

УДК 512.7

Вик. С. Куликов

Старые и новый примеры поверхностей общего типа с $p_g = 0$

Рассмотрены поверхности общего типа геометрического рода $p_g = 0$, которые могут быть заданы как накрытия Галуа проективной плоскости, имеющие группу Галуа $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$, где $k \geq 2$ и q – простое число, и разветвленные вдоль некоторой конфигурации прямых. В качестве таких накрытий можно получить классическую поверхность Годо, поверхности Кампеделли, поверхности Бурниа и новую поверхность X с инвариантами $K_X^2 = 6$ и $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \subset \text{Tors}(X)$. Доказано, что группа автоморфизмов общей поверхности Кампеделли изоморфна группе $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Описаны неприводимые компоненты пространства модулей поверхностей, содержащих поверхности Бурниа. Доказано, что поверхность Бурниа S с $K_S^2 = 2$ имеет группу кручения $\text{Tors}(S) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ (следовательно, она принадлежит семейству поверхностей Кампеделли), т. е. соответствующее утверждение в статьях [9], [4], а также в книге [1, с. 237] о группе кручения поверхности Бурниа S с $K_S^2 = 2$ является не верным.

Библиография: 10 наименований.

Введение

Как известно, индекс самопересечения канонического класса поверхности общего типа геометрического рода $p_g = 0$ может принимать значения $K^2 = 1, \dots, 9$, и в прошлом столетии было доказано существование таких поверхностей для всех возможных значений K^2 . Тем не менее, наши знания о поверхностях общего типа геометрического рода, равного нулю, далеко не полны. В частности, до сих пор полностью не описаны пространства модулей таких поверхностей. Более того, не известен список всех возможных абелевых групп, которые могут быть реализованы как группы кручения этих поверхностей.

В настоящей статье исследованы поверхности общего типа с $p_g = 0$, которые могут быть заданы как накрытия Галуа проективной плоскости с группой Галуа $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$, где $k \geq 2$ и q является простым числом, разветвленные над некоторой конфигурацией прямых. В частности, классическая поверхность Годо [5], поверхности Кампеделли [3], [8], поверхности Бурниа [2] и новая поверхность X с $K_X^2 = 6$ и $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \subset \text{Tors}(X) = \text{Tors } H_1(X, \mathbb{Z}) = \text{Tors } H^2(X, \mathbb{Z})$ могут быть получены как такие накрытия. Доказано, что группа автоморфизмов общей поверхности Кампеделли изоморфна группе $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Показано, что поверхность Бурниа S с $K_S^2 = 2$ имеет группу кручения $\text{Tors}(S) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ (следовательно, она принадлежит семейству поверхностей Кампеделли; см. предложение 4.24), и тем самым

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 02-01-00786).

соответствующее утверждение в [9], [4] и в [1, с. 237] о группе кручения поверхности Бурниа S с $K_S^2 = 2$ является не верным.

Описание неприводимых компонент пространства модулей поверхностей, содержащих поверхности Бурниа, дает следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{M}_2 = \mathcal{C} & & \mathcal{M}_3 & & \mathcal{M}_4'' \subset \mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_4'' \cup \mathcal{M}_4' & & \mathcal{M}_5 & & \mathcal{M}_6 \\
 \cup & & \cup & & \cup & \cup & & \cup & \cup \\
 \tilde{\mathcal{B}}_2 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}}_3 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}}_4'' \subset \tilde{\mathcal{B}}_4 = \tilde{\mathcal{B}}_4'' \sqcup \tilde{\mathcal{B}}_4' & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}}_5 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}}_6
 \end{array}$$

в которой через \mathcal{M}_k обозначено объединение неприводимых компонент пространства модулей поверхностей с $p_g = 0$ и $K^2 = k$, содержащих поверхности Бурниа, и через \mathcal{C} – пространство модулей поверхностей Кампеделли. Точки подмногообразий $\tilde{\mathcal{B}}_k$ пространств \mathcal{M}_k соответствуют поверхностям Бурниа. Многообразия $\tilde{\mathcal{B}}_k$ при $k \neq 4$ унирациональны и $\tilde{\mathcal{B}}_4$ состоит из двух рациональных поверхностей (точки неприводимой компоненты $\tilde{\mathcal{B}}_4''$ параметризуют поверхности Бурниа с $K^2 = 4$, содержащие (-2) -кривую), $\tilde{\mathcal{B}}_2$ состоит из одной точки, $\tilde{\mathcal{B}}_3$ является рациональной кривой, $\dim \tilde{\mathcal{B}}_5 = 3$ и $\dim \tilde{\mathcal{B}}_6 = 4$. Подмногообразия $\tilde{\mathcal{B}}_k$ всюду плотны в \mathcal{M}_k при $k \geq 4$, $\dim \mathcal{M}_3 = 4$, и, как известно (см. [8]), \mathcal{C} также унирационально, $\dim \mathcal{C} = 6$. Стрелки в диаграмме показывают примыкания компонент (например, $\tilde{\mathcal{B}}_3 \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_4''$ означает, что поверхности Бурниа с $K^2 = 3$ являются вырождениями поверхностей Бурниа с $K^2 = 4$, имеющих (-2) -кривые). Отметим, что аналогичный результат о компоненте $\tilde{\mathcal{B}}_6$ был получен в [10] с использованием другой техники.

Статья организована следующим образом. В § 1 напоминаются основные факты о накрытиях Галуа $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ плоскости \mathbb{P}^2 с группой Галуа $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$, разветвленные вдоль конфигурации прямых $\bar{L} \subset \mathbb{P}^2$, и показано, как получить разрешение X особых точек многообразия Y в терминах особых точек конфигурации \bar{L} . Затем эти результаты используются в § 2 для вычисления K_X^2 и топологической эйлеровой характеристики $e(X)$, в § 3 напоминает алгоритм вычисления геометрического рода поверхности X . В § 4 рассмотрены упомянутые выше примеры и приведены доказательства основных результатов.

Автор выражает искреннюю благодарность Университету г. Падуа (Италия), во время пребывания в котором была начата работа над данной статьей.

§ 1. Абелевы накрытия плоскости, разветвленные в конфигурациях прямых

По определению накрытие Галуа гладкого алгебраического многообразия Y – это конечный морфизм $f: X \rightarrow Y$ нормального алгебраического многообразия X на Y такой, что вложение полей рациональных функций $\mathbb{C}(Y) \subset \mathbb{C}(X)$, индуцированное морфизмом f , является расширением Галуа. Как хорошо известно, конечный морфизм $f: X \rightarrow Y$ является накрытием Галуа с группой Галуа G тогда и только тогда, когда G совпадает с группой накрывающих преобразований, действующих транзитивно на каждом слое морфизма f . Кроме того, конечное разветвленное накрытие является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда неразветвленная часть этого накрытия (т.е. ограничение морфизма на дополнения

к ветвлениям вниз и вверх) является накрытием Галуа. Более того, морфизм накрытий Галуа из неразветвленной части одного разветвленного накрытия в неразветвленную часть другого может быть продолжен до морфизма разветвленных накрытий, если задано продолжение морфизма накрываемых многообразий в точки ветвления накрытий. В частности, разветвленное накрытие Галуа определяется однозначно с точностью до изоморфизма своей неразветвленной частью. Напомним также, что неразветвленное накрытие является накрытием Галуа с группой Галуа G тогда и только тогда, когда это топологическое накрытие ассоциировано с эпиморфизмом из фундаментальной группы накрываемого многообразия в G и, в частности, накрытия Галуа с абелевой группой Галуа G взаимно однозначно соответствуют эпиморфизмам из первой группы гомологий с целыми коэффициентами накрываемого многообразия в G . Все перечисленные свойства накрытий Галуа являются хорошо известными, и наиболее нетривиальная часть из них может быть получена, например, из теоремы Грауэрта–Ремерта [6].

Далее мы будем иметь дело только с накрытиями комплексной проективной плоскости \mathbb{P}^2 , разветвленными вдоль некоторой конфигурации прямых $\bar{L} = L_1 \cup \dots \cup L_n$. Простые петли λ_i , $1 \leq i \leq n$, вокруг прямых L_i порождают группу $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$. Они удовлетворяют соотношению

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0.$$

Подобно общим абелевым накрытиям Галуа, накрытие Галуа $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ с абелевой группой Галуа G , разветвленное вдоль \bar{L} , однозначно определяется некоторым эпиморфизмом $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow G$ и существует для любого такого эпиморфизма. Накрытие g разветвлено вдоль прямой $L_i \subset \bar{L}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\lambda_i) \neq 0$ и, более того, индекс ветвления морфизма g вдоль L_i совпадает с порядком элемента $\varphi(\lambda_i)$ в группе G .

Поскольку $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$, то существует, в частности, *универсальное накрытие* $g_{u(m)}: Y_{u(m)} \rightarrow \mathbb{P}^2$, соответствующее естественному эпиморфизму

$$\bar{\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

Простейшим примером такого накрытия является следующий

ПРИМЕР. Пусть конфигурация $\bar{L} = L_0 + L_1 + L_2 \subset \mathbb{P}^2$ задана уравнением $x_0x_1x_2 = 0$, где $(x_0 : x_1 : x_2)$ – однородные координаты в \mathbb{P}^2 . Легко видеть, что накрытие $g_{u(m)}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, заданное уравнениями $y_i = x_i^m$, $i = 0, 1, 2$, ассоциировано с эпиморфизмом

$$\bar{\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2 \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2.$$

Следующее утверждение является непосредственным следствием общих результатов о разветвленных накрытиях, упомянутых в начале этого параграфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ является накрытием Галуа с группой Галуа $G \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^k$, разветвленным вдоль \bar{L} , то $k \leq n - 1$ и для любого эпиморфизма $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}) \rightarrow G$ существует однозначно определенное накрытие Галуа $h: Y_{u(m)} \rightarrow Y$, индуцированное этим эпиморфизмом и такое, что $g_{u(m)} = g \circ h$.*

Далее ограничимся рассмотрением только накрытий Галуа с группой Галуа $G \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$ и будем строить их так, как это описано в предложении 1.1.

Положим

$$G_u = \{\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \mid \gamma_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\} \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{n-1},$$

и пусть $\check{G}_u \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{n-1}$ – двойственная (как векторное пространство над $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$) группа. Для элементов $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \in G_u$ и $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \check{G}_u$ спаривание $(\bar{\gamma}, \bar{a})$ задается формулой

$$(\bar{\gamma}, \bar{a}) = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j a_j \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что универсальное накрытие $g_u: Y_u \rightarrow \mathbb{P}^2$ ассоциировано с эпиморфизмом $\bar{\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow G_u$, отображающим λ_n в $(q-1, \dots, q-1)$ и λ_i с $1 \leq i \leq n-1$ в $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ с единицей, стоящей на i -м месте. Выберем, кроме того, прямую $L_\infty \subset \mathbb{P}^2$, находящуюся в общем положении с конфигурацией \bar{L} , и аффинные координаты (x, y) в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$. Пусть $l_i(x, y) = 0$ – линейное уравнение прямой $L_i \cap \mathbb{C}^2$. Положим $z_i = (l_i l_n^{q-1})^{1/q}$, $1 \leq i \leq n-1$. Тогда поле рациональных функций

$$K_u = \mathbb{C}(Y_u) = \mathbb{C}(x, y, z_1, \dots, z_{n-1})$$

на нормальном многообразии Y_u является расширением степени q^{n-1} поля рациональных функций $K = \mathbb{C}(x, y)$ на плоскости \mathbb{P}^2 . (Другими словами, прообраз дополнения $\mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ в многообразии Y_u естественным образом изоморфен нормализации аффинного подмногообразия в \mathbb{C}^{n+1} , заданного в координатах $x, y, z_1, \dots, z_{n-1}$ уравнениями $z_1^q = l_1 l_n^{q-1}, \dots, z_{n-1}^q = l_{n-1} l_n^{q-1}$.)

Для мультииндекса $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$, $0 \leq a_i \leq q-1$, положим

$$z^{\bar{a}} = \prod_{i=1}^{n-1} z_i^{a_i}.$$

Действие элементов $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \in G_u$ на элементах поля K_u задается формулой

$$\bar{\gamma}(z^{\bar{a}}) = \mu^{(\bar{\gamma}, \bar{a})} z^{\bar{a}},$$

где $\mu = e^{2\pi\sqrt{-1}/q}$ – корень из единицы q -й степени. Таким образом, группа Галуа $\text{Gal}(K_u/\mathbb{C}[x, y]) = G_u$ и поле

$$K_u = \bigoplus_{0 \leq a_i \leq q-1} \mathbb{C}(x, y) z^{\bar{a}}$$

раскладывается как векторное пространство над $\mathbb{C}(x, y)$ в конечную прямую сумму представлений группы G_u степени 1.

Пусть $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$ – эпиморфизм, заданный формулами $\varphi(\lambda_i) = (a_{i,1}, \dots, a_{i,k})$, где $a_{1,j} + \dots + a_{n,j} \equiv 0 \pmod{q}$ для $j = 1, \dots, k$, и пусть $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ – соответствующее накрытие Галуа. Эпиморфизм φ индуцирует эпиморфизм $\psi: G_u \rightarrow G$. Согласно предложению 1.1 существует однозначно определенное накрытие Галуа $h: Y_u \rightarrow Y$. Оно задает вложение $h^*: \mathbb{C}(Y) \rightarrow K_u$ поля функций $\mathbb{C}(Y)$ многообразия Y в поле функций $K_u = \mathbb{C}(Y_u)$.

Поскольку $\text{Gal}(K_u/h^*(\mathbb{C}(Y))) = \ker \psi$, то, очевидно, поле $h^*(\mathbb{C}(Y))$ совпадает с подполем $K_\varphi = \mathbb{C}(x, y, w_1, \dots, w_k)$ поля K_u , где $w_j = z_1^{a_{1,j}} \dots z_{n-1}^{a_{n-1,j}}$, и

$$\text{Gal}(K_u/K_\varphi) = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \in G \mid \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,j} \gamma_i \equiv 0 \pmod{q}, 1 \leq j \leq k \right\}.$$

По построению поверхность Y является нормальным многообразием с изолированными особыми точками. Особые точки многообразия Y могут возникать только над r -кратными точками конфигурации \bar{L} при $r \geq 2$, т. е. над точками пересечения r прямых L_{i_1}, \dots, L_{i_r} .

Назовем два элемента группы $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$ *линейно независимыми над $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$* , если они порождают в $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$ подгруппу, изоморфную $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$.

ЛЕММА 1.2. Пусть p – двойная точка конфигурации \bar{L} , и пусть $\varphi(\lambda_{i_1})$ и $\varphi(\lambda_{i_2})$ являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ в группе $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$. Тогда поверхность Y является неособой в каждой точке прообраза $g^{-1}(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = L_{i_1} \cap L_{i_2}$. Выберем малую окрестность U точки p в \mathbb{P}^2 и локальные координаты u_1, u_2 в U так, что $U \simeq \{|u_1|^2 + |u_2|^2 < \varepsilon\}$ и $u_j = 0$ является уравнением прямой L_{i_j} . Тогда

$$H_1(U \setminus (L_{i_1} \cup L_{i_2}), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

В каждой точке $\tilde{p} \in g^{-1}(p)$ росток $V \rightarrow U$ накрытия $Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ является G' -накрытием, где G' – это образ группы $H_1(U \setminus (L_{i_1} \cup L_{i_2}), \mathbb{Z})$ при композиции $\varphi \circ i_*$ эпиморфизма φ и гомоморфизма $i_*: H_1(U \setminus (L_{i_1} \cup L_{i_2}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z})$, индуцированного вложением многообразий. Более того, это G' -накрытие определяется однозначно гомоморфизмом $\varphi \circ i_*$. Отождествляя $\varphi(\lambda_{i_1}), \varphi(\lambda_{i_2})$ со стандартными порождающими группы $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$, получаем изоморфизм между $V \rightarrow U$ и накрытием, заданным уравнениями $z_1^q = u_1, z_2^q = u_2$. Следовательно, V является неособым многообразием.

В примерах, которые будут рассмотрены ниже, чтобы разрешить особые точки многообразия Y над r -кратными точками конфигурации \bar{L} при $r \geq 3$, достаточно раздуть все эти точки. Пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – раздутие этих точек, L'_i – собственный прообраз прямой L_i , $E_p = \sigma^{-1}(p)$ – рациональная кривая, являющаяся прообразом r -кратной точки p , и $\varepsilon_p \in H_1(\tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus \sigma^{-1}(\bar{L}), \mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z})$ – простая петля вокруг кривой E_p .

Композиция отождествления $H_1(\tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus \sigma^{-1}(\bar{L}), \mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z})$ и эпиморфизма φ является эпиморфизмом $\varphi: H_1(\tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus \sigma^{-1}(\bar{L}), \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$. Рассмотрим соответствующее накрытие Галуа $f: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$.

ЛЕММА 1.3. Пусть $p = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_r}$ – r -кратная точка конфигурации \bar{L} . Тогда $\varepsilon_p = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы проверить требуемое равенство, достаточно рассмотреть общий пучок прямых, проходящих через точку p .

ЛЕММА 1.4. Если для каждой r -кратной точки $p = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_r}$ конфигурации \bar{L} при $r \geq 3$ либо пары элементов $\varphi(\varepsilon_p)$ и $\varphi(\lambda_{i_j})$, $1 \leq j \leq r$, являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ в $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$, либо $\varphi(\varepsilon_p) = 0$, то X является неособой поверхностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 1.2 и 1.3.

Пусть p_1, \dots, p_s – множество r -кратных точек, $r \geq 2$, конфигурации прямых \bar{L} , и пусть $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$ – эпиморфизм, заданный формулами $\varphi(\lambda_i) = (a_{i,1}, \dots, a_{i,k})$, где $a_{1,j} + \dots + a_{n,j} \equiv 0 \pmod{q}$ для всех $j = 1, \dots, k$. Предположим, что все особые точки конфигурации \bar{L} являются φ -хорошими точками, т. е. для всех r -кратных точек $p_{i_1, \dots, i_r} = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_r}$ конфигурации \bar{L} с $r \geq 2$ либо пары элементов $\varphi(\varepsilon_{p_{i_1, \dots, i_r}})$ и $\varphi(\lambda_{i_j})$, $1 \leq j \leq r$, являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ в $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$, либо $\varphi(\varepsilon_{p_{i_1, \dots, i_r}}) = 0$. Скажем, что r -кратная точка $p_{i_1, \dots, i_r} = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_r}$ не является точкой ветвления относительно φ , если $\varphi(\varepsilon_{p_{i_1, \dots, i_r}}) = 0$.

Пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – раздутие с центром во всех r -кратных точках с $r \geq 3$ и во всех двойных точках конфигурации \bar{L} , не являющихся точками ветвления. Согласно лемме 1.4 полученная поверхность X является разрешением особых точек поверхности Y и накрытие f может быть включено в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\nu} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \tilde{\mathbb{P}}^2 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

в которой ν – регулярное бирациональное отображение.

Пусть N_φ – множество всех r -кратных точек, не являющихся точками ветвления относительно φ . Рассмотрим подпространство в $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\}$ решений следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_r\}} x_i &= 0, \quad p_{i_1, \dots, i_r} \in N_\varphi. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Обозначим через n_φ ранг этой линейной системы над $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Имеем $k \leq k_\varphi = n - n_\varphi$, так как ранг множества векторов

$$A_\varphi = \{(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})\}_{j=1, \dots, k}$$

равен k и векторы из A_φ удовлетворяют уравнениям (1.1). Расширим множество A_φ до базиса $A_{u,\varphi}$ пространства решений над $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ линейной системы (1.1), добавив $k_\varphi - k$ векторов к множеству A_φ :

$$A_{u,\varphi} = \{(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})\}_{j=1, \dots, k_\varphi},$$

и рассмотрим эпиморфизм

$$\psi_\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow G_{u,\varphi} = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{k_\varphi},$$

заданный формулами $\psi_\varphi(\lambda_i) = (a_{i,1}, \dots, a_{i,k_\varphi})$. Очевидно, эпиморфизм φ может быть разложен в композицию $\varphi = \eta \circ \psi_\varphi$, где $\eta: (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{k_\varphi} \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$ – проекция на первые k координат. Пусть $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$ и $h_{u,\varphi}: \bar{X} \rightarrow X$ – накрытия Галуа, ассоциированные соответственно с ψ_φ и η (см. предложение 1.1). Заметим, что группа Галуа накрытия $h_{u,\varphi}$ изоморфна группе $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{k_\varphi - k}$.

