

УДК 512.722.1+514.756.44

Вик. С. Куликов

Формула разложения на множители полного поворота с удвоенным числом нитей

Приведена формула для разложения на множители полного поворота в группе кос $B\Gamma_{2m}$, зависящая от четырех разложений на множители полного поворота в $B\Gamma_m$. Используя эту формулу, мы строим симплектическое четырехмерное многообразие X и два регулярно гомотопных общих накрытия $f_i: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ плоскости, разветвленные соответственно вдоль двух каспидальных кривых Гурвица $\overline{H}_i \subset \mathbb{CP}^2$ (без отрицательных ноудов), имеющих разные типы разложений на множители брэйд-монодромии. Описан класс фундаментальных групп дополнений к аффинным плоским кривым Гурвица в терминах образующих и определяющих соотношений.

Библиография: 17 наименований.

Введение

Пусть (X, L) – поляризованная проективная поверхность над полем $\mathbb{C}$, где поляризация L – это очень обильное линейное расслоение на X . Три общих сечения расслоения L определяют общее накрытие плоскости $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$, разветвленное над алгебраической каспидальной кривой $\overline{H} \subset \mathbb{CP}^2$ (возможно, чтобы получить общее накрытие плоскости, вместо сечений расслоения L необходимо взять три сечения расслоения $L^{\otimes 2}$ [8]). Недавно Д. Ору и Л. Кацарков (см. [2], [3]) получили следующий результат в симплектическом случае. Пусть (X, ω) – компактное симплектическое четырехмерное многообразие с симплектической формой ω , класс которой $[\omega]$ принадлежит $H^2(X, \mathbb{Z})$. Зафиксируем ω -совместимую почти комплексную структуру J и соответствующую риманову метрику g . Пусть L – линейное расслоение на X с первым классом Черна, равным $[\omega]$. Тогда при $k \gg 0$ линейное расслоение $L^{\otimes k}$ имеет достаточно много почти голоморфных сечений, так что можно выбрать из них три, дающие почти голоморфное общее накрытие $f_k: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ степени $N_k = k^2 \omega^2$, разветвленное вдоль каспидальной кривой Гурвица $\overline{H}_k$ (понятие кривой Гурвица является обобщением понятия плоской алгебраической кривой; см. определение в § 5). В алгебраическом случае если $\deg f \geq 12$, то f определяется однозначно кривой $\overline{H}$ [10], [13]. Любое общее накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ степени N , разветвленное вдоль каспидальной кривой Гурвица $\overline{H}$, определяет монодромию $\overline{\mu}$ (и определяется ею), т. е. эпиморфизм $\overline{\mu}: \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \overline{H}) \rightarrow \mathfrak{S}_N$ в симметрическую группу $\mathfrak{S}_N$. Поэтому одной из основных задач является исследование свойств фундаментальных групп дополнений к кривым Гурвица с целью построить интересные примеры симплектических четырехмерных многообразий.

Работа частично поддержана фондами РФФИ (грант № 02-01-00786) и INTAS (грант № 00-0269).

В работе [11] был определен класс $\mathcal{C}$ групп, названных C -группами. Этот класс совпадает (см. предложение 1.3) с классом, состоящим из групп, заданных конечным копредставлением следующего вида: для некоторого целого числа m , функции $h: \{1, \dots, m\}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ и подмножества

$$W = \{w_{i,j,k} \in \mathbb{F}_m \mid 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq k \leq h(i, j)\} \subset \mathbb{F}_m,$$

где $\mathbb{F}_m$ – свободная группа, порожденная алфавитом $\{x_1, \dots, x_m\}$, группа $G \in \mathcal{C}$ задана копредставлением

$$G_W = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i = w_{i,j,k}^{-1} x_j w_{i,j,k}, w_{i,j,k} \in W \rangle. \quad (1)$$

Пусть $\varphi_W: \mathbb{F}_m \rightarrow G_W$ – канонический эпиморфизм. Элементы $\varphi_W(x_i) \in G$, $1 \leq i \leq m$, и элементы, сопряженные им, называются C -образующими C -группы G . Пусть $f: G_1 \rightarrow G_2$ – гомоморфизм C -групп. Он называется C -гомоморфизмом, если образы всех C -образующих группы G_1 при гомоморфизме f являются C -образующими C -группы G_2 . Будем различать группы $G \in \mathcal{C}$ с точностью до C -изоморфизмов. Отметим, что класс $\mathcal{C}$ содержит подклассы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}$ соответственно групп узлов и зацеплений, заданных с помощью копредставления Виртингера. В [11] было доказано, что класс $\mathcal{C}$ совпадает с классом фундаментальных групп дополнений к ориентируемым поверхностям в четырехмерной сфере S^4 (с обобщенным копредставлением Виртингера).

Доказывается (теорема 6.1), что класс $\mathcal{H} = \{\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)\}$ фундаментальных групп дополнений к аффинным кривым Гурвица H (т.е. $H = \overline{H} \cap (\mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty)$, где $\overline{H}$ – кривая Гурвица в $\mathbb{CP}^2$ и L_∞ – проективная прямая в $\mathbb{CP}^2$, находящаяся в общем положении относительно $\overline{H}$) совпадает с подклассом в $\mathcal{C}$, состоящим из C -групп G_W , заданных копредставлением (1) таким, что множество слов $\{[x_i, x_1 \dots x_m]\}_{i=1, \dots, m}$ является подмножеством множества W (через $[a, b]$ обозначен коммутант элементов a и b). Мы также описываем (теорема 6.3) пересечение $\mathcal{H} \cap \mathcal{L}$ классов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}$. Кроме того, доказывается (следствие 1.15), что класс $\mathcal{C}$ совпадает с классом групп $\mathcal{C}_{\text{Br}}$, которые обладают копредставлением вида

$$G_B = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i^{-1} b(x_i) = 1, i = 1, \dots, m, b \in B \rangle$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и конечно определенной подгруппы группы кос Br_m , где $b(x_i)$ – образ элемента x_i при стандартном действии элемента $b \in \text{Br}_m$ на $\mathbb{F}_m$. Доказательство этих результатов базируется на формуле разложений на множители полного поворота в группе кос Br_{2m} (см. §3). Эта формула также применяется в доказательстве существования симплектического четырехмерного многообразия X и двух регулярно гомотопных общих накрытий $f_i: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$, $i = 1, 2$, разветвленных соответственно над каспидальными кривыми Гурвица $\overline{H}_i \subset \mathbb{CP}^2$ (без отрицательных узлов), имеющими разные типы разложений на множители брэйд-монодромии (см. теорему 7.7).

§1. C -группы

Пусть $\mathbb{F}$ – свободная группа, порожденная алфавитом $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Ниже через $\mathbb{F}_m$ обозначается подгруппа группы $\mathbb{F}$, порожденная элементами $x_1, \dots, x_m$, и через $\mathbb{F}_{m,k}$ – подгруппа в $\mathbb{F}$, порожденная элементами $x_{k+1}, \dots, x_{k+m}$. Обозна-

чение $w(x_1, \dots, x_m)$ будет использоваться для слов, состоящих из букв $x_1, \dots, x_m$ и обратных к ним и рассматриваемых как элементы группы $\mathbb{F}_m$.

Пусть W – некоторое подмножество в $\mathbb{F}_m$ и $N_m(W)$ – нормальное замыкание W в $\mathbb{F}_m$. Обозначим через $\varphi_W: \mathbb{F}_m \rightarrow \mathbb{F}_m/N_m(W) = G(W)$ канонический эпиморфизм. Множество

$$R_W = \{w_j(x_1, \dots, x_m) = \mathbf{1} \mid w_j \in W\}$$

будем называть *множеством определяющих соотношений* группы $G(W)$. Скажем, что соотношения R_W влекут соотношение $\{w = \mathbf{1}\}$, если $w \in N_m(W)$. Иногда множество R_W будем записывать в виде

$$R_W = \{u_j(x_1, \dots, x_m) = v_j(x_1, \dots, x_m) \mid w_j(\bar{x}) = u_j(\bar{x})v_j^{-1}(\bar{x}) \in W\}$$

для некоторого представления слов $w_j \in W$ как произведение $w_j = u_j v_j^{-1}$.

