

УДК 512.722.1+514.756.44

Вик. С. Куликов, Д. Ору, В. Шевчишин

Регулярная гомотопия кривых Гурвица

Доказано, что если любые две неприводимые каспидальные (или, более общо, с особенностями A -типа) кривые Гурвица C_0 и C_1 , лежащие на комплексной поверхности Хирцебруха F_N и имеющие одинаковые наборы особых точек, принадлежат одному и тому же классу гомотопий поверхности F_N , то эти кривые являются регулярно гомотопными и *симплектически* регулярно гомотопными в случае, если C_0 и C_1 являются симплектическими поверхностями относительно некоторой совместимой с линейчатой структурой симплектической формы.

Библиография: 12 наименований.

Введение

В настоящей статье мы изучаем J -голоморфные кривые и кривые Гурвица (в частности, алгебраические кривые), лежащие на проективной плоскости или на поверхности Хирцебруха F_N , поведение которых относительно пучков прямых аналогично поведению алгебраических кривых (определение кривых Гурвица см. в § 2). Мы ограничились рассмотрением случая, когда кривые Гурвица могут иметь только особенности типов A_n , $n \geq 0$ (т.е. особенности, локально заданные уравнением $y^2 = x^{n+1}$), а также так называемые отрицательные ноуды (см. § 2).

Б. Мойшезон в [11] показал, что существует бесконечная последовательность общих (относительно пучка прямых) неприводимых обыкновенных каспидальных кривых Гурвица $\bar{H}_i \subset F_1$ степени 54 с 378 каспами и 756 ноудами, члены которой имеют попарно различные типы брэйд-монодромии. В частности, кривые, принадлежащие этой последовательности, попарно не изотопны и почти все из них не изотопны каспидальным алгебраическим кривым.

Цель настоящей статьи – доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 0.1. *Любые две неприводимые обыкновенные каспидальные кривые Гурвица $\bar{H}_0$ и $\bar{H}_1$, лежащие на поверхности Хирцебруха F_N , принадлежащие одному и тому же классу гомотопий поверхности F_N и имеющие одинаковые числа каспов и ноудов (в случае, когда также имеются и отрицательные ноуды, предполагается совпадение разностей между числами положительных и отрицательных ноудов), могут быть деформированы друг в друга с помощью регулярной гомотопии.*

Работа над статьей была начата во время пребывания авторов в Институте чистой и прикладной математики (ИРАМ) университета г. Лос-Анджелес. Работа первого автора частично поддержана грантами РФФИ (№ 02-01-00786) и INTAS (№ 00-0269), второго автора – частично поддержана грантом NSF (DMS-0244844).

Более того, если $\bar{H}_0$ и $\bar{H}_1$ являются симплектическими поверхностями относительно некоторой симплектической формы ω , совместимой с каноническим расслоением F_N на проективные прямые $\mathbb{CP}^1$, то регулярная гомотопия, связывающая эти поверхности, может быть выбрана ω -симплектической.

Здесь регулярная гомотопия кривых означает существование гладкого семейства $\{\bar{H}_t\}_{t \in [0,1]}$, являющегося изотопией, за исключением конечного числа значений t , в которых происходит “стандартное” преобразование кривой Гурвица, состоящее либо из возникновения (рождения) новой, либо уничтожения некоторой старой пары ноудов, имеющих противоположные знаки (см. точное определение в § 2).

Этот результат остается справедливым и для случая неприводимых кривых Гурвица $\bar{H}_0$ и $\bar{H}_1$ с особыми точками типов A_n , $n \geq 0$. Для таких кривых необходимым и достаточным условием существования регулярной гомотопии между $\bar{H}_0$ и $\bar{H}_1$ является совпадение чисел особых точек типа A_n для каждого $n > 1$ (в случае ноудов ($n = 1$) таким условием является совпадение разности чисел положительных и отрицательных ноудов).

Следующее утверждение является следствием из теоремы 0.1.

СЛЕДСТВИЕ 0.2. Пусть C_0 и C_1 – две обыкновенные каспидальные неприводимые симплектические поверхности в $(\mathbb{CP}^2, \omega)$, $\deg C_0 = \deg C_1$, псевдоголоморфные соответственно относительно ω -ручных почти комплексных структур J_0 и J_1 . Если C_0 и C_1 имеют совпадающие числа ноудов и каспов, то они могут быть деформированы одна в другую с помощью C^1 -гладкой симплектической гомотопии в $\mathbb{CP}^2$.

Статья организована следующим образом. В § 1 исследована симплектическая изотопия кривых, лежащих на комплексной поверхности Хирцебруха, неприводимые компоненты которых являются сечениями. В § 2 приведены определения кривых Гурвица и регулярной гомотопии, а также их некоторые элементарные свойства. В § 3 разобран основной метод, используемый в доказательстве теоремы 0.1, а именно разложение на множители брэйд-монодромии. В § 4 приведены доказательства теоремы 0.1 и набросок альтернативного, более геометрического, доказательства. Наконец, в § 5 построены два так называемых квазиположительных разложения на множители некоторого элемента из группы Kos B_4 , которые дают отрицательный ответ для обобщенной проблемы Гарсайда: является ли вложением естественный гомоморфизм из полугруппы квазиположительных кос в группу кос.

Авторы выражают благодарность Институту чистой и прикладной математики университета г. Лос-Анджелес, во время пребывания в котором была начата работа над данной статьей.

§ 1. Симплектическая изотопия сечений

Пусть X – поверхность Хирцебруха F_k , $k \geq 0$, E – рациональное голоморфное сечение с индексом самопересечения $E^2 = -k$. Такое сечение единственно, если $k \geq 1$. Кроме того, пусть ω – келерова форма, совместимая с комплексной структурой J_{F_k} . Как известно (см. [9] или [8]), многообразие (X, ω) симплектоморфно

многообразиям F_1 , если k нечетно, и F_0 , если k четно, оснащенным соответствующими келеровыми структурами.

Пусть $\mathcal{J}$ – множество всех C^l -гладких ω -ручных почти комплексных структур на X , где l – фиксированное достаточно большое число. Множество $\mathcal{J}$ является банаховым пространством. Обозначим через $\mathcal{M}_k$ тотальное пространство модулей псевдоголоморфных кривых C на поверхности X , принадлежащих классу гомотопий $[E] \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Напомним, что $\mathcal{M}_k$ определяется как факторпространство

$$\mathcal{M}_k := \{(u, J)\} / \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}),$$

где $J \in \mathcal{J}$, $u: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ – J -голоморфные отображения, представляющие класс $[E]$, и группа $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ отождествлена с группой голоморфных автоморфизмов пространства $\mathbb{P}^1$. Будем обозначать точки из $\mathcal{M}_k$ либо через (u, J) , либо через (C, J) , в зависимости от того, что рассматривается: параметризующее отображение u или его образ – кривая C . Из формулы для рода псевдоголоморфных кривых (см. [10]) следует, что для всех $(u, J) \in \mathcal{M}_k$ отображение u является вложением. Пусть $\mathrm{rg}_k: \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{J}$ – естественная проекция, заданная как $\mathrm{rg}_k: (C, J) \mapsto J$. Эта проекция является оператором Фредгольма вещественного индекса $2(1 - k)$.

ЛЕММА 1.1. *Проекция $\mathrm{rg}_k: \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{J}$ является:*

- 1) *вложением вещественной коразмерности $2(k - 1)$, если $k \geq 1$ (в частности, она является открытым вложением при $k = 1$);*
- 2) *расслоением над открытым подмножеством $\mathcal{J}_{\mathrm{reg}} \subset \mathcal{J}$ со слоем S^2 , если $k = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства проекции rg_k в точке (C, J) могут быть описаны в терминах *нормального пучка* $\mathcal{N}_C$ кривой C (см. [4] или [5]). Так как кривая C вложена, пучок $\mathcal{N}_C$ является линейным расслоением (обозначим его через N_C), оснащенным оператором Громова

$$D_{C,J}: L^{1,p}(C, N_C) \rightarrow L^p(C, N_C \otimes \Lambda^{(0,1)}).$$

Поскольку в рассматриваемом случае C является рациональной кривой, оператор $D_{C,J}$ не может иметь одновременно нетривиальное ядро и коядро (см. [3], [4] или [5]). Это означает, что rg_k имеет “максимальный ранг” всюду на $\mathcal{M}_k$, т.е. является либо иммерсией, либо субмерсией, либо локальным диффеоморфизмом.

Глобальная инъективность проекции rg_k в случае $k \geq 1$ легко следует из того факта, что две различные J -голоморфные кривые C и C' должны иметь *положительный* индекс пересечения, что противоречило бы равенству $[C] \cdot [C'] = -k < 0$.

В случае $k = 0$ покажем прежде всего, что каждый непустой слой проекции rg_0 является компактом. Предположим противное, тогда найдется последовательность J -голоморфных кривых C_ν , не имеющая предельного множества в $\mathrm{rg}_0^{-1}(J)$. Применяя теорему Громова о компактности, можно считать, что эта последовательность сходится к некоторой приводимой кривой $C^* = \sum m_i C_i^*$. Здесь образ понимается в смысле *циклов*. Поскольку индекс пересечения каждой кривой C_i^* с любой кривой из $\mathrm{rg}_0^{-1}(J)$, скажем с C_1 , не отрицателен, а сумма этих индексов равна нулю, то $[C_i^*] \cdot [C_1] = 0$ для каждого i .

Следовательно, каждая кривая C_i^* представляет класс гомологий, являющийся положительным кратным примитивного класса $[C_1]$. Вычисляя ω -площадь кривых C_i^* , получаем, что C^* состоит из единственной компоненты с кратностью единица, гомологичной кривой C_1 . Таким образом, (C^*, J) лежит в $\mathcal{M}_0$.

Чтобы показать, что все непустые слои проекции rg_0 диффеоморфны друг другу, достаточно доказать, что дополнение к образу проекции rg_0 имеет вещественную коразмерность 2. Еще раз применяя теорему Громова о компактности, можно найти приводимую J -голоморфную кривую $C^* = \sum m_i C_i^*$ для любой структуры J , лежащей на (топологической) границе образа проекции rg_0 . Из формулы для рода следует, что все кривые C_i^* являются вложенными рациональными кривыми. Более того, так как $c_1(X) \cdot [C^*] = 2$ и форма пересечения на $F_0 = S^2 \times S^2$ является четной, для одной из кривых, скажем для C_1^* , должно выполняться неравенство $c_1(X) \cdot [C_1^*] \leq 0$. Применяя формулу для рода, получаем, что $[C_1^*]^2 =: k \leq -2$. Отсюда вытекает, что J лежит в образе проекции $\text{rg}_k: \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{J}$, который локально является подмногообразием коразмерности не менее 2.

Обозначим образ $\text{rg}_k(\mathcal{M}_k)$ через $\mathcal{J}_k$. Для $k \geq 1$ он является подмногообразием в $\mathcal{J}$ вещественной коразмерности $2(k-1)$, в общем случае не замкнутым.