Группа $\text{Tors}(X) = \text{Tors } H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \text{Tors } H^2(X, \mathbb{Z})$ называется *группой кручения* многообразия X . Обозначим через $\text{Tors}_q(X)$ подгруппу в $\text{Tors}(X)$, состоящую из элементов порядка q .

Из вышеизложенного следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть $f: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$ – накрытие Галуа, ассоциированное с эпиморфизмом $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$, такое, что все особые точки конфигурации прямых \bar{L} являются φ -хорошими. Предположим также, что $\varphi(\lambda_i) \neq 0$ для каждой прямой $L_i \subset \bar{L}$. Тогда $h_{u,\varphi}: \bar{X} \rightarrow X$ является неразветвленным накрытием.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Пусть накрытие $f: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$ то же, что и в предложении 1.5. Если иррегулярность $q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и $k_\varphi - k > 0$, то группа q -кручения $\text{Tors}_q(X)$ является нетривиальной. В частности, существует вложение группы $\ker \eta \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{k_\varphi - k}$ в $\text{Tors}_q(X)$.

§ 2. Вычисление K^2 и эйлеровой характеристики

Как и выше, пусть накрытие Галуа $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ с группой Галуа $G \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$, разветвленное вдоль конфигурации прямых $\bar{L} = L_1 + \dots + L_n$, определено с помощью эпиморфизма $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow G$ такого, что $\varphi(\lambda_i) \neq 0$ для каждой $L_i \subset \bar{L}$. Предположим также, что все особые точки конфигурации \bar{L} являются φ -хорошими. Обозначим через $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ композицию раздутий с центрами во всех r -кратных точках конфигурации \bar{L} с $r \geq 3$ и во всех двойных точках, которые не являются точками ветвления относительно φ , и через $f: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$ накрытие, индуцированное эпиморфизмом φ . Поскольку все особые точки конфигурации \bar{L} являются φ -хорошими, то поверхность X неособа.

Обозначим через $E_p = \sigma^{-1}(p)$ кривую, полученную в результате раздутия r -кратной точки p , $L'_i = \sigma^{-1}(L_i)$ – собственный прообраз прямой L_i , $C_i =$

$f^{-1}(L'_i)$ и $D_p = f^{-1}(E_p)$ – собственные прообразы кривых L'_i и E_p соответственно. Пусть T_r – это множество всех r -кратных точек конфигурации \bar{L} . Положим

$$T'_r = \{p \in T_r \mid p \text{ не является точкой ветвления для } \varphi\},$$

$$T''_r = T_r \setminus T'_r, \quad T' = \bigcup_{r \geq 2} T'_r, \quad T'' = \bigcup_{r \geq 3} T''_r, \quad T = T' \cup T''.$$

Обозначим через $t'_r = \#T'_r$ (соответственно, $t''_r = \#T''_r$) число точек, принадлежащих множеству T'_r (соответственно, T''_r), и положим $t_r = t'_r + t''_r$. Заметим, что полный прообраз $f^*(L'_i) = qC_i$ для каждой прямой $L_i \subset \bar{L}$ и $f^*(E_p) = qD_p$ для каждой точки $p \in T''$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Индекс самопересечения K_X^2 канонического класса K_X поверхности X равен*

$$K_X^2 = q^{k-2} \left[(qn - n - 3q)^2 - \sum_{r \geq 2} (rq - q - r)^2 t'_r - \sum_{r \geq 3} (rq - 2q - r + 1)^2 t''_r \right]. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Канонический класс поверхности $\tilde{\mathbb{P}}^2$ равен

$$K_{\tilde{\mathbb{P}}^2} = -3L + \sum_{p \in T} E_p,$$

где $L = \sigma^*(\mathbb{P}^1)$ – полный прообраз прямой $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$, и по формуле присоединения получим

$$K_X = f^*(K_{\tilde{\mathbb{P}}^2}) + (q-1) \left(\sum C_i + \sum_{p \in T''} D_p \right).$$

Кроме того, имеем

$$q \sum C_i = f^* \left(nL - \sum_{r \geq 3} \sum_{p \in T_r} r E_p - 2 \sum_{p \in T'_2} E_p \right),$$

$$q \sum_{p \in T''} D_p = f^* \left(\sum_{p \in T''} E_p \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} qK_X &= qf^*(K_{\tilde{\mathbb{P}}^2}) + (q-1) \left(q \sum C_i + q \sum_{p \in T''} D_p \right) \\ &= qf^* \left(-3L + \sum_{p \in T} E_p \right) \\ &\quad + (q-1)f^* \left(nL - \sum_{r \geq 3} \sum_{p \in T_r} r E_p - 2 \sum_{p \in T'_2} E_p \right) \\ &\quad + (q-1)f^* \left(\sum_{p \in T''} E_p \right) \end{aligned}$$

и, окончательно,

$$qK_X = f^* \left((qn - n - 3q)L - \sum_{r \geq 2} \sum_{p \in T'_r} (rq - q - r)E_p - \sum_{r \geq 3} \sum_{p \in T''_r} (rq - 2q - r + 1)E_p \right).$$

Для каждого дивизора $D \in \text{Pic } \tilde{\mathbb{P}}^2$ имеем

$$(f^*(D), f^*(D))_X = \deg f \cdot (D, D)_{\tilde{\mathbb{P}}^2} = q^k (D, D)_{\tilde{\mathbb{P}}^2},$$

и теорема следует из равенств $(L, L)_{\tilde{\mathbb{P}}^2} = 1$, $(L, E_p)_{\tilde{\mathbb{P}}^2} = 0$ и $(E_p, E_p)_{\tilde{\mathbb{P}}^2} = -1$ для каждой кривой E_p .

Теорема 2.1 будет применяться в § 4 в случае, когда конфигурации \bar{L} и эпиморфизмы φ удовлетворяют следующим условиям: $t'_2 = 0$, $t'_4 = 0$ и $t_r = 0$ при $r \geq 5$. В этом случае формула (2.1) принимает следующий вид:

$$K_X^2 = q^{k-2} [(qn - n - 3q)^2 - (2q - 3)^2 t'_3 - (q - 2)^2 t''_3 - (2q - 3)^2 t''_4]. \quad (2.2)$$

Введем обозначение

$$D_K = (qn - n - 3q)L - \sum_{r \geq 2} \sum_{p \in T'_r} (rq - q - r)E_p - \sum_{r \geq 3} \sum_{p \in T''_r} (rq - 2q - r + 1)E_p.$$

Поскольку f является конечным накрытием Галуа, то имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть дивизор D_K является объемным, т. е. $D_K^2 > 0$. Тогда:

- (i) поверхность X не является минимальной моделью, если и только если существует неприводимая кривая $C \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ такая, что $(D_K, C)_{\tilde{\mathbb{P}}^2} < 0$;
- (ii) канонический класс поверхности X не является обильным, если и только если существует неприводимая кривая $C \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ такая, что $(D_K, C)_{\tilde{\mathbb{P}}^2} \leq 0$.

ТЕОРЕМА 2.3. Топологическая эйлерова характеристика поверхности X выражается формулой

$$e(X) = q^{k-2} \left(3q^2 - 2n(q^2 - q) + q^2 \sum_{r \geq 2} t'_r + (q - 1)^2 t''_2 + ((r - 1)(q - 1)^2 + 1) \sum_{r \geq 3} t''_r \right). \quad (2.3)$$

Доказательство. Обозначим через

$$B = \sum_{i=1}^n L'_i + \sum_{p \in T''} E_p$$

кривую ветвления морфизма f . Легко видеть, что

$$e(\text{Sing } B) = \# \text{Sing } B = t''_2 + \sum_{r \geq 3} r t''_r, \quad (2.4)$$

где $\text{Sing } B$ – множество двойных точек кривой B .

Топологическая эйлерова характеристика кривой B определяется следующим образом:

$$e(B) = 2 \left(n + \sum_{r \geq 3} t''_r \right) - \# \text{Sing } B = 2n - t''_2 - \sum_{r \geq 3} (r-2)t''_r, \quad (2.5)$$

так как B является дивизором с нормальными пересечениями и топологическая эйлерова характеристика каждой неприводимой компоненты кривой B равна двум.

Топологическая эйлерова характеристика поверхности $\tilde{\mathbb{P}}^2$ выражается формулой

$$e(\tilde{\mathbb{P}}^2) = 3 + \sum_{r \geq 2} t'_r + \sum_{r \geq 3} t''_r. \quad (2.6)$$

Имеем

$$\begin{aligned} e(X) &= q^k e(\tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus B) + q^{k-1} e(B \setminus \text{Sing } B) + q^{k-2} e(\text{Sing } B) \\ &= q^{k-2} (q^2 e(\tilde{\mathbb{P}}^2) - (q^2 - q)e(B) - (q-1)e(\text{Sing } B)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Чтобы завершить доказательство, достаточно подставить соотношения (2.4)–(2.6) в (2.7).

В случае конфигураций прямых \bar{L} и эпиморфизмов φ , удовлетворяющих условиям $t'_2 = 0$, $t'_4 = 0$ и $t_r = 0$ при $r \geq 5$, формула (2.3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} e(X) &= q^{k-2} (3q^2 - 2n(q^2 - q) + q^2 t'_3 + (q-1)^2 t''_2 \\ &\quad + (2(q-1)^2 + 1)t''_3 + (3(q-1)^2 + 1)t''_4). \end{aligned} \quad (2.8)$$

§ 3. Вычисление геометрического рода

Цель данного параграфа – объяснить общий алгоритм, который будет применен для вычисления геометрического рода. Фактически, если геометрический род накрытия вычислен, то тем самым вычислена и иррегулярность накрытия, так как их разность является топологическим инвариантом, равным согласно формуле Нетера $\frac{K_X^2 + e(X)}{12} - 1$. В процессе вычисления будет постоянно использоваться инвариантность геометрического рода при бирациональных преобразованиях, которая позволяет на каждом шаге использовать ту неособую бирациональную модель, которая более удобна для вычислений.

Алгоритм вычисления, который будет использоваться, не является новым, он содержится, например, в [7]. Напомним его основные шаги.

3.1. Редукция к циклическим накрытиям. Пусть $g: Y_G \rightarrow \mathbb{P}^2$ – накрытие Галуа с абелевой группой Галуа $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^k$, разветвленное вдоль кривых $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{P}^2$, где Y_G – нормальная поверхность. Как и выше, такое накрытие определяется эпиморфизмом $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \cup B_i) \rightarrow G$. Запишем его в виде

$$\varphi(\gamma_i) = m_{1,i}\alpha_1 + \dots + m_{k,i}\alpha_k, \quad i = 1, \dots, n,$$

где α_j – стандартные порождающие группы $G = \bigoplus (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, γ_i – стандартные порождающие группы $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \cup B_i)$, двойственные к кривым B_i , и $m_{j,i} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $0 \leq m_{j,i} < q$, – координаты элементов $\varphi(\gamma_i)$ относительно базиса α_j . В этих обозначениях поверхность Y_G является нормализацией проективного замыкания аффинной поверхности $Y_{G,0} \subset \mathbb{C}^{m+2}$, заданной уравнениями

$$z_j^q = \prod_{i=1}^n h_i^{m_{j,i}}(x, y), \quad j = 1, \dots, k,$$

где $h_i(x, y)$ – уравнения кривых B_i в некоторой карте $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$.

Пусть X_G – минимальное разрешение особенностей поверхности Y_G . Как известно, оно существует, единственно и действие группы G на Y_G однозначно поднимается до регулярного действия на X_G .

Рассмотрим действие группы G на пространстве $H^0(X_G, \Omega_{X_G}^2)$ регулярных 2-форм. Оно задает разложение

$$H^0(X_G, \Omega_{X_G}^2) = \bigoplus H_{(s_1, \dots, s_k)}$$

в прямую сумму собственных подпространств $H_{(s_1, \dots, s_k)}$, где $\omega \in H_{(s_1, \dots, s_k)}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_j(\omega) = e^{2\pi s_j \sqrt{-1}/q} \omega$ для $j = 1, \dots, k$. Пусть $H \subset G$ – некоторая подгруппа и $G_1 = G/H$. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} Y_G & \xrightarrow{h} & Y_{G_1} \\ g \downarrow & & \downarrow g_1 \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

в которой $g_1: Y_{G_1} \rightarrow \mathbb{P}^2$ является накрытием Галуа, ассоциированным с эпиморфизмом $\varphi_1 = i \circ \varphi$, где $i: G \rightarrow G_1 = G/H$ – канонический эпиморфизм. Отображение h индуцирует рациональное доминантное (т. е. имеющее всюду плотный образ) отображение $X_G \rightarrow X_{G_1}$, и это отображение, как любое доминантное отображение неособых многообразий, преобразует голоморфные 2-формы в голоморфные 2-формы. Таким образом, подпространство $h^*(H^0(X_{G_1}, \Omega_{X_{G_1}}^2)) \subset H^0(X_G, \Omega_{X_G}^2)$ хорошо определено и совпадает с подпространством

$$H^0(X_G, \Omega_{X_G}^2)^H \subset H^0(X_G, \Omega_{X_G}^2)$$

элементов, неподвижных при действии группы H . С другой стороны, собственное подпространство $H_{(s_1, \dots, s_k)}$ неподвижно при действии элемента $x_1\alpha_1 + \dots + x_k\alpha_k$ тогда и только тогда, когда $x_1s_1 + \dots + x_ks_k = 0 \pmod{q}$. Следовательно, сумма $\bigoplus H_{(\theta s_1, \dots, \theta s_k)}$, взятая по $\theta \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, совпадает с $H^0(\tilde{X}_G, \Omega_{\tilde{X}_G}^2)^H$, где

$$H = \{x_1\alpha_1 + \dots + x_k\alpha_k \mid x_1s_1 + \dots + x_ks_k = 0 \pmod{q}\}.$$

Таким образом, эта сумма изоморфна пространству $H^0(X_{G/H}, \Omega_{X_{G/H}}^2)$. Это рассуждение приводит к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Геометрический род $p_g(X_G) = \dim H^0(X_G, \Omega_{X_G}^2)$ поверхности X_G выражается формулой*

$$p_g(X_G) = \sum_H p_g(X_{G/H}),$$

где суммирование ведется по всем подгруппам H группы G ранга $\text{rk } H = \text{rk } G - 1$.

3.2. Циклические накрытия. Пусть теперь $G = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ является циклической группой. Чтобы вычислить $p_g(X_G)$, выберем однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ в \mathbb{P}^2 так, что прямая $x_0 = 0$ не принадлежит дивизору ветвления накрытия $g: Y_G \rightarrow \mathbb{P}^2$. Как и выше, обозначим через Y_G нормализацию проективного замыкания поверхности, заданной в \mathbb{C}^3 уравнением

$$z^p = h(x, y),$$

где $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$,

$$h(x, y) = \prod_{i=1}^n h_i^{m_i}(x, y)$$

и $h_i(x, y)$ – неприводимые уравнения в $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ кривых B_i , составляющих дивизор ветвления, $0 < m_i < q$. Заметим, что степень

$$\deg h(x, y) = \sum m_i \deg h_i(x, y) = mq$$

делится на q , так как прямая $x_0 = 0$ не принадлежит дивизору ветвления.

Легко видеть, что над картой $x_1 \neq 0$ многообразии Y_G совпадает с нормализацией поверхности, заданной в \mathbb{C}^3 уравнением

$$w^q = \tilde{h}(u, v),$$

где $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{y}{x}$, $\tilde{h}(u, v) = u^{mq} h(\frac{1}{u}, \frac{v}{u})$ и $w = zu^m$.

3.2.1. *Условие регулярности над общей точкой базы.* Рассмотрим форму

$$\omega \in H^0(Y_G \setminus \text{Sing } Y_G, \Omega_{Y_G \setminus \text{Sing } Y_G}^2)$$

и найдем критерий для ее регулярности вне дивизора ветвления и множества особых точек.

Над картой $x_0 \neq 0$ форма ω может быть записана в виде

$$\omega = \left(\sum_{j=0}^{q-1} z^j g_j(x, y) \right) \frac{dx \wedge dy}{z^{q-1}}, \quad (3.1)$$

где $g_j(x, y)$ – некоторые рациональные функции от x и y . Форма

$$\frac{dx \wedge dy}{z^{q-1}}$$

не имеет ни нулей, ни полюсов вне прообраза дивизора ветвления. Следовательно, ω является регулярной в некоторой точке $(a, b) \notin \sum B_i$ тогда и только тогда, когда все $g_j(x, y)$ регулярны в этой точке.

Действительно, если некоторая функция $g_j(x, y)$ не регулярна в точке (a, b) , то сумма

$$\sum_{j=0}^{q-1} z^j g_j(x, y)$$

может быть записана в виде

$$\frac{\sum_{j=0}^{q-1} z^j P_j(x, y)}{P_q(x, y)},$$

где $P_j(x, y)$, $j = 0, \dots, q$, – такие многочлены, что $P_j(a, b) \neq 0$ для некоторого $j < q$ и $P_q(a, b) = 0$. Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{q-1} z^j P_j(a, b) = 0$$

во всех q точках, принадлежащих прообразу $f^{-1}(a, b)$, так как в противном случае ω не была бы регулярной формой над точкой (a, b) . С другой стороны, это невозможно, поскольку нетривиальный многочлен степени меньше q не может иметь q корней.