Пусть $W_1 \subset \mathbb{F}_{m_1}$, $W_2 \subset \mathbb{F}_{m_2}$ и $f: G(W_1) \rightarrow G(W_2)$ – гомоморфизм. Скажем, что f является *каноническим гомоморфизмом*, если

$$f(\varphi_{W_1}(x_i)) = \varphi_{W_2}(x_i)$$

для всех $i \leq \min(m_1, m_2)$. В частности, если $W_1 \subset W_2$ – два подмножества в $\mathbb{F}_m$, то существует канонический эпиморфизм

$$\psi_{W_1, W_2}: G(W_1) \rightarrow G(W_2) = G(W_1)/N_{G(W_1)}(\varphi_{W_1}(W_2 \setminus W_1)), \quad (2)$$

где $N_{G(W_1)}(\varphi_{W_1}(W_2 \setminus W_1))$ – нормальное замыкание в группе $G(W_1)$ множества $\varphi_{W_1}(W_2 \setminus W_1)$.

Скажем, что два множества соотношений

$$R_{W_i} = \{w_{i,j} = \mathbf{1} \mid w_{i,j} \in W_i\}, \quad i = 1, 2,$$

эквивалентны, если $N_m(W_1) = N_m(W_2)$. В общем случае для $k \leq m$ пусть $W_1 \subset \mathbb{F}_k$ и $W_2 \subset \mathbb{F}_m$ – два подмножества элементов из $\mathbb{F}_k$ и $\mathbb{F}_m$ соответственно. Множества соотношений

$$\begin{aligned} R_{W_1} &= \{w_{1,j} = \mathbf{1} \mid w_{1,j} \in W_1\}, \\ R_{W_2} &= \{w_{2,j} = \mathbf{1} \mid w_{2,j} \in W_2\} \end{aligned}$$

называются *эквивалентными*, если существует канонический изоморфизм $h: G(W_1) \rightarrow G(W_2)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Для $W_1, W_2 \subset \mathbb{F}_k$ и $\overline{W_1} \subset \mathbb{F}_m$, $m \geq k$, если множества соотношений R_{W_1} и $R_{\overline{W_1}}$ являются эквивалентными, то множества соотношений $R_{W_1 \cup W_2}$ и $R_{\overline{W_1} \cup W_2}$ эквивалентны.*

Доказательство состоит из прямой проверки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Пусть $w(x_1, \dots, x_m) = x_{j_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{j_n}^{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, n$, – слово, состоящее из букв $x_1, \dots, x_m$ и обратных к ним, которое имеет буквенную длину $n \geq 2$. Тогда для любой пары $i_1, i_2 \in \{1, \dots, m\}$ соотношение $\{x_{i_1} = w^{-1}x_{i_2}w\}$ в $\mathbb{F}_m$ эквивалентно объединению множеств соотношений

$$R_w = \{x_{m+k} = x_{j_k}^{-\varepsilon_k} x_{m+k-1} x_{j_k}^{\varepsilon_k} \mid k = 2, \dots, n-1\} \\ \cup \{x_{m+1} = x_{j_1}^{-\varepsilon_1} x_{i_2} x_{j_1}^{\varepsilon_1}, x_{i_1} = x_{j_n}^{-\varepsilon_n} x_{m+n-1} x_{j_n}^{\varepsilon_n}\}$$

в свободной группе $\mathbb{F}_{m+n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит из прямой проверки.

Пусть I – произвольное подмножество множества $\{1, \dots, N\}^3$. Поскольку для $(i, j, k) \in \{1, \dots, N\}^3$ соотношения $x_i = x_j^{-1} x_k x_j$ и $x_k = x_j x_i x_j^{-1}$ эквивалентны, утверждения 1.1 и 1.2 влекут следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Каждая C -группа G канонически C -изоморфна C -группе $\bar{G}$, заданной C -копредставлением вида

$$\bar{G} \simeq \langle x_1, \dots, x_N \mid x_i = x_j^{-1} x_k x_j, (i, j, k) \in I \rangle,$$

т.е. определение C -групп, данное во введении, совпадает с определением C -групп, данным в [11].

Отметим, что соотношение $x_i = x_j$ является C -соотношением, так как оно может быть записано в виде $x_i = x_j^{-1} x_j x_j$.

ПРИМЕР. Пусть Br_m – группа кос с m нитями. Как известно, она порождается образующими $a_1, \dots, a_{m-1}$, связанными соотношениями

$$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ a_i a_k = a_k a_i, \quad |i-k| \geq 2. \quad (3)$$

Группа кос Br_m , заданная копредставлением (3), обладает естественной структурой C -группы. Действительно, пусть

$$R_{W(\text{Br}_m)} = \{x_{2i+1} = x_{2i-1}^{-1} x_{2i} x_{2i-1} \mid i = 1, \dots, m-1\} \\ \cup \{x_{2i-1} = x_{2i}^{-1} x_{2i+1} x_{2i} \mid i = 1, \dots, m-1\} \\ \cup \{x_{2i-1} = x_{2j-1}^{-1} x_{2i-1} x_{2j-1} \mid |i-j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq m-1\}$$

– множество C -соотношений в $\mathbb{F}_{2m-3}$. Положим $G_{\text{Br}_m} = G(W(\text{Br}_m))$. Можно проверить, что гомоморфизм $f: \text{Br}_m \rightarrow G_{\text{Br}_m}$, заданный на образующих следующим образом: $f(a_i) = \varphi_W(x_{2i-1})$, $i = 1, \dots, m-1$, является изоморфизмом.

Для множества $W = W_f = \{w_j(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{F}_m \mid j \in J\}$, где $f: J \rightarrow \mathbb{F}_m$ – отображение из множества J и образ $f(j)$ элемента $j \in J$ обозначен через w_j , множество

$$\text{sh}(W) = \text{sh}_m(W) = \{w_j(x_{m+1}, \dots, x_{2m}) \mid j \in J\}$$

называется *сдвигом* множества W на m . Положим

$$W_{\text{mod } m} = \{x_i^{-1}x_{m+i} \mid i = 1, \dots, m\}$$

и назовем множества

$$d(W) = d_m(W) = W \cup \text{sh}(W) \cup W_{\text{mod } m}, \quad (4)$$

$$\bar{d}(W) = \bar{d}_m(W) = \text{sh}(W) \cup W_{\text{mod } m} \quad (5)$$

в $\mathbb{F}_{2m}$ соответственно *удвоением* и *приведенным удвоением* множества W .

Удвоение (соответственно, приведенное удвоение) множества W может быть итерировано, если положить

$$d^n(W) = d_{2^{n-1}m}(d^{n-1}(W)) \in \mathbb{F}_{2^n m}. \quad (6)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. Для любого $n \in \mathbb{N}$ множества соотношений R_W , $R_{d^n(W)}$ и $R_{\bar{d}^n(W)}$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит из прямой проверки.

Пусть B – подгруппа в $\text{Aut}(\mathbb{F}_m)$. Обозначим через $R_{W(B, \mathbb{F}_m)}$ множество соотношений:

$$R_{W(B, \mathbb{F}_m)} = \{wg(w)^{-1} = \mathbf{1} \mid w \in \mathbb{F}_m, g \in B\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5. Пусть $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{F}_m$ – элементы, порождающие группу $\mathbb{F}_m$. Тогда для подгруппы $B \subset \text{Aut}(\mathbb{F}_m)$ множество соотношений $R_{W(B, \mathbb{F}_m)}$ эквивалентно множеству

$$R_{W(B, \bar{y})} = \{y_i g(y_i)^{-1} = \mathbf{1} \mid 1 \leq i \leq m, g \in B\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для доказательства утверждения достаточно показать, что если элементы $w_1 g(w_1)^{-1}$ и $w_2 g(w_2)^{-1}$ принадлежат группе $N_m(W(B, \bar{y}))$ для некоторых $w_1, w_2 \in \mathbb{F}_m$, то

$$\begin{aligned} w_1^{-1} g(w_1^{-1})^{-1} &\in N_m(W(B, \bar{y})), \\ w_1 w_2 g(w_1 w_2)^{-1} &\in N_m(W(B, \bar{y})). \end{aligned}$$

Если $w_1 g(w_1)^{-1} \in N_m(W(B, \bar{y}))$, то

$$(w_1 g(w_1)^{-1})^{-1} = g(w_1) w_1^{-1} \in N_m(W(B, \bar{y}))$$

и, следовательно,

$$w_1^{-1} g(w_1^{-1})^{-1} = w_1^{-1} (g(w_1) w_1^{-1}) w_1 \in N_m(W(B, \bar{y})).$$

