{s}_i \in R$ типа A_1, если s_i — ноуд, и типа A_2, если s_i — касп. Пусть $\nu\colon X \to S$ — минимальное разрешение особенностей поверхности S, $\nu^{-1}(s_i) = E_i$, где E_i — неприводимая “-2”-кривая (т.е. неособая рациональная кривая с квадратом самопересечения, равным -2), если $\overline{s}_i$ является ноудом, и $E_i = E_{i,1} + E_{i,2}$ — две трансверсально пересекающиеся “-2”-кривые, если $\overline{s}_i$ — касп. Обозначим через $\overline{R} = \nu^{-1}(R)$ собственный прообраз кривой ветвления R и через $L = (f\circ\nu)^{-1}(\mathbb{P}^1)$ прообраз прямой $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$, $Z = \sum_{s_i \in \operatorname{Sing}\mu} E_i$ и $\widetilde{R} = \overline{R} + Z$. Согласно вычислениям в [7] имеем

$$L^2 = N, \qquad L\cdot\overline{R} = d, \qquad L\cdot Z = 0, \tag{7}$$

$$Z^2 = -2(n_s + c_s), \qquad \overline{R}\cdot Z = 2(n_s + c_s), \qquad (\widetilde{R})^2 = \frac{d^2}{2} - (n_p + c_p). \tag{8}$$

Применяя теорему Ходжа об индексе к L и $\widetilde{R}$, получаем неравенство

$$N\left(\frac{d^2}{2} - n_p - c_p\right) - d^2 \le 0. \tag{9}$$

Преобразовывая левую часть неравенства (9)

$$N\left(\frac{d^2}{2} - n_p - c_p\right) - d^2 = \frac{1}{2}\Big[(N-6)(d^2 - d - 2n - 3c + d + 2n_s + 3c_s + c_p) + \\ + 4(d^2 - d - 2n - 3c + 2n_s + 3c_s + d) - 4n_p\Big]$$

и обозначая через $\delta = d^2 - d - 2n - 3c$ степень двойственной к B кривой, получаем неравенство

$$(N-6)(\delta + d + 2n_s + 3c_s + c_p) + 4(\delta + d + 2n_s + 3c_s) \leq 4n_p. \tag{10}$$

Из неравенства (10) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Степень общего накрытия плоскости* $f\colon S \to \mathbb{P}^2$ *с чисто каспидальной дискриминантной кривой* B *не превосходит пяти,* $\deg f \leq 5$.

Доказательство. В случае чисто каспидальной кривой имеем $n_p = n_s = 0$, $n = n_s + n_p = 0$ и неравенство (10) принимает следующий вид:

$$(N-6)(\delta + d + 3c_s + c_p) + 4(\delta + d + 3c_s) \leq 0. \tag{11}$$

Отсюда вытекает, что $\deg f = N \leq 5$, так как $d, \delta > 0$ и $c_p, c_s \geq 0$, $c = c_p + c_s \geq 0$.

2.2. Если $f\colon S \to \mathbb{P}^2$ — общее накрытие плоскости степени 5 с чисто каспидальной дискриминантной кривой B, то неравенство (11) принимает следующий вид:

$$3(\delta + d + 3c_s) - c_p \leq 0,$$

т.е.

$$3d^2 \leq 10c_p. \tag{12}$$

Обозначим через $\gamma(B) = \frac{c}{d^2}$ относительное число каспов кривой B и положим

$$\gamma = \sup \gamma(B),$$

где супремум взят по всем плоским кривым. Как известно [4],

$$\gamma < \frac{5}{16}\,. \tag{13}$$

Из (12) следует, что если чисто каспидальная кривая B является дискриминантной кривой общего накрытия плоскости степени 5, то

$$\gamma(B) \geq \frac{3}{10}\,. \tag{14}$$

В [5] была получена оценка снизу для γ, а именно $\gamma \geq \frac{9}{32}$, позднее в [9] была анонсирована более сильная оценка