3.2.2. *Условие регулярности над бесконечно удаленной прямой.* Рассмотрим форму ω над картой $x_1 \neq 0$,

$$\omega = - \left(\sum_{j=0}^{q-1} w^j \frac{\tilde{g}_j(u, v)}{u^{jm + \deg g_j}} \right) \frac{1}{u^{3-m(q-1)}} \frac{du \wedge dv}{w^{q-1}}.$$

Аргументы, аналогичные приведенным выше, показывают, что критерий регулярности эквивалентен следующему ограничению на степени рациональных функций g_j :

$$\deg g_j(x, y) \leq (q - j - 1)m - 3. \quad (3.2)$$

3.2.3. *Условие регулярности над неособой точкой кривой ветвления.* Рассмотрим форму

$$\omega = \left(\sum_{j=0}^{q-1} z^j g_j(x, y) \right) \frac{dx \wedge dy}{z^{q-1}}$$

над неособой точкой (a, b) одной из компонент B_{i_0} кривой ветвления. Пусть r_j – порядок нуля (или полюса, если $r_j < 0$) функции g_j вдоль кривой B_{i_0} , т.е. $g_j = \bar{g}_j h_{i_0}^{r_j}$, где функция \bar{g}_j не обращается в нуль и не имеет полюсов вдоль кривой B_{i_0} . Так как точка (a, b) является неособой точкой кривой B , мы можем предполагать, что $h_{i_0}(x, y)$ и некоторая функция $g(x, y)$ являются локальными аналитическими координатами в некоторой окрестности U точки (a, b) (обозначим их через u и v). Таким образом, над U поверхность Y_G (после аналитической замены координат) изоморфна нормализации $Y_{G, \text{loc}}$ поверхности в \mathbb{C}^3 , заданной уравнением

$$z^q = u^{k_{i_0}}.$$

На поверхности $Y_{G, \text{loc}}$ найдется такая функция w , что $u = w^q$, $z = w^{m_{i_0}}$, и такая, что функции w и y являются аналитическими координатами на $Y_{G, \text{loc}}$. Рассмотренная выше дифференциальная 2-форма ω имеет следующий вид в новых координатах:

$$\omega = \left(\sum_{j=0}^{q-1} w^{j m_{i_0}} \bar{g}_j(x, y) w^{q r_j} \right) \frac{q w^{q-1} dw \wedge dv}{w^{(q-1)m_{i_0}}}.$$

Легко видеть, что

$$j_1 m_{i_0} + q r_{j_1} + q - 1 - (q - 1) m_{i_0} \neq j_2 m_{i_0} + q r_{j_2} + q - 1 - (q - 1) m_{i_0},$$

если $0 < m_{i_0} < q$, $0 \leq j_1, j_2 \leq q - 1$ и $j_1 \neq j_2$. Следовательно, ω является регулярной формой над неособой точкой (a, b) , принадлежащей кривой B_{i_0} , тогда и только тогда, когда

$$j m_{i_0} + q r_j + q - 1 - (q - 1) m_{i_0} \geq 0$$

для $0 \leq j \leq q - 1$. Более того, если ω является регулярной формой над точками кривой B_{i_0} , то числа r_j должны быть не меньше нуля, так как при $0 < m_{i_0} < q$, $0 \leq j \leq q - 1$ и $r_j \leq -1$ мы получили бы

$$j m_{i_0} + q r_j + q - 1 - (q - 1) m_{i_0} < 0.$$

Отсюда следует, что если ω является регулярной формой, то все рациональные функции $g_j(x, y)$ являются регулярными всюду в \mathbb{C}^2 вне коразмерности два. Следовательно, $g_j(x, y)$ должны быть многочленами от x и y . Более того, многочлены $g_j(x, y)$ должны делиться на $h_i^{r_j}(x, y)$, где r_j – наименьшее целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству

$$q r_j \geq (q - j - 1) m_i - q + 1. \quad (3.3)$$

3.2.4. *Условие регулярности над особой точкой кривой ветвления.* Обозначим через $\nu: X_G \rightarrow Y_G$ минимальное разрешение особых точек поверхности Y_G и через E исключительный дивизор морфизма ν . Пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция σ -процессов с центрами в особых точках кривой B (и их прообразах) такая, что $\sigma^{-1} \circ f \circ \nu(E_i)$ является кривой для каждой неприводимой компоненты E_i дивизора E . Обозначим через Z нормализацию поверхности $\tilde{\mathbb{P}}^2 \times_{\mathbb{P}^2} Y_G$, и пусть $g: X_G \rightarrow Z$ – бирациональное отображение, индуцированное морфизмами ν и σ . Из условия, наложенного на σ , следует, что для любой формы $\omega \in H^0(Z \setminus \text{Sing } Z, \Omega_{Z \setminus \text{Sing } Z}^2)$ ее прообраз $g^*(\omega)$ является регулярной формой в общей точке каждой кривой E_i и поэтому продолжается до регулярной формы на все X_G . Следовательно, пространство $H^0(X_G, \Omega_{X_G}^2)$ изоморфно пространству $H^0(Z \setminus \text{Sing } Z, \Omega_{Z \setminus \text{Sing } Z}^2)$.

Таким образом, необходимо рассмотреть 2-форму ω , записанную в виде (3.1), и найти критерий ее регулярности в точках, принадлежащих $Z \setminus \text{Sing } Z$. Это может быть сделано в результате последовательного применения выбранных выше σ -процессов. Рассмотрим только первое раздутие, так как оно достаточно для вычисления геометрического рода в примерах, которые будут рассмотрены ниже.

Представим еще раз поверхность Y_G как нормализацию поверхности, заданной уравнением

$$z^q = h(x, y).$$

Обозначим через r порядок нуля функции $h(x, y)$ в точке $(0, 0)$, $r = sq + c$, $0 \leq c < q$, и осуществим σ -процесс с центром в этой точке. В подходящей карте этот σ -процесс $\sigma: \mathbb{C}_{(u,v)}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{(x,y)}^2$ задается уравнениями $x = u$, $y = uv$. Нормализация Z_1 поверхности $Y_G \times_{\mathbb{C}_{(x,y)}^2} \mathbb{C}_{(u,v)}^2$ бирациональна нормализации поверхности, заданной уравнением

$$w^q = u^c \bar{h}(u, v),$$

где $w = z/u^s$ и $\bar{h}(u, v) = h(u, uv)/u^r$. Имеем

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\sum_{j=0}^{q-1} z^j g_j(x, y) \right) \frac{dx \wedge dy}{z^{q-1}} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{q-1} w^j \bar{g}_j(u, v) u^{sj+s_j+1-s(q-1)} \right) \frac{du \wedge dv}{w^{q-1}}, \end{aligned}$$

где s_j – порядок нуля функции $g_j(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Применяя неравенство (3.3), получаем необходимые условия для регулярности прообраза формы ω в общей точке исключительного дивизора: порядок нуля s_j каждой функции $g_j(x, y)$ в особой точке кривой ветвления B кратности r является наименьшим целым числом, удовлетворяющим неравенству

$$qs_j \geq (q - j - 1)r - 2q + 1. \quad (3.4)$$

Для вычисления геометрического рода каждой из поверхностей X_{G_i} нужно найти все регулярные 2-формы, имеющие такой же вид, как и в формуле (3.1), и которые удовлетворяют критериям (3.2)–(3.4).

Изложенное выше приводит к следующему утверждению о q -листном циклическом накрытии, разветвленном вдоль конфигурации прямых $\bar{L} = L_1 + \dots + L_n$, в случаях $q = 2$ и $q = 3$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть X – разрешение особенностей двулистного накрытия $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, разветвленного вдоль $\bar{L} = L_1 + \dots + L_n$. Обозначим через T_r множество r -кратных точек конфигурации прямых \bar{L} и $T = \cup T_r$. Тогда $n = 2t$ является четным числом и

$$p_g(X) = \dim_{\mathbb{C}} \left\{ \bar{s} \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-3)) \mid \bar{s} \text{ имеет нуль порядка не меньше } \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil - 2 \text{ в точке } p \in T_r \text{ для } \forall p \in T \right\},$$

где $\lceil \frac{a}{b} \rceil$ – наименьшее целое число, которое больше или равно $\frac{a}{b}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Пусть X – разрешение особенностей трехлистного накрытия Галуа $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, в неоднородных координатах заданного уравнением

$$z^3 = \prod_{i=1}^n l_i(x, y)^{m_i},$$

где $l_i(x, y) = 0$ – уравнение прямой L_i и каждое $m_i = 1$ или 2 , а сумма $\sum m_i = 3t$ делится на 3 . Обозначим через T_r множество r -кратных точек дивизора $\prod_{i=1}^n l_i(x, y)^{m_i} = 0$, $T = \cup T_r$ и $\tilde{l}(x, y) = \prod_{i=1}^n l_i(x, y)^{m_i - 1}$. Тогда

$$p_g(X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_0 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_1,$$

где

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ s \in H^0\left(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\left(2t - 3 - \sum (m_i - 1)\right)\right) \mid s\tilde{l} \text{ имеет нуль порядка не меньше } 2\left\lceil \frac{r+1}{3} \right\rceil - 2 \text{ в точке } p \in T_r \text{ для } \forall p \in T \right\}$$

и

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ \bar{s} \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-3)) \mid \bar{s} \text{ имеет нуль порядка не меньше } \left\lceil \frac{r+1}{3} \right\rceil - 2 \text{ в точке } p \in T_r \text{ для } \forall p \in T \right\}.$$

§ 4. Примеры

4.1. Поверхности Кампеделли. Пусть $\bar{L} = L_1 + \dots + L_7$ – конфигурация прямых в \mathbb{P}^2 , состоящая из семи прямых. Занумеруем их ненулевыми элементами $\alpha_i \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Пусть конфигурация \bar{L} не имеет r -кратных точек при $r \geq 4$, и если \bar{L} имеет тройную точку $p_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = L_{\alpha_1} \cap L_{\alpha_2} \cap L_{\alpha_3}$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$. Такую конфигурацию прямых будем называть *конфигурацией Кампеделли*. Рассмотрим накрытие $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, индуцированное эпиморфизмом $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, заданным по правилу $\varphi(\lambda_{\alpha_i}) = \alpha_i$.

Поверхность Y имеет особые точки, лежащие только над тройными точками $p_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$. Чтобы разрешить их, раздуем все тройные точки и рассмотрим индуцированное накрытие Галуа $f: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$. Пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция раздутий с центрами в тройных точках. Построенную поверхность X будем называть *поверхностью Кампеделли*. Обозначим через $E_{\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k} = \sigma^{-1}(p_{\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k})$ исключительную кривую, лежащую над точкой $p_{\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k}$. Поскольку $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k \neq 0$ для тройных точек, каждая кривая $E_{\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k}$ является кривой ветвления накрытия f . Из леммы 1.4 следует, что X является неособой поверхностью, так как элементы $\varphi(\varepsilon_{\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k}) = \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ и α_i (соответственно, α_j и α_k) линейно независимы в G . Действительно, $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ и α_i являются линейно зависимыми в группе G тогда и только тогда, когда $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k = \alpha_i$, т. е. когда $\alpha_j = \alpha_k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Построенные выше поверхности Кампеделли X являются поверхностями общего типа с $K_X^2 = 2$, $p_g = 0$ и $\text{Tors}(X) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 2.2 следует, что $2K_X = |\tilde{f}^*(L)|$, где $L = \sigma^*(\mathbb{P}^1)$ – полный прообраз прямой $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$. Следовательно, X является поверхностью общего типа. Более того, она является минимальной моделью, так как $(L, C)_{\tilde{\mathbb{P}}^2} \geq 0$ для каждой кривой $C \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$. Применяя (2.2) и (2.8), легко видеть, что $K_X^2 = 2$ и $e(X) = 10$. Следовательно, согласно формуле Нётера арифметический род $p_a = 1 - q + p_g = 1$. Как и выше, чтобы вычислить геометрический род p_g , достаточно вычислить геометрические роды семи циклических накрытий, соответствующих семи эпиморфизмам ψ_k , $k = 1, \dots, 7$, группы $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ в циклическую группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Легко видеть, что каждое из этих накрытий задается в неоднородных координатах уравнением вида $w_k^2 = l_{\alpha_{i_1}} l_{\alpha_{i_2}} l_{\alpha_{i_3}} l_{\alpha_{i_4}}$, где $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4}$ – элементы группы G такие, что $\psi_k(\alpha_{i_j}) = 1$. Применяя утверждение 3.2, легко проверить, что геометрический род каждого из этих накрытий равен нулю. Следовательно, поверхность X имеет геометрический род $p_g = 0$.

Чтобы показать, что $\text{Tors}(X) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, рассмотрим универсальное накрытие $f_{u(2)}: X_{u(2)} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$, соответствующее эпиморфизму

$$\bar{\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6,$$

и накрытие $h: X_{u(2)} \rightarrow X$, соответствующее эпиморфизму $\psi: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6 \rightarrow G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Согласно предложению 1.5 и следствию 1.6 накрытие h является неразветвленным и $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \subset \text{Tors}(X)$. Следовательно (см. [8]), $\text{Tors}(X) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

Классическая поверхность Кампеделли S (см. [3]) – это разрешение особенностей двойного накрытия $\tilde{g}: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^2$, разветвленного в объединении трех квадрик Q_1, Q_2, Q_3 и кватрики C_4 в \mathbb{P}^2 таких, что кривая $B = Q_1 + Q_2 + Q_3 + C_4$ имеет шесть особых точек типа $[3, 3]$ (особая точка типа $[3, 3]$ означает, что после раздутия с центром в особой точке собственный прообраз ростка кривой B состоит из трех неприводимых гладких ветвей, пересекающихся трансверсально друг с другом).

Рассмотрим накрытие $f: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$, разветвленное вдоль конфигурации Кампеделли $\bar{L} = \sum L_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \setminus \{0\}$, имеющей три тройных точки. Эта конфигурация \bar{L} изображена на рис. 1. Покажем, что классическая поверхность Кампеделли S изоморфна поверхности X .

Чтобы увидеть этот изоморфизм, рассмотрим раздутие $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ с центром в точках p_1, p_2, p_3 и обозначим через $E_i = \sigma^{-1}(p_i)$ исключительную кривую, лежащую над точкой p_i , а собственный прообраз $\sigma^{-1}(L_{\alpha_i}) \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ обозначим снова через L_{α_i} . Можно проверить, что

$$\varphi(\varepsilon_i) = (0, 0, 1) \tag{4.1}$$

для $i = 1, 2, 3$. Кривые $L_{(1,0,0)}, L_{(1,1,0)}, L_{(0,1,0)}$ в $\tilde{\mathbb{P}}^2$ имеют индекс самопересечения, равный -1 . Следовательно, их можно стянуть с помощью моноидального преобразования $\tau: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ (композиция $\tau \circ \sigma^{-1}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ является квадратичным преобразованием плоскости с центром в точках p_1, p_2, p_3). Кривые $L_i = \tau(E_i)$, $i = 1, 2, 3$, и кривые $\tau(L_{(1,0,1)}), \tau(L_{(0,1,1)}), \tau(L_{(1,1,1)})$ являются

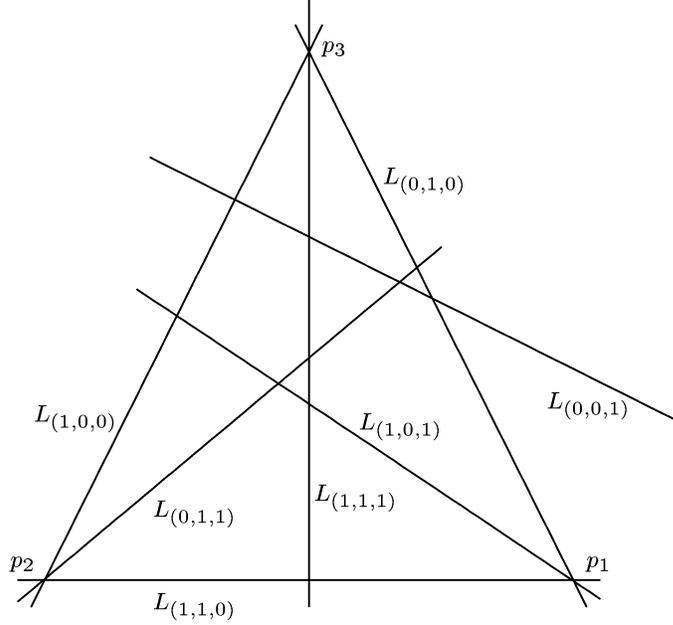


Рис. 1

прямыми, а $\tau(L_{(0,0,1)})$ является коникой в \mathbb{P}^2 . Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\nu} & \tilde{Y} \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{g} \\ \tilde{\mathbb{P}}^2 & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где \tilde{Y} является нормальной поверхностью, $\nu: X \rightarrow \tilde{Y}$ – бирациональное отображение и $\tilde{g}: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^2$ – накрытие Галуа, разветвленное вдоль прямых L_i , $i = 1, 2, 3$, $\tau(L_{(1,0,1)})$, $\tau(L_{(0,1,1)})$, $\tau(L_{(1,1,1)})$ и $\tau(L_{(0,0,1)})$. Поскольку $\varphi(\lambda_{(0,0,1)}) = (0, 0, 1)$, то, принимая во внимание (4.1), легко видеть, что \tilde{g} может быть разложено в композицию $\tilde{g} = g_1 \circ \tilde{g}_1$, где $g_1: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ является накрытием Галуа с группой Галуа $G_1 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, разветвленное вдоль прямых $\tau(L_{(1,0,1)})$, $\tau(L_{(0,1,1)})$, $\tau(L_{(1,1,1)})$ (см. пример в § 1), а $\tilde{g}_1: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^2$ – накрытие Галуа с группой Галуа $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, разветвленное вдоль $Q_i = g_1^{-1}(L_i)$, $i = 1, 2, 3$, и $C_4 = g_1^{-1}(\tau(L_{(0,0,1)}))$, где Q_1, Q_2, Q_3 – квадратики и C_4 – кватрика в \mathbb{P}^2 такие, что кривая $B = Q_1 + Q_2 + Q_3 + C_4$ имеет шесть особых точек типа $[3, 3]$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Группа автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ общей поверхности Кампеделли X изоморфна $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ и совпадает с группой G накрывающих преобразований накрытия $f: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{L} \subset \mathbb{P}^2$ – конфигурация Кампеделли, не имеющая тройных точек, и предположим также, что если автоморфизм \tilde{h} плоскости \mathbb{P}^2 остав-

ляет неподвижной конфигурацию \bar{L} (т.е. $h(\bar{L}) = \bar{L}$), то $h = \text{id}$. Рассмотрим накрытие $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, ассоциированное с эпиморфизмом $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, заданным равенствами $\varphi(\lambda_{\alpha_i}) = \alpha_i$. Поскольку конфигурация \bar{L} не имеет тройных точек, то $Y = X$ является неособой поверхностью и $g = f$. Морфизм f индуцирует расширение полей $f^*(\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)) \subset \mathbb{C}(X)$. Как и в § 1, выберем бесконечно удаленную прямую L_∞ , координаты (x, y) в $\mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ и отождествим $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)$ с полем рациональных функций $\mathbb{C}(x, y)$.

Рассмотрим элемент $\alpha \in \text{Tors}_2(X) = \text{Tors}(X)$, $\alpha \neq 0$. Линейная система $|K_X + \alpha|$ не пуста, и дивизор D принадлежит $|K_X + \alpha|$ для некоторого $\alpha \in \text{Tors}_2(X_s)$ тогда и только тогда, когда $2D = f^*(\tilde{L})$ для некоторого элемента $\tilde{L} \in |L|$, где L – прямая в \mathbb{P}^2 . Действительно, по теореме Римана–Роха линейная система $|K_X + \alpha|$ не пуста, так как

$$\dim H^2(X, \mathcal{O}_X(K_X + \alpha)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(\alpha)) = 0.$$

Пусть $D_\alpha \in |K_X + \alpha|$. Тогда $2D_\alpha \in |2K_X|$. Из теоремы Римана – Роха получаем, что $\dim H^0(X, 2K_X) = K_X^2 + 1 = 3$. С другой стороны, из утверждения 2.2 следует, что $2K_X = f^*(L)$ и $\dim H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = 3$. Следовательно, $|2K_X| = f^*(|L|)$ и $D \in |K_X + \alpha|$ для некоторого $\alpha \in \text{Tors}_2(X)$ тогда и только тогда, когда $2D = f^*(\tilde{L})$ для некоторого $\tilde{L} \in |L|$.

Легко видеть, что существуют ровно семь прямых $\tilde{L} \in |L|$, для которых дивизоры $f^*(\tilde{L})$ делятся на 2, а именно $L_\alpha \subset \tilde{L}$, $\alpha \in \text{Tors}_2(X)$, $\alpha \neq 0$. Таким образом, имеем $\frac{1}{2}f^*(L_\alpha) = D_\alpha \in |K_X + \alpha|$.