Если $w_1 g(w_1)^{-1}, w_2 g(w_2)^{-1} \in N_m(W(B, \bar{y}))$, то

$$\begin{aligned} w_1 w_2 g(w_1 w_2)^{-1} &= w_1 w_2 g(w_2)^{-1} g(w_1)^{-1} \\ &= w_1 (w_2 g(w_2)^{-1}) w_1^{-1} (w_1 g(w_1)^{-1}) \in N_m(W(B, \bar{y})). \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6. Если подгруппа $B \subset \text{Aut}(\mathbb{F}_m)$ порождается элементами $b_1, \dots, b_n$, а элементы $y_1, \dots, y_m$ порождают $\mathbb{F}_m$, то множество соотношений $R_{W(B, \mathbb{F}_m)}$ эквивалентно множеству

$$R_{W(\bar{b}, \bar{y})} = \{y_i b_j (y_i)^{-1} = \mathbf{1} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 1.5 достаточно показать, что если элементы $w g_1(w)^{-1}$ и $w g_2(w)^{-1}$ принадлежат группе $N_m(W(\bar{b}, \bar{y}))$ для некоторых $g_1, g_2 \in B$ и всех $w \in \mathbb{F}_m$, то $w(g_1^{-1}(w))^{-1} \in N_m(W(\bar{b}, \bar{y}))$ и $w(g_1 g_2(w))^{-1} \in N_m(W(\bar{b}, \bar{y}))$.

Если $w g_1(w)^{-1} \in N_m(W(\bar{b}, \bar{y}))$ для всех $w \in \mathbb{F}_m$, то

$$(w(g_1^{-1}(w))^{-1})^{-1} = (g_1^{-1}(w))w^{-1} = (g_1^{-1}(w))(g_1(g_1^{-1}(w)))^{-1} \in N_m(W(\bar{b}, \bar{y})).$$

Если $w(g_1(w))^{-1}, w(g_2(w))^{-1} \in N_m(W(\bar{b}, \bar{y}))$ для всех $w \in \mathbb{F}_m$, то

$$w g_1 g_2(w)^{-1} = w g_1(g_2(w))^{-1} = (w g_2(w)^{-1})(g_2(w)g_1(g_2(w))^{-1}) \in N_m(W(\bar{b}, \bar{y})).$$

Группа кос Br_m с m нитями действует на $\mathbb{F}_m$. Далее мы зафиксируем множество $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ так называемых *стандартных образующих*, т.е. образующих группы Br_m , связанных соотношениями

$$\begin{aligned} a_i a_{i+1} a_i &= a_{i+1} a_i a_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ a_i a_k &= a_k a_i, & |i-k| \geq 2, \end{aligned}$$

и действующих на $\mathbb{F}_m$ следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i(x_j) &= x_j, & \text{если } i \neq j, j+1, \\ a_i(x_i) &= x_i x_{i+1} x_i^{-1}, & a_i(x_{i+1}) = x_i. \end{aligned}$$

Следовательно, каждой подгруппе $B \subset \text{Br}_m$ можно сопоставить множество соотношений $R_{W(B, \mathbb{F}_m)}$. Как и в случае свободных групп, при $k \leq m$ группа Br_k будет отождествляться с подгруппой группы Br_m , порожденной первыми $k-1$ стандартными образующими $a_1, \dots, a_{k-1}$, и через $B_{k,i}$, $k+i \leq m$, будет обозначаться подгруппа группы Br_m , порожденная элементами $a_{i+1}, \dots, a_{i+k-1}$. В частности, $B_{k,0} = \text{Br}_k$. Пусть $\Delta_{k,i}$ — элемент Гарсайда в группе кос $B_{k,i}$:

$$\Delta_{k,i} = (a_{i+1} \dots a_{i+k-1}) \dots (a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3}) (a_{i+1} a_{i+2}) a_{i+1}.$$

Имеем

$$\Delta_{k,i}(x_{i+j}) = (x_{i+1} \dots x_{i+k-j}) x_{i+k-j+1} (x_{i+1} \dots x_{i+k-j})^{-1} \quad (7)$$

для $i+1 \leq j \leq i+k$ (по определению $x_{i+1} \dots x_{i+k-j} = \mathbf{1}$, если $j = i+k$) и

$$\Delta_k(x_j) = x_j$$

для $j \leq i$ и $j > i + k$. Элемент Гарсайда в группе Gr_k будет обозначаться через Δ_k .

Обозначим через $\text{sh} = \text{sh}_m: \text{Gr}_m \rightarrow \text{Gr}_{2m}$ гомоморфизм, заданный на образующих следующим образом: $\text{sh}(a_j) = a_{m+j}$ для $j = 1, \dots, m-1$. Пусть B – подгруппа в Gr_m , ее образ $\text{sh}(B)$ назовем *сдвигом* группы B на m .

В дальнейшем группа $\mathbb{F}_k$ будет отождествляться с фундаментальной группой $\pi_1(D_k \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, p_0)$, где $D_k = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq k+1\}$, $p_0 = -i(k+1)$, $p_j = -j$, $j = 1, \dots, k$, и для каждого j элемент x_j будет отождествляться с петлей, состоящей из пути вдоль отрезка

$$\gamma_j = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -i(k+1) - t(j + i(\varepsilon - k - 1)), 0 \leq t \leq 1\}$$

для некоторого ε , $0 < \varepsilon \ll 1$, обхода против часовой стрелки вдоль окружности $\{|z + j| = \varepsilon\}$ и возврата в точку p_0 вдоль l_j (см. рис. 1). Для выбранного таким образом базиса $x_1, \dots, x_k$ стандартные образующие a_j группы Gr_k , $j = 1, \dots, k-1$, отождествляются с поворотами, определяемыми сегментами $[-j-1, -j] = \{z = -(j+1) + t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ (см., например, [17]). Элемент $l_k = x_1 \dots x_k$ в $\pi_1(D_k \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, p_0)$ представляется обходом против часовой стрелки вдоль границы ∂D_k диска D_k и является неподвижным элементом действия группы Gr_k .

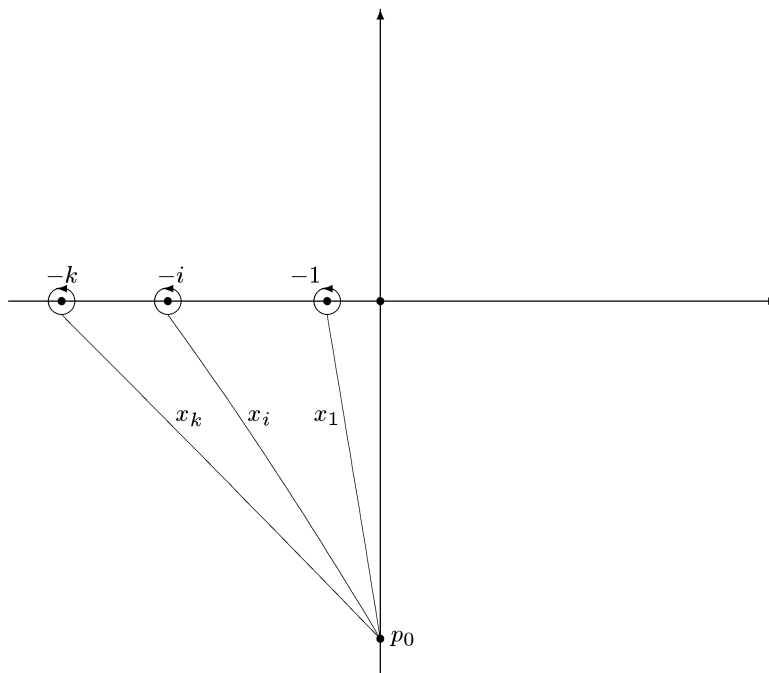


Рис. 1

Скажем, что упорядоченное множество $\{y_1, \dots, y_m\}$ элементов из $\mathbb{F}_m$ является *хорошим геометрическим базисом* группы $\mathbb{F}_m$, если найдется элемент $b \in \text{Br}_m$ такой, что $y_j = b(x_j)$ для $j = 1, \dots, m$. Упорядоченное множество $\{y_1, \dots, y_k\}$, $k \leq m$, элементов из $\mathbb{F}_m$ называется *хорошим*, если множество $\{y_1, \dots, y_k\}$ может быть расширено до хорошего геометрического базиса $\{y_1, \dots, y_m\}$ группы $\mathbb{F}_m$. Известно, что $\{y_1, \dots, y_m\}$ является хорошим геометрическим базисом в $\mathbb{F}_m$ тогда и только тогда, когда каждый элемент y_j сопряжен с некоторым $x_{k(j)}$ в $\mathbb{F}_m$ и $y_1 \dots y_m = l_m$.