ЛЕММА 1.2. Пусть X – поверхность Хирцебруха F_k , ω – келерова форма на X , $J \in \mathcal{J}_k$ – почти комплексная структура, E – соответствующая J -голоморфная кривая с индексом самопересечения $-k$ и C – неприводимая J -голоморфная кривая, отличная от E . Пусть также F – слой линейчатой структуры на X . Тогда:

- (i) кривая C гомологична $d[E] + f[F]$ для $d \geq 0$ и $f \geq kd$;
- (ii) $c_1(X) \cdot C = d(2-k) + 2f > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку x на X вне E . Заметим, что существует путь $h: [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}$, $t \in [0, 1]$, который соединяет $J =: J_0$ со “стандартной” структурой $J_1 = J_{\text{st}}$ через почти комплексные структуры $J_t = h(t)$ такие, что кривая E является J_t -голоморфной кривой для всех $t \in [0, 1]$. Это означает, что h принимает значения в $\mathcal{J}_k$. Рассмотрим пространство модулей

$$\mathcal{M}_h := \mathcal{M}_h(X, F, x) := \{(C, t)\}$$

вместе с естественной проекцией $\text{rg}_h: \mathcal{M}_h \rightarrow [0, 1]$, заданной условием $\text{rg}_h: (C, t) \mapsto t$, где $t \in [0, 1]$, C – рациональная J_t -голоморфная кривая, гомологичная F и проходящая через x . Из результатов, приведенных в [1] и [2], вытекает, что $\text{rg}_h: \mathcal{M}_h \rightarrow [0, 1]$ является диффеоморфизмом. Отсюда следует, что существует J -голоморфная кривая C_0 , изотопная слою F .

Группа гомологий $H_2(X, \mathbb{Z})$ является свободной абелевой группой, порожденной классами кривых E и F . Таким образом, имеем $[C] = d[E] + f[F]$ для некоторых целых d и f . Поскольку C , E и C_0 – J -голоморфные кривые, то индексы пересечений $[C] \cdot [C_0]$ и $[C] \cdot [E]$ не отрицательны (см. [10]). Отсюда следует утверждение (i).

Равенство в утверждении (ii) следует из формул $c_1(X) \cdot E = 2-k$ и $c_1(X) \cdot F = 2$. Окончательно, сумма

$$d(2-k) + 2f = 2d + f + (f - kd)$$

не отрицательна и обращается в нуль, только если $d = f = 0$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть X – поверхность Хирцебруха F_k , ω_t , $t \in [0, 1]$, – гладкое семейство симплектических форм на X , относительно которой комплексная структура J_{F_k} является ручной, E – голоморфная кривая с индексом самопересечения $-k$, F – слой линейчатой структуры на X , а C_0 – погруженная ω_0 -симплектическая поверхность в X такая, что каждая компонента $C_{0,i}$ поверхности C_0 либо гомологична сечению $[F]$, либо слою $[E] + f_i[F]$ при $f_i \geq 1$. Предположим также, что поверхность $C_0 \cup E$ имеет только положительные трансверсальные двойные точки в качестве своих особых точек. Тогда существует ω_t -симплектическая изотопия C_t между C_0 и голоморфной кривой C_1 такая, что каждая кривая C_t пересекает E трансверсально с положительным индексом пересечения.

Наиболее интересный для нас случай – когда все $f_i = k$. В этом случае C_0 состоит из сечений линейного расслоения $X \setminus E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$. Общий случай соответствует набору мероморфных сечений с произвольным числом полюсов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположений теоремы следует, что обе кривые C_0 и E являются J_0 -голоморфными кривыми относительно одной и той же ω_0 -ручной почти комплексной структуры J_0 на X (см., например, [4]). Более того, существует путь $h: [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}$, $t \in [0, 1]$, соединяющий структуру J_0 со “стандартной” комплексной структурой $J_1 = J_{st}$ такой, что каждая структура $J_t := h(t)$ является ω_t -ручной, а E является J_t -голоморфной кривой для каждого $t \in [0, 1]$. Это означает, что h принимает значения в $\mathcal{J}_k$. Предположим, что путь h выбран достаточно общим.

Согласно лемме 1.2 имеем $f_i \geq k$ и индекс пересечения

$$c_1(X) \cdot [C_{0,i}] = 2 + 2f_i - k$$

строго положителен. На каждой компоненте $C_{0,i}$ зафиксируем p_i точек $x_{i,1}, \dots, x_{i,p_i}$, находящихся в общем положении, где $p_i = c_1(X) \cdot [C_{0,i}] - 1 = 1 + 2f_i - k$, и пусть $\mathbf{x} = \{x_{i,j}\}$ – набор этих точек. Рассмотрим пространство модулей $\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_h(X, C_0, \mathbf{x})$ всех деформаций кривой C_0 в классе J_t -голоморфных кривых C , имеющих то же самое созвездие, что и C_0 , т.е. таких, что:

- 1) кривая C имеет то же самое число неприводимых компонент, что и C_0 ;
- 2) каждая компонента C_i кривой C является рациональной кривой, гомологичной соответствующей компоненте $C_{0,i}$ кривой C_0 ;
- 3) компонента C_i кривой C проходит через те же точки $x_{i,1}, \dots, x_{i,p_i}$, что и компонента $C_{0,i}$.

В этом случае пространство модулей определяется как

$$\mathcal{M}_h(X, C_0, \mathbf{x}) := \{(C, t)\},$$

где $t \in [0, 1]$, C – J_t -голоморфная кривая с созвездием кривой C_0 .

Обозначим через $\text{rg}_h: \mathcal{M}_h \rightarrow [0, 1]$ естественную проекцию, заданную условием $\text{rg}_h: (C, t) \mapsto t$. Для упрощения обозначений запись $C \in \mathcal{M}_h$ будет означать, что (C, t) лежит в $\mathcal{M}_h$ для некоторого t .

Ожидаемая вещественная размерность пространства $\mathcal{M}_h$ равна 1. Возможность произвольно деформировать структуры $h(t)$ вблизи фиксированных точек $\mathbf{x}$

гарантирует нам выполнение условия трансверсальности в проблеме деформации. Поэтому $\mathcal{M}_h$ является многообразием ожидаемой размерности. Важным наблюдением в [3] (см. также [1] и [2]) является то, что в рассматриваемом случае проекция pr_h не имеет критических точек, так как все кривые C являются рациональными. Поэтому утверждение теоремы будет доказано, если мы покажем, что $\text{pr}_h: \mathcal{M}_h \rightarrow [0, 1]$ является собственным отображением.

Предполагая противное, мы могли бы найти последовательность t_n , сходящуюся к некоторому $t^* \in [0, 1]$, и последовательность J_{t_n} -голоморфных кривых $C_n \in \mathcal{M}_h$ без точек накопления в $\mathcal{M}_h$. По теореме Громова о компактности, переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что последовательность C_n слабо сходится к некоторой J^* -голоморфной кривой C^* , где $J^* = h(t^*)$. Поскольку мы можем рассматривать поведение компонент кривых C_n отдельно друг от друга, то можно предполагать, что C_0 и каждая C_n являются неприводимыми кривыми.

Пусть $C^* = \sum_{j=1}^l m_j C_j^*$ – разложение кривой C^* на неприводимые компоненты, где m_j – кратности, с которыми они входят в C^* . Из леммы 1.2 следует, что существует в точности одна компонента, скажем C_1^* , которая гомологична классу $[E] + f_1^*[F]$, а все оставшиеся компоненты C_j^* лежат в классе гомологий $f_j^*[F]$. Более того, если $[C_0] = [E] + f[F]$, то $\sum_{j=1}^l m_j f_j^* = f$. Применяя формулу для рода к C_j^* , получаем, что $f_j^* = 1$ для каждого $j \geq 2$.

Напомним, что кривая C^* должна проходить через $p = 1 + 2f - k$ отмеченных точек x_j , входящих в определение пространства $\mathcal{M}_h$. Однако из общности пути $h(t)$ и точек x_j следует, что можно иметь не более $p_1^* := 1 + 2f_1^* - k$ отмеченных точек на C_1^* и не более одной отмеченной точки на каждой C_j^* при $j \geq 2$. Из всего сказанного следует, что кривая C^* может проходить только через $1 + 2f_1^* - k + l - 1$ отмеченных точек. Это число строго меньше необходимого числа точек, равного $1 + 2f - k$, за исключением случая, когда $l = 1$. Следовательно, кривая C^* должна быть неприводимой, и поэтому она лежит в $\mathcal{M}_h$. Таким образом, $\text{pr}_h: \mathcal{M}_h \rightarrow [0, 1]$ является собственным отображением.

§ 2. Кривые Гурвица

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Кривая Гурвица степени m на комплексной поверхности Хирцебруха $\mathbf{F}_N$ – это образ $\bar{H} = f(\mathcal{S}) \subset \mathbf{F}_N$ ориентированной замкнутой вещественной поверхности $\mathcal{S}$ при гладком отображении $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{F}_N \setminus E_N$ таком, что существует конечное множество $Z \subset \bar{H}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

- (i) ограничение отображения f на $\mathcal{S} \setminus f^{-1}(Z)$ является вложением и для любой точки $p \in \bar{H} \setminus Z$ поверхность $\bar{H}$ и слой $F_{\text{pr}(p)}$ проекции pr пересекаются в p трансверсально с индексом пересечения $+1$;
- (ii) для каждой точки $p \in Z$ найдется такая окрестность $U \subset \mathbf{F}_N$ этой точки, что $\bar{H} \cap U$ является комплексно-аналитической кривой и комплексная ориентация на $\bar{H} \cap U \setminus \{p\}$ совпадает с индуцированной с поверхности $\mathcal{S}$ отображением f ориентацией на $U \subset \mathbf{F}_N$;
- (iii) ограничение проекции pr на $\bar{H}$ является отображением конечной степени m .

Для каждой кривой Гурвица $\bar{H}$ существует единственное минимальное подмножество $Z \subset \bar{H}$, удовлетворяющее условиям из определения 2.1. Обозначим его через $Z(\bar{H})$. Скажем, что кривая $\bar{H}$ является *рг-общей*, если отображение $\text{rg}|_Z: Z \rightarrow \text{rg}(Z)$ является взаимно однозначным. Слой проекции rg называется *$\bar{H}$ -особым*, если он пересекается с $Z(\bar{H})$, и *$\bar{H}$ -регулярным* в противном случае.

Скажем, что кривая Гурвица $\bar{H}$ имеет A_k -особенность в точке $p \in Z(\bar{H})$, если найдется окрестность U точки p и локальные координаты x, y в U , в которых:

- (iv) отображение $\text{rg}|_U$ задано по правилу $(x, y) \mapsto x$;
- (v) $\bar{H} \cap U$ задано уравнением $y^2 = x^{k+1}$.

Фактически, “ A_0 -особенность” – это гладкая точка, в которой $\bar{H}$ касается слоя проекции rg ; A_1 - и A_2 -особенности – это соответственно обыкновенные ноуды и каспы. Мы будем говорить, что кривая $\bar{H}$ является *обыкновенной каспидальной*, если все ее особенности являются особенностями типов A_k , $0 \leq k \leq 2$, *нодальной*, если она имеет только A_0 - и A_1 -особенности. Скажем, что $\bar{H}$ является кривой Гурвица с *A-особенностями*, если она имеет только особенности типов A_k , $k \geq 0$.

Для наших целей мы вынуждены расширить класс допустимых особенностей, которые могут иметь кривые Гурвица, до класса, включающего в себя, кроме описанных в п. (ii) определения 2.1, также и простейшие неголоморфные особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Отрицательным ноудом* на кривой Гурвица $\bar{H}$ называется особая точка $p \in Z(\bar{H})$ такая, что:

- (ii⁻) существует окрестность $U \subset \mathbf{F}_N$ точки p такая, что $\bar{H} \cap U$ состоит из двух гладких ветвей, пересекающихся трансверсально в точке p с индексом пересечения -1 , и каждая из ветвей кривой $\bar{H} \cap U$ пересекает слой $F_{\text{pr}(p)}$ трансверсально в точке p с индексом пересечения $+1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Кривая Гурвица $\bar{H} \subset \mathbf{F}_N$ называется *почти алгебраической*, если над некоторым диском $D(r) \subset \mathbb{P}^1$ кривая $\bar{H}$ совпадает с некоторой алгебраической кривой C , а над $\mathbb{P}^1 \setminus D(r)$ она совпадает с объединением m попарно не пересекающихся сечений $H_{\infty,1}, \dots, H_{\infty,m}$ проекции rg .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Две кривые Гурвица $\bar{H}_0, \bar{H}_1 \subset \mathbf{F}_N$ (возможно, с отрицательными ноудами) называются *H-изотопными*, если существует непрерывная изотопия $\varphi_t: \mathbf{F}_N \rightarrow \mathbf{F}_N$, $t \in [0, 1]$, сохраняющая слои (т.е. существует непрерывное отображение $\psi_t: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ такое, что $\text{rg} \circ \varphi_t = \psi_t \circ \text{rg}$), являющаяся гладкой вне слоев $F_{\text{pr}(s)}$, $s \in Z(\varphi_t(\bar{H}_0))$, и такая, что:

- (i) $\varphi_0 = \text{Id}$;
- (ii) $\varphi_t(\bar{H}_0)$ является кривой Гурвица для всех $t \in [0, 1]$;
- (iii) $\varphi_1(\bar{H}_0) = \bar{H}_1$;
- (iv) $\varphi_t(E_N) = E_N$ для всех $t \in [0, 1]$.