Пусть $h: X \rightarrow X$ – некоторый автоморфизм. Тогда он индуцирует изоморфизмы $h^*: \text{Tors}(X) \rightarrow \text{Tors}(X)$ и

$$h^*: H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + \alpha)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + h^*(\alpha)))$$

для каждого $\alpha \in \text{Tors}(X)$. Следовательно, $h^*(D_\alpha) = D_{h^*(\alpha)}$ для $\alpha \in \text{Tors}_2(X)$, $\alpha \neq 0$. Автоморфизм h индуцирует действие h^* на группе $\text{Div } X$. Имеем

$$\begin{aligned} h^*(f^*(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})) &= h^*(2D_{\alpha_1} - 2D_{\alpha_2}) = 2D_{h^*(\alpha_1)} - 2D_{h^*(\alpha_2)} \\ &= f^*(L_{h^*(\alpha_1)} - L_{h^*(\alpha_2)}) \end{aligned}$$

для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Tors}(X)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$. Следовательно,

$$h^* \left(f^* \left(\frac{l_{\alpha_1}(x, y)}{l_{\alpha_2}(x, y)} \right) \right) = c_{\alpha_1, \alpha_2} f^* \left(\frac{l_{h^*(\alpha_1)}(x, y)}{l_{h^*(\alpha_2)}(x, y)} \right), \quad (4.2)$$

где c_{α_1, α_2} – некоторая константа, так как каждая рациональная функция определяется однозначно с точностью до умножения на константу своим дивизором нулей и полюсов. Из (4.2) следует, что h^* индуцирует автоморфизм \tilde{h}^* поля $\mathbb{C}(x, y)$ такой, что $f^* \circ \tilde{h}^* = h^* \circ f^*$, так как функции $\frac{l_{\alpha_1}(x, y)}{l_{\alpha_2}(x, y)}$ порождают поле $\mathbb{C}(x, y)$.

Более того, автоморфизм \tilde{h}^* индуцирует автоморфизм \tilde{h} плоскости \mathbb{P}^2 такой, что $\tilde{h}(\bar{L}) = \bar{L}$. Следовательно, $\tilde{h} = \text{id}$ и $h \in \text{Gal}(X/\mathbb{P}^2)$.

ТЕОРЕМА 4.3 (ср. [8]). *Пространство модулей \mathcal{C} поверхностей Кампеделли является unirationalным многообразием, $\dim \mathcal{C} = 6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя те же аргументы, которые использовались в доказательстве теоремы 4.2, можно показать, что поверхности Кампеделли X_1 и X_2 , определенные с помощью конфигураций прямых Кампеделли \bar{L}_1 и \bar{L}_2 , изоморфны тогда и только тогда, когда существует линейное преобразование h плоскости \mathbb{P}^2 , переводящее \bar{L}_1 в \bar{L}_2 .

Осуществив подходящее линейное преобразование плоскости \mathbb{P}^2 и подходящий автоморфизм группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, можно предполагать, что в конфигурации прямых $\bar{L} = \sum L_\alpha$ прямые $L_{(1,0,0)}$, $L_{(0,1,0)}$, $L_{(1,1,0)}$ и $L_{(1,1,1)}$ заданы соответственно уравнениями $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ и $z_0 + z_1 + z_2 = 0$. Следовательно, конфигурация прямых \bar{L} определяется точкой из подмножества V , всюду плотного в $(\mathbb{P}^2 \setminus \{\text{четыре точки}\})^3$. Очевидно, что для любой точки $v_0 \in V$ множество $A_{v_0} \subset V$, состоящее из точек, для которых соответствующие конфигурации прямых \bar{L}_v , $v \in A_{v_0}$, могут быть преобразованы в \bar{L}_{v_0} с помощью линейного преобразования плоскости \mathbb{P}^2 , является конечным. Следовательно, пространство модулей \mathcal{C} является unirationalным многообразием, $\dim \mathcal{C} = 6$ (см. также следствия 4.23 и 4.25).

4.2. Поверхности Бурниа. Пусть $\bar{L}_s = L_1 + \dots + L_9$ – конфигурация девяти прямых в \mathbb{P}^2 , изображенная на рис. 2. Эта конфигурация \bar{L}_s имеет три четырехкратные точки p_1, p_2, p_3 и s ($s = 0, \dots, 4$) тройных точек p_{3+i} , $0 < i \leq s$. Такие конфигурации прямых будем называть *конфигурациями Бурниа*.

Рассмотрим накрытие $g: Y_s \rightarrow \mathbb{P}^2$, индуцированное эпиморфизмом $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}_s, \mathbb{Z}) \rightarrow G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, заданным формулами

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1) &= \varphi(\lambda_2) = \varphi(\lambda_3) = (1, 0), \\ \varphi(\lambda_4) &= \varphi(\lambda_5) = \varphi(\lambda_6) = (0, 1), \\ \varphi(\lambda_7) &= \varphi(\lambda_8) = \varphi(\lambda_9) = (1, 1).\end{aligned}$$

Поверхность Y_s имеет $3 + s$ особых точек, лежащих над четырехкратными точками p_j , $j = 1, 2, 3$, и тройными точками p_{3+i} , $1 \leq i \leq s$. Пусть $\sigma: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция раздутий этих точек. Обозначим через $E_j = \sigma^{-1}(p_j)$, $1 \leq j \leq 3 + s$, исключительную кривую, лежащую над точкой p_j , и рассмотрим индуцированное накрытие Галуа $f: X_s \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$. Данная поверхность X_s называется *поверхностью Бурниа*. Имеем

$$\varphi(\varepsilon_1) = (1, 1), \quad \varphi(\varepsilon_2) = (1, 0), \quad \varphi(\varepsilon_3) = (1, 1), \quad \varphi(\varepsilon_{3+i}) = (0, 0), \quad 1 \leq i \leq s.$$

Следовательно, E_j являются кривыми ветвления накрытия f для $j = 1, 2, 3$, а E_{3+i} не являются кривыми ветвления при $i \geq 1$. Таким образом, согласно лемме 1.4 поверхность X_s является гладкой поверхностью. Заметим, что число тройных и четырехкратных точек конфигурации \bar{L} меньше восьми и каждые четыре из этих точек не лежат на одной и той же прямой. Следовательно, $\tilde{\mathbb{P}}^2$ является поверхностью дель Пеццо, возможно, с (-2) -кривыми.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Построенные выше поверхности Бурниа X_s являются поверхностями общего типа с $K_{X_s}^2 = (6 - s)$, $0 \leq s \leq 4$, и $p_g = 0$.*

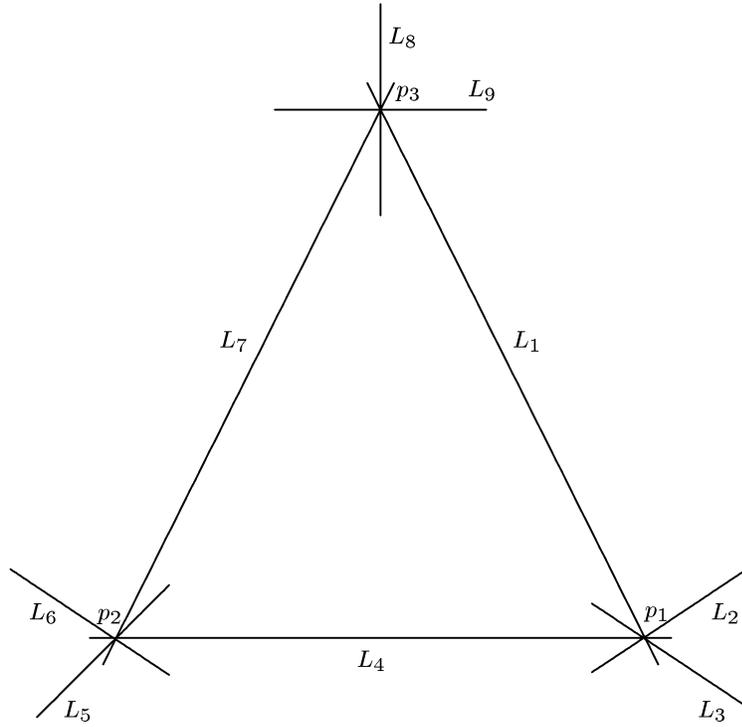
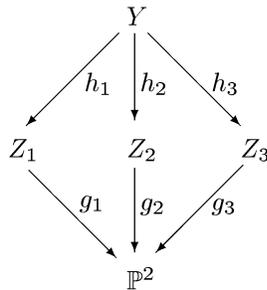


Рис. 2

Доказательство. Согласно утверждению 2.2 имеем

$$2K_{X_s} = \left| \tilde{f}^* \left(3L - \sum_{i=1}^{3+s} E_i \right) \right|,$$

где $L = \sigma^*(\mathbb{P}^1)$ – прообраз прямой $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$. Следовательно, X_s является поверхностью общего типа и относительно минимальной моделью, так как $\tilde{\mathbb{P}}^2$ – поверхность дель Пешо, возможно, с (-2) -кривыми. Применяя (2.2) и (2.8), легко видеть, что $K_{X_s}^2 = 6 - s$ и $e(X) = 6 + s$. Поэтому из формулы Нётера следует, что $p_a = 1 - q + p_g = 1$. Как и выше, чтобы вычислить p_g , достаточно вычислить геометрические роды десингуляризаций \bar{Z}_i трех циклических накрытий $g_i: Z_i \rightarrow \mathbb{P}^2$, соответствующих трем эпиморфизмам группы $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ в циклическую группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:



в которой $g = g_i \circ h_i$ для $i = 1, 2, 3$. Эти накрытия задаются в неоднородных координатах соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} w_1^2 &= l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6, \\ w_2^2 &= l_4 l_5 l_6 l_7 l_8 l_9, \\ w_3^2 &= l_1 l_2 l_3 l_7 l_8 l_9. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Применив утверждение 3.2, можно легко показать, что геометрический род каждого из этих накрытий обращается в нуль, так как каждая из конфигураций, заданных соответственно уравнениями $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6 = 0$, $l_4 l_5 l_6 l_7 l_8 l_9 = 0$ и $l_1 l_2 l_3 l_7 l_8 l_9 = 0$, имеет четырехкратную точку. Таким образом, X_s имеет геометрический род $p_g = 0$.

Обозначим через \tilde{L}_j собственный прообраз $\sigma^{-1}(L_j)$ прямой $L_j \subset \bar{L}_s$. Тогда дивизор $\sum \tilde{L}_j + \sum_{i=1}^3 E_i$ является дивизором ветвления накрытия f . Положим

$$\begin{aligned} 2C_j &= f^*(\tilde{L}_j), \quad j = 1, \dots, 9, \\ 2D_i &= f^*(E_i), \quad i = 1, 2, 3, \\ D_k &= f^*(E_k), \quad 3 < k \leq 3 + s, \end{aligned} \quad (4.4)$$

и обозначим через $t(L_j)$ число особых точек конфигурации \bar{L}_s , лежащих на прямой L_j .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. *Имеем:*

- (i) *кривые C_j , $j = 1, \dots, 9$, и D_i , $i = 1, \dots, 3 + s$, являются неособыми;*
- (ii) *геометрический род кривой C_j , $j = 1, \dots, 9$, равен $g(C_j) = 3 - t(L_j)$;*
- (iii) *геометрический род кривой D_i равен $g(D_i) = 1$, если $i = 1, 2, 3$, и $g(D_i) = 0$, если $3 < i \leq 3 + s$;*
- (iv) *индекс самопересечения кривой C_j при $j = 1, \dots, 9$ равен $(C_j^2)_{X_s} = 1 - t(L_j)$;*
- (v) *индекс самопересечения кривой D_i равен $(D_i^2)_{X_s} = -1$, если $i = 1, 2, 3$, и $(D_i^2)_{X_s} = -4$, если $3 < i \leq 3 + s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) очевидно.

Докажем утверждения (ii), (iii). Ограничение накрывающего морфизма f на кривую C_j , $j = 1, \dots, 9$, является двулистным накрытием рациональной кривой, разветвленным в $8 - 2t(L_j)$ точках. Следовательно, $g(C_j) = 3 - t(L_j)$.

Ограничение морфизма f на кривую D_i , $i = 1, 2, 3$, является двулистным накрытием, разветвленным в четырех точках. Следовательно, $g(D_i) = 1$. Аналогично, ограничение f на D_i , $3 < i \leq 3 + s$, является бидвойным накрытием рациональной кривой, разветвленным в трех точках. Следовательно, геометрический род $g(D_i) = 0$.

Теперь докажем утверждения (iv), (v). Так как $(f^*(D), f^*(D))_{X_s} = \deg f \times (D, D)_{\mathbb{P}^2} = 4(D, D)_{\mathbb{P}^2}$ для любого дивизора D на \mathbb{P}^2 , то утверждение следует из равенств: $(\tilde{L}_j^2)_{\mathbb{P}^2} = 1 - t(L_j)$ для $j = 1, \dots, 9$ и $(\tilde{E}_i^2)_{\mathbb{P}^2} = -1$ для $i = 1, \dots, 3 + s$.

Рассмотрим универсальное накрытие Галуа $\bar{f}_s: \bar{X}_s \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$ и универсальное неразветвленное накрытие $h_{s,\varphi}: \bar{X}_s \rightarrow X_s$ относительно эпиморфизма φ :

$H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}_s, \mathbb{Z}) \rightarrow G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ такие, что $\bar{f}_s = f_s \circ h_{s,\varphi}$. Напомним, что накрытие \bar{f}_s индуцировано эпиморфизмом $\psi_{s,\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}_s, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{k_{s,\varphi}}$, где $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{k_{s,\varphi}}$ и $\psi_{s,\varphi}$ определены уравнениями

$$\sum_{j=1}^9 x_j = 0, \quad (4.5)$$

$$x_{j_1(i)} + x_{j_2(i)} + x_{j_3(i)} = 0, \quad 3 < i \leq 3 + s,$$

где для каждого i тройка $(j_1(i), j_2(i), j_3(i))$ является множеством индексов прямых L_j таких, что $p_i = L_{j_1(i)} \cap L_{j_2(i)} \cap L_{j_3(i)}$.

В случае $s = 0$ (нет тройных точек) имеем $k_{0,\varphi} = 8$ и

$$\deg h_{0,\varphi} = 2^6. \quad (4.6)$$

В случае $s = 1$ будем предполагать, что $p_4 = L_3 \cap L_6 \cap L_9$, тем самым получаем, что группа $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{k_{1,\varphi}}$ и эпиморфизм $\psi_{1,\varphi}$ определяются уравнениями

$$\sum_{j=1}^9 x_j = 0, \quad (4.7)$$

$$x_3 + x_6 + x_9 = 0.$$

Следовательно, $k_{1,\varphi} = 7$ и

$$\deg h_{1,\varphi} = 2^5. \quad (4.8)$$

В случае $s = 2$ будем предполагать, что $p_4 = L_3 \cap L_6 \cap L_9$, а p_5 (см. рис. 3 и 4) является пересечением либо прямых $L_2 \cap L_5 \cap L_8$ (конфигурация \bar{L}'_2), либо $L_2 \cap L_5 \cap L_9$ (конфигурация \bar{L}''_2).

В случае конфигурации \bar{L}'_2 получаем, что группа $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{k_{2,\varphi}}$ и эпиморфизм $\psi_{2,\varphi}$ определяются уравнениями

$$\sum_{j=1}^9 x_j = 0, \quad (4.9)$$

$$x_3 + x_6 + x_9 = 0,$$

$$x_2 + x_5 + x_8 = 0,$$

а в случае конфигурации \bar{L}''_2 группа и эпиморфизм определяются уравнениями

$$\sum_{j=1}^9 x_j = 0, \quad (4.10)$$

$$x_3 + x_6 + x_9 = 0,$$

$$x_2 + x_5 + x_9 = 0.$$

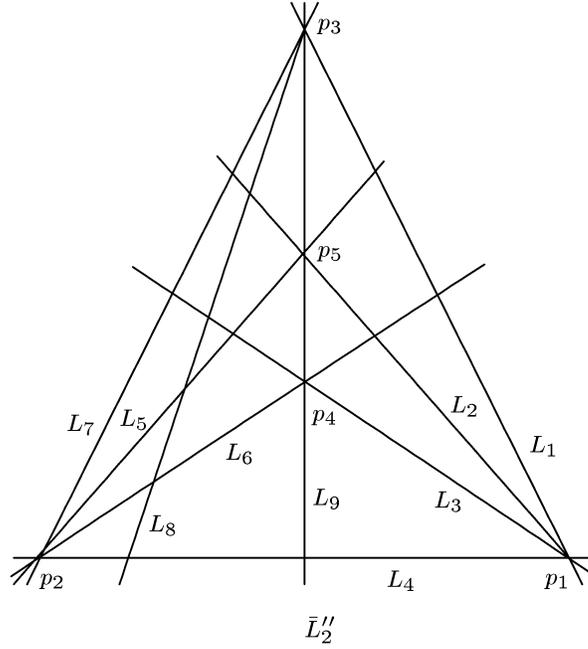


Рис. 3

Следовательно, в обоих случаях получаем, что $k_{2,\varphi} = 6$ и

$$\deg h_{2,\varphi} = 2^4. \quad (4.11)$$

В случае $s = 3$ будем предполагать, что $p_4 = L_3 \cap L_6 \cap L_9$, $p_5 = L_2 \cap L_5 \cap L_9$ и $p_6 = L_2 \cap L_6 \cap L_8$. Следовательно, группа $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{k_{3,\varphi}}$ и эпиморфизм $\psi_{3,\varphi}$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^9 x_j &= 0, \\ x_3 + x_6 + x_9 &= 0, \\ x_2 + x_5 + x_9 &= 0, \\ x_2 + x_6 + x_8 &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Поэтому $k_{3,\varphi} = 5$ и

$$\deg h_{1,\varphi} = 2^3. \quad (4.13)$$

В случае $s = 4$ будем предполагать, что $p_4 = L_3 \cap L_6 \cap L_9$, $p_5 = L_2 \cap L_5 \cap L_9$, $p_6 = L_2 \cap L_6 \cap L_8$ и $p_7 = L_3 \cap L_5 \cap L_8$. Эта конфигурация прямых \bar{L}_4 изображена на рис. 5.

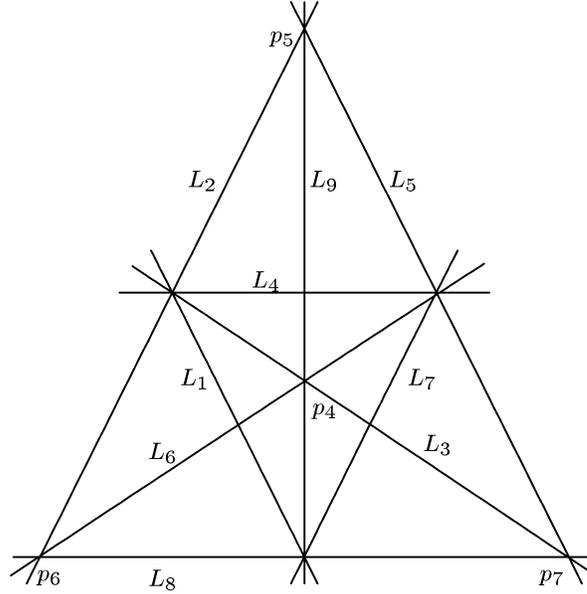


Рис. 5

Пусть $D_\alpha \in |K_{X_s} + \alpha|$. Тогда $2D_\alpha \in |2K_{X_s}|$. Из теоремы Римана–Роха следует, что

$$\dim H^0(X_s, 2K_{X_s}) = K_{X_s}^2 + 1 = 7 - s.$$

С другой стороны, согласно утверждению 2.2

$$2K_{X_s} = f^* \left(3L - \sum_{i=1}^{3+s} E_i \right),$$

$$\dim H^0 \left(\tilde{\mathbb{P}}^2, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}^2} \left(3L - \sum_{i=1}^{3+s} E_i \right) \right) = 7 - s.$$

Следовательно,

$$|2K_{X_s}| = f^* \left(\left| 3L - \sum_{i=1}^{3+s} E_i \right| \right)$$

и $D \in |K_{X_s} + \alpha|$ для некоторого $\alpha \in \text{Tors}_2(X_s)$ тогда и только тогда, когда $2D = f^*(\bar{D})$ для некоторого дивизора $\bar{D} \in |3L - \sum_{i=1}^{3+s} E_i|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Группа 2-кручения поверхности Бурниа X_s изоморфна $\text{Tors}_2(X_s) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{6-s}$ при $s \leq 3$ и $\text{Tors}_2(X_4) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 1.6 вытекает, что $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\deg h_{s,\varphi}} \subset \text{Tors}_2(X_s)$. Заметим, что $\deg h_{s,\varphi} = 6 - s$, если $s \leq 3$, и $\deg h_{4,\varphi} = 3$. Из утверждения 4.6 следует, что чтобы доказать предложение в каждом из случаев $s = 4, 3, 2, 1, 0$, достаточно показать, что существует ровно $2^{\deg h_{s,\varphi}} - 1$ полных непрерывных систем дивизоров \bar{D} , принадлежащих линейной системе $|3L - \sum_{i=1}^{3+s} E_i|$ и таких, что прообраз $f^*(\bar{D})$ каждого дивизора \bar{D} делится на два (т.е. $f^*(\bar{D}) = 2D$), и любые два дивизора $\frac{1}{2}f^*(\bar{D}_i), \frac{1}{2}f^*(\bar{D}_j)$, принадлежащие разным системам, не являются линейно эквивалентными.