Рассмотрим элемент $w(x_1, \dots, x_m) = x_{j_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{j_n}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, в $\mathbb{F}_m$ буквенной длины n . Для $k > n$ и $p \geq 1$ элемент

$$m_{pmk,k,m}(w) = x_{(pk-\varepsilon_1(k-1))m+j_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{(pk-\varepsilon_n(k-n))m+j_n}^{\varepsilon_n} \in \mathbb{F}_{m(p+1)k}$$

называется *раздвижкой* элемента w на m с центром в pmk .

Далее нам понадобится следующее утверждение, являющееся очевидным с геометрической точки зрения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7. Пусть $w_k(x_1, \dots, x_m) = x_{j_{k,1}}^{\varepsilon_{k,1}} \dots x_{j_{k,n_k}}^{\varepsilon_{k,n_k}}$, $\varepsilon_{k,j} = \pm 1$, $k = 1, 2$, – два слова, состоящие из букв $x_1, \dots, x_m$ и обратных к ним и имеющих буквенные длины n_k , меньшие чем n . Тогда для каждой пары чисел i_1, i_2 такой, что $1 \leq i_1, i_2 \leq m$, пара элементов y_1, y_2 , где $y_1 = \bar{w}_1 x_{nm+i_1} \bar{w}_1^{-1}$, $y_2 = \bar{w}_2 x_{3nm+i_2} \bar{w}_2^{-1}$, является хорошей в $\mathbb{F}_{4mn}$, где

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= m_{mn,n,m}(w_1) = x_{(n-\varepsilon_{1,1}(n-1))m+j_{1,1}}^{\varepsilon_{1,1}} \dots x_{(n-\varepsilon_{1,n_1}(n-n_1))m+j_{1,n_1}}^{\varepsilon_{1,n_1}}, \\ \bar{w}_2 &= m_{3mn,n,m}(w_2) = x_{(3n-\varepsilon_{2,1}(n-1))m+j_{2,1}}^{\varepsilon_{2,1}} \dots x_{(3n-\varepsilon_{2,n_2}(n-n_2))m+j_{2,n_2}}^{\varepsilon_{2,n_2}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пара элементов y_1 и y_2 представляется парой петель вида, аналогичного тому, который изображен на рис. 2. Очевидно, такие пары y_1, y_2 являются хорошими.

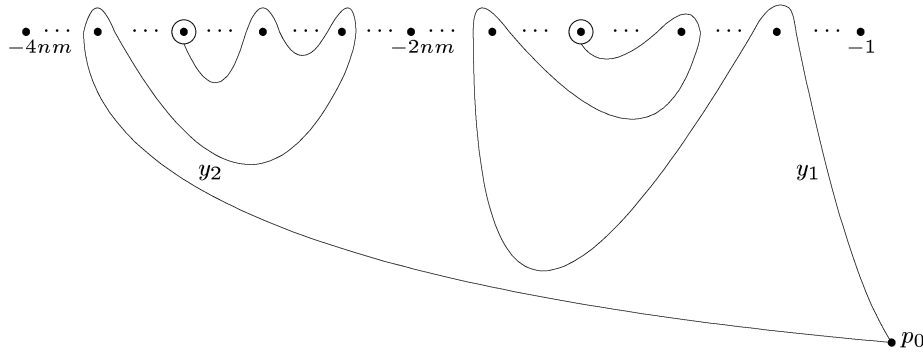


Рис. 2

Пусть $h: \{1, \dots, m\}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ – неотрицательная целочисленная функция. Положим

$$I_h = \{(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 \mid 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq k \leq h(i, j)\},$$

и пусть $f: I_h \rightarrow \mathbb{F}_m$ – отображение в $\mathbb{F}_m$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8. Для любого отображения $f: I_h \rightarrow \mathbb{F}_m$ существуют число $M \in \mathbb{N}$, конечное множество $I_{h,f} \subset \{1, \dots, M\}^2$ и отображение $F: I_{h,f} \rightarrow \mathbb{F}_M^2 = \mathbb{F}_M \times \mathbb{F}_M$ такие, что:

- (i) пара $F(i, j) = (y_i, y_j)$ является хорошей в $\mathbb{F}_M$ для каждого $(i, j) \in I_{h,f}$;
- (ii) множества соотношений

$$R_{W_f} = \{x_i^{-1} w_{i,j,k} x_j w_{i,j,k}^{-1} = \mathbf{1} \mid (i, j, k) \in I_h, w_{i,j,k} = f(i, j, k)\},$$

$$R_{W_F} = \{y_i^{-1} y_j = \mathbf{1} \mid (y_i, y_j) \in \text{Im } F\}$$

являются эквивалентными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 1.7 существует целое число N такое, что пары

$$(x_i, \mathfrak{m}_{Nm, N, m}(w_{i,j,k}) x_{Nm+j} \mathfrak{m}_{Nm, N, m}(w_{i,j,k})^{-1})$$

являются хорошими для всех $(i, j, k) \in I_h$. Очевидно, множество соотношений R_{W_f} в $\mathbb{F}_m$ эквивалентно объединению двух множеств соотношений $R_{\mathfrak{m}(W_f)}$ и $R_{\text{mod } m}$ в $\mathbb{F}_{2Nm}$, где

$$R_{\mathfrak{m}(W_f)} = \{x_i = \mathfrak{m}_{Nm, N, m}(w_{i,j,k}) x_{Nm+j} \mathfrak{m}_{Nm, N, m}(w_{i,j,k})^{-1} \mid (i, j, k) \in I_h\},$$

$$R_{\text{mod } m} = \{x_i = x_j \mid i \equiv j \pmod{m}\}.$$

Для каждого $i \leq m$ и каждого $k > 0$ пара x_i, x_{i+mk} является хорошей и, следовательно, утверждение будет доказано, если положить $M = 2Nm$ и $R_{W_F} = R_{\mathfrak{m}(W_f)} \cup R_{\text{mod } m}$.

В соответствии с утверждением 1.6 для подгруппы B группы Br_m , порожденной элементами $b_1, \dots, b_n$, группа $G(W(B, \mathbb{F}_m))$ канонически изоморфна группе

$$G(W(\bar{b}, \bar{x})) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i^{-1} b_j(x_i) = \mathbf{1}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \rangle. \quad (8)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.9. *Копредставление (8) определяет на $G(W(\bar{b}, \bar{x}))$ структуру C -группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$b(x_i) = w_{b,i}^{-1}(\bar{x}) x_j w_{b,i}(\bar{x}) \quad (9)$$

для некоторого $j = \sigma_b(i)$ и некоторого $w_{b,i}(\bar{x}) \in \mathbb{F}_m$, где $\sigma_b \in \mathfrak{S}_m$ – образ элемента $b \in \text{Br}_m$ при каноническом эпиморфизме $\sigma: \text{Br}_m \rightarrow \mathfrak{S}_m$ с ядром $\ker \sigma = P_m$ (через $\mathfrak{S}_m$ обозначена симметрическая группа, действующая на множестве $\{1, \dots, m\}$, и через P_m – группа крашенных кос). Поэтому соотношения $x_i^{-1} b_j(x_i) = \mathbf{1}$ совпадают с C -соотношениями $x_i = w_{b,i}^{-1}(\bar{x}) x_j w_{b,i}(\bar{x})$.

Следующая лемма является хорошо известной.

ЛЕММА 1.10. Пусть $b_k = ga_j^{k+1}g^{-1} \in \text{Br}_m$. Тогда для каждого $k = 0, 1, 2, -3$ множество соотношений

$$\{x_i^{-1}b_k(x_i) = \mathbf{1} \mid i = 1, \dots, m\}$$

в $\mathbb{F}_m$ эквивалентно соответственно одному соотношению:

- (0) $g(x_j) = g(x_{j+1})$, если $k = 0$;
- (1) коммутант $[g(x_j), g(x_{j+1})] = \mathbf{1}$, если $k = 1$;
- (2) $g(x_j)g(x_{j+1})g(x_j) = g(x_{j+1})g(x_j)g(x_{j+1})$, если $k = 2$;
- (-3) коммутант $[g(x_j), g(x_{j+1})] = 1$, если $k = -3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свободный базис $\{y_1, \dots, y_m\}$ группы $\mathbb{F}_m$, где $y_i = g(x_i)$ для $i = 1, \dots, m$. Согласно утверждению 1.6 множества соотношений $\{x_i^{-1}b_k(x_i) = \mathbf{1} \mid i = 1, \dots, m\}$ и $\{y_i^{-1}b_k(y_i) = \mathbf{1} \mid i = 1, \dots, m\}$ являются эквивалентными для каждого k .