$$\gamma \geq \frac{1019}{216 \cdot 16}\,, \tag{15}$$

однако мне не удалось полностью реконструировать доказательство этой оценки. Тем не менее, применяя предложенный в [5] (и, вероятно, в [9]) метод, можно получить (см. п. 2.3) следующую оценку:

$$\gamma \geq \frac{283}{60 \cdot 16}\,, \tag{16}$$

которая также улучшает оценку, полученную в [5]. К настоящему моменту мне не известно более хорошей оценки снизу для γ. Сравнение (14) с (13) и (16) (и даже с (15)) позволяет надеяться, что верно следующее утверждение.

Гипотеза 1. *Не существует общего накрытия плоскости степени* 5 *с чисто каспидальной дискриминантной кривой.*

2.3. Для доказательства неравенства (16) напомним вначале примененный в [5] (и, возможно, в [9]) метод получения оценки снизу супремума относительных чисел каспов. Начиная с некоторой каспидальной кривой B_1 строится последовательность каспидальных кривых B_m, $m \in \mathbb{N}$, $B_{m+1} = h_m^{-1}(B_m)$, где $h = h_m\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ — девятилистное накрытие Галуа плоскости, заданное уравнениями $y_i = x_i^3$, $i = 1, 2, 3$, оно разветвлено вдоль прямых $L_i = \{y_i = 0\}$ (назовем треугольник, образованный прямыми L_i, *фундаментальным треугольником накрытия* h). Пусть мы имеем каспидальную кривую $B_m \subset \mathbb{P}^2$ степени $\deg B_m = d_m$ с c_m каспами, и пусть три прямые $L_{m,1}$, $L_{m,2}$ и $L_{m,3}$, образующие треугольник, выбраны так, что B_m не проходит через вершины треугольника, прямые $L_{m,i}$ касаются B_m с кратностью 2 в $t_{m,i}$ точках и пересекают ее трансверсально в остальных $d_m - 2t_{m,i}$ точках. Выбрав в $\mathbb{P}^2$ однородные координаты $(y_0 : y_1 : y_2)$ так, что $y_i = 0$ является уравнением прямой $L_{m,i}$, рассмотрим упоминавшееся выше девятилистное накрытие плоскости $h_m\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ с фундаментальным треугольником, образованным прямыми $L_{m,i}$. Легко видеть, что прообраз $B_{m+1} = h^{-1}(B_m)$ кривой B_m является кривой степени $d_{m+1} = 3d_m$ и имеет $c_{m+1} = 9c_m + 3(t_{m,1} + t_{m,2} + t_{m,3})$ каспов. Следовательно, относительное число каспов увеличилось на

$$\frac{t_{m,1} + t_{m,2} + t_{m,3}}{3d_m^2}\,.$$

Чтобы получить оценку из [5], надо взять кривую шестой степени с девятью каспами в качестве B_1 и на каждом шаге выбирать три простые касательные к полученной на предыдущем шаге кривой B_m в качестве фундаментального треугольника накрытия плоскости h_m.

Для получения оценки (16) заметим, что если прямая E проходит через вершину фундаментального треугольника накрытия h и не является стороной этого треугольника, то прообраз $h^{-1}(E)$ состоит из трех прямых $\widetilde{E}_i$, $i = 1, 2, 3$, и ограничение $h_{|\widetilde{E}_i}$ накрытия h на $\widetilde{E}_i$ является трехлистным накрытием. Следовательно, если $E = E_m$ была t_m-касательной к кривой B_m (касалась кривой B_m в t_m точках), то каждая из $\widetilde{E}_{m,i}$ будет уже $3t$-касательной к кривой B_{m+1}. Поэтому, строя последовательность кривых B_n, на $(m+1)$-м шаге мы будем брать $L_{m+1,1} = \widetilde{E}_{m,1}$ и $L_{m+1,2} = \widetilde{E}_{m,2}$ в качестве двух из трех сторон фундаментального треугольника и, кроме того, обозначим $E_{m+1} = \widetilde{E}_{m,3}$, которая на следующем шаге даст новые две стороны фундаментального треугольника.