Можно проверить, что:

а) в случае $s = 4$ такими элементами $\bar{D} \in |3L - \sum_{i=1}^7 E_i|$, для которых дивизор $f^*(\bar{D})$ делится на два, являются

$$\begin{aligned} & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_9 + 2E_4, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_9 + 2E_5, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_8 + 2E_6, \\ & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_8 + 2E_7, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3 + \tilde{L}_7 + E_1, \quad \tilde{L}_5 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_1 + E_2, \\ & \tilde{L}_8 + \tilde{L}_9 + \tilde{L}_4 + E_3; \end{aligned}$$

б) в случае $s = 3$ элементами $\bar{D} \in |3L - \sum_{i=1}^6 E_i|$, для которых дивизор $f^*(\bar{D})$ делится на два, являются

$$\begin{aligned} & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_9 + 2E_4, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_9 + 2E_5, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_8 + 2E_6, \\ & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_8, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3 + \tilde{L}_7 + E_1, \quad \tilde{L}_5 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_1 + E_2, \\ & \tilde{L}_8 + \tilde{L}_9 + \tilde{L}_4 + E_3; \end{aligned}$$

в) в случае $s = 2$ и $\bar{L}_2 = \bar{L}'_2$ элементами $\bar{D} \in |3L - \sum_{i=1}^5 E_i|$, для которых $f^*(\bar{D})$ делится на два, являются

$$\begin{aligned} & \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3 + \tilde{L}_7 + E_1, \quad \tilde{L}_1 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_6 + E_2, \quad \tilde{L}_4 + \tilde{L}_8 + \tilde{L}_9 + E_3, \\ & \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 + \tilde{L}_6 + E_1, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_7 + E_2, \quad \tilde{L}_1 + \tilde{L}_3 + \tilde{L}_5 + E_1, \\ & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_7 + E_2, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_4 + \tilde{L}_9 + E_1, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_7 + \tilde{L}_9 + E_3, \\ & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_4 + \tilde{L}_8 + E_1, \quad \tilde{L}_3 + \tilde{L}_7 + \tilde{L}_8 + E_3, \quad \tilde{L}_1 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_9 + E_3, \\ & \tilde{L}_4 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_9 + E_2, \quad \tilde{L}_1 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_8 + E_3, \quad \tilde{L}_4 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_8 + E_2; \end{aligned}$$

г) в случае $s = 2$ и $\bar{L}_2 = \bar{L}''_2$ элементами $\bar{D} \in |3L - \sum_{i=1}^5 E_i|$, для которых $f^*(\bar{D})$ делится на два, являются

$$\begin{aligned} & \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3 + \tilde{L}_7 + E_1, \quad \tilde{L}_1 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_6 + E_2, \quad \tilde{L}_4 + \tilde{L}_8 + \tilde{L}_9 + E_3, \\ & \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 + \tilde{L}_6 + E_1, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_7 + E_2, \quad \tilde{L}_1 + \tilde{L}_3 + \tilde{L}_5 + E_1, \\ & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_7 + E_2, \quad \tilde{L}_1 + \tilde{L}_4 + \tilde{L}_9 + E_1, \quad \tilde{L}_4 + \tilde{L}_7 + \tilde{L}_9 + E_2, \\ & \tilde{L}_2 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_9 + 2E_5, \quad \tilde{L}_3 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_9 + 2E_4, \quad \tilde{L}_2 + \tilde{L}_6 + \tilde{L}_8, \\ & \tilde{L}_1 + \tilde{L}_7 + \tilde{L}_9 + 2E_3, \quad 2\tilde{L}_4 + \tilde{L}_9 + E_1 + E_2, \quad \tilde{L}_3 + \tilde{L}_5 + \tilde{L}_8. \end{aligned}$$

Можно проверить, что в случае $s = 1$ существует ровно 31 дивизор $\bar{D} \in |3L - \sum_{i=1}^4 E_i|$, для которых $f^*(\bar{D})$ делится на два, а в случае $s = 0$ существует ровно 63

полных непрерывных систем дивизоров \bar{D} в $|3L - \sum_{i=1}^3 E_i|$, для которых $f^*(\bar{D})$ делится на два. Заметим только, что в случае $s = 0$ среди этих систем дивизоров 60 систем состоят из одного дивизора, а последние 3 образуют одномерные линейные системы, а именно

$$\tilde{L}_1 + 2\tilde{L}_{p_2} + E_2, \quad \tilde{L}_4 + 2\tilde{L}_{p_3} + E_3, \quad \tilde{L}_7 + 2\tilde{L}_{p_1} + E_1,$$

где $\tilde{L}_{p_i} = \sigma^{-1}(L_{p_i})$ – собственный прообраз прямой, принадлежащей пучку прямых, проходящих через точку p_i . Эти три пучка соответствуют трем элементам, скажем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \text{Tors}_2(X_0)$, для которых $\dim H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(\alpha_i)) = 1$, и эти три элемента “приходят” из трех иррегулярных промежуточных циклических накрытий универсального накрытия Галуа $\tilde{f}_0: \bar{X}_0 \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$ относительно эпиморфизма $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}_0, \mathbb{Z}) \rightarrow G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ (см. далее конец доказательства утверждения 4.8).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.8. *При $s \geq 1$ поверхности \bar{X}_s являются регулярными, т. е. иррегулярности $q(\bar{X}_s) = 0$ и $q(\bar{X}_0) = 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Арифметический род p_a поверхности равен $p_a = p_g - q + 1$. Следовательно, чтобы вычислить q , достаточно вычислить p_a и p_g .

Имеем $p_a(X_s) = 1$. Следовательно, арифметический род

$$p_a(\bar{X}_s) = 2^{k_{s,\varphi}-2}, \quad (4.16)$$

так как h_s является неразветвленным накрытием и $\deg h_s = 2^{k_{s,\varphi}-2}$.

Вычислим геометрический род $p_g(\bar{X}_s)$ в случае $s \geq 2$, а вычисление геометрического рода в оставшихся случаях будет оставлено читателю, так как эти вычисления используют одни и те же идеи. Как и в § 3, чтобы вычислить p_g , достаточно вычислить геометрические роды $2^{k_{s,\varphi}} - 1$ циклических накрытий, соответствующих $2^{k_{s,\varphi}} - 1$ эпиморфизмам ψ_m , $m = 1, \dots, 2^{k_{s,\varphi}} - 1$, из группы $G_{u,\varphi} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k_{s,\varphi}}$ в циклическую группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, где группа $G_{u,\varphi}$ изоморфна подгруппе группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$, заданной в координатах (x_1, \dots, x_9) одной из линейных систем уравнений (4.5)–(4.14).

Легко видеть, что существует взаимно однозначное соответствие γ между эпиморфизмами ψ_m и элементами $(x_1, \dots, x_9) \in G_{u,\varphi}$ такими, что для $\gamma(\psi_m) = (x_1, \dots, x_9)$ циклическое накрытие, соответствующее ψ_m , задается уравнением

$$w_m^2 = \prod_{x_i=1} l_i.$$

Из утверждения 3.2 следует, что вклад в геометрический род поверхности \bar{X}_s может быть сделан только циклическими накрытиями, соответствующими эпиморфизмам ψ_m , для которых сумма координат вектора $\gamma(\psi_m)$ не меньше шести, и если она равна шести, то соответствующий дивизор ветвления не должен иметь четырехкратных точек.

В случаях $s = 3$ и $s = 4$ (см. линейные системы уравнений (4.12) и (4.14)) имеем ровно семь таких накрытий, заданных уравнениями

$$\begin{aligned} z_1^2 &= l_1 l_2 l_3 l_5 l_6 l_7, & z_2^2 &= l_1 l_4 l_5 l_6 l_8 l_9, & z_3^2 &= l_2 l_3 l_4 l_7 l_8 l_9, \\ z_4^2 &= l_1 l_2 l_4 l_5 l_7 l_8, & z_5^2 &= l_1 l_3 l_4 l_5 l_7 l_9, & z_6^2 &= l_1 l_3 l_4 l_6 l_7 l_8, \\ z_7^2 &= l_1 l_2 l_4 l_6 l_7 l_9. \end{aligned}$$

Следовательно, $p_g(\bar{X}_3) = p_g(\bar{X}_4) = 7$ и $q(\bar{X}_3) = q(\bar{X}_4) = 0$.

В случае, когда $s = 2$ и конфигурация $\bar{L}_2 = \bar{L}'_2$ (см. линейную систему уравнений (4.9)), имеем ровно 15 таких накрытий, заданных уравнениями

$$\begin{aligned} z_1^2 &= l_1 l_2 l_3 l_5 l_6 l_7, & z_2^2 &= l_1 l_2 l_3 l_7 l_8 l_9, & z_3^2 &= l_1 l_4 l_5 l_6 l_8 l_9, \\ z_4^2 &= l_1 l_2 l_4 l_6 l_8 l_9, & z_5^2 &= l_1 l_3 l_4 l_5 l_8 l_9, & z_6^2 &= l_1 l_2 l_4 l_5 l_6 l_9, \\ z_7^2 &= l_1 l_3 l_4 l_5 l_6 l_8, & z_8^2 &= l_1 l_2 l_3 l_6 l_7 l_8, & z_9^2 &= l_1 l_2 l_3 l_5 l_7 l_9, \\ z_{10}^2 &= l_2 l_3 l_4 l_5 l_7 l_9, & z_{11}^2 &= l_2 l_3 l_4 l_6 l_7 l_8, & z_{12}^2 &= l_2 l_4 l_5 l_6 l_7 l_9, \\ z_{13}^2 &= l_3 l_4 l_5 l_6 l_7 l_8, & z_{14}^2 &= l_2 l_4 l_6 l_7 l_8 l_9, & z_{15}^2 &= l_3 l_4 l_5 l_7 l_8 l_9. \end{aligned}$$

Следовательно, $p_g(\bar{X}'_2) = 15$ и $q(\bar{X}'_2) = 0$.

В случае, когда $s = 2$ и конфигурация $\bar{L}_2 = \bar{L}''_2$ (см. линейную систему уравнений (4.10)), имеем также ровно 15 таких накрытий, заданных уравнениями

$$\begin{aligned} z_1^2 &= l_1 l_2 l_3 l_5 l_6 l_7, & z_2^2 &= l_1 l_4 l_5 l_6 l_8 l_9, & z_3^2 &= l_2 l_3 l_4 l_7 l_8 l_9, \\ z_4^2 &= l_1 l_2 l_4 l_5 l_7 l_8, & z_5^2 &= l_1 l_3 l_4 l_5 l_7 l_9, & z_6^2 &= l_1 l_3 l_4 l_6 l_7 l_8, \\ z_7^2 &= l_1 l_2 l_4 l_6 l_7 l_9, & z_8^2 &= l_1 l_3 l_4 l_5 l_7 l_9, & z_9^2 &= l_1 l_2 l_4 l_6 l_8 l_9, \\ z_{10}^2 &= l_1 l_3 l_4 l_5 l_8 l_9, & z_{11}^2 &= l_1 l_2 l_3 l_7 l_8 l_9, & z_{12}^2 &= l_2 l_3 l_4 l_7 l_8 l_9, \\ z_{13}^2 &= l_2 l_4 l_6 l_7 l_8 l_9, & z_{14}^2 &= l_3 l_4 l_5 l_7 l_8 l_9, & z_{15}^2 &= l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6 l_7 l_8. \end{aligned}$$

Кривая ветвления 15-го двойного накрытия имеет степень 8 и две четверных точки. Следовательно, геометрический род этого накрытия равен единице. Таким образом, снова имеем $p_g(\bar{X}''_2) = 15$ и $q(\bar{X}''_2) = 0$.

Оставшиеся два случая оставляем для проверки читателю, заметим только, что ненулевой вклад в иррегулярность поверхности \bar{X}_0 дают только следующие циклические накрытия:

$$z_1^2 = l_1 l_2 l_3 l_4, \quad z_2^2 = l_1 l_7 l_8 l_9, \quad z_3^2 = l_4 l_5 l_6 l_7.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.9. *Фундаментальная группа поверхности Бурниа X_0 является неабелевой бесконечной группой.*

Доказательство следует из утверждения 4.8.

Легко видеть, что с точностью до линейных преобразований на \mathbb{P}^2 существует только одна конфигурация Бурниа \bar{L}_4 (изображенная на рис. 5).

Зафиксируем однородные координаты $(z_0 : z_1 : z_2)$ в \mathbb{P}^2 . Обозначим через $\mathcal{B}_{6-s} = \{\bar{L}_s = L_1 + \dots + L_9\}$, $s \leq 4$, семейство упорядоченных конфигураций Бурниа таких, что L_1 , L_4 и L_7 заданы соответственно уравнениями $z_0 = 0$, $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, а $p_4 = (1 : 1 : 1)$ (в случае $s = 0$ точка p_4 – это пересечение $L_3 \cap L_9$). Легко видеть, что любая конфигурация Бурниа может быть преобразована в конфигурацию, принадлежащую \mathcal{B}_{6-s} с помощью линейного преобразования плоскости \mathbb{P}^2 . Обозначим через $F_s : \mathcal{X}_{6-s} \rightarrow \mathcal{B}_{6-s}$ семейство поверхностей Бурниа со слоем $F_s^{-1}(\bar{L}_s) = X_s$ над точкой $\bar{L}_s \in \mathcal{B}_{6-s}$, где X_s – поверхность Бурниа, определенная с помощью конфигурации прямых \bar{L}_s .

Если $s = 3$, то конфигурация $\bar{L}_3 \in \mathcal{B}_3$ однозначно определяется точкой $p_5 = L_2 \cap L_5 \cap L_9 \in L_9$, так как прямые L_3, L_6, L_9 определяются точкой $p_4 = (1 : 1 : 1)$, прямые L_2 и L_5 определяются точкой $p_5 \in L_9$, а L_8 определяется точкой $p_6 = L_2 \cap L_6$. Следовательно,

$$\mathcal{B}_3 \simeq (\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{три точки}\}) \setminus \mathcal{B}_2, \quad (4.17)$$

где $\mathcal{B}_2 = \{\bar{L}_{4,0}\}$ состоит из единственной конфигурации $\bar{L}_{4,0}$, соответствующей случаю, когда $L_3 \cap L_5 \cap L_8 \neq \emptyset$.

Положим $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}'_4 \cup \mathcal{B}''_4$, где \mathcal{B}'_4 (соответственно, \mathcal{B}''_4) состоит из конфигураций \bar{L}'_2 (соответственно, \bar{L}''_2). Легко видеть, что конфигурация $\bar{L}'_2 \in \mathcal{B}'_4$ однозначно определяется точкой $p_5 = L_2 \cap L_5 \cap L_8$. Следовательно,

$$\mathcal{B}'_4 \simeq \mathbb{P}^2 \setminus \{\text{шесть прямых}\}. \quad (4.18)$$

Аналогично, $\bar{L}''_2 \in \mathcal{B}''_4$ однозначно определяется точкой $p_5 \in L_9$ и прямой, принадлежащей пучку прямых, проходящих через точку p_3 . Следовательно,

$$\mathcal{B}''_4 \simeq (\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{три точки}\})^2 \setminus (\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3). \quad (4.19)$$

Как и выше, ясно, что $\bar{L}_1 \in \mathcal{B}_5$ однозначно определяется прямыми L_2, L_5 и L_8 , принадлежащими соответственно пучкам прямых, проходящих через точки p_1, p_2 и p_3 . Следовательно,

$$\mathcal{B}_5 \simeq (\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{три точки}\})^3 \setminus (\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4). \quad (4.20)$$

Аналогично,

$$\mathcal{B}_6 \simeq (\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{три точки}\})^4 \setminus \overline{\mathcal{B}_5}, \quad (4.21)$$

где многообразие $\overline{\mathcal{B}_5}$ – это объединение вырождений конфигураций \bar{L}_0 , $\dim \overline{\mathcal{B}_5} = 3$, $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5 \subset \overline{\mathcal{B}_5}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.10. *Любые две поверхности Бурниа X'_2 и X''_2 не изоморфны друг другу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует изоморфизм $h: X'_2 \rightarrow X''_2$. Тогда он индуцирует изоморфизмы $h^*: \text{Tors}_2(X''_2) \rightarrow \text{Tors}_2(X'_2)$ и

$$h^*: H^0(X''_2, \mathcal{O}_{X''_2}(K_{X''_2} + \alpha)) \rightarrow H^0(X'_2, \mathcal{O}_{X'_2}(K_{X'_2} + h^*(\alpha)))$$

для каждого $\alpha \in \text{Tors}_2(X''_2)$. Заметим, что из утверждения 4.8 и теоремы Римана–Роха вытекает, что $\dim H^0(X''_2, \mathcal{O}_{X''_2}(K_{X''_2} + \alpha)) = 1$ для $\alpha \neq 0$. Следовательно, мы должны иметь

$$K'_{h^*(\alpha)} = h^*(K''_\alpha)$$

для каждого $K''_\alpha \in |K_{X''_2} + \alpha|$. С другой стороны, среди неприводимых компонент дивизоров K''_α найдется рациональная кривая с индексом самопересечения, равным -2 (кривая C_9 ; см. утверждение 4.5 и предложение 4.7), но среди неприводимых компонент дивизоров $K'_\alpha \in |K_{X'_2} + \alpha|$ нет таких кривых. Противоречие.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.11. Для каждого $s = 0, \dots, 4$ и для каждой конфигурации $\bar{L}_{s,0} \in \mathcal{B}_{6-s}$ существует лишь конечное число конфигураций $\bar{L}_s \in \mathcal{B}_{6-s}$, для которых соответствующие поверхности Бурниа $X_s = F_s^{-1}(\bar{L}_s)$ изоморфны поверхности $X_{s,0} = F_s^{-1}(\bar{L}_{s,0})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $x = \frac{z_1}{z_0}$ и $y = \frac{z_2}{z_0}$, где $(z_0 : z_1 : z_2)$ – выбранные выше однородные координаты в \mathbb{P}^2 . Тогда прямые $L_4, L_3, L_2, L_7, L_9, L_8, L_5$ и L_6 задаются соответственно уравнениями $x = 0$, $x = 1$, $x = a_1$, $y = 0$, $y = 1$, $y = b_1$, $x = c_1 y$ и $x = c_2 y$ при некоторых $a_1, b_1, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Рассмотрим инъективное отображение $r_s: \mathcal{B}_{6-s} \rightarrow \mathbb{C}^{\dim \mathcal{B}_{6-s}}$, заданное следующим образом (если $s = 2$, то рассмотрим два отображения: r'_2 и r''_2).

В случае \mathcal{B}_3 имеем $c_2 = 1$, $c_1 = a_1$ и $b_1 = a_1$. Следовательно, a_1 является координатой в \mathcal{B}_3 . Положим $r_3(\bar{L}_3) = a_1 \in \mathbb{C}^1$. Заметим также, что конфигурация $\mathcal{B}_2 = \{\bar{L}_{4,0}\}$ имеет координату $a_1 = -1$.