Имеем

$$b_k(y_i) = g(x_i) = ga_j^{k+1}g^{-1}(g(x_i)) = g(x_i) = y_i,$$

если $i \neq j, j+1$,

$$b_k(y_j) = ga_j^{k+1}(x_j) = \begin{cases} g(x_j x_{j+1} x_j^{-1}), & \text{если } k = 0, \\ g((x_j x_{j+1}) x_j (x_j x_{j+1})^{-1}), & \text{если } k = 1, \\ g((x_j x_{j+1} x_j) x_{j+1} (x_j x_{j+1} x_j)^{-1}), & \text{если } k = 2, \end{cases}$$

и

$$b_k(y_{j+1}) = ga_j^{k+1}(x_{j+1}) = \begin{cases} g(x_j), & \text{если } k = 0, \\ g(x_j x_{j+1} x_j^{-1}), & \text{если } k = 1, \\ g((x_j x_{j+1}) x_j (x_{j+1} x_j)^{-1}), & \text{если } k = 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$b_k(y_j) = \begin{cases} y_j y_{j+1} y_j^{-1}, & \text{если } k = 0, \\ (y_j y_{j+1}) y_j (y_j y_{j+1})^{-1}, & \text{если } k = 1, \\ (y_j y_{j+1} y_j) y_{j+1} (y_j y_{j+1} y_j)^{-1}, & \text{если } k = 2, \end{cases}$$

и

$$b_k(y_{j+1}) = \begin{cases} y_j, & \text{если } k = 0, \\ y_j y_{j+1} y_j^{-1}, & \text{если } k = 1, \\ (y_j y_{j+1}) y_j (y_{j+1} y_j)^{-1}, & \text{если } k = 2. \end{cases}$$

Таким образом, для каждого k множество соотношений $\{y_i^{-1}b_k(y_i) = \mathbf{1} \mid i = 1, \dots, m\}$ сводится к единственному из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} y_j y_{j+1}^{-1} &= \mathbf{1}, & \text{если } k = 0, \\ y_j y_{j+1} y_j^{-1} y_{j+1}^{-1} &= \mathbf{1}, & \text{если } k = 1, \\ (y_j y_{j+1} y_j) (y_{j+1} y_j y_{j+1})^{-1} &= \mathbf{1}, & \text{если } k = 2. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.11. Пусть y_1, y_2 – хорошая пара в $\mathbb{F}_m$. Тогда существует такой элемент $b = ga_1g^{-1} \in \text{Br}_m$, что множество соотношений $R_{W(\langle b \rangle, \mathbb{F}_m)}$ эквивалентно соотношению

$$R_b = \{y_1^{-1}y_2 = 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку y_1, y_2 – хорошая пара, она может быть включена в хороший геометрический базис $\{y_1, \dots, y_m\}$ группы $\mathbb{F}_m$. Следовательно, найдется элемент $g \in \text{Br}_m$ такой, что $g(x_i) = y_i$ для $i = 1, \dots, m$. Согласно лемме 1.10 $R_{W(\langle b \rangle, \mathbb{F}_m)}$ эквивалентно соотношению R_b .

Рассмотрим группу кос Br_{2m} . Положим $a_{m,i} = a_i a_{2m-i}$,

$$\bar{c}_{m,i} = (a_{m,i} a_{m,i+1} \dots a_{m,m-1}) a_m (a_{m,i} a_{m,i+1} \dots a_{m,m-1})^{-1} \quad (10)$$

для $1 \leq i \leq m-1$, $\bar{c}_{m,m} = a_m$ и

$$c_{m,i} = \Delta_{m,m}^{-1} \bar{c}_{m,i} \Delta_{m,m}. \quad (11)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.12. Множество соотношений $R_{W(\langle c_{m,i} \rangle, \mathbb{F}_{2m})}$ эквивалентно соотношению

$$R_{c_{m,i}} = \{x_{m+i}^{-1} x_i = 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство (7), можно проверить, что

$$\Delta_{m,m}^{-1} (a_{m,i} a_{m,i+1} \dots a_{m,m-1}) (x_m) = x_i$$

и

$$\Delta_{m,m}^{-1} (a_{m,i} a_{m,i+1} \dots a_{m,m-1}) (x_{m+1}) = x_{m+i}.$$

Следовательно, утверждение следует из (10), (11) и утверждения 1.10.

Для каждой подгруппы B группы кос Br_m обозначим через $d(B) = d_m(B)$ (соответственно, $\bar{d}(B) = \bar{d}_m(B)$) подгруппу группы Br_{2m} , порожденную элементами, принадлежащими группам B , $\text{sh}_m(B)$, и элементами $c_{m,1}, \dots, c_{m,m}$ (соответственно, порожденную элементами, принадлежащими группе B , и элементами $c_{m,1}, \dots, c_{m,m}$), и назовем ее *удвоением* (соответственно, *приведенным удвоением*) группы B .

Удвоение (соответственно, приведенное удвоение) группы B может быть итерировано, если положить

$$d^n(B) = d_{2^{n-1}m}(d^{n-1}(B)) \subset \text{Br}_{2^n m}. \quad (12)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.13. Для любого $n \in \mathbb{N}$ множества соотношений $R_{W(B, \mathbb{F}_m)}$, $R_{d^n(W(B, \mathbb{F}_m))}$, $R_{\bar{d}^n(W(B, \mathbb{F}_m))}$, $R_{W(d^n(B), \mathbb{F}_{2^n m})}$ и $R_{W(\bar{d}^n(B), \mathbb{F}_{2^n m})}$ являются эквивалентными.

Доказательство следует из утверждений 1.4 и 1.12.

Скажем, что C -группа G принадлежит подклассу $\mathcal{C}_{\text{Br}}$, если она C -изоморфна группе, заданной копредставлением

$$G = \langle x_1, \dots, x_m \mid R_{W(B, \mathbb{F}_m)} \rangle$$

для некоторого m и некоторой конечно порожденной подгруппы B группы кос Br_m .

ТЕОРЕМА 1.14. *Для произвольной C -группы G найдутся положительное целое число $M = M_G \in \mathbb{Z}$ и подгруппа B_G группы Br_M , порожденная конечным множеством $\{b_1, \dots, b_{n_G}\}$ элементов, сопряженных в Br_M стандартной образующей a_1 , и такая, что группа G является C -изоморфной группе $G(W(B, \mathbb{F}_M))$.*

Доказательство следует из утверждений 1.4, 1.7, 1.8, 1.11 и 1.12.

СЛЕДСТВИЕ 1.15. *Имеем $\mathcal{C}_{\text{Br}} = \mathcal{C}$.*

Напомним также следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.16 [1]. (i) *C -группа G принадлежит $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда найдутся целое число m и элемент $b \in \text{Br}_m$ такой, что группа G C -изоморфна группе*

$$G(W(\langle b \rangle, \bar{x})) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i = b(x_i), i = 1, \dots, m \rangle. \quad (13)$$

(ii) *C -группа G с копредставлением (13) принадлежит классу $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда подстановка $\sigma_b \in \mathcal{S}_m$ состоит из одного цикла длины m , т. е. σ_b действует транзитивно на множестве $\{1, \dots, m\}$.*

§ 2. Разложение на множители полного поворота

Хорошо известно, что элемент (называемый *полным поворотом*)

$$\Delta_m^2 = (a_1 \dots a_{m-1})^m$$

порождает центр группы кос Br_m . Имеем

$$\Delta_m^2(x_i) = (x_1 \dots x_m)x_i(x_1 \dots x_m)^{-1}. \quad (14)$$

В частности, полный поворот Δ_m^2 оставляет на месте элемент $l_m = x_1 \dots x_m$.

Рассмотрим группу кос Br_{2m} . Положим

$$\begin{aligned} \bar{r}_m &= \bar{c}_{m,m} \bar{c}_{m,m-1} \dots \bar{c}_{m,1}, \\ r_m &= c_{m,m} c_{m,m-1} \dots c_{m,1}, \end{aligned}$$

где входящие в формулы $\bar{c}_{m,i}$ и $c_{m,i}$ были определены соотношениями (10) и (11).