В случае кривых с A -особенностями можно фактически предполагать, что φ_t является гладким отображением всюду.

ТЕОРЕМА 2.5 [6]. *Произвольная рг-общая кривая Гурвица $\bar{H} \subset \mathbf{F}_N$ с A-особенностями является H-изотопной некоторой почти алгебраической кривой. Если рг-общая каспидальная кривая $\bar{H}$ является симплектической поверхностью в $\mathbf{F}_N$, то эта изотопия может быть выбрана симплектической.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Рождением пары ноудов вдоль простого пути γ называется преобразование кривой Гурвица $\bar{H} = \bar{H}_{t^*-\tau}$, заданное с помощью гомотопии $\bar{H}_t$, $t \in [t^* - \tau, t^* + \tau]$ и $0 < \tau \ll 1$, удовлетворяющей следующим условиям (см. рис. 1):

- 1) кривые $\bar{H}_t$ изотопны друг другу вне некоторой окрестности U пути γ ;
- 2) в U существуют такие вещественные координаты (x, y, u, v) , что проекция $\text{pr}: \mathbf{F}_N \rightarrow \mathbb{P}^1$ в этих координатах совпадает с отображением $\text{pr}: (x, y, u, v) \rightarrow (x, y)$, а путь γ совпадает с путем $\{u \in [-\tau, \tau], x = v = y = 0\}$;
- 3) для каждого $t \in [t^* - \tau, t^* + \tau]$ кривая $\bar{H}_t \cap U$ состоит из двух дисков, которые являются графиками сечений $s_t^\pm: (x, y) \mapsto (u, v) = (\pm(x^2 - (t - t^*)), \pm y)$.

Диск $D := \{v = y = 0, x \in [-\sqrt{\tau}, \sqrt{\tau}], x^2 - \tau \leq u \leq \tau - x^2\}$ называется *диском Уитни*, вдоль которого происходит рождение пары ноудов.

Обратное преобразование называется *уничтожением пары ноудов вдоль диска Уитни* D .

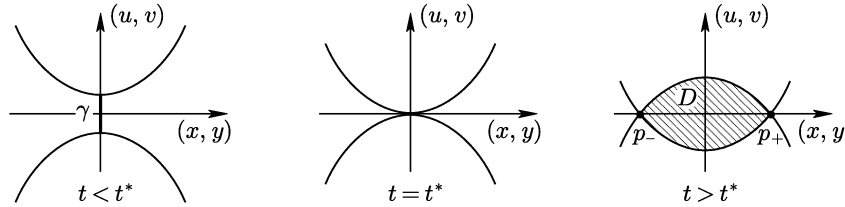


Рис. 1

Путь γ лежит в слое $\{x = y = 0\}$ и соединяет две точки, лежащие на кривой $\bar{H} = \bar{H}_{t^*-\tau}$; “рожденные” ноуды p_+ и p_- имеют противоположные ориентации: один из них – положительный, а другой – отрицательный. Обращение течения времени t на противоположное заменяет операцию рождения пары ноудов на операцию уничтожения пары ноудов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Две кривые Гурвица называются *регулярно гомотопными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью композиции конечного числа H -изотопий, рождений и уничтожений пар ноудов.

Обоснованием данного определения является следующее утверждение, доказательство которого является легким упражнением.

ЛЕММА 2.8. Пусть $\varphi_t: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{F}_N$ – гладкая гомотопия отображений замкнутой ориентированной вещественной поверхности $\mathcal{S}$ в $\mathbf{F}_N$, обладающая следующими свойствами:

- 1) для каждого t композиция $\text{pr} \circ \varphi_t: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ является разветвленным накрытием;
- 2) отображение φ_t является H -изотопией в некоторой окрестности всех критических точек отображения $\text{pr} \circ \varphi_t$;
- 3) отображение φ_t является общим относительно условий 1) и 2).

Тогда φ_t является регулярной гомотопией.

ЛЕММА 2.9. Пусть $\bar{H}$ – кривая Гурвица в $\mathbf{F}_N$, F – $\bar{H}$ -регулярный слой проекции pr , $\gamma \subset F$ – простой путь в $F \setminus \bar{H}$, концы которого лежат на $\bar{H}$, U – произвольная окрестность пути γ в F . Тогда существует регулярная гомотопия φ_t кривой $\bar{H}$, в результате которой рождается пара ноудов вдоль пути γ и которая является постоянной вне U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует, что путь γ пересекает кривую $\bar{H}$ трансверсально. Уменьшая, если необходимо, окрестность U , можно выбрать такие локальные координаты (x, y, u, v) в U , удовлетворяющие условию 2) определения 2.6, что $U \cap \bar{H}$ состоит из двух дисков, являющихся графиками непесекающихся сечений $s_{t^*-\tau}^\pm: (x, y) \mapsto (u, v) = (\pm(x^2 + \tau), \pm y)$.

§ 3. Полугруппы разложений на множители

В этом параграфе мы напомним понятие полугрупп брэйд-монодромных разложений на множители, введенное в [6].

3.1. Полугруппы над группами. Набор (S, B, α, λ) , где S – полугруппа, B – группа, $\alpha: S \rightarrow B$ и $\lambda: B \rightarrow \text{Aut}(S)$ – гомоморфизмы, называется *полугруппой S над группой B* , если для всех $s_1, s_2 \in S$

$$s_1 \cdot s_2 = \lambda(\alpha(s_1))(s_2) \cdot s_1 = s_2 \cdot \rho(\alpha(s_2))(s_1),$$

где $\rho(g) = \lambda(g^{-1})$. Если заданы две полугруппы $(S_1, B_1, \alpha_1, \lambda_1)$ и $(S_2, B_2, \alpha_2, \lambda_2)$ соответственно над группами B_1 и B_2 , то пара $h = (h_S, h_B)$ гомоморфизмов $h_S: S_1 \rightarrow S_2$ и $h_B: B_1 \rightarrow B_2$ называется *гомоморфизмом полугрупп над группами*, если:

- (i) $h_B \circ \alpha_{S_1} = \alpha_{S_2} \circ h_S$;
- (ii) $\lambda_2(h_B(g))(h_S(s)) = h_S(\lambda_1(g)(s))$ для всех $s \in S_1$ и всех $g \in B_1$.

Определенные ниже *полугруппы разложений на множители* составляют тот класс полугрупп над группами, который мы будем использовать далее.

Пусть $\{g_i\}_{i \in I}$ – некоторое множество элементов группы B . Для каждого $i \in I$ обозначим через $O_{g_i} \subset B$ множество всех элементов из B , сопряженных элементу g_i (орбиту элемента g_i при действии группы B на себе внутренними автоморфизмами). Назовем объединение $X = \bigcup_{i \in I} O_{g_i} \subset B$ *полным множеством сопряженных элементов* элементам из множества $\{g_i\}_{i \in I}$, а пару (B, X) – *оснащенной группой*.

Для произвольного полного множества X сопряженных элементов определены два естественные отображения $r = r_X: X \times X \rightarrow X$ и $l = l_X: X \times X \rightarrow X$, заданные формулами $r(a, b) = b^{-1}ab$ и $l(a, b) = aba^{-1}$ соответственно. Рассмотрим элементы из X как буквы некоторого алфавита и для каждой пары букв $a, b \in X$ обозначим через $R_{a,b;r}$ и $R_{a,b;l}$ соотношения, определенные следующим образом:

- $R_{a,b;r}$ обозначает соотношение $a \cdot b = b \cdot r(a, b)$, если $b \neq \mathbf{1}$, и соотношение $a \cdot \mathbf{1} = a$, если $b = \mathbf{1}$;
- $R_{a,b;l}$ обозначает соотношение $a \cdot b = l(a, b) \cdot a$, если $a \neq \mathbf{1}$, и соотношение $\mathbf{1} \cdot b = b$, если $a = \mathbf{1}$.

Положим

$$\mathcal{R} = \{R_{a,b;r}, R_{a,b;l} \mid (a, b) \in X \times X, a \neq b\}$$

и определим полугруппу

$$S(B, X) = \langle x \in X \mid R \in \mathcal{R} \rangle$$

как факторполугруппу свободной полугруппы слов, порожденных алфавитом X , профакторизованной по множеству соотношений $\mathcal{R}$. Как мы увидим далее, в п. 3.2, элементы этой полугруппы представляют с точностью до *эквивалентности Гурвица* всевозможные *разложения на множители* элементов из группы B с множителями из X . Определим *гомоморфизм произведения* $\alpha_X: S(B, X) \rightarrow B$, который каждую букву $x \in X$ переводит в $\alpha_X(x) = x \in B$.

Определим, кроме того, два действия λ и ρ группы B на множестве X :

$$\begin{aligned} x \in X &\mapsto \lambda(g)(x) = gxg^{-1} \in X, \\ \rho(g) &= \lambda(g^{-1}). \end{aligned}$$

Легко видеть, что множество соотношений $\mathcal{R}$ инвариантно относительно этих действий. Следовательно, ρ и λ определяют антигомоморфизм $\rho: B \rightarrow \text{Aut}(S(B, X))$ (*правое действие сопряжением*) и гомоморфизм $\lambda: B \rightarrow \text{Aut}(S(B, X))$ (*левое действие сопряжением*). Действие $\lambda(g)$ на $S(B, X)$ называется *одновременным сопряжением* на элемент g .

Легко показать, что $(S(B, X), B, \alpha_X, \lambda)$ является полугруппой над B . Назовем такие полугруппы *полугруппами разложений на множители над B* . Если группа B фиксирована, то полугруппу $S(B, X)$ будем обозначать через S_X , и через $x_1 \dots x_n$ будем обозначать элемент из S_X , определяемый словом $x_1 \dots x_n$.

Отметим, что $S: (B, X) \mapsto (S(B, X), B, \alpha_X, \lambda)$ является функтором из категории оснащенных групп в категорию полугрупп над группами. В частности, если $X \subset Y$ — два полных множества сопряженных элементов из B , то тождественное отображение $\text{id}: B \rightarrow B$ определяет вложение $\text{id}_{X,Y}: S(B, X) \rightarrow S(B, Y)$. Таким образом, для каждой группы B полугруппа $S_B = S(B, B)$ является *универсальной полугруппой разложений на множители* над группой B в том смысле, что каждая полугруппа S_X над B канонически вложена в S_B отображением $\text{id}_{X,B}$.