В случае \mathcal{B}'_4 имеем $c_2 = 1$, $a_1 = b_1 c_1$ и (b_1, c_1) являются координатами в \mathcal{B}'_4 . Положим $r'_2(\bar{L}'_2) = (b_1, c_1) \in \mathbb{C}^2$.

Аналогично, в случае \mathcal{B}''_4 имеем $c_2 = 1$, $c_1 = a_1$ и (b_1, c_1) являются координатами в \mathcal{B}''_4 . Положим $r''_2(\bar{L}''_2) = (b_1, c_1) \in \mathbb{C}^2$.

В случае \mathcal{B}_5 имеем $c_2 = 1$ и (a_1, b_1, c_1) являются координатами в \mathcal{B}_5 . Положим $r_1(\bar{L}_1) = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{C}^3$.

В случае \mathcal{B}_6 числа a_1, b_1, c_1, c_2 являются координатами в \mathcal{B}_6 . Положим $r_0(\bar{L}_0) = (a_1, b_1, c_1, c_2) \in \mathbb{C}^4$.

Очевидно, образ $r_s(\mathcal{B}_{6-s})$ является открытым всюду плотным множеством в $\mathbb{C}^{\dim \mathcal{B}_{6-s}}$.

Пусть $\text{Iso}(X_{s,0})$ – множество конфигураций \bar{L}_s , для которых поверхности $F_s^{-1}(\bar{L}_s)$ изоморфны поверхности $X_{s,0}$. Заметим, что $\text{Iso}(X_{s,0})$ является квазипроективным подмногообразием многообразия \mathcal{B}_{6-s} . Действительно, каждая поверхность X_s является поверхностью с обильным каноническим классом (возможно, по модулю (-2) -кривых). Вложения поверхностей X_s в $\mathbb{P}^{10K_{X_s}^2}$, заданные линейными системами $|5K_{X_s}|$, определяет морфизм $\mu: \mathcal{B}_{6-s} \rightarrow \text{Hilb}_{P_{X_s}}$ в схему Гильберта поверхностей в $\mathbb{P}^{10K_{X_s}^2}$ с фиксированным многочленом Гильберта. Группа $\text{PGL}(10K_{X_s}^2 + 1, \mathbb{C})$ действует на $\text{Hilb}_{P_{X_s}}$ и

$$\text{Iso}(X_{s,0}) = \mu^{-1}(\mu(\mathcal{B}_{6-s}) \cap \text{PGL}(10K_{X_s}^2 + 1, \mathbb{C})(\mu(\bar{L}_{s,0}))).$$

Следовательно, чтобы доказать утверждение, достаточно показать, что образ $r_s(\text{Iso}(X_{s,0}))$ состоит из конечного числа точек.

Для этого рассмотрим произвольные две изоморфные между собой поверхности Бурниа $X_{s,0}, X_{s,1}$, и пусть $h: X_{s,0} \rightarrow X_{s,1}$ – изоморфизм между этими поверхностями. Как и в доказательстве утверждения 4.10, изоморфизм h индуцирует изоморфизмы

$$\begin{aligned} h^* &: \text{Tors}_2(X_{s,1}) \rightarrow \text{Tors}_2(X_{s,0}), \\ h^* &: H^0(X_{s,1}, \mathcal{O}_{X_{s,1}}(K_{X_{s,1}} + \alpha)) \rightarrow H^0(X_{s,0}, \mathcal{O}_{X_{s,0}}(K_{X_{s,0}} + h^*(\alpha))) \end{aligned}$$

для каждого $\alpha \in \text{Tors}_2(X_{s,1})$. Из утверждения 4.8 и теоремы Римана–Роха вытекает, что $\dim H^0(X_{s,1}, \mathcal{O}_{X_{s,1}}(K_{X_{s,1}} + \alpha)) = 1$ для каждого $\alpha \neq 0$, если $s \geq 1$,

и для почти всех $\alpha \neq 0$, за исключением трех частных значений α , если $s = 0$. Следовательно, мы должны иметь

$$K_{0,h^*(\alpha)} = h^*(K_{1,\alpha})$$

для каждого $K_{1,\alpha} \in |K_{X_{s,1}} + \alpha|$ (в случае $s = 0$ мы рассматриваем только 60 элементов α , для которых $\dim H^0(X_{s,1}, \mathcal{O}_{X_{s,1}}(K_{X_{s,1}} + \alpha)) = 1$). В обозначениях (4.4) каждый дивизор $K_{1,\alpha}$ является линейной комбинацией кривых $C_{j,1}$, $j = 1, \dots, 9$, и $D_{i,1}$, $i = 1, \dots, 3 + s$. Следовательно, $h^*(R_1) = R_0$, где $R_k = \sum_{j=1}^9 C_{j,k} + \sum_{i=1}^{3+s} D_{i,k}$ для $k = 0, 1$ и инварианты кривых $D_{i,k}$ и $C_{j,k}$ являются инвариантами поверхностей $X_{s,k}$. В частности, множество $R'(X_{s,k})$, состоящее из компонент дивизора R_k , имеющих положительный род, является также таким инвариантом. Заметим, что $D_{i,k} \in R'(X_{s,k})$ для $i = 1, 2, 3$ и $C_{j,k} \in R'(X_{s,k})$, если $t(L_{j,k}) \leq 2$, и, в частности, $C_{1,k}, C_{4,k}, C_{7,k} \in R'(X_{s,k})$.

Пусть C – эллиптическая кривая. Обозначим через B_C подмножество в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, состоящее из комплексных чисел c таких, что кривая C может быть представлена в виде двулистного накрытия $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$, разветвленного в четырех точках $0, 1, c, \infty$. Хорошо известно, что для всякой эллиптической кривой C множество B_C состоит из конечного числа точек.

Аналогично, для гиперэллиптической кривой C , $g(C) = 2$, обозначим через B_C подмножество в $(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^3$, состоящее из троек (c_1, c_2, c_3) комплексных чисел, $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$, таких, что кривая C может быть представлена как двулистное накрытие $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$, разветвленное в шести точках $0, 1, c_1, c_2, c_3, \infty$. Как и в случае эллиптической кривой, множество B_C является конечным для каждой кривой C рода два.

Рассмотрим ограничение накрывающего отображения $f: X_s \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$ на кривую $C \in R'(X_s)$. Оно является двулистным накрытием прямой \mathbb{P}^1 . Положим

$$B_{X_s} = \bigcup_{C \in R'(X_s)} B_C.$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает, что

(*) для поверхности Бурниа X_s множество B_{X_s} является конечным и является инвариантом поверхности X_s с точностью до изоморфизма.

Теперь, чтобы завершить доказательство утверждения, достаточно заметить, что:

- а) в случае \mathcal{B}_3 образ $r_3(\bar{L}_{3,0}) = a_1 \in B_{X_{3,0}}$, так как $a_1 \in B_{C_{7,0}}$;
- б) в случае \mathcal{B}'_4 (и, аналогично, в случае \mathcal{B}''_4) образ $r_2(\bar{L}_{2,0}) = (b_1, c_1)$ для некоторых $b_1, c_1 \in B_{X_{2,0}}$, так как $b_1 \in B_{C_{4,0}}$ и $c_1 \in B_{D_{2,0}}$;
- в) в случае \mathcal{B}_5 образ $r_1(\bar{L}_{1,0}) = (a_1, b_1, c_1)$ для некоторых $a_1, b_1, c_1 \in B_{X_{1,0}}$, так как $a_1 \in B_{C_{7,0}}$, $b_1 \in B_{C_{4,0}}$ и $c_1 \in B_{D_{2,0}}$;
- г) в случае \mathcal{B}_6 образ $r_0(\bar{L}_{0,0}) = (a_1, b_1, c_1, c_2)$ для некоторых элементов $b_1, (a_1, c_1, c_2) \in B_{X_{0,0}}$, так как $b_1 \in B_{C_{4,0}}$ и $(a_1, c_1, c_2) \in B_{D_{9,0}}$.

Обозначим через Θ_{X_s} касательный пучок и через $\Omega_{X_s}^i$ пучок дифференциальных i -форм на X_s .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.12. Для $0 \leq s \leq 4$ имеем:

- (i) $\dim H^0(X_s, \Theta_{X_s}) = 0$;
- (ii) $\dim H^1(X_s, \Theta_{X_s}) = 2s - 2 + 3 \max(0, 2 - s)$;
- (iii) $\dim H^2(X_s, \Theta_{X_s}) = 3 \max(0, 2 - s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $\dim H^0(X_s, \Theta_{X_s}) = 0$ для поверхностей общего типа, так как группа автоморфизмов поверхностей общего типа является дискретной.

По теореме Римана–Роха эйлера характеристика $\chi(\Theta_{X_s})$ пучка Θ_{X_s} выражается формулой

$$\chi(\Theta_{X_s}) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim H^i(X_s, \Theta_{X_s}) = 2K_{X_s}^2 - 10 = 2s - 2$$

и по двойственности Серра

$$\dim H^i(X_s, \Theta_{X_s}) = \dim H^{2-i}(X_s, \Omega_{X_s}^1 \otimes \Omega_{X_s}^2).$$

Следовательно, чтобы доказать предложение, достаточно доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.13. Для поверхности Бурниа X_s , $s = 0, \dots, 4$, имеем

$$\dim H^0(X_s, \Omega_{X_s}^1 \otimes \Omega_{X_s}^2) = 3 \max(0, 2 - s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $X = X_s$. Выберем такую карту $U = \mathbb{C}^2 \subset P^2$, что все особые точки конфигурации \bar{L} лежат в U . Пусть x, y – неоднородные координаты в U , $l_i(x, y) = 0$ – уравнение прямой $L_i \subset \bar{L}$.

Включение полей рациональных функций $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{C}(X)$, индуцированное морфизмом f , является расширением Галуа с группой Галуа $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Пусть $\alpha_1 = (1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1)$ и $\alpha_3 = (1, 1)$ – ненулевые элементы группы G . Отождествляя $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)$ с полем $K_0 = \mathbb{C}(x, y)$ рациональных функций от x, y и поле $\mathbb{C}(X_2)$ с полем $K = \mathbb{C}(x, y, w_1, w_2, w_3)$, где x, y, w_1, w_2, w_3 удовлетворяют уравнениям (4.3), не ограничивая общности, можем считать, что $\alpha(x) = x$, $\alpha(y) = y$ для всех $\alpha \in G$ и

$$\begin{aligned} \alpha_1(w_1) &= w_1, & \alpha_2(w_1) &= \alpha_3(w_1) = -w_1, \\ \alpha_2(w_2) &= w_2, & \alpha_1(w_2) &= \alpha_3(w_2) = -w_2, \\ \alpha_3(w_3) &= w_3, & \alpha_1(w_3) &= \alpha_2(w_3) = -w_3. \end{aligned}$$

Положим $K_i = \mathbb{C}(x, y, w_i)$ и обозначим через $g_i: Z_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ накрытие, индуцированное расширением $K_0 \subset K_i$.

Рассмотрим пространства M, M_0, M_1, M_2, M_3 рациональных $((1, 0) \otimes (2, 0))$ -форм на $X, \mathbb{P}^2, Z_1, Z_2, Z_3$ соответственно. Имеем $M_0 \subset M_i \subset M$ для $i = 1, 2, 3$ и

$$\begin{aligned} M_0 &= \mathbb{C}(x, y) dx \otimes (dx \wedge dy) \oplus \mathbb{C}(x, y) dy \otimes (dx \wedge dy), \\ M &= K dx \otimes (dx \wedge dy) \oplus K dy \otimes (dx \wedge dy), \\ M_i &= K_i dx \otimes (dx \wedge dy) \oplus K_i dy \otimes (dx \wedge dy), \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Более того, группа G действует на M и $M^G = M_0$. Кроме того, $\omega \in M$ принадлежит пространству M_i , $i = 1, 2, 3$, тогда и только тогда, когда $\alpha_i(\omega) = \omega$ и $\alpha_j(\omega) = -\omega$ для $j \neq i$.

Группа Галуа G действует также на пространстве $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \Omega_X^2)$, и это пространство также раскладывается в прямую сумму собственных подпространств $H_{(i)}$:

$$H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \Omega_X^2) = \bigoplus_{i=0}^3 H_{(i)},$$

где $\omega \in H_{(i)}$, $i \geq 1$, тогда и только тогда, когда $\alpha_i(\omega) = \omega$ и $\alpha_j(\omega) = -\omega$ для $j \neq i$, а $\omega \in H_{(0)}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(\omega) = \omega$ для всех i . Легко видеть, что

$$H_{(i)} = H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \Omega_X^2) \cap M_i \quad (4.22)$$

для $i = 0, 1, 2, 3$.

ЛЕММА 4.14. Пусть $(V, o) \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^1$ – росток поверхности, заданный в координатах (z_1, z_2, w_1) уравнением $w_1^2 = z_1$. Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на $H^0(V, \Omega_V^1 \otimes \Omega_V^2)$, заданное формулами $\alpha(z_1) = z_1$, $\alpha(z_2) = z_2$, $\alpha(w_1) = -w_1$, где $\alpha \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ – ненулевой элемент.

(i) Если $\omega \in H^0(V, \Omega_V^1 \otimes \Omega_V^2)$ инвариантна при действии группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то

$$\omega = \left(P(z_1, z_2) \frac{dz_1}{z_1} + Q(z_1, z_2) dz_2 \right) \otimes (dz_1 \wedge dz_2);$$

(ii) если $\omega \in H^0(V, \Omega_V^1 \otimes \Omega_V^2)$ антиинвариантна при действии группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то

$$\omega = (P(z_1, z_2) dz_1 + Q(z_1, z_2) dz_2) \otimes \frac{dz_1 \wedge dz_2}{w_1},$$

где $P(z_1, z_2)$ и $Q(z_1, z_2)$ – некоторые аналитические функции от z_1 и z_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\frac{dz_1 \wedge dz_2}{w_1}$ является нигде не обращающейся в нуль голоморфной 2-формой на V и $\alpha\left(\frac{dz_1 \wedge dz_2}{w_1}\right) = -\frac{dz_1 \wedge dz_2}{w_1}$. Следовательно, форма $\omega \in H^0(V, \Omega_V^1 \otimes \Omega_V^2)$ может быть записана в виде

$$\omega = (h_2 dz_2 + h_3 dw_1) \otimes \frac{dz_1 \wedge dz_2}{w_1},$$

где $h_2, h_3 \in H^0(V, \mathcal{O}_V)$. Аналогично, функции h_i могут быть записаны в виде $h_i = H'_i(z_1, z_2) + w_1 H''_i(z_1, z_2)$, где $H'_i(z_1, z_2)$ и $H''_i(z_1, z_2)$ – некоторые аналитические функции от z_1 и z_2 .

Легко видеть, что ω является инвариантной формой тогда и только тогда, когда $H_2'(z_1, z_2) = H_3''(z_1, z_2) = 0$, и ω является антиинвариантной формой тогда и только тогда, когда $H_2''(z_1, z_2) = H_3'(z_1, z_2) = 0$. Чтобы завершить доказательство леммы, заметим, что $w_1 dw_1 = \frac{1}{2} dz_1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.15. *Имеем $H_{(0)} = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega \in H_{(0)}$, $\omega \neq 0$. Из леммы 4.14 следует, что над картой $U = \mathbb{C}^2$ она может быть записана в виде $\omega = \omega_1 \otimes (dx \wedge dy)$, где $\omega_1 \in H^0(U \setminus \text{Sing } \bar{L}, \Omega_{U \setminus \text{Sing } \bar{L}}^1(\log \bar{L}))$ является 1-формой с логарифмическими полюсами вдоль \bar{L} . Предположим, что она имеет полюсы вдоль прямых L_{i_1}, \dots, L_{i_k} , $0 \leq k \leq 9$. Тогда ω может быть записана в виде

$$\omega = \frac{P(x, y) dx + Q(x, y) dy}{l_{i_1} \dots l_{i_k}} \otimes (dx \wedge dy), \quad (4.23)$$

где $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ являются многочленами степени не больше, чем $k - 4$. Действительно, $l_{i_1} \dots l_{i_k} \omega$ является регулярной формой на $\mathbb{C}^2 \setminus \text{Sing } \bar{L}$. Следовательно, она может быть записана в виде

$$l_{i_1} \dots l_{i_k} \omega = (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) \otimes (dx \wedge dy),$$

где $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Далее, ω является регулярной формой в общей точке бесконечно удаленной прямой $L_\infty = \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{C}^2$. Пусть $(z_0 : z_1 : z_2)$ – такие однородные координаты на \mathbb{P}^2 , что $x = \frac{z_1}{z_0}$ и $y = \frac{z_2}{z_0}$. Тогда в координатах $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{y}{x}$ форма ω имеет следующий вид:

$$\omega = \left(\left(\frac{u^{k-2} \tilde{P}(u, v)}{u^{\deg P} \tilde{l}_{i_1} \dots \tilde{l}_{i_k}} + \frac{u^{k-2} v \tilde{Q}(u, v)}{u^{\deg Q} \tilde{l}_{i_1} \dots \tilde{l}_{i_k}} \right) du - \frac{u^{k-1} \tilde{Q}(u, v)}{u^{\deg Q} \tilde{l}_{i_1} \dots \tilde{l}_{i_k}} dv \right) \otimes \left(\frac{du \wedge dv}{u^3} \right).$$

Следовательно, $\deg Q \leq k - 4$, если ω является регулярной в общей точке бесконечно удаленной прямой. Точно так же мы получим, что $\deg P \leq k - 4$, если рассмотрим координаты $u_1 = \frac{1}{y}$, $v_1 = \frac{x}{y}$. Следовательно, $k \geq 4$.

Пусть $l_i(x, y) = y + a_i x + b_i$. Имеем $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$, так как все особые точки конфигурации \bar{L} лежат в U , и

$$dy = dl_i - a_i dx. \quad (4.24)$$

Подставляя (4.24) в (4.23), получаем, что

$$\omega = \frac{(P(x, y) - a_i Q(x, y)) dx + Q(x, y) dl_i}{l_{i_1} \dots l_{i_k}} \otimes (dx \wedge dy). \quad (4.25)$$

Поскольку

$$\frac{(P - a_i Q) dx + Q dl_i}{l_{i_1} \dots l_{i_k}} \in H^0(U \setminus \text{Sing } \bar{L}, \Omega_{U \setminus \text{Sing } \bar{L}}^1(\log \bar{L}_2)),$$

то многочлены $P(x, y) - a_i Q(x, y)$ должны делиться на $l_{i_j}(x, y)$ при $j = 1, \dots, k$. Следовательно, $k \geq 5$ и пучок $P(x, y) - aQ(x, y) = 0$ плоских кривых степени $d =$

$k - 4$ должен иметь k различных слоев, содержащих прямые, и по предположению каждая из этих прямых не является неподвижной компонентой этого пучка.

Покажем, что это невозможно в нашем случае. Действительно, случай $d = 1$ (т. е. $k = 5$) является невозможным, так как только четыре прямые, принадлежащие конфигурации \bar{L} , могут лежать в одном и том же пучке. Случай $d = 2$ (т. е. $k = 6$) невозможен, так как пучок коник может иметь только три слоя, содержащих прямые.