ЛЕММА 2.1. *В группе кос Br_{2m} имеет место равенство*

$$\Delta_{2m} = \Delta_{m,0}^2 \Delta_{m,m}^2 \bar{r}_m. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отождествим группу $\text{Br}_{2(m-1)}$ с подгруппой $B_{2(m-1),1}$ группы Br_{2m} . Используя индукцию по m , имеем

$$\bar{r}_m = \bar{c}_{m,m} \bar{c}_{m,m-1} \dots \bar{c}_{m,2} \bar{c}_{m,1} = \Delta_{m-1,m}^{-2} \Delta_{m-1,1}^{-2} \Delta_{2(m-1),1} \bar{c}_{m,1}.$$

Следовательно, чтобы доказать лемму, достаточно показать, что действия на $\mathbb{F}_{2m}$ элементов Δ_{2m} и

$$b = \Delta_{m,0}^2 \Delta_{m,m}^2 \Delta_{m-1,m}^{-2} \Delta_{m-1,1}^{-2} \Delta_{2(m-1),1} \bar{c}_{m,1}$$

совпадают между собой.

Зафиксируем базис $\{x_1, \dots, x_{2m}\}$ группы $\mathbb{F}_{2m}$, изображенный на рис. 1. В этом случае действие элемента $\bar{c}_{m,1}$ на $\mathbb{F}_{2m}$ индуцируется полуповоротом, определяемым путем $\gamma_{m,1}$, который изображен на рис. 3.

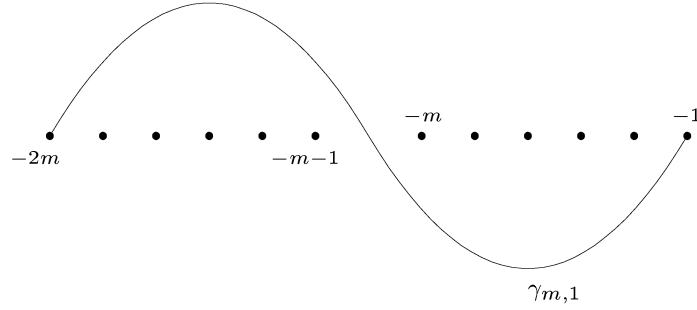


Рис. 3

Следовательно, элемент $y_1 = \bar{c}_{m,1}(x_1)$ представляется петлей, изображенной на рис. 4.

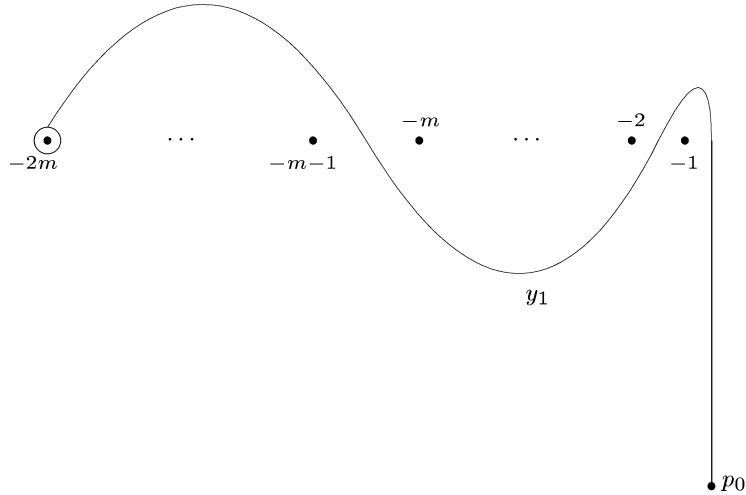


Рис. 4

Элемент $u_1 = \Delta_{2(m-1),1}(y_1)$ представляется петлей, изображенной на рис. 5.

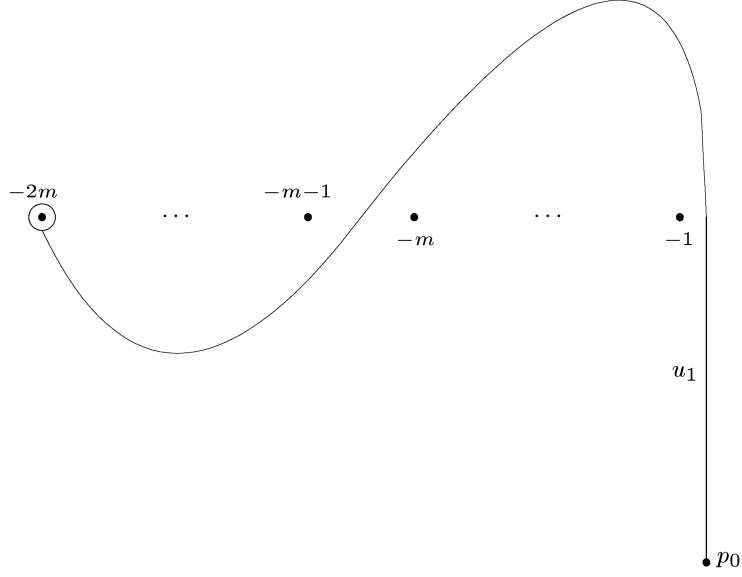


Рис. 5

Легко видеть, что $\Delta_{m-1,m}^{-2} \Delta_{m-1,1}^{-2}(u_1) = u_1$, а элемент $v_1 = \Delta_{m,0}^2 \Delta_{m,m}^2(u_1) = b(x_1)$ представляется петлей, изображенной на рис. 6.

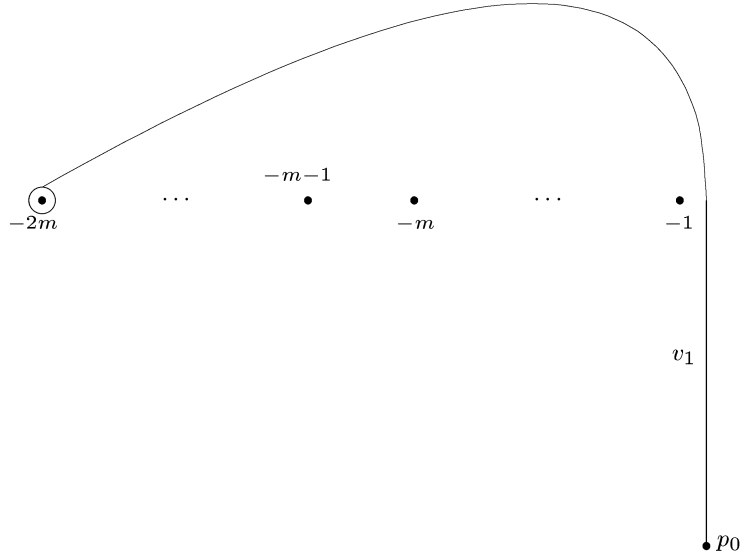


Рис. 6

Следовательно, согласно равенству (7) имеем

$$b(x_1) = \Delta_{2m}(x_1). \quad (16)$$

Элемент $y_i = \bar{c}_{m,1}(x_i)$, $i = 2, \dots, m$, представляется петлей, изображенной на рис. 7.

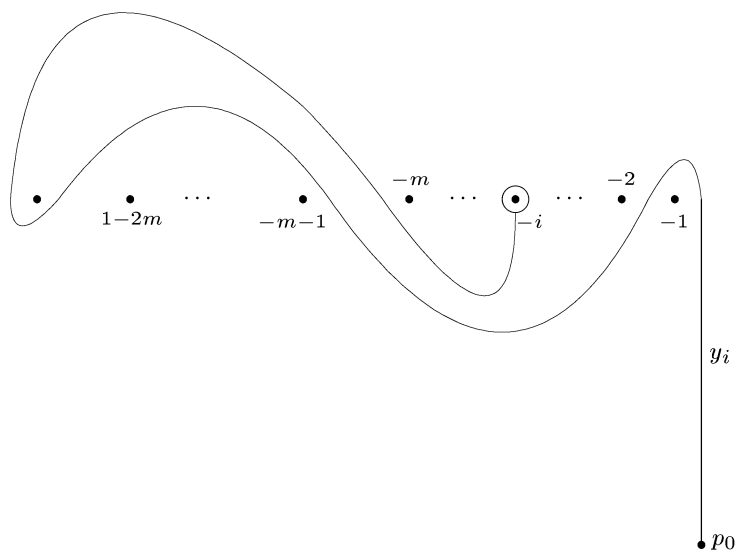


Рис. 7

Элемент $u_i = \Delta_{2(m-1),1}(y_i)$, $i = 2, \dots, m$, представляется петлей, изображенной на рис. 8.