Чтобы получить оценку (16), возьмем в качестве B_0 кривую четвертой степени с тремя каспами и пусть $L_{0,1}, L_{0,2}, E_0$ — три касательные к B_0, лежащие в одном пучке прямых (двойственная к B_0 кривая — это кубика с одним ноудом), и $L_{0,3}$ — бикасательная к B_0. После нулевого шага получим кривую $B_1 = h_0^{-1}(B_0)$ степени $d_1 = 12$ с $c_1 = 39$ каспами. На первом шаге ($m = 1$) и на каждом нечетном шаге выбираем на $L_{m,1}$ такую точку, что через эту точку проходят по крайней мере еще две простые касательные к B_m. Одну из них выбираем в качестве третьей стороны фундаментального треугольника накрытия h_m, а один из трех прообразов другой касательной — в качестве третьей стороны фундаментального треугольника накрытия h_{m+1}. (В [9], по всей видимости, утверждается, что на каждом шаге начиная со второго можно найти 3-касательную в качестве третьей стороны фундаментального треугольника очередного накрытия. Если это верно, то получается оценка (15).)

Имеем

$$t_{m,1} + t_{m,2} + t_{m,3} = 2 \cdot 3^m + \delta_m,$$

где $\delta_m = 1$, если m — нечетное число, и $\delta_m = 3$, если m — четное число, $m \geq 1$.

Следовательно, кривая B_{2n+1} является кривой степени $d_{2n+1} = 3^{2n+1} \cdot 4$ и имеет c_{2n+1}

каспов, где

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= 9^{2n} \cdot 39 + 9^{2n-1} \cdot 3(2 \cdot 3 + 1) + 9^{2n-2} \cdot 3(2 \cdot 3^2 + 3) + \ldots + 9 \cdot 3(2 \cdot 3^{2n-1} + 1) + \\ &\quad + 3(2 \cdot 3^{2n} + 3) = \\ &= 9^{2n} \cdot 39 + 2 \sum_{i=0}^{2n-1} 9^i \cdot 3^{2n+1-i} + 3 \sum_{i=0}^{n-1} 9^{2i+1} + 9 \sum_{i=0}^{n-1} 9^{2i} = \\ &= 9^{2n} \left(42 + \frac{9}{20} - \frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{9^{2n-1} \cdot 20} \right) \end{aligned}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_{2n+1}}{d_{2n+1}^2} = \frac{283}{60 \cdot 16}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brieskorn E.* Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen // Math. Ann. 1968. Bd. 178. S. 255–270.
2. *Chisini O.* Sulla identita birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione // Rend. Ist. Lombardo. 1944. V. 77. P. 339–356.
3. *Grauert H., Remmert R.* Komplexe Räume // Math. Ann. 1958. Bd. 136. S. 245–318.
4. *Hirzebruch F.* Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers // Algebraic geometry: Proc. Lefschetz Centen. Conf., Mexico City, 1984. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1986. Pt. 1. P. 141–155. (Contemp. Math.; V. 58).
5. *Hirano A.* Construction of plane curves with cusps // Saitama Math. J. 1992. V. 10. P. 21–24.
6. *Куликов Вик.С.* О гипотезе Кизини // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63, №6. С. 83–116.
7. *Куликов В.С., Куликов Вик.С.* Общие накрытия плоскости с A–D–E особенностями // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, №6. С. 65–106.
8. *Немировский С.Ю.* К теореме Куликова о гипотезе Кизини // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65, №1. С. 77–80.
9. *Paccagnan D.* Maximum number of cusps on algebraic plane curves and nodes on surfaces // Intern. Congr. Math., Berlin, 1998: Abstr. Commun. and Poster Sess. P. 59.
10. *Zariski O.* On the topological discriminant group of a Riemann surface of genus p // Amer. J. Math. 1937. V. 59. P. 335–358.