Поскольку $\alpha_X = \alpha_B \circ \text{id}_{X,B}$, то мы не будем делать различий между гомоморфизмами произведений α_X и α_B и будем их оба обозначать просто α .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Для любых $s_1, s_2 \in S(B, X)$ имеют место следующие равенства:*

$$s_1 \cdot s_2 = s_2 \cdot \rho(\alpha(s_2))(s_1) = \lambda(\alpha(s_1))(s_2) \cdot s_1.$$

Обозначим через Σ_m симметрическую группу, действующую на множестве $\{1, \dots, m\} = [1, m]$, и через $(i, j) \in \Sigma_m$ — транспозицию, переставляющую элементы $i, j \in [1, m]$. Элемент

$$h_g = ((1, 2) \cdot (1, 2))^{g+1} \cdot ((2, 3) \cdot (2, 3)) \cdot \dots \cdot ((m-1, m) \cdot (m-1, m)) \in S_{\Sigma_m}$$

называется *элементом Гурвица рода g* .

ЛЕММА 3.2. *Элемент Гурвица h_g инвариантен при действии сопряжением группы Σ_m на полугруппе S_{Σ_m} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$G_{h_g} = \{\sigma \in \Sigma_m \mid \lambda(\sigma)(h_g) = h_g\}.$$

Достаточно показать, что $(i, i+1) \in G_{h_g}$ для $1 \leq i \leq m-1$.

Применяя утверждение 3.1 и учитывая тот факт, что $\lambda(\alpha(s)) = \text{Id}$ только в случае, когда $\alpha(s) = \mathbf{1}$, имеем

$$\begin{aligned} h_g &= ((1, 2) \cdot (1, 2))^g \cdot \prod_{j=1}^{m-1} ((j, j+1) \cdot (j, j+1)) \\ &= ((i, i+1) \cdot (i, i+1)) \cdot ((1, 2) \cdot (1, 2))^g \cdot \prod_{j \neq i} ((j, j+1) \cdot (j, j+1)) \\ &= (i, i+1) \cdot \lambda((i, i+1)) \left(((1, 2) \cdot (1, 2))^g \cdot \prod_{j \neq i} (j, j+1)^{\cdot 2} \right) \cdot (i, i+1) \\ &= (i, i+1) \cdot (i, i+1) \cdot \lambda((i, i+1)) \left(((1, 2) \cdot (1, 2))^g \cdot \prod_{j \neq i} (j, j+1)^{\cdot 2} \right) \\ &= \lambda((i, i+1)) \left(((i, i+1) \cdot (i, i+1)) \cdot ((1, 2) \cdot (1, 2))^g \cdot \prod_{j \neq i} (j, j+1)^{\cdot 2} \right) \\ &= \lambda((i, i+1))(h_g), \end{aligned}$$

так как $\alpha((l, s) \cdot (l, s)) = \mathbf{1} \in \Sigma_m$ для каждой транспозиции (l, s) .

3.2. Эквивалентность Гурвица. Как и выше, пусть $X \subset B$ – объединение орбит действия группы B сопряжением λ . Упорядоченное множество

$$\{x_1, \dots, x_n \mid x_i \in X\}$$

называется *разложением на множители* из X длины $n \in \mathbb{N}$ элемента $g = x_1 \dots x_n \in B$. Обозначим через $F_X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ множество всевозможных разложений на множители из X элементов группы B . Можно определить естественное отображение $\varphi: F_X \rightarrow S(B, X)$, заданное формулой

$$\varphi(\{x_1, \dots, x_n\}) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n.$$

Преобразование, которое меняет в $\{x_1, \dots, x_n\}$ два соседних множителя x_i, x_{i+1} на $x_{i+1}, \rho(x_{i+1})(x_i)$ или на $\lambda(x_i)(x_{i+1})$, x_i и оставляет без изменения все другие множители, называется *преобразованием Гурвица*. Два разложения на множители называются *гурвиц-эквивалентными*, если одно из них может быть получено из другого с помощью конечного числа преобразований Гурвица.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Два разложения на множители $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $x' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ являются гурвиц-эквивалентными тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \varphi(x')$.*

3.3. Полугруппы над группой кос. В этом пункте $B = \text{Br}_m$ — это группа кос с m нитями. Зафиксируем некоторое множество $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ *стандартных порождающих*, т. е. порождающих группы B , связанных соотношениями:

$$\begin{aligned} a_i a_{i+1} a_i &= a_{i+1} a_i a_{i+1}, & 1 \leq i < m-2, \\ a_i a_k &= a_k a_i, & |i-k| \geq 2. \end{aligned}$$

Для $k \geq 0$ обозначим через $A_k = A_k(m)$ (соответственно, через $A_{\bar{k}} = A_{\bar{k}}(m)$) полное множество сопряженных элементу a_1^{k+1} (соответственно, элементу a_1^{-k-1}) в Br_m (напомним, что все порождающие $a_1, \dots, a_{m-1}$ сопряжены друг другу). Рассмотрим полугруппу разложений на множители S_{A_k} как подполугруппу универсальной полугруппы S_{Br_m} над Br_m . Пусть $\Delta = \Delta_m$ — так называемый элемент Гарсайда:

$$\Delta = (a_1 \dots a_{m-1}) \dots (a_1 a_2 a_3) (a_1 a_2) a_1.$$

Хорошо известно, что

$$\Delta^2 = (a_1 \dots a_{m-1})^m$$

является порождающим элементом центра группы Br_m . Обозначим через $\delta^2 = \delta_m^2$ элемент в $S_{A_0} \subset S_{\text{Br}_m}$, равный

$$\delta^2 = (a_1 \cdot \dots \cdot a_{m-1})^m.$$

Положим также

$$\tilde{\delta}_m^2 = \prod_{l=m}^2 \prod_{k=1}^{l-1} z_{k,l}^2 \in S_{A_1},$$

где $z_{k,l} = (a_{l-1} \dots a_{k+1}) a_k (a_{l-1} \dots a_{k+1})^{-1}$ для $k < l$ (через $\prod_{l=m}^2$ обозначено произведение, упорядоченное слева направо по убыванию l , последовательности элементов $z_{k,l}^2$). Известно (см., например, [12]), что $\alpha(\tilde{\delta}_m^2) = \Delta_m^2$. Более того,

$$\tilde{\delta}_m^2 = \prod_{k=1}^{m-1} z_{k,m}^2 \cdot \tilde{\delta}_{m-1}^2.$$

Отметим, что элементы $z_{k,l}^2$, $1 \leq k < l \leq m$, порождают группу *крашенных кос* $P_m = \ker \gamma_m$, где $\gamma_m: \text{Br}_m \rightarrow \Sigma_m$ — естественный гомоморфизм в симметрическую группу Σ_m .

Хотя мы не будем использовать следующий факт, тем не менее, отметим, что элементы δ_m^2 и $\tilde{\delta}_m^2$ представляют соответственно брэйд-монодромные разложения на множители неособых плоских кривых степени m и объединений m прямых, находящихся в общем положении.

ЛЕММА 3.4 [6]. *Элемент δ^2 является неподвижным при действии группы Br_m на S_{Br_m} , т. е. $\lambda(g)(\delta^2) = \rho(g)(\delta^2) = \delta^2$ для любого $g \in \text{Br}_m$.*

ТЕОРЕМА 3.5 [6]. *Элемент $\tilde{\delta}_m^2$ является единственным элементом среди элементов $s \in S_{A_1}$ таких, что $\alpha(s) = \Delta_m^2$.*

ЛЕММА 3.6. Пусть $g \in A_0$ имеет тот же самый образ в Σ_m , что и z_{k_0, l_0} , т. е. $\gamma_m(g) = \gamma_m(z_{k_0, l_0}) = (k_0, l_0)$. Тогда существует элемент $p \in P_m$ такой, что $g = pz_{k_0, l_0}p^{-1}$. Более того, элемент p можно выбрать таким, что он может быть записан как положительное слово в алфавите $\{z_{i,j}^2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы группы Br_m можно рассматривать как диффеоморфизмы проколотого диска $D \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$, и, в частности, любой элемент $g \in A_0$ можно представить как поворот вдоль некоторого простого пути l_g , соединяющего две точки, скажем x_k и x_l , в $(D \setminus \{x_1, \dots, x_m\}) \cup \{x_k, x_l\}$. Из равенства $\gamma_m(g) = \gamma_m(z_{k_0, l_0})$ следует, что $\{x_k, x_l\} = \{x_{k_0}, x_{l_0}\}$ и пути l_g и $l_{z_{k_0, l_0}}$ являются гомотопными в замкнутом диске D как пути с фиксированными концами. Пусть $h_t: [0, 1] \rightarrow D$, $0 \leq t \leq 1$, – гомотопия, соединяющая l_g и $l_{z_{k_0, l_0}}$, такая, что $h_0 = l_g$ и $h_1 = l_{z_{k_0, l_0}}$.

Не ограничивая общности, можно предполагать, что для всех t пути $h_t([0, 1])$ являются простыми путями и существует конечное множество $T = \{t_1 < \dots < t_q\}$ значений $t \in (0, 1)$ таких, что путь $h_t([0, 1])$ не проходит через точки из множества $\{x_1, \dots, x_m\} \setminus \{x_{k_0}, x_{l_0}\}$ для всех $t \notin T$ и проходит только через одну из них, скажем через x_{j_i} , при каждом $t_i \in T$. Обозначим через L_i часть пути $h_{t_i}([0, 1])$, соединяющую точки x_{k_0} и x_{j_i} . Тогда легко видеть, что пути $h_{t^+}([0, 1])$, $t_i < t^+ < t_{i+1}$, гомотопны в $D \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ путям, полученным из $h_{t^-}([0, 1])$, $t_{i-1} < t^- < t_i$, с помощью либо поворота вдоль пути L_i , либо с помощью обратного преобразования (в зависимости от того, сохраняет или меняет ориентацию отображение $(t, s) \mapsto h_t(s)$ вблизи точки x_{j_i}). Поскольку переход через каждое значение $t_i \in T$ соответствует сопряжению на крашеную косу, то в результате получаем, что существует элемент $p \in P_m$ такой, что $g = pz_{k_0, l_0}p^{-1}$.

Чтобы доказать, что элемент p можно выбрать так, что он представляется в виде положительного слова в алфавите $\{z_{i,j}^2\}$, напомним, что

$$\Delta_m^2 = \prod_{l=m}^2 \prod_{k=1}^{l-1} z_{k,l}^2 \quad (1)$$

является порождающим элементом центра группы кос Br_m . Следовательно, циклическая перестановка множителей, входящих в (1), не меняет произведения. Таким образом, для каждого z_{i_0, j_0}^2 элемент Δ_m^2 можно выразить в виде

$$\Delta_m^2 = z_{i_0, j_0}^2 \Delta'_{i_0, j_0},$$

где Δ'_{i_0, j_0} – некоторое положительное слово, состоящее из букв $z_{i,j}^2$. Это наблюдение позволяет завершить доказательство леммы, так как

$$z_{i_0, j_0}^{-2} b z_{i_0, j_0}^2 = \Delta'_{i_0, j_0} b (\Delta'_{i_0, j_0})^{-1}$$

для всех $b \in \text{Br}_m$.

Рассмотрим полугруппы $\mathcal{A}_k^0 = S_{\bigcup_{i=0}^k A_i}$ и $\mathcal{A}_k = S_{A_1 \cup (\bigcup_{i=0}^k A_i)}$, $k \geq 0$. Имеем естественные вложения $\mathcal{A}_k^0 \subset \mathcal{A}_k$. Заметим, что если $g \in A_1$, то $g^{-1} \in A_1$. Для $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ обозначим через

$$\bar{\mathcal{A}}_k = \left\langle x \in A_1 \cup \bigcup_{i=0}^k A_i \mid R \in \mathcal{R}_k \cup \bar{\mathcal{R}} \right\rangle$$

полугруппу, где $\mathcal{R}_k$ – множество соотношений, определяющих полугруппу $\mathcal{A}_k$, и

$$\overline{\mathcal{R}} = \langle g \cdot (g^{-1}) = (g^{-1}) \cdot g = \mathbf{1} \mid g \in A_1 \rangle$$

– множество соотношений сокращения. Существует естественный гомоморфизм полугрупп

$$c: \mathcal{A}_k \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_k.$$

Скажем, что два элемента $s_1, s_2 \in \mathcal{A}_k$ *слабо эквивалентны*, если $c(s_1) = c(s_2)$. Легко видеть, что $\bar{\mathcal{A}}_k$ может быть рассмотрена как полугруппа над Br_m с естественным гомоморфизмом произведения $\bar{\alpha}: \bar{\mathcal{A}}_k \rightarrow \text{Br}_m$ таким, что $\alpha = \bar{\alpha} \circ c$.