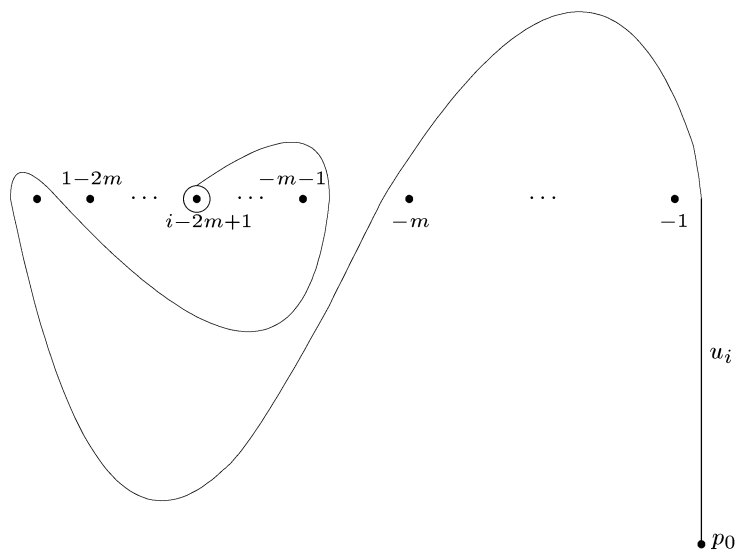


Рис. 8

Элемент $v_i = \Delta_{m-1,m}^{-2} \Delta_{m-1,1}^{-2}(u_i)$, $i = 2, \dots, m$, представляется петлей, изображенной на рис. 9.

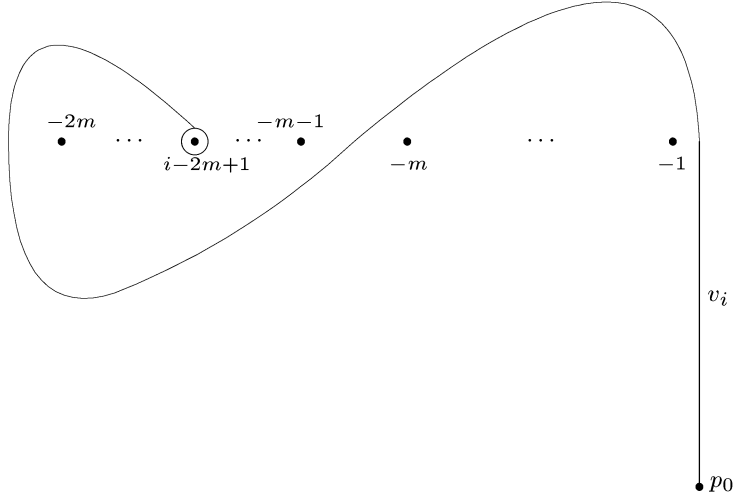


Рис. 9

Элемент $w_i = \Delta_{m,0}^2 \Delta_{m,m}^2(v_i) = b(x_i)$, $i = 2, \dots, m$, представляется петлей, изображенной на рис. 10.

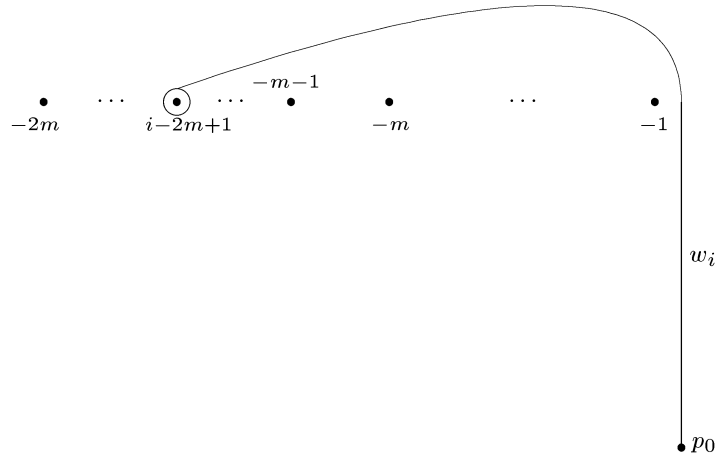


Рис. 10

Следовательно,

$$b(x_i) = \Delta_{2m}(x_i), \quad i = 2, \dots, m. \quad (17)$$

Легко видеть, что $\bar{c}_{m,1}(x_{2m-i}) = x_{2m-i}$ для $i = 1, \dots, m-1$. Элемент $y_{2m-i} = \Delta_{2(m-1),1}(x_{2m-i})$ представляется петлей, изображенной на рис. 11.

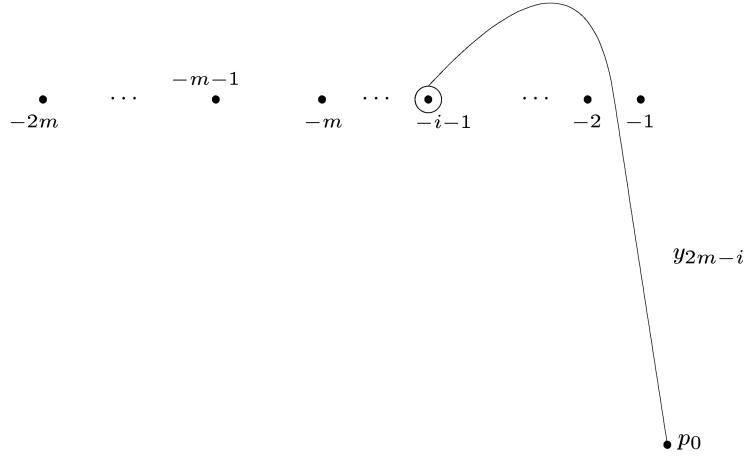


Рис. 11

Элемент $u_{2m-i} = \Delta_{m-1,m}^{-2} \Delta_{m-1,1}^{-2}(y_{2m-i})$ представляется петлей, изображенной на рис. 12.

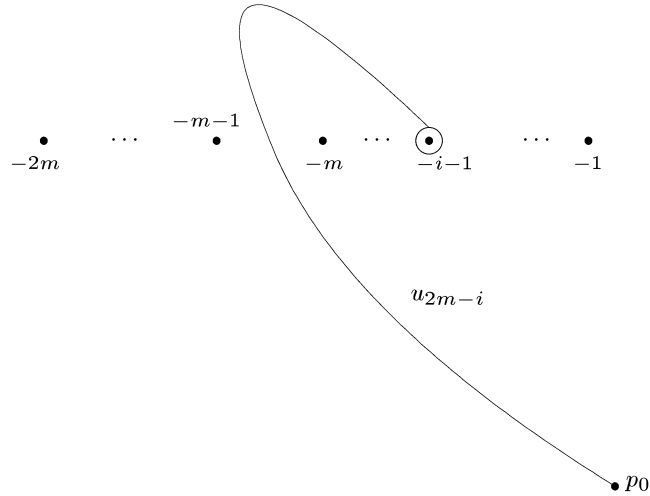


Рис. 12

Элемент $v_{2m-i} = \Delta_{m,0}^2 \Delta_{m,m}^2(u_{2m-i}) = b(x_{2m-i})$ представляется петлей, изображенной на рис. 13.

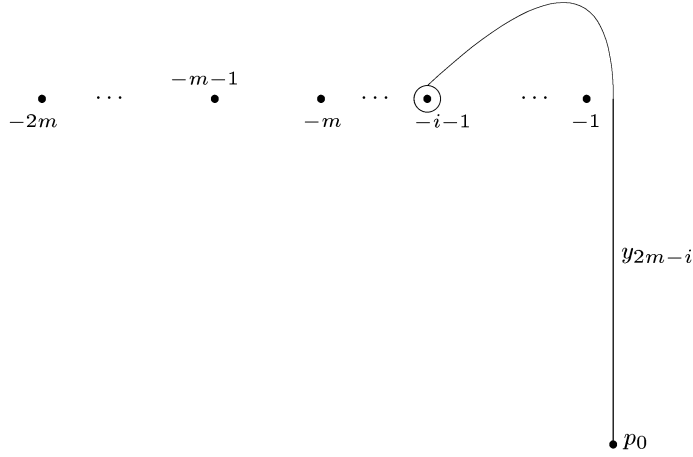


Рис. 13

Следовательно, согласно равенству (7) имеем

$$b(x_{2m-i}) = \Delta_{2m}(x_{2m-i}), \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (18)$$

Элемент $y_{2m} = \bar{c}_{m,1}(x_{2m})$ представляется петлей, изображенной на рис. 14.