Чтобы показать, что случай $d \geq 3$ (т. е. $k \geq 7$) является невозможным, заметим, что если конфигурация прямых $l_{i_1} \dots l_{i_k} = 0$ имеет четырехкратную точку p , то порядки нуля многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в этой точке должны быть не меньше двух. Следовательно, порядок нуля каждого члена пучка $P(x, y) - aQ(x, y) = 0$ в точке p должен быть также не меньше двух. Действительно, предположим, что конфигурация $l_{i_1} \dots l_{i_k} = 0$ имеет такую точку p . Не ограничивая общности, можем предполагать, что точка p имеет координаты $(0, 0)$. Пусть $\sigma: \tilde{U} \rightarrow U$ — раздутие точки p . В одной из карт морфизм σ задается уравнениями $x = x_1$ и $y = x_1 y_1$. В этих новых координатах форма ω имеет следующий вид:

$$\omega = \frac{(P(x_1, x_1 y_1) + y_1 Q(x_1, x_1 y_1)) dx_1 + x_1 Q(x_1, x_1 y_1) dy_1}{x_1^4 \tilde{l}_{i_1} \dots \tilde{l}_{i_k}} \otimes (x_1 dx_1 \wedge dy_1),$$

и поэтому порядок нуля многочлена $Q(x, y)$ в точке p должен быть не меньше двух, так как согласно лемме 4.14 форма ω является формой с логарифмическими полюсами вдоль исключительной кривой $x_1 = 0$. Аналогичные аргументы (надо рассмотреть отображение, заданное уравнениями $x = x_2 y_2$ и $y = y_2$) показывают, что порядок нуля многочлена $P(x, y)$ в точке p должен быть также не меньше двух.

Покажем, что случаи $d = 3, 4, 5$ (т. е. $k = 7, 8, 9$) также невозможны, так как в каждом из этих случаев пучки кривых $P(x, y) - aQ(x, y) = 0$ степени d обязаны иметь неподвижную прямую, принадлежащую конфигурации прямых $l_{i_1} \dots l_{i_k} = 0$. Действительно, каждая общая точка любых двух прямых (лежащих в разных слоях пучка $P(x, y) - aQ(x, y) = 0$) из конфигурации $l_{i_1} \dots l_{i_k} = 0$ является базисной точкой пучка. Однако легко проверить, что если мы удалим любые две прямые из конфигурации \bar{L} (случай $d = 3$, т. е. $k = 7$), то получим новую конфигурацию, состоящую из семи прямых таких, что найдется компонента в новой конфигурации, проходящая через четыре особые точки этой конфигурации (считаемые с кратностями). Следовательно, эта прямая должна быть неподвижной компонентой пучка кривых степени 3. Аналогично, если удалить любую прямую из конфигурации \bar{L} (случай $d = 4$, т. е. $k = 8$), то получим новую конфигурацию, состоящую из восьми прямых, такую, что в новой конфигурации найдется прямая, проходящая через четырехкратную точку и через три другие особые точки новой конфигурации. В случае $d = 5$ (т. е. $k = 9$) также существует прямая (например, L_1), проходящая через две четырехкратные точки и две другие особые точки конфигурации \bar{L} .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.16. Пусть X — поверхность Бурниа X_s . Тогда

$$\dim H_{(1)} = \dim H_{(2)} = \dim H_{(3)} = \max(0, 2 - s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство $H_{(1)}$ (для $H_{(2)}$ и $H_{(3)}$ вычисления их размерностей аналогичны). Пусть $\omega \in H_{(1)}$, $\omega \neq 0$. Тогда, так как $\omega \in M_1$, имеем

$$\omega = (R_1(x, y) dx + R_2(x, y) dy) \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1},$$

где $R_i(x, y)$ являются рациональными функциями. Заметим, что форма $\frac{dx \wedge dy}{w_1}$ не имеет ни нулей, ни полюсов на $Y_1 \setminus \text{Sing } Y_1$, так как $w_1^2 = l_1 \dots l_6$ и $\deg l_1 \dots l_6 = 6$ (см. § 3). Следовательно, так как ω является регулярной формой над общей точкой прямой L_∞ , то, как и в доказательстве утверждения 4.15, применяя лемму 4.14, можно легко показать, что ω может быть записана в виде

$$\omega = \frac{P(x, y) dx + Q(x, y) dy}{l_7 l_8 l_9} \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1}, \quad (4.26)$$

где $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ являются многочленами степени не больше двух и, более того, форма определяется следующим образом:

$$\omega_1 = \frac{P(x, y) dx + Q(x, y) dy}{l_7 l_8 l_9} \in H^0(U \setminus \text{Sing } D_1, \Omega_{U \setminus \text{Sing } D_1}^1(\log D_1)),$$

где $D_1 = L_7 + L_8 + L_9$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $p_3 = (0, 0)$, $l_1(x, y) = x - ay$, $l_7(x, y) = y$, $l_8(x, y) = x - y$ и $l_9(x, y) = x$, где $a \neq 0, 1$.

Чтобы разрешить особые точки поверхности Y_s , нужно раздуть четырехкратные и тройные точки конфигурации \bar{L}_s . Если форма $\omega \in H_{(1)}$, то она должна быть регулярной над раздутыми кривыми E_i .

Следующие леммы дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы форма (4.26) была регулярной над точками кривой E_3 .

ЛЕММА 4.17. Пусть $(V, o) \subset (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2, o)$ – росток нормальной поверхности, заданной в координатах (z_1, z_2, w_1, w_2) уравнениями $w_1^2 = x - ay$ и $w_2^2 = xy(x - y)$, где $a \neq 0, 1$, и пусть

$$\omega = \frac{P(x, y) dx + Q(x, y) dy}{xy(x - y)} \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1} \in H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}^1 \otimes \Omega_{\bar{V}}^2),$$

где $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, $\deg P(x, y) = \deg Q(x, y) = 2$, и $\nu: \bar{V} \rightarrow V$ – минимальное разрешение особой точки o поверхности V . Тогда

$$\omega = \left(c \frac{y dx - x dy}{xy(x - y)} + \frac{P_2(x, y) dx + Q_2(x, y) dy}{xy(x - y)} \right) \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1},$$

где c – некоторая константа и $P_2(x, y), Q_2(x, y)$ – однородные многочлены степени два.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Z образ $g(V)$ при отображении

$$g((x, y, w_1, w_2)) = (x, y),$$

и пусть $\sigma: \tilde{Z} \rightarrow Z$ – раздутие точки $g(o)$, $E = \sigma^{-1}(g(o))$. Согласно лемме 1.4 отображение $f: \bar{V} \rightarrow \tilde{Z}$, индуцированное отображением g , является аналитическим накрытием и может быть разложено в композицию $f = \bar{f}_1 \circ h_1$, где $\bar{f}_1: \bar{V}_1 \rightarrow \tilde{Z}$ является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -накрытием и \bar{V}_1 бимероморфно поверхности, заданной уравнением $w_1^2 = x - ay$.

Морфизм σ задается уравнениями $x = u$, $y = uv$ в некоторых локальных координатах на \tilde{Z} . В этом случае поверхность \bar{V}_1 локально задается уравнением $w_1^2 = u(1 - av)$. Следовательно, отображение \bar{f}_1 разветвлено вдоль E и легко видеть, что отображение h_1 не является разветвленным в общей точке кривой $\bar{f}_1^{-1}(E)$. Таким образом, h_1 является локальным изоморфизмом в общей точке кривой $\bar{f}_1^{-1}(E)$.

Форма ω является мероморфной формой на \bar{V}_1 , и по предположению ее прообраз $h^*(\omega)$ является голоморфной формой. Следовательно, ω является голоморфной формой в общей точке кривой $\bar{f}_1^{-1}(E)$. Более того, согласно лемме 4.14 она может иметь не более чем логарифмические полюсы вдоль кривых, заданных уравнениями $y = 0$, $x - y = 0$ и $x - ay = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{(P(u, uv) + vQ(u, uv)) du + uQ(u, uv) dv}{u^3v(1-v)} \otimes \frac{u du \wedge dv}{w_1} \\ &= \left(\frac{(P(u, uv) + vQ(u, uv)) du}{u^2v(1-v)} + \frac{Q(u, uv) dv}{uv(1-v)} \right) \otimes (dw_1 \wedge dv). \end{aligned}$$

Следовательно, $Q(0, 0) = P(0, 0) = 0$ и многочлен $P(u, uv) + vQ(u, uv)$ должен делиться на u^2 .

Положим $P = a_1x + a_2y + P_2(x, y)$ и $Q = b_1x + b_2y + Q_2(x, y)$, где P_2 и Q_2 – однородные многочлены степени два. Имеем

$$P(u, uv) + vQ(u, uv) = a_1u + a_2uv + b_1uv + b_2uv^2 + P_2(u, uv) + Q_2(u, uv),$$

где $P_2(u, uv) + Q_2(u, uv)$ делится на u^2 . Следовательно, $a_1 = b_2 = 0$ и $a_2 = -b_1$. Имеем

$$\omega = \left(a_2 \frac{y dx - x dy}{xy(x-y)} + \frac{P_2(x, y) dx + Q_2(x, y) dy}{xy(x-y)} \right) \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1}.$$

ЛЕММА 4.18. Пусть x, y – координаты в $U = \mathbb{C}^2$, $o = (0, 0)$, $D \subset U$ – дивизор, заданный уравнением $xy(x-y) = 0$, и

$$\omega_1 = \frac{P(x, y) dx + Q(x, y) dy}{xy(x-y)} \in H^0(U \setminus \{o\}, \Omega_{U \setminus \{o\}}^1(\log D)),$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – некоторые однородные многочлены степени два. Тогда ω_1 является линейной комбинацией форм $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$ и $\frac{d(x-y)}{x-y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\omega_1 \in H^0(U \setminus \{(0,0)\}, \Omega_{U \setminus \{(0,0)\}}^1(\log D))$, то $P = yP_1(x, y)$ и $Q = xQ_1(x, y)$. Пусть $P_1(x, y) = a_1x + a_2y$ и $Q_1(x, y) = b_1x + b_2y$. Положим $l = x - y$. Имеем $dl = dx - dy$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{yP_1(x, y) dx + xQ_1(x, y) dy}{xy(x-y)} \\ &= \frac{((x-l)P_1(x, x-l) + xQ_1(x, x-l)) dx - xQ_1(x, x-l) dl}{x(x-l)l} \\ &= \frac{((a_1 + a_2 + b_1 + b_2)x^2 + l(\dots)) dx - xQ_1(x, y) dl}{x(x-l)l}, \end{aligned}$$

и поэтому должно выполняться следующее тождество:

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{(a_1xy + a_2y^2) dx + (b_1x^2 - (a_1 + a_2 + b_1)xy) dy}{xy(x-y)} \\ &= -a_2 \frac{dx}{x} + b_1 \frac{dy}{y} + (a_1 + a_2) \frac{d(x-y)}{x-y}. \end{aligned}$$

Из лемм 4.17, 4.18 следует, что если $\omega \in H_{(1)}$, то ω имеет следующий вид:

$$\omega = \left(c \frac{y dx - x dy}{y(x-y)(x-ay)} + c_1 \frac{dx}{x} + c_2 \frac{dy}{y} + c_3 \frac{d(x-y)}{x-y} \right) \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1}. \quad (4.27)$$

ЛЕММА 4.19. *Форма*

$$\omega_1 = c_1 \frac{dx}{x} + c_2 \frac{dy}{y} + c_3 \frac{d(x-y)}{x-y}$$

является регулярной в общей точке бесконечно удаленной прямой $L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда $c_1 + c_2 + c_3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = \frac{1}{u}$ и $y = \frac{v}{u}$. Имеем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= c_1 \frac{dx}{x} + c_2 \frac{dy}{y} + c_3 \frac{d(x-y)}{x-y} \\ &= (c_1 + c_2 + c_3) \frac{du}{u} + \frac{c_2(1-v) - c_3v}{v(1-v)} dv. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.20. Пусть $D \subset \mathbb{P}^2$ – проективное замыкание кривой $D_0 \subset \mathbb{C}^2$, заданной уравнением $xy(x-y) = 0$, и пусть $o = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ – начало координат. Тогда

$$\frac{y dx - x dy}{xy(x-y)} \in H^0(\mathbb{P}^2 \setminus \{o\}, \Omega_{\mathbb{P}^2 \setminus \{o\}}^1(\log D)).$$

Доказательство проводится прямой проверкой.

Из лемм 4.19 и 4.20 следует, что если форма ω , записанная в виде (4.27), принадлежит пространству $H_{(1)}$, то

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0. \quad (4.28)$$

Пусть точка p_2 имеет координаты $(b, 0)$. Следующая лемма дает для формы (4.27) необходимое и достаточное условие ее регулярности над точками кривой E_2 .

ЛЕММА 4.21. Пусть \bar{V} – десингуляризация ростка поверхности $(V, o) \subset (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2, 0)$, заданной в координатах (x, y, w_1, w_3) уравнениями $w_1^2 = (x - a_1y) \times (x - a_2y)(x - a_3y)$ и $w_3^2 = y$, и пусть

$$\omega = \left(c \frac{y dx - (x + b) dy}{(x + b)y(x - y + b)} + c_2 \frac{dy}{y} \right) \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1} \in H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}^1 \otimes \Omega_{\bar{V}}^2),$$

где a_1, a_2, a_3 и b – некоторые константы, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, $a_i \neq 0$ для $i = 1, 2, 3$ и $b \neq 0$. Тогда $c - bc_1 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим накрытие $g: V \rightarrow g(V) = Z \subset \mathbb{C}^2$, заданное формулой $g((x, y, w_1, w_3)) = (x, y)$, и пусть $\sigma: \tilde{Z} \rightarrow Z$ – раздутие точки $g(o) = (0, 0)$, $E = \sigma^{-1}(g(o))$. Согласно лемме 1.4 отображение $f: \bar{V} \rightarrow \tilde{Z}$, индуцированное отображением g , является регулярным накрытием, и оно может быть разложено в композицию $f = \bar{f}_1 \circ h_1$, где $\bar{f}_1: \bar{V}_1 \rightarrow \tilde{Z}$ является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -накрытием и поверхность \bar{V}_1 бимероморфна поверхности, заданной уравнением $w_1^2 = (x - a_1y) \times (x - a_2y)(x - a_3y)$.

Пусть морфизм σ задается уравнениями $x = uv$, $y = v$ в некоторых локальных координатах на \tilde{Z} . Тогда поверхность \bar{V}_1 локально задается уравнением $\tilde{w}_1^2 = v(u - a_1)(u - a_2)(u - a_3)$, где $\tilde{w}_1 = \frac{w_1}{v}$, и поверхность \bar{V} – это нормализация поверхности, заданной локально уравнениями $\tilde{w}_1^2 = v(u - a_1)(u - a_2)(u - a_3)$ и $\tilde{w}_3^2 = v$. Следовательно, отображение \bar{f}_1 разветвлено вдоль исключительной кривой E , заданной уравнением $v = 0$, а h_1 не разветвлено в общей точке кривой $\bar{f}_1^{-1}(E)$. Таким образом, h_1 является локальным изоморфизмом в общей точке кривой $f^{-1}(E)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \omega &= \left(c \frac{y dx - (x + b) dy}{(x + b)y(x - y + b)} + c_2 \frac{dy}{y} \right) \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1} \\ &= \frac{cv^2 du + (-cb + c_2b^2 + c_2v(\dots)) dv}{v(uv + b)(uv - v + b)} \otimes \frac{du \wedge dv}{\tilde{w}_1}. \end{aligned}$$

Поскольку $\omega \in H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}^1 \otimes \Omega_{\bar{V}}^2)$ и $b \neq 0$, то из леммы 4.14 следует, что разность $c - c_2b$ должна быть равна нулю.

Из леммы 4.21 следует, что если форма ω , имеющая вид (4.27), принадлежит пространству $H_{(1)}$, то

$$c - bc_2 = 0, \quad (4.29)$$

где $p_2 = (0, b)$.

Можно проверить, что точка p_1 не дает ограничений на форму (4.27).

Посмотрим, какие ограничения на форму (4.27) дают тройные точки. Пусть одна из прямых L_8 или L_9 (скажем, L_9) проходит через тройную точку p_{3+i} конфигурации \bar{L}_s . Так как точка $p_{3+i} \in L_9$, то она имеет координаты $(0, b_1)$, $b_1 \neq 0$.

ЛЕММА 4.22. Пусть \bar{V} – десингуляризация ростка поверхности $(V, o) \subset (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2, o)$, заданной в координатах (x, y, w_1, w_2) уравнениями $w_1^2 = (x - a_1y) \times (x - a_2y)$ и $w_2^2 = x(x - a_1y)$, и пусть форма

$$\omega = \left(c \frac{(y + b_1) dx - x dy}{x(y + b_1)(x - y - b_1)} + c_1 \frac{dx}{x} \right) \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1}$$

принадлежит пространству $H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}^1 \otimes \Omega_{\bar{V}}^2)$, где a_1, a_2 и b_1 – некоторые константы, $a_1 \neq a_2$, $a_i \neq 0$, $b_1 \neq 0$. Тогда $c - b_1 c_1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 4.17, рассмотрим отображение $g: V \rightarrow g(V) = Z \subset \mathbb{C}^2$, заданное формулой

$$g((x, y, w_1, w_2)) = (x, y),$$

и пусть $\sigma: \tilde{Z}^2 \rightarrow Z$ – раздутие точки $g(o) = (0, 0)$, $E = \sigma^{-1}(g(o))$. Согласно лемме 1.4 отображение $f: \bar{V} \rightarrow \tilde{Z}$, индуцированное отображением g , является регулярным накрытием, и оно может быть разложено в композицию $f = \bar{f}_1 \circ h_1$, где $\bar{f}_1: \bar{V}_1 \rightarrow \tilde{Z}$ является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -накрытием и поверхность \bar{V}_1 бимероморфна поверхности, заданной уравнением $w_1^2 = (x - a_1y)(x - a_2y)$.

Пусть σ задано уравнениями $x = u$, $y = uv$ в некоторых локальных координатах на \tilde{Z} . Тогда поверхность \bar{V}_1 локально задается уравнением $\tilde{w}_1^2 = (1 - a_1v)(1 - a_2v)$, где $\tilde{w}_1 = \frac{w_1}{u}$, и поверхность \bar{V} является нормализацией поверхности, заданной локально уравнениями $\tilde{w}_1^2 = (1 - a_1v)(1 - a_2v)$ и $\tilde{w}_2^2 = (1 - a_1v)$, где $\tilde{w}_2 = \frac{w_2}{u}$. Следовательно, \bar{f}_1 не разветвлено вдоль исключительной кривой E , заданной уравнением $u = 0$, и h_1 не разветвлено в общей точке кривой $\bar{f}_1^{-1}(E)$. Таким образом, h_1 является локальным изоморфизмом в общей точке кривой $f^{-1}(E)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \omega &= \left(c \frac{(y + b_1) dx - x dy}{x(y + b_1)(x - y - b_1)} + c_1 \frac{dx}{x} \right) \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1} \\ &= \frac{cb_1 - c_1 b_1^2 + u(\dots) du + u(\dots) dv}{u(uv + b_1)(u - uv - b_1)} \otimes \frac{du \wedge dv}{\tilde{w}_1}. \end{aligned}$$

Поскольку $\omega \in H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}^1 \otimes \Omega_{\bar{V}}^2)$ и $b_1 \neq 0$, то число $c - c_1 b_1$ должно быть равно нулю.

Из леммы 4.22 следует, что если форма ω , записанная в виде (4.27), принадлежит пространству $H_{(1)}$, то

$$c - c_1 b_1 = 0, \quad (4.30)$$

где $p_{3+i} = (0, b_1) \in L_9$.

Если конфигурация \bar{L} имеет две тройные точки с координатами $(0, b_1)$ и $(0, b_2)$, лежащие на прямой L_9 , то уравнения $c - c_1 b_1 = 0$ и $c - c_1 b_2 = 0$ являются линейно

независимыми. Аналогично, легко проверить, что если тройная точка $p_{s+3} \in L_8$, то она также дает некоторое линейное уравнение вида

$$f(c, c_3) = 0. \quad (4.31)$$

В качестве следствия получаем, что пространство $H_{(1)}$ состоит из форм

$$\omega = \left(c \frac{y dx - x dy}{xy(x-y)} + c_1 \frac{dx}{x} + c_2 \frac{dy}{y} + c_3 \frac{d(x-y)}{x-y} \right) \otimes \frac{dx \wedge dy}{w_1},$$

удовлетворяющих $2 + s$ линейным уравнениям (4.28)–(4.31). Отметим, что эти уравнения являются линейно независимыми. Следовательно, $\dim H_{(1)} = \max(0, 2 - s)$.