Из существования естественных вложений полугрупп $S_{A_{\bar{1}}}$ и S_{A_j} , $j = 0, \dots, k$, в $\mathcal{A}_k$ вытекает, что каждый элемент $s \in \mathcal{A}_k$ может быть записан в виде

$$s = s_{\bar{1}} \cdot s_0 \cdot \dots \cdot s_k,$$

где каждый множитель $s_j \in S_{A_j}$ есть либо произведение $s_j = g_{j,1} \cdot \dots \cdot g_{j,d_j}$ элементов $g_{j,i} \in \text{Br}_m$, сопряженных элементу a_1^{j+1} (соответственно, элементу a_1^{-2} для $s_{\bar{1}}$), либо пустое слово. Число $d(s_j) = d_j$ ($d_j = 0$, если s_j – пустое слово) называется *степенью* элемента s_j в S_{A_j} , вектор $d(s) = (d_{\bar{1}}, d_0, \dots, d_k)$ называется *мультистепенью* элемента s , и, наконец, вектор $d(c(s)) = (d_0, d_1 - d_{\bar{1}}, d_2, \dots, d_k)$ называется *мультистепенью* элемента $c(s) \in \bar{\mathcal{A}}_k$.

3.4. Разложение на множители брэйд-монодромии кривой Гурвица с A -особенностями. Пусть $\bar{H}$ – рг-общая кривая Гурвица в $\mathbf{F}_N$ с особенностями типа A (и, возможно, с отрицательными нодами) степени m . Используя терминологию полугрупп разложений на множители элементов из группы, в [6] было дано точное определение классического понятия *разложения на множители брэйд-монодромии* кривой $\bar{H}$ как элемента $\text{bmf}(\bar{H}) \in \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_\infty$ такого, что $\alpha(\text{bmf}(\bar{H})) = \Delta_m^{2N}$ (для некоторого $k \geq 0$), и множители которого описывают монодромию проекции рг вблизи различных точек из $Z(\bar{H})$. Если два элемента $s_1, s_2 \in \mathcal{A}_k$ являются разложением на множители брэйд-монодромии одной и той же кривой Гурвица $\bar{H}$, то они сопряжены друг другу, т.е. существует такой элемент $g \in \text{Br}_m$, что $s_2 = \lambda(g)(s_1)$. Разложение на множители $\text{bmf}(\bar{H})$ брэйд-монодромии рг-общей кривой $\bar{H}$ с A -особенностями может быть записано в виде $\text{bmf}(\bar{H}) = s_{\bar{1}} \cdot s_0 \cdot s_1 \cdot \dots \cdot s_k$, где

$$s_{\bar{1}} = \prod_{i=1}^{d_{\bar{1}}} (q_{\bar{1},i} a_1^{-2} q_{\bar{1},i}^{-1}) \in S_{\bar{1}}, \quad s_j = \prod_{i=1}^{d_j} (q_{j,i} a_1^{j+1} q_{j,i}^{-1}) \in S_{A_j}. \quad (2)$$

Индекс j (соответственно, $\bar{1}$) обозначает тип особенности: множители, входящие в $s_{\bar{1}}$, являются монодромиями вокруг отрицательных ноудов; множители, входящие в s_0 , соответствуют вертикальным точкам касания (т.е. кривая локально задана уравнением $y^2 = x$ в некоторых локальных координатах); множители, входящие в s_j , $j \geq 1$, соответствуют особым точкам типа A_j .

Легко показать, что верно также и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 3.7 [11]. Для любого $s \in \mathcal{A}_\infty$ такого, что $\alpha(s) = \Delta^{2N}$, существует кривая Гурвица $\bar{H} \subset \mathbf{F}_N$ с $\text{bmf}(\bar{H}) = s$.

Напомним также следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3.8 [6], [7]. Любые две рг-общие кривые $\bar{H}_1, \bar{H}_2$ в $\mathbf{F}_N$ с A -особенностями являются H -изотопными тогда и только тогда, когда $\text{bmf}(\bar{H}_1) = \text{bmf}(\bar{H}_2)$. Если $\bar{H}_1, \bar{H}_2$ являются симплектическими поверхностями, то эту изотопию можно выбрать так, чтобы она была симплектической.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9 [6]. Для любого элемента $s \in \mathcal{A}_\infty^0$ такого, что $\alpha(s) = \Delta_m^{2N}$, существует почти алгебраическая кривая $\bar{C} \subset \mathbf{F}_N$ с $\text{bmf}(\bar{C}) = s$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 3.5.

ТЕОРЕМА 3.10. Элемент $(\tilde{\delta}_m^2)^N \in S_{A_1}$ является единственным элементом среди элементов $s \in S_{A_1}$ таких, что $\alpha(s) = \Delta_m^{2N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 3.5, можно показать, что орбита элемента $(\tilde{\delta}_m^2)^N$ при действии группы Br_m сопряжением на полугруппе S_{A_1} состоит из единственного элемента $(\tilde{\delta}_m^2)^N$ (см. [6, предложение 1.2]).

Рассмотрим элемент $s \in S_{A_1}$ такой, что $\alpha(s) = \Delta_m^{2N}$. Согласно предложению 3.9 найдется почти алгебраическая кривая $\bar{H} \subset \mathbf{F}_N$ с $\text{bmf}(\bar{H}) = s$. Применяя перемасштабирование, можем считать, что $\bar{H}$ является симплектической поверхностью, совпадающей с алгебраической кривой над диском $D \subset \mathbb{P}^1$. Мы можем поменять комплексную структуру на $\mathbf{F}_N$ над дополнением к $\mathbb{P}^1 \setminus D$ так, что новая структура совпадет со стандартной в окрестности исключительного сечения E_N и преобразует $\bar{H}$ в псевдоголоморфную кривую. По теореме 1.3 кривая $\bar{H}$ симплектически изотопна алгебраической кривой $\bar{C}$ с $\text{bmf}(\bar{C}) = s$, так как изотопия сохраняет брэйд-монодромное разложение на множители (напомним, что каждая неприводимая компонента является сечением в $\mathbf{F}_N$).

Из упомянутого выше результата об изотопии следует единственность с точностью до сопряжения на элементы из Br_m элемента s ; следовательно, элементы s и $(\tilde{\delta}_m^2)^N$ являются сопряженными, а в силу замечания, сделанного в начале доказательства, получаем, что $s = (\tilde{\delta}_m^2)^N$.

Можно предложить и другой способ прямой проверки того, что $\text{bmf}(\bar{C}) = (\tilde{\delta}_m^2)^N$. Действительно, $\bar{C}$ является объединением m голоморфных сечений расслоения $\mathbf{F}_N$, находящихся в общем положении, поэтому достаточно вычислить брэйд-монодрию для общей конфигурации m прямых в $\mathbb{CP}^2$ (и свести общий случай к этому, заметив, что $\mathbf{F}_N$ является расслоенной суммой N копий расслоения $\mathbf{F}_1$, которое есть $\mathbb{CP}^2$ с одной раздутой точкой).

ЛЕММА 3.11. Пусть $\bar{H}$ – кривая Гурвица в $\mathbf{F}_N$ и $p_+, p_- \in Z(\bar{H})$ – две нодальные особые точки такие, что слои расслоения $\mathbf{F}_N$, проходящие через точки $p_\pm$, не проходят через другие точки из $Z(\bar{H})$. Предположим, что найдется простой гладкий путь $\gamma \subset \mathbb{P}^1$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) концы пути γ совпадают с проекциями $q_\pm := \text{pr}(p_\pm)$ нодальных точек $p_\pm$;
- 2) открытый путь γ не проходит через точки, лежащие в $\text{pr}(Z(\bar{H}))$;

3) пусть $q_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus Z(\overline{H})$ – базисная точка и F_0 – слой расслоения $\mathbf{F}_N$ над q_0 , $\gamma_- \subset \mathbb{P}^1 \setminus Z(\overline{H})$ – гладко вложенный путь от точки q_0 до точки q_- , $\gamma_+ \subset \mathbb{P}^1 \setminus Z(\overline{H})$ – путь от точки q_0 до q_+ , полученный как композиция путей γ_- и γ , и пусть брэйд-монодромии $\mu_{\pm}$ кривой $\overline{H}$ в группе $\text{kos Br}_m(F_0)$ в точках $p_{\pm}$ вдоль путей $\gamma_{\pm}$ связаны соотношением $\mu_+ \cdot \mu_- = 1 \in \text{Br}_m(F_0)$.

Тогда пара нодальных точек (p_+, p_-) может быть уничтожена с помощью регулярной гомотопии φ_t , постоянной вне произвольной заранее выбранной окрестности $U \subset F_N$ множества $\text{pr}^{-1}(\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X_{\gamma} := \text{pr}^{-1}(\gamma)$, $H_{\gamma} := \overline{H} \cap X_{\gamma}$, $F_q := \text{pr}^{-1}(q)$, $H_q := \overline{H} \cap F_q$ и $\gamma^{\circ} := \gamma \setminus \{q_-, q_+\}$. Многообразие X_{γ} диффеоморфно произведению $\gamma \times F_0$, а $H_{\gamma} \subset X_{\gamma}$ состоит из m гладких путей, которые обозначим через $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m$. Из условий леммы следует, что два из них, скажем $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, имеют общие концы p_-, p_+ , в которых эти пути пересекаются трансверсально, а остальные $m - 2$ пути являются гладкими, попарно не пересекаются друг с другом и не пересекаются с путями $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$.

Зафиксировав метрику на $\mathbf{F}_N$ и рассмотрев индуцированные метрики на каждом слое F_q , можно построить семейства $\delta_{\pm}(q)$ путей, которые гладко зависят от $q \in \gamma^{\circ}$ и обладают следующими свойствами:

1) каждый $\delta_{\pm}(q)$ является гладко вложенным путем в $F_q \setminus H_q$ с концами в точках $\tilde{\gamma}_1(q) := \tilde{\gamma}_1 \cap F_q$ и $\tilde{\gamma}_2(q) := \tilde{\gamma}_2 \cap F_q$;

2) для q , близкого к $q_{\pm}$, путь $\delta_{\pm}(q)$ является геодезическим путем в F_q , соединяющим точки $\tilde{\gamma}_1(q)$ и $\tilde{\gamma}_2(q)$.

Из условия 3), наложенного на монодромию, вытекает, что для каждого $q \in \gamma^{\circ}$ пути $\delta_+(q)$ и $\delta_-(q)$ изотопны в F_q как пути с фиксированными концами. Следовательно, можно предполагать, что $\delta_+(q) = \delta_-(q) =: \delta(q)$ для всех $q \in \gamma^{\circ}$. В этом случае объединение $\sqcup_{q \in \gamma^{\circ}} \delta(q) \sqcup \{p_-, p_+\}$ образует вложенный диск Уитни D , обладающий следующими свойствами:

1) диск D является образом гладкого вложения $f: \Delta \rightarrow \mathbf{F}_n$ диска $\Delta := \{(x, u) \in \mathbb{R}^2: x \in [-1, 1]; -(1 - x^2) \leq u \leq 1 - x^2\}$;

2) угловые точки $p_{\pm}$ диска D являются образами угловых точек $(\pm 1, 0)$ диска Δ ;

3) образы границ путей $I_{\pm} := \{(x, u): x \in (-1, 1), u = \pm(1 - x^2)\}$, лежащих в Δ , совпадают с путями $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$.

Из вышеизложенного следует, что можно уничтожить ноуды p_+ и p_- вдоль диска Уитни D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.12. Преобразование, описанное в доказательстве леммы, называется *уничтожением пары ноудов p_-, p_+ вдоль пути γ* .

Мы оставляем читателю доказательство того факта, что уничтожение пары ноудов вдоль пути γ , если оно возможно, зависит только от класса изотопных путей с фиксированными концами, которому принадлежит γ . Заметим также, что условие, наложенное на монодромию, является необходимым и достаточным условием для потенциальной возможности уничтожить пару ноудов.

Из леммы 3.11 следует, что если поверхность Гурвица $\overline{H}_2$ получена из поверхности Гурвица $\overline{H}_1$ в результате рождения пары ноудов, то

$$\text{bmf}(\overline{H}_2) = \text{bmf}(\overline{H}_1) \cdot g \cdot (g^{-1}),$$

где g – некоторый элемент из A_1 . В качестве следствия получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.13. *Две рг-общие кривые $\overline{H}_1, \overline{H}_2 \subset \mathbf{F}_N$ с A -особенностями регулярно гомотопны в классе каспидальных кривых Гурвица с отрицательными нудами тогда и только тогда, когда*

$$c(\text{bmf}(\overline{H}_1)) = c(\text{bmf}(\overline{H}_2)).$$

§ 4. Регулярная гомотопия

4.1. Слабая эквивалентность. Пусть $s \in \mathcal{A}_k$. Рассмотрим подгруппу $(\text{Br}_m)_s$ группы Br_m , порожденную множителями, входящими в s , и обозначим через $\gamma_s: (\text{Br}_m)_s \rightarrow \Sigma_m$ ограничение гомоморфизма $\gamma_m: \text{Br}_m \rightarrow \Sigma_m$ на $(\text{Br}_m)_s$. Для заданных $d = (d_1, d_0, \dots, d_k)$ и $b \in \text{Br}_m$ положим

$$\mathcal{A}_k(d, b) = \langle s \in \mathcal{A}_k \mid d(s) = (d_1, d_0, \dots, d_k), \alpha(s) = b \rangle.$$

ТЕОРЕМА 4.1. (i) *Для любой мультистепени $d = (d_1, d_0, \dots, d_k)$ и произвольного элемента $b \in \text{Br}_m$ множество $c(\mathcal{A}_k(d, b))$ состоит из конечного числа элементов.*

(ii) *Пусть s', s'' – два элемента из $\mathcal{A}_k(d, \Delta^{2N})$, $N \in \mathbb{N}$, такие, что $\gamma_{s'}((\text{Br}_m)_{s'}) = \gamma_{s''}((\text{Br}_m)_{s'') = \Sigma_m$. Тогда s' и s'' являются слабо эквивалентными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элемент $s \in \mathcal{A}_k(d, b)$. Он может быть представлен в виде произведения $s = s_1 \cdot s_0 \cdot \dots \cdot s_k$, где $s_i = g_{i,1} \cdot \dots \cdot g_{i,d_i} \in S_{A_i}$ и $g_{i,j} \in A_i$, т.е. каждый элемент $g_{i,j}$ сопряжен элементу a_1^{i+1} либо элементу a_1^{-2} в случае $i = 1$ (чтобы упростить обозначения, мы предполагаем, что $d_i \geq 1$ для всех i , а случай, когда какой-либо $d_i = 0$, не рассматриваем, так как он является тривиальным). Согласно лемме 3.6 существует элемент $p_{i,j} \in P_m$ такой, что $g_{i,j} = p_{i,j}^{-1} z_{k_{i,j}, l_{i,j}}^{i+1} p_{i,j}$ для некоторого $z_{k_{i,j}, l_{i,j}}$. Для фиксированного представления элемента s в виде произведения $s = s_1 \cdot s_0 \cdot \dots \cdot s_k$, где $s_i = g_{i,1} \cdot \dots \cdot g_{i,d_i} \in S_{A_i}$, положим

$$\bar{s}_i = (k_{i,1}, l_{i,1}) \cdot \dots \cdot (k_{i,d_i}, l_{i,d_i}) \in S_{\Sigma_m}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Пусть s', s'' – два элемента из $\mathcal{A}_k(d, b)$ такие, что для некоторых разложений на множители $s' = s'_1 \cdot s'_0 \cdot \dots \cdot s'_k$ и $s'' = s''_1 \cdot s''_0 \cdot \dots \cdot s''_k$ совпали упорядоченные наборы $\bar{s}' = (\bar{s}'_1, \bar{s}'_0, \dots, \bar{s}'_k)$ и $\bar{s}'' = (\bar{s}''_1, \bar{s}''_0, \dots, \bar{s}''_k)$ элементов из S_{Σ_m} . Тогда s' и s'' являются слабо эквивалентными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, пусть $s'_i = g'_{i,1} \cdot \dots \cdot g'_{i,d_i} \in S_{A_i}$, где все $g'_{i,j} \in A_i$, и $s''_i = g''_{i,1} \cdot \dots \cdot g''_{i,d_i} \in S_{A_i}$, где $g''_{i,j} \in A_i$. Поскольку $\bar{s}' = \bar{s}''$, то по лемме 3.6 с точностью до эквивалентности Гурвица можно предполагать, что $g'_{i,j}$ и $g''_{i,j}$ являются сопряженными с помощью крашенных кос некоторой степени некоторого одного и того же элемента $z_{k_{i,j}, l_{i,j}}$. Поэтому по лемме 3.6 для каждого $g'_{i,j}$ существует элемент $p_{i,j} \in P_m$ такой, что $g'_{i,j} = p_{i,j} g''_{i,j} p_{i,j}^{-1}$. Более того, мы можем считать, что $p_{i,j} = \prod_{q=1}^{M_{i,j}} z_{k_{q,i,j}, l_{q,i,j}}^2$. Положим $M = \sum_i \sum_j M_{i,j}$.

Рассмотрим

$$\tilde{\delta}_m^{-2} = \prod_{l=2}^m \prod_{k=l-1}^1 z_{k,l}^{-2} \in S_{A_1}.$$

Заметим, что $c(\tilde{\delta}_m^2 \cdot \tilde{\delta}_m^{-2}) = 1$ в $\mathcal{A}_k$ для каждого $k \geq 1$. Следовательно, для любого элемента $s \in \mathcal{A}_k$ элементы s и $s \cdot (\tilde{\delta}_m^2 \cdot \tilde{\delta}_m^{-2})^M$ являются слабо эквивалентными.

Из утверждения 3.1 следует, что $\tilde{\delta}_m^2$ коммутирует со всеми элементами из S_{B_m} . Следовательно, после подходящей последовательности замен Гурвица элемент $(\tilde{\delta}_m^2)^{M_{i,j}}$ может быть записан как

$$(\tilde{\delta}_m^2)^{M_{i,j}} = \prod_{q=1}^{M_{i,j}} z_{k_{q,i,j} l_{q,i,j}}^2 \cdot \delta_{i,j}$$

для некоторого $\delta_{i,j} \in S_{A_1}$. Теперь

$$\begin{aligned} s'' \cdot (\tilde{\delta}_m^2 \cdot \tilde{\delta}_m^{-2})^M &= \left(\prod_i \prod_{j=1}^{d_i} g''_{i,j} \right) \cdot (\tilde{\delta}_m^2 \cdot \tilde{\delta}_m^{-2})^M \\ &= \left(\prod_i \prod_{j=1}^{d_i} g''_{i,j} \cdot (\tilde{\delta}_m^2)^{M_{i,j}} \right) \cdot (\tilde{\delta}_m^{-2})^M \\ &= \left(\prod_i \prod_{j=1}^{d_i} \left((p_{i,j} g'_{i,j} p_{i,j}^{-1}) \cdot \prod_{q=1}^{M_{i,j}} z_{k_{q,i,j} l_{q,i,j}}^2 \cdot \delta_{i,j} \right) \right) \cdot (\tilde{\delta}_m^{-2})^M \\ &= \left(\prod_i \prod_{j=1}^{d_i} \left(\prod_{q=1}^{M_{i,j}} z_{k_{q,i,j} l_{q,i,j}}^2 \cdot g'_{i,j} \cdot \delta_{i,j} \right) \right) \cdot (\tilde{\delta}_m^{-2})^M. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого j элемент $\tilde{\delta}_m^2$ можно записать в виде $\tilde{\delta}_m^2 = g'_{1,j} \cdot \delta_{1,j}$ (так как элемент $\tilde{\delta}_m^2$ инвариантен при сопряжении согласно теореме 3.5). Таким образом,

$$s''_1 \cdot (\tilde{\delta}_m^2)^{d_1} = s''_1 \cdot \prod_{j=1}^{d_1} (g'_{1,j} \cdot \delta_{1,j});$$

это позволяет понизить число M до $\sum_{i \neq 1} \sum_j M_{i,j} + d_1$.

Применяя соотношения $a \cdot b = b \cdot r(a, b)$, элемент $g'_{i,j}$ перемещаем налево и в результате получаем

$$s'' \cdot (\tilde{\delta}_m^2 \cdot \tilde{\delta}_m^{-2})^M = s' \cdot \delta' \cdot (\tilde{\delta}_m^{-2})^M$$

для некоторого $\delta' \in S_{A_1}$. Имеем $\alpha(\delta') = \Delta^{2M}$, так как $\alpha(s') = \alpha(s'')$. Из теоремы 3.10 следует, что $\delta' = (\tilde{\delta}_m^2)^M$. Поэтому элементы s' и s'' являются слабо эквивалентными.

Поскольку Σ_m — конечная группа, то множество всех наборов $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_0, \dots, \bar{s}_k)$, где каждый элемент $\bar{s}_i$ есть произведение d_i транспозиций из S_{Σ_m} , также является конечным, что доказывает утверждение (i) теоремы 4.1.

Чтобы доказать утверждение (ii) теоремы 4.1, как и выше, положим

$$s' = s'_1 \cdot s'_0 \cdot s'_1 \cdot \dots \cdot s'_k, \quad (3)$$

где $s'_i = g'_{i,1} \cdot \dots \cdot g'_{i,d_i} \in S_{A_i}$ и все $g'_{i,j} \in A_i$, и, аналогично,

$$s'' = s''_1 \cdot s''_0 \cdot s''_1 \cdot \dots \cdot s''_k, \quad (4)$$

где $s''_i = g''_{i,1} \cdot \dots \cdot g''_{i,d_i} \in S_{A_i}$ и каждый $g''_{i,j} \in A_i$. Достаточно показать, что s' и s'' имеют такие разложения на множители вида (3) и (4), что наборы $\bar{s}' = (\bar{s}'_1, \bar{s}'_0, \dots, \bar{s}'_k)$ и $\bar{s}'' = (\bar{s}''_1, \bar{s}''_0, \dots, \bar{s}''_k)$ элементов из S_{Σ_m} совпадают друг с другом.

Заметим, что образ $\gamma_m(g'_{i,1}) \in \Sigma_m$ (соответственно, $\gamma_m(g''_{i,1}) \in \Sigma_m$) является либо транспозицией, если i – четное число, либо равен $1 \in \Sigma_m$, если i нечетно. По предположению теоремы элементы $\gamma_m(g'_{i,j})$ (соответственно, $\gamma_m(g''_{i,j})$) с четными индексами i порождают группу Σ_m .