Обозначим через \mathcal{M}_{6-s} , $0 \leq s \leq 4$, объединение неприводимых компонент схемы модулей поверхностей Бурния типа s и через $\tilde{\mathcal{B}}_{6-s}$ образ многообразия \mathcal{B}_{6-s} в \mathcal{M}_{6-s} .

СЛЕДСТВИЕ 4.23. *Многообразие $\tilde{\mathcal{B}}_{6-s}$ является всюду плотным в \mathcal{M}_{6-s} , если $s \leq 2$, и, кроме того, имеет место:*

- (i) *пространство \mathcal{M}_2 является неособым в точке $X_{4,0} = \tilde{\mathcal{B}}_2$, $\dim \mathcal{M}_2 = 6$;*
- (ii) *пространство \mathcal{M}_3 является неособым во всех точках $X_3 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$, $\dim \mathcal{M}_3 = 4$, и $\tilde{\mathcal{B}}_3$ является рациональной кривой;*
- (iii) *пространство $\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}'_4 \cup \mathcal{M}''_4$ состоит из двух неприводимых рациональных поверхностей \mathcal{M}'_4 и \mathcal{M}''_4 , \mathcal{M}_4 не особо в каждой точке $X_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_4$;*
- (iv) *пространство \mathcal{M}_5 является унирациональным трехмерным многообразием, неособым в каждой точке $X_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_5$;*
- (v) *пространство \mathcal{M}_6 является унирациональным четырехмерным многообразием, неособым в каждой точке $X_0 \in \tilde{\mathcal{B}}_6$.*

Доказательство следует из (4.17)–(4.21), утверждений 4.10, 4.11 и предложения 4.12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.24. *В обозначениях, сделанных в п. 4.1, пусть накрытие Кампеделли $f_C: X_C \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$ разветвлено вдоль конфигурации Кампеделли, изображенной на рис. 6. Тогда поверхность Бурния X_4 изоморфна поверхности Кампеделли X_C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что накрытие f_C может быть разложено в композицию $f_C = f_{C,1} \circ h_{C,1}$, где $f_{C,1}: X_{C,1} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$ является десингуляризацией двойного накрытия $g_{C,1}: Y_{C,1} \rightarrow \mathbb{P}^2$, заданного в неоднородных координатах уравнением

$$w_1^2 = l_{(1,0,0)} l_{(1,1,0)} l_{(1,0,1)} l_{(1,1,1)}$$

(здесь $l_\alpha(x, y) = 0$ – уравнение прямой L_α). Чтобы разрешить особые точки поверхности $Y_{C,1}$, надо раздуть точки p_1, \dots, p_6 . Пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция этих раздутий, $E_i = \sigma^{-1}(p_i)$ и $\tilde{L}_\alpha = \sigma^{-1}(L_\alpha)$.

Легко видеть, что кривые E_i не принадлежат дивизору ветвления накрытия $f_{C,1}$ и для каждого элемента $(0, a_2, a_3)$ собственный прообраз $f_{C,1}^{-1}(\tilde{L}_{(0,a_2,a_3)})$ кривой $\tilde{L}_{(0,a_2,a_3)}$ является несвязным объединением двух рациональных кривых

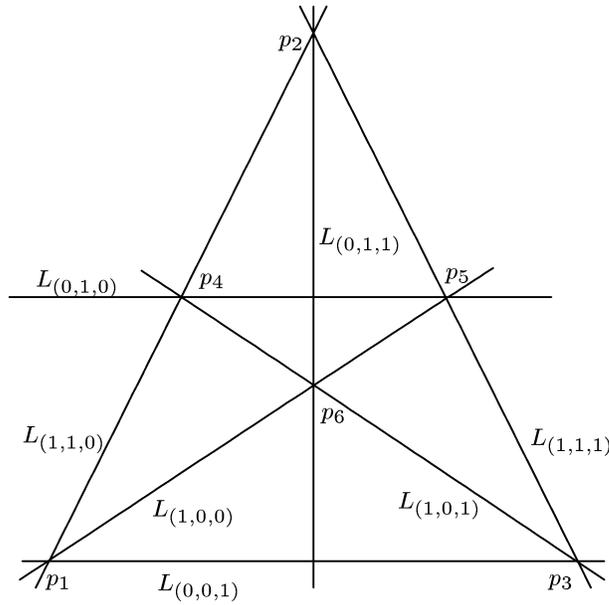


Рис. 6

$L'_{(0,a_2,a_3)}$ и $L''_{(0,a_2,a_3)}$, так как рациональная кривая $\tilde{L}_{(0,a_2,a_3)}$ не пересекается с дивизором ветвления накрытия $f_{C,1}$. Следовательно, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -накрытие $h_{C,1}: X_C \rightarrow X_{C,1}$ разветвлено над объединением кривых E_i , $i = 1, \dots, 6$, и кривых $f_{C,1}^{-1}(\tilde{L}_{(0,a_2,a_3)})$, $(a_2, a_3) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Имеем

$$(L'_{(0,a_2,a_3)}, L'_{(0,a_2,a_3)})_{X_{C,1}} = (L''_{(0,a_2,a_3)}, L''_{(0,a_2,a_3)})_{X_{C,1}} = -1,$$

так как индекс самопересечения $(\tilde{L}_{(0,a_2,a_3)}, \tilde{L}_{(0,a_2,a_3)})_{\mathbb{P}^2} = -1$ и $\deg f_{C,1} = 2$. Совместная конфигурация кривых $L'_{(0,a_2,a_3)}, L''_{(0,a_2,a_3)}$, $(a_2, a_3) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, изображена на рис. 7.

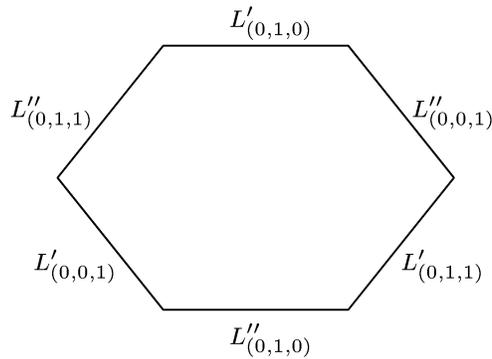


Рис. 7

Аналогично, для каждого $(1, a_2, a_3)$ индекс самопересечения

$$(\tilde{L}_{(1,a_2,a_3)}, \tilde{L}_{(1,a_2,a_3)})_{\tilde{\mathbb{P}}^2} = -2,$$

и, следовательно, собственный прообраз $D_{(1,a_2,a_3)} = f_{C,1}^{-1}(\tilde{L}_{(1,a_2,a_3)})$ имеет индекс самопересечения

$$(D_{(1,a_2,a_3)}, D_{(1,a_2,a_3)})_{X_{C,1}} = \left(\frac{1}{2} f_{C,1}^*(\tilde{L}_{(1,a_2,a_3)}), \frac{1}{2} f_{C,1}^*(\tilde{L}_{(1,a_2,a_3)}) \right)_{X_{C,1}} = -1,$$

а также

$$(D_{(1,a_2,a_3)}, L'_{(0,b_2,b_3)})_{X_{C,1}} = (D_{(1,a_2,a_3)}, L''_{(0,b_2,b_3)})_{X_{C,1}} = 0$$

для всех (a_2, a_3) и (b_2, b_3) . Заметим, что каждая $D_{(1,a_2,a_3)}$ также является рациональной кривой.

Нетрудно видеть, что $X_{C,1}$ является рациональной поверхностью, и если $\tau: X_{C,1} \rightarrow \tilde{X}_{C,1}$ – стягивание кривых $L'_{(0,1,0)}$, $L'_{(0,0,1)}$, $L'_{(0,1,1)}$ и четырех кривых $D_{(1,a_2,a_3)}$ в точки, то $\tilde{X}_{C,1}$ изоморфна проективной плоскости \mathbb{P}^2 , а образ

$$\tau \left(\sum_{i=1}^6 E_i + L''_{(0,1,0)} + L''_{(0,0,1)} + L''_{(0,1,1)} \right)$$

является конфигурацией Бурниа \bar{L}_4 и накрытие $h_{C,1}$ совпадает с накрытием Бурниа $f: X_4 \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$.

Следствие 4.25. *Пространство модулей \mathcal{M}_2 совпадает с пространством модулей \mathcal{C} поверхностей Кампеделли.*

4.3. Поверхности X общего типа с $p_g = 0$, $K_X^2 = 6$ и $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \subset \text{Tors}(X)$. Пусть $\bar{L} = L_1 + \dots + L_6$ – конфигурация шести прямых в \mathbb{P}^2 , имеющая три тройные точки p_1, p_2, p_3 , не лежащие на одной прямой. Такая конфигурация \bar{L} изображена на рис. 8.

Рассмотрим накрытие $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, ассоциированное с эпиморфизмом $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, заданным формулами

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1) &= \varphi(\lambda_2) = \varphi(\lambda_3) = (1, 0), \\ \varphi(\lambda_4) &= (2, 1), \quad \varphi(\lambda_5) = (1, 1), \quad \varphi(\lambda_6) = (0, 1). \end{aligned}$$

Поверхность Y имеет три особые точки, лежащие над тройными точками p_i . Согласно лемме 1.4, чтобы разрешить эти особые точки, достаточно раздуть точки p_i и рассмотреть индуцированное накрытие Галуа $f: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$. Пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция раздутий точек p_i . Обозначим через $E_i = \sigma^{-1}(p_i)$ исключительную кривую, лежащую над точкой p_i .

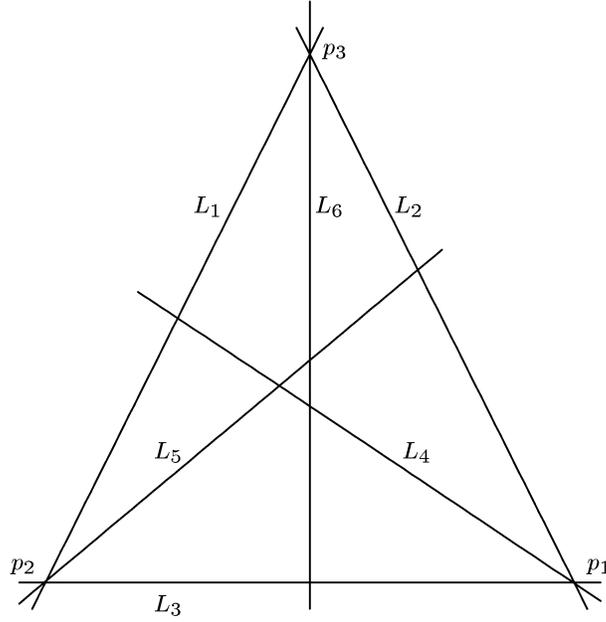


Рис. 8

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.26. Построенная выше поверхность X является поверхностью общего типа с $K_X^2 = 6$, $p_g = 0$ и $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \subset \text{Tors}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 2.2 имеем $3K_X = |f^*(3L - \sum E_i)|$, где $L = \sigma^*(\mathbb{P}^1)$ – полный прообраз прямой $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$. Следовательно, X является поверхностью общего типа с обильным каноническим классом. Из (2.2) и (2.8) легко видеть, что $K_X^2 = 6$ и $e(X) = 6$. Следовательно, согласно формуле Нётера имеем $p_a = 1 - q + p_g = 1$. Как и выше, чтобы вычислить p_g , достаточно вычислить геометрические роды четырех циклических накрытий, ассоциированных с четырьмя эпиморфизмами из группы $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ в циклическую группу $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Эти накрытия задаются в неоднородных координатах соответственно следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} w_1^3 &= l_1 l_2 l_3 l_4^2 l_5, & w_2^3 &= l_1 l_2 l_3 l_5^2 l_6, \\ w_3^3 &= l_1 l_2 l_3 l_4 l_6^2, & w_4^3 &= l_4 l_5 l_6. \end{aligned}$$

Применяя утверждение 3.3, легко проверить, что геометрический род каждого из этих накрытий равен нулю. Следовательно, поверхность X имеет геометрический род $p_g = 0$.

Чтобы увидеть, что $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \subset \text{Tors}(X)$, рассмотрим универсальное накрытие $g_{u(3)}: \tilde{Y}_{u(3)} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$, соответствующее эпиморфизму

$$\bar{\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5,$$

заданному формулами

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1) &= (1, 0, 0, 0, 0), & \varphi(\lambda_2) &= (1, 0, 1, 0, 0), \\ \varphi(\lambda_3) &= (1, 0, 0, 1, 0), & \varphi(\lambda_4) &= (2, 1, 0, 0, 1), \\ \varphi(\lambda_5) &= (1, 1, 0, 0, 0), & \varphi(\lambda_6) &= (0, 1, 2, 2, 2).\end{aligned}$$

Легко видеть, что накрытие Галуа $h_{u,\varphi}: X_u \rightarrow X$, индуцированное проекцией $\psi: (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5 \rightarrow G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ на первые две координаты, является неразветвленным. Следовательно, согласно следствию 1.6 имеем включение $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \subset \text{Tors } X$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.27. *Иррегулярность поверхности X_u равна $q(X_u) = 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве утверждения 4.8, чтобы вычислить q , достаточно вычислить p_a и p_g .

Имеем $p_a(X) = 1$. Следовательно, арифметический род $p_a(X_u) = 3^3$, так как $h_{u,\varphi}$ является неразветвленным накрытием и $\deg h_{u,\varphi} = 3^3$.

Согласно утверждению 3.3, чтобы вычислить p_g , достаточно вычислить геометрические роды $\frac{3^5-1}{2} = 121$ циклических накрытий, соответствующих $\frac{3^5-1}{2}$ эпиморфизмам ψ_m , $m = 1, \dots, 121$, группы $G_{u,\varphi} = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ в циклическую группу $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Эти вычисления оставлены читателю, заметим лишь, что вклад в иррегулярность поверхности X_u дают только следующие циклические накрытия:

$$z_1^3 = l_1 l_2 l_6, \quad z_2^3 = l_1 l_3 l_5, \quad z_3^3 = l_2 l_3 l_4.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.28. *Фундаментальная группа построенной выше поверхности X является бесконечной неабелевой группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 4.27.

4.4. Поверхности Годо. Пусть $\bar{L} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ – конфигурация четырех прямых в \mathbb{P}^2 , находящихся в общем положении. Рассмотрим следующие накрытия: универсальное накрытие $g_{u(5)}: Y_{u(5)} \rightarrow \mathbb{P}^2$, соответствующее эпиморфизму

$$\bar{\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{L}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3,$$

накрытие $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, ассоциированное с эпиморфизмом $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$, заданным (в некоторых координатах в группе $G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$) формулами

$$\varphi(\lambda_1) = (1, 0), \quad \varphi(\lambda_2) = (0, 1), \quad \varphi(\lambda_3) = (1, 2), \quad \varphi(\lambda_4) = (3, 2),$$

и накрытие $h: Y_{u(5)} \rightarrow Y$, соответствующее эпиморфизму $\psi: (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \rightarrow G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ такому, что $\varphi = \psi \circ \bar{\varphi}$. Из леммы 1.4 следует, что поверхность Y является неособой, и согласно предложению 1.5 накрытие h является неразветвленным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.29. *Построенная выше поверхность Y является поверхностью общего типа с $K_Y^2 = 1$, $p_g = 0$ и $\text{Tors}(Y) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 2.2 имеем $5K_Y = |f^*(L)|$, где L – прямая в \mathbb{P}^2 . Следовательно, Y является поверхностью общего типа с обильным каноническим классом. Применив (2.2) и (2.3), легко видеть, что $K_Y^2 = 1$ и $e(Y) = 11$. Следовательно, согласно формуле Нётера, $p_a = 1 - q + p_g = 1$. Чтобы вычислить p_g , достаточно вычислить геометрические роды шести циклических накрытий, ассоциированных с шестью циклическими подгруппами в группе G и заданных соответственно следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} w_1^5 &= l_1 l_3 l_4^3, & w_2^5 &= l_2 l_3^2 l_4^2, & w_3^5 &= l_1 l_2 l_3^3, \\ w_4^5 &= l_1^2 l_2 l_3^4 l_4^3, & w_5^5 &= l_1 l_2^2 l_4^2, & w_6^5 &= l_1 l_2^3 l_3^2 l_4^4. \end{aligned}$$

Применяя вычисления, проведенные в § 3, можно легко проверить, что геометрический род каждого из этих накрытий равен нулю. Следовательно, поверхность Y имеет геометрический род $p_g = 0$.

Поскольку накрытие Галуа h является неразветвленным, то имеет место вложение $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \text{Tors}(Y)$. Чтобы показать, что $\text{Tors}(Y) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, достаточно показать, что поверхность $Y_{u(5)}$ односвязна. Более того, легко видеть, что $Y_{u(5)}$ изоморфна некоторой гладкой поверхности в \mathbb{P}^3 . Действительно, выберем однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ в \mathbb{P}^2 так, чтобы $x_i = 0$ было уравнением прямой L_{i+2} . Пусть $\sum a_i x_i = 0$ – уравнение прямой L_1 . Не ограничивая общности, можем предполагать, что накрытие $g_{u(5)}$ ассоциировано с эпиморфизмом $\bar{\varphi}: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus L, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$, заданным формулами

$$\bar{\varphi}(\lambda_1) = (0, 0, 1), \quad \bar{\varphi}(\lambda_2) = (4, 4, 4), \quad \bar{\varphi}(\lambda_3) = (1, 0, 0), \quad \bar{\varphi}(\lambda_4) = (0, 1, 0).$$

В этом случае поверхность $Y_{u(5)}$ задается уравнениями

$$z_3^5 = z_1, \quad z_4^5 = z_2, \quad z_5^5 = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2$$

в неоднородных координатах (z_1, z_2, \dots, z_5) , где $z_1 = \frac{x_1}{x_0}$ и $z_2 = \frac{x_2}{x_0}$, и, следовательно, поверхность $Y_{u(5)}$ изоморфна проективному замыканию поверхности в \mathbb{C}^3 , заданной уравнением $z_5^5 = a_0 + a_1 z_3^5 + a_2 z_4^5$ (ср. [5]).

Список литературы

1. Barth W., Peters C., Van de Ven A. Compact complex surfaces. Berlin–Heidelberg–N.Y.–Tokyo: Springer-Verlag, 1984.
2. Burniat P. Sur les surfaces de genre $P_{12} > 0$ // Ann. Pura Appl. 1966. V. 71. № 4. P. 1–24.
3. Campedelli L. Sopra alcuni piani doppi notevoli con curve di diramazione del decimo ordine // Atti Acad. Naz. Lincei. 1932. V. 15. P. 536–542.
4. Dolgachev I. Algebraic surfaces with $q = p_g = 0$ // Algebraic surfaces. Napoli: Liguori, 1971.
5. Godeaux L. Sur une surface algebrique de genere zero et bigenere deux // Atti. Acad. Naz. Lincei. 1931. V. 14. P. 479–481.

6. *Grauert H., Remmert R.* Komplexe Raume // Math. Ann. 1958. V. 136. P. 245–318.
7. *Kharlamov V., Kulikov Vik. S.* Deformation inequivalent complex conjugated complex structures and applications // Turk. J. Math. 2002. V. 26. P. 1–25.
8. *Miyaoka Y.* On numerical Campedelli surfaces // Complex analysis and Algebraic geometry. Tokyo: Iwanami Shoten, 1977. P. 113–118.
9. *Peters C.* On certain examples of surfaces with $p_g = 0$ // Nagoya Math. J. 1977. V. 66. P. 109–120.
10. *Mendes Lopes M., Pardini R.* A connected component of the moduli space of surfaces with $p_g = 0$ // Topology. 2001. V. 40. № 5. P. 977–991.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
13.04.2004