Для любого $a \in A_i$ и каждого $b \in \text{Br}_m$ имеем

$$\gamma_m(\rho(a)(b)) = \gamma_m(\lambda(a)(b)) = \gamma_m(a)\gamma_m(b)\gamma_m(a), \quad (5)$$

если i четно, и

$$\gamma_m(\rho(a)(b)) = \gamma_m(\lambda(a)(b)) = \gamma_m(b), \quad (6)$$

если i нечетно.

Если i – нечетное число, а r является четным, то из (5) и (6) следует, что после следующей композиции замен Гурвица

$$\begin{aligned} g_{r,s} \cdot \tilde{s} \cdot g_{i,j} &= \lambda(g_{r,s})(\tilde{s}) \cdot \lambda(g_{r,s})(g_{i,j}) \cdot g_{r,s} \\ &= \lambda(g_{r,s})(\tilde{s}) \cdot \lambda(\lambda(g_{r,s})(g_{i,j}))(g_{r,s}) \cdot \lambda(g_{r,s})(g_{i,j}) \\ &= \lambda(\lambda(g_{r,s})(g_{i,j}))(g_{r,s}) \cdot \rho(\lambda(g_{r,s})(g_{i,j}))(g_{r,s})(\lambda(g_{r,s})(\tilde{s})) \cdot \lambda(g_{r,s})(g_{i,j}) \end{aligned}$$

мы будем иметь:

- (i) $\gamma_m(\lambda(\lambda(g_{r,s})(g_{i,j}))(g_{r,s})) = \gamma_m(g_{r,s})$;
- (ii) $\gamma_m(\rho(\lambda(\lambda(g_{r,s})(g_{i,j}))(g_{r,s}))(\lambda(g_{r,s})(\tilde{s}))) = \gamma_m(\tilde{s}_t)$ для каждого множителя $\tilde{s}_t$ элемента $\tilde{s}$;
- (iii) $\gamma_m(\lambda(g_{r,s})(g_{i,j})) = \gamma_m(g_{r,s})\gamma_m(g_{i,j})\gamma_m(g_{r,s})$.

Следовательно, так как элементы $\gamma_m(g'_{r,s})$ с четными r порождают группу Σ_m , применяя несколько раз такие последовательности замен Гурвица, можно получить такие разложения на множители элементов s' и s'' , что $\bar{s}'_i = \bar{s}''_i$ для нечетных i . После этого передвигаем налево с помощью замен Гурвица все множители s'_i с нечетными i , входящие в разложение элемента s' (и, аналогично, передвигаем все множители s''_i с нечетными i , входящие в s'').

Теперь, чтобы показать, что существуют разложения на множители элементов s' и s'' такие, что $\bar{s}'_i = \bar{s}''_i$ для четных i , заметим, что s' и s'' являются разложениями на множители брэйд-монодромий двух неприводимых каспидальных кривых Гурвица $f_j: S_j \rightarrow \bar{H}_j \subset \mathbf{F}_N \setminus E_N$, $j = 1, 2$, степени m в $\mathbf{F}_N$ (неприводимость следует из предположения о том, что $\gamma_{s'}((\text{Br}_m)_{s'}) = \gamma_{s''}((\text{Br}_m)_{s'') = \Sigma_m$).

Поскольку s' и s'' имеют одинаковые мультистепени, то $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ имеют один и тот же геометрический род g . Применяя теорему Гурвица к морфизмам $\text{pr} \circ f_j$, имеем

$$\tilde{\gamma}_m(s') = \tilde{\gamma}_m(s'') = h_g \in S_{\Sigma_m},$$

где h_g – элемент Гурвица рода g и $\tilde{\gamma}_m: \mathcal{A}_\infty \rightarrow S_{\Sigma_m}$ – гомоморфизм, индуцированный естественным эпиморфизмом $\gamma_m: \text{Br}_m \rightarrow \Sigma_m$.

Для завершения доказательства теоремы необходимо промаркировать с помощью целых чисел множители, входящие в разложения элементов $\tilde{\gamma}_m(s')$ и $\tilde{\gamma}_m(s'')$. Каждый множитель $\gamma_m(g'_{i,j})$ элемента h_g , соответствующий элементу $g'_{i,j}$ с четным i , маркируется числом i , множители $\gamma_m(g''_{i,j})$ маркируются по тому же правилу. Теперь достаточно показать, что $\tilde{\gamma}_m(s') = \tilde{\gamma}_m(s'')$ как произведения маркированных множителей. Таким образом, утверждение (ii) теоремы 4.1 вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. *Любые два маркированных разложения на множители элемента h_g с совпадающими множествами меток являются гурвиц-эквивалентными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что

$$(i, i+1)_{j_1} \cdot (i+1, i+2)_{j_2} = (i, i+1)_{j_2} \cdot (i+1, i+2)_{j_1}.$$

Для этого произведем три раза замену Гурвица $a \cdot b \mapsto (aba^{-1}) \cdot a$. В результате получим

$$\begin{aligned} (i, i+1)_{j_1} \cdot (i+1, i+2)_{j_2} &= (i, i+2)_{j_2} \cdot (i, i+1)_{j_1} \\ &= (i+1, i+2)_{j_1} \cdot (i, i+2)_{j_2} \\ &= (i, i+1)_{j_2} \cdot (i+1, i+2)_{j_1}. \end{aligned}$$

4.2. Доказательство основных результатов. Теорема 0.1 следует из теорем 3.7, 3.8, утверждения 3.13 и теоремы 4.1. Из условия о том, что кривые $\bar{H}_i$ являются неприводимыми, следует, что образы при гомоморфизме γ_m множителей, входящих в $\text{bmf}(\bar{H}_i)$ и являющихся транспозициями, действующими на $[1, m]$, порождают группу Σ_m , так что можно применить теорему 4.1, (ii).

Чтобы доказать следствие 0.2, заметим, что для любой обыкновенной каспидальной симплектической поверхности C в $(\mathbb{P}^2, \omega)$ степени m , являющейся псевдоголоморфной кривой относительно некоторой ω -ручной почти комплексной структуры J , можно определить разложение на множители ее брэйд-монодромии относительно общего пучка J -прямых (см. [6, § 4]); деформируя почти комплексную структуру в стандартную, получаем, что поверхность C симплектически C^1 -гладко изотопна в $\mathbb{P}^2$ симплектической поверхности C' , которая может быть рассмотрена как кривая Гурвица на поверхности F_1 , полученной в результате раздутия некоторой точки, лежащей в $\mathbb{P}^2$. Следовательно, можно применить теорему 0.1.

4.3. Другое доказательство. Приведем также другой (более геометрический) подход к доказательству теоремы 0.1.

Шаг 1. Как и выше, вначале сводим все к случаю, когда комбинаторика разветвленных накрытий $\text{rg}_0 = \text{rg}_{|\bar{H}_0}: \bar{H}_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\text{rg}_1 = \text{rg}_{|\bar{H}_1}: \bar{H}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ является одинаковой. Более точно, пусть $Z^0(\bar{H}_j)$ – дополнение в $Z(\bar{H}_j)$ к множеству всех положительных и отрицательных ноудов, и пусть $\Delta_j = \text{rg}(Z^0(\bar{H}_j))$. Поскольку числа особых точек каждого типа одинаковы, то существует диффеоморфизм пар $\beta: (\mathbb{P}^1, \Delta_0) \rightarrow (\mathbb{P}^1, \Delta_1)$, который отображает проекции A_i -особенностей кривой $\bar{H}_0$ в проекции A_i -особенностей кривой $\bar{H}_1$ для всех i . Кроме того, отождествим слои проекций rg_0 и rg_1 над базисной точкой из $\mathbb{P}^1$.

Неприводимость кривых $\bar{H}_0$ и $\bar{H}_1$ позволяет заменить диффеоморфизм β на такой, что монодромия кривой $\bar{H}_0$ вдоль любой замкнутой петли $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 - \Delta_0)$ действует на листах m -листного накрытия rg_0 точно так же, как и монодромия кривой $\bar{H}_1$ вдоль замкнутой петли $\beta(\gamma) \in \pi_1(\mathbb{P}^1 - \Delta_1)$. В частности, если мы рассмотрим только A_i -особенности с четными i , это означает, что для монодромий $\psi_j: \pi_1(\mathbb{P}^1 - \Delta_j) \rightarrow \Sigma_m$ со значениями в симметрической группе m -листных накрытий rg_0 и rg_1 выполнено тождество $\psi_1 \circ \beta_* = \psi_0$. Доказательство существования такой замены диффеоморфизма β на композицию β с некоторой подходящей последовательностью диффеоморфизмов, представляющих элементарные косы, мы опускаем, так как оно в основном совпадает с приведенным в п. 4.1 доказательством того, что мы можем считать, что упорядоченные наборы $\bar{s}'$ и $\bar{s}''$ являются одинаковыми; еще раз подчеркнем только, что в этом месте доказательства центральную роль играет теорема Гурвица о маркированных разложениях монодромии на множители из симметрической группы (см. утверждение 4.3).

Осуществив соответствующую H -изотопию кривой $\bar{H}_0$ (полученную с помощью подъема гомотопии, связывающей Id с диффеоморфизмом β в классе диффеоморфизмов $\mathbb{P}^1$), приводим доказательство к случаю, когда $\beta = \text{Id}$.

Шаг 2. Поскольку данные о ветвлении для проекций rg_0 и rg_1 уже согласованы на предыдущем шаге, то существуют риманова поверхность S и накрытие $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ с простейшими точками ветвления над точками из $\Delta_0 = \Delta_1$, соответствующими A_i -особенностям с четными i , такие, что $\bar{H}_0$ и $\bar{H}_1$ являются образами при отображении, индуцированном морфизмом f , двух гладких графиков сечений σ_0 и σ_1 линейного расслоения $L = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N))$ над S . Выберем локальные голоморфные координаты на $\mathbb{P}^1$ и локальные голоморфные тривиализации расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N)$ над малыми окрестностями каждой точки из Δ_0 и поднимем их до локальных голоморфных координат на S вблизи точек из $f^{-1}(\Delta_0)$ и на тривиализациях расслоения L .

Для каждой точки $p \in \Delta_0$, соответствующей некоторой A_i -особенности с четным i , существует единственная точка ветвления отображения f , скажем $\bar{p} \in S$, такая, что $f(\bar{p}) = p$. По построению сечения расслоения L , полученные подъемом кривых Гурвица, являются голоморфными над окрестностью точки $\bar{p}$. Кривая Гурвица $\bar{H} = f_*(\text{график } \sigma)$ имеет A_i -особенность над точкой p тогда и только тогда, когда у ростка функции σ в точке $\bar{p}$ (ее ряда разложения в локальных координатах) все члены $\sigma^{(k)}(\bar{p})$ нечетной степени (включительно до степени $i - 1$) обращаются в нуль, и этот росток имеет ненулевой коэффициент в $(i + 1)$ -м члене. Положим по определению, что $\mathcal{C}_p \subset C^\infty(L)$ – пространство гладких сечений

расслоения L , голоморфных над некоторой фиксированной окрестностью точки $\bar{p}$ и удовлетворяющих условию $\sigma^{(k)}(\bar{p}) = 0$ для всех нечетных $k = 1, \dots, i-1$, и пусть $\mathcal{B}_p = \{\sigma \in \mathcal{C}_p, \sigma^{(i+1)}(\bar{p}) \neq 0\}$.

Для каждой точки $p \in \Delta_0$, соответствующей некоторой A_i -особенности с нечетным i , имеем две точки $p', p'' \in f^{-1}(p)$ такие, что $\sigma(p') = \sigma(p'')$. Чтобы придать смысл этому равенству, напомним, что $L = f^*O_{\mathbb{P}^1}(N)$ и слои расслоения L , проходящие через p' и p'' , канонически изоморфны (более того, канонически изоморфны некоторые окрестности этих слоев). Сечения расслоения L , полученные в результате подъема кривых Гурвица, являются голоморфными над окрестностями точек p', p'' . Условием, что эти сечения возникли из A_i -особенности при $i = 2r + 1 \geq 3$, является то, что ростки сечения σ в точках p' и p'' совпадают вплоть до порядка r и различаются в $(r+1)$ -м члене.

Обозначим через $\mathcal{C}_p \subset C^\infty(L)$ пространство гладких сечений расслоения L , голоморфных над некоторыми фиксированными окрестностями точек p' и p'' и удовлетворяющих условию $\sigma^{(k)}(p') = \sigma^{(k)}(p'')$ для всех $0 \leq k \leq r$, и пусть

$$\mathcal{B}_p = \{\sigma \in \mathcal{C}_p, \sigma^{(r+1)}(p') \neq \sigma^{(r+1)}(p'')\}.$$

Окончательно, пусть $\mathcal{C} = \bigcap_{p \in \Delta_0} \mathcal{C}_p$ и $\mathcal{B} = \bigcap_{p \in \Delta_0} \mathcal{B}_p$. Заметим, что $\mathcal{C}$ является бесконечномерным комплексным векторным пространством, а $\mathcal{B}$ является дополнением к объединению конечного числа гиперплоскостей в $\mathcal{C}$. По построению сечения σ_0 и σ_1 , задающие $\bar{H}_0$ и $\bar{H}_1$, принадлежат пространству $\mathcal{B}$.

ЛЕММА 4.4. *Пространство $\mathcal{B}$ является линейно связным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данных сечения $\sigma \in \mathcal{B}$ и точки $p \in \Delta_0$ определим фазу $\varphi_\sigma(p) \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ с помощью формул

$$\varphi_\sigma(p) = \arg(\sigma^{(i+1)}(\bar{p})),$$

если p является A_i -особенностью с четным i , и

$$\varphi_\sigma(p) = \arg(\sigma^{(r+1)}(p'') - \sigma^{(r+1)}(p')),$$

если p — A_i -особенность с нечетным $i = 2r + 1$.

Для данных $\sigma_0, \sigma_1 \in \mathcal{B}$ выберем θ_0 , отличное от $\pi + \varphi_{\sigma_0}(p) - \varphi_{\sigma_1}(p)$ для всех $p \in \Delta_0$, и положим $\bar{\sigma}_0 = e^{i\theta_0}\sigma_0$. Рассмотрев дугу $\{e^{i\theta}\sigma_0, \theta \in [0, \theta_0]\}$, легко видеть, что σ_0 и $\bar{\sigma}_0$ принадлежат одной и той же компоненте линейной связности пространства $\mathcal{B}$. Поэтому, так как фазы $\bar{\sigma}_0$ и σ_1 никогда не являются противоположными друг другу, отрезок $\{t\bar{\sigma}_0 + (1-t)\sigma_1, t \in [0, 1]\}$ полностью содержится в $\mathcal{B}$.

Шаг 3. Для завершения доказательства рассмотрим гомотопию σ_t между σ_0 и σ_1 в $\mathcal{B}$. Для общего t образ графика сечения σ_t является кривой Гурвица $\bar{H}_t$, имеющей среди своих ненадальных особых точек столько же особых точек различных типов, сколько их есть у каждой из кривых $\bar{H}_0, \bar{H}_1$, а также кривая $\bar{H}_t$ имеет некоторое число положительных и отрицательных ноудов. Эти ноуды соответствуют парам точек q, q' , которые лежат в одном и том же слое отображения $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$, отличны от рассмотренных выше точек, принадлежащих прообразу $f^{-1}(\Delta_0)$, и для которых $\sigma_t(q) = \sigma_t(q')$. Точки самопересечения кривой $\bar{H}_t$ более высокого

порядка касания могут также возникать время от времени в процессе гомотопии $\{\bar{H}_t\}_{t \in [0,1]}$. Это происходит тогда, когда ростки сечений $\sigma_t(q)$ и $\sigma_t(q')$ равны с точностью до членов более высокого порядка; однако согласно лемме 2.8 с помощью произвольно малого шевеления кривых $\bar{H}_t$ такие самопересечения всегда могут быть удалены, за исключением случаев рождения и уничтожения пары ноудов. Следовательно, можно считать, что $\{\bar{H}_t\}$ является регулярной гомотопией.

§ 5. Пример косы, имеющей два неэквивалентных разложения на множители в S_{A_0}

В этом параграфе мы покажем, что обобщенная проблема Гарсайда имеет отрицательное решение в случае $m \geq 4$, т.е. покажем, что гомоморфизм произведения $\alpha: S_{A_0(m)} \rightarrow \text{Br}_m$ не является вложением при $m \geq 4$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Существуют два элемента $s_1, s_2 \in S_{A_0(4)}$ такие, что $s_1 \neq s_2$, но $\alpha(s_1) = \alpha(s_2) \in \text{Br}_4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$, где $\{a_1, a_2, a_3\}$ – множество стандартных порождающих в Br_4 . Рассмотрим элементы

$$\begin{aligned} s_1 &= (c^{-2}b)a(c^{-2}b)^{-1} \cdot b \cdot (ac^3)b(ac^3)^{-1} \cdot (ac^5b^{-1})a(ac^5b^{-1})^{-1} \cdot c \cdot c, \\ s_2 &= b \cdot (ac)b(ac)^{-1} \cdot (ac)b(ac)^{-1} \cdot (ac)^2b(ac)^{-2} \cdot (ac)^2b(ac)^{-2} \cdot (ac)^3b(ac)^{-3}. \end{aligned}$$

Имеем $s_1, s_2 \in S_{A_0(4)}$. Покажем, что $\alpha(s_1) = \alpha(s_2)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \alpha(s_1) &= (c^{-2}b)a(c^{-2}b)^{-1}b(ac^3)b(ac^3)^{-1}(ac^5b^{-1})a(ac^5b^{-1})^{-1}c^2 \\ &= c^{-2}bab^{-1}c(cbc)ac(cbc)cb^{-1}aba^{-1}c^{-3} \\ &= c^{-2}ba(b^{-1}cbcb)ac(bcbcb^{-1})aba^{-1}c^{-3} \\ &= c^{-2}ba(cbb)ac(bbc)aba^{-1}c^{-3} \\ &= c^{-2}(bacb)^3a^{-1}c^{-3}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \alpha(s_2) &= b(ac)b(ac)^{-1}(ac)b(ac)^{-1}(ac)^2b(ac)^{-2}(ac)^2b(ac)^{-2}(ac)^3b(ac)^{-3} \\ &= bacbbacbacbbacbacb(ac)^{-3} = (bacb)^3a^{-3}c^{-3}, \end{aligned}$$

и чтобы доказать, что $\alpha(s_1) = \alpha(s_2) \in \text{Br}_4$, достаточно проверить, что $c(bacb) = (bacb)a$ и $a(bacb) = (bacb)c$. Имеем

$$\begin{aligned} (bacb)a &= bcaba = bcbab = cbcab = c(bacb), \\ a(bacb) &= abacb = (bacb)c. \end{aligned}$$

Чтобы доказать, что $s_1 \neq s_2$, рассмотрим гомоморфизм $\tilde{\gamma}_4: S_{\text{Br}_4} \rightarrow S_{\Sigma_4}$, индуцированный естественным эпиморфизмом $\gamma_4: \text{Br}_4 \rightarrow \Sigma_4$. Имеем

$$\gamma_4(a) = (1, 2), \quad \gamma_4(b) = (2, 3), \quad \gamma_4(c) = (3, 4).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_4(s_1) &= \tilde{\gamma}_4((c^{-2}b)a(c^{-2}b)^{-1} \cdot b \cdot (ac^3)b(ac^3)^{-1} \cdot (ac^5b^{-1})a(ac^5b^{-1})^{-1} \cdot c \cdot c) \\ &= \tilde{\gamma}_4(bab^{-1} \cdot b \cdot (ac)b(ac)^{-1} \cdot (acb)a(acb)^{-1} \cdot c \cdot c) \\ &= (1, 3) \cdot (2, 3) \cdot (1, 4) \cdot (2, 4) \cdot (3, 4) \cdot (3, 4)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_4(s_2) &= \tilde{\gamma}_4(b \cdot (ac)b(ac)^{-1} \cdot (ac)b(ac)^{-1} \cdot (ac)^2b(ac)^{-2} \cdot (ac)^2b(ac)^{-2} \cdot (ac)^3b(ac)^{-3}) \\ &= \tilde{\gamma}_4(b \cdot (ac)b(ac)^{-1} \cdot (ac)b(ac)^{-1} \cdot b \cdot b \cdot (ac)b(ac)^{-1}) \\ &= (2, 3) \cdot (1, 4) \cdot (1, 4) \cdot (2, 3) \cdot (2, 3) \cdot (1, 4).\end{aligned}$$

Теперь легко видеть, что $s_1 \neq s_2$, так как группы $(\Sigma_4)_{\tilde{\gamma}_4(s_1)}$ и $(\Sigma_4)_{\tilde{\gamma}_4(s_2)}$ не изоморфны. Действительно, $(\Sigma_4)_{\tilde{\gamma}_4(s_1)} = \Sigma_4$ и

$$(\Sigma_4)_{\tilde{\gamma}_4(s_2)} = \{(1, 4), (2, 3)\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Список литературы

1. *Barraud J.-F.* Courbes pseudo-holomorphes équisingulières en dimension 4: PhD Thesis. Toulouse, 1998 // Bull. Soc. Math. France. 2000. V. 128. P. 179–206.
2. *Barraud J.-F.* Nodal symplectic spheres in $\mathbb{CP}^2$ with positive self-intersection // Internat. Math. Res. Notices. 1999. № 9. P. 495–508.
3. *Hofer H., Lizan V., Sikorav J.-C.* On genericity for holomorphic curves in four-dimensional almost-complex manifolds // J. of Geom. Anal. 1998. V. 7. P. 149–159.
4. *Ивашкович С. М., Шевчишин В. В.* Деформации некомпактных комплексных кривых и оболочки мероморфности сфер // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 9. С. 23–60.
5. *Ivashkovich S., Shevchishin V.* Structure of the moduli space in a neighborhood of a cusp-curve and meromorphic hulls // Invent. Math. 1999. V. 136. P. 571–602.
6. *Куликов Вик. С., Харламов В. М.* О брэйд-монодромных разложениях на множители // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 3. С. 79–118.
7. *Куликов Вик. С., Тайгер М.* Брэйд-монодромные разложения на множители и диффеоморфные типы // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 2. С. 311–341.
8. *Lalonde F., McDuff D.* The classification of ruled symplectic manifolds // Math. Res. Lett. 1996. V. 3. P. 769–778.
9. *Li T.-J., Liu A.-K.* Symplectic structure on ruled surfaces and a generalized adjunction formula // Math. Res. Lett. 1995. V. 2. P. 453–471.
10. *Micallef M., White B.* The structure of branch points in minimal surfaces and in pseudo-holomorphic curves // Ann. Math. 1994. V. 139. P. 35–85.
11. *Moishezon B.* The arithmetic of braids and a statement of Chisini // Contemporary Math. 1994. V. 164. P. 151–175.
12. *Moishezon B., Teicher M.* Braid group technique in complex geometry. I. Line arrangements in $\mathbb{CP}^2$ // Contemporary Math. 1988. V. 78. P. 425–555.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Department of Mathematics, MIT,

Cambridge MA 02139-4307, USA

и Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique,

91128 Palaiseau, France

Mathematisches Institut, Abteilung für reine Mathematik,

Albert-Ludwigs-Universität,

Eckerstrasse 1, D-79104 Freiburg, Germany

E-mail: kulikov@mi.ras.ru

auroux@math.mit.edu, auroux@math.polytechnique.fr

sewa@email.mathematik.uni-freiburg.de

Поступило в редакцию

13.01.2004