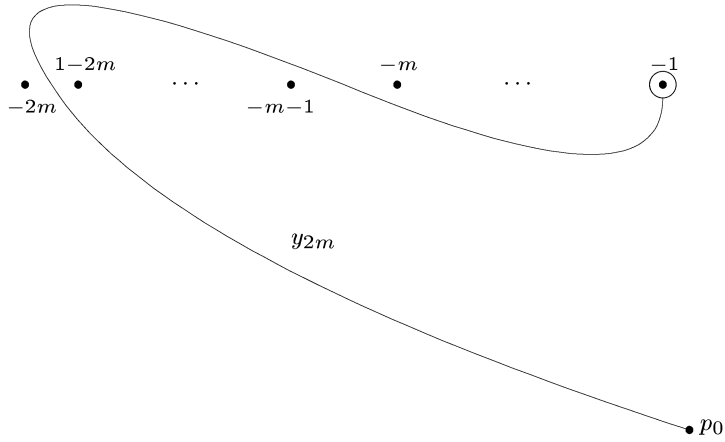


Рис. 14

Элемент $u_{2m} = \Delta_{2(m-1),1}(y_{2m})$ представляется петлей, изображенной на рис. 15.

Легко видеть, что $\Delta_{m-1,m}^{-2} \Delta_{m-1,1}^{-2}(u_{2m}) = u_{2m}$, и элемент

$$b(x_{2m}) = \Delta_{m,0}^2 \Delta_{m,m}^2(u_{2m}) = x_1.$$

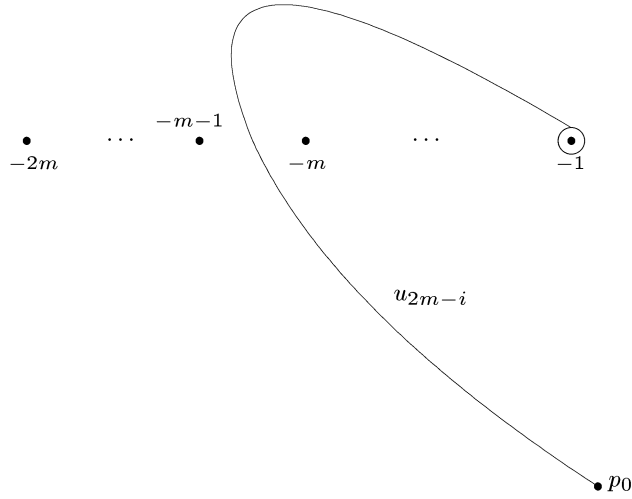


Рис. 15

Следовательно,

$$b(x_{2m}) = \Delta_{2m}(x_{2m}) \quad (19)$$

и лемма следует из равенств (16)–(19).

ТЕОРЕМА 2.2. *Имеет место следующая формула разложения на множители полного поворота при удвоении числа нитей:*

$$\Delta_{2m}^2 = \Delta_{m,0}^4 \Delta_{m,m}^4 r_m^2. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.1

$$\Delta_{2m} = \Delta_{m,0}^2 \Delta_{m,m}^2 \bar{r}_m.$$

Легко видеть, что $[\Delta_{m,0}, \Delta_{m,m}] = 1$ и $[\Delta_{2m}, \Delta_{m,0}^2 \Delta_{m,m}^2] = 1$. Следовательно, $[\bar{r}_m, \Delta_{m,0}^2 \Delta_{m,m}^2] = 1$ и

$$\Delta_{2m}^2 = \Delta_{m,0}^4 \Delta_{m,m}^4 \bar{r}_m^2.$$

Таким образом,

$$\Delta_{2m}^2 = \Delta_{m,m}^{-1} \Delta_{2m}^2 \Delta_{m,m} = \Delta_{m,0}^4 \Delta_{m,m}^4 r_m^2.$$

§ 3. Полугруппы разложений на множители над группами кос

Пусть $\{g_i\}_{i \in I}$ – некоторое множество элементов группы Br_m . Для каждого $i \in I$ обозначим через $O_{g_i} \subset \text{Br}_m$ множество всех элементов в Br_m , сопряженных элементу g_i (орбиту элемента g_i при действии группы Br_m внутренними автоморфизмами). Объединение $U = \bigcup_{i \in I} O_{g_i} \subset \text{Br}_m$ называется *полным множеством сопряженных* элементам из $\{g_i\}_{i \in I}$, а пара (Br_m, U) – *оснащенной*

группой кос. В работе [7] каждой оснащенной группе (Br_m, U) была сопоставлена полугруппа $S(\text{Br}_m, U)$, названная *полугруппой разложений на множители над Br_m* . Напомним, что по определению, данному в [7], полугруппа $S(\text{Br}_m, U)$ порождена алфавитом U , удовлетворяющим следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2 &= u_2 \cdot (u_2^{-1} u_1 u_2), \text{ если } u_2 \neq \mathbf{1} \text{ и } u_1 \cdot \mathbf{1} = u_1, \\ u_1 \cdot u_2 &= (u_1 u_2 u_1^{-1}) \cdot u_1, \text{ если } u_1 \neq \mathbf{1} \text{ и } \mathbf{1} \cdot u_2 = u_2, \end{aligned}$$

для всех $u_1, u_2 \in U$.

Существуют два естественных гомоморфизма: *гомоморфизм произведения* $\alpha = \alpha_U: S(\text{Br}_m, U) \rightarrow \text{Br}_m$, заданный условием $\alpha(u) = u$ для всех $u \in U$, и гомоморфизм (*действие сопряжением*) $\lambda: \text{Br}_m \rightarrow \text{Aut}(S(\text{Br}_m, U))$, заданный равенством $\lambda(g)(u) = gug^{-1} \in U$ для всех $g \in \text{Br}_m$. Действие $\lambda(g)$ на $S(\text{Br}_m, U)$ называется *одновременным сопряжением* на элемент g . Положим $\rho(g) = \lambda(g^{-1})$, $\lambda_S = \lambda \circ \alpha_U$ и $\rho_S = \rho \circ \alpha_U$. Орбита элемента $s \in S(\text{Br}_m, U)$ при действии сопряжением группы Br_m на $S(\text{Br}_m, U)$ называется *типом* элемента s .

Отметим, что $S: (\text{Br}_m, U) \mapsto (S(\text{Br}_m, U), \alpha_U, \lambda)$ является функтором из категории оснащенных групп кос в категорию полугрупп над группами кос. В частности, если $U \subset V$ — два полных множества сопряженных элементов в Br_m , то тождественное отображение $\text{id}: \text{Br}_m \rightarrow \text{Br}_m$ определяет вложение $\text{id}_{U,V}: S(\text{Br}_m, U) \rightarrow S(\text{Br}_m, V)$. Таким образом, для каждой группы Br_m полугруппа $S_{\text{Br}_m} = S(\text{Br}_m, \text{Br}_m)$ является *универсальной полугруппой над Br_m* , т.е. каждая полугруппа разложений на множители $S_U = S(\text{Br}_m, U)$ над Br_m канонически вкладывается в S_{Br_m} с помощью отображения $\text{id}_{U, \text{Br}_m}$.

Поскольку $\alpha_U = \alpha_{\text{Br}_m} \circ \text{id}_{U, \text{Br}_m}$, гомоморфизмы произведения α_U и α_{Br_m} могут быть отождествлены, так что они оба будут обозначаться просто α .

Для любых $s_1, s_2 \in S(\text{Br}_m, U)$ имеем

$$s_1 \cdot s_2 = s_2 \cdot \rho_S(s_2)(s_1) = \lambda_S(s_1)(s_2) \cdot s_1. \quad (21)$$

Скажем, что элемент $b \in \text{Br}_m$ имеет *индекс сплетения* $l(b) = k$, если k — это такое наименьшее число, что элемент b сопряжен в B_m некоторому элементу $\bar{b} \in B_{k,0}$, $b = g\bar{b}g^{-1}$. Элемент $\bar{b}$ называется *стандартной формой* элемента b .

Для каждого $s \in S_U$ обозначим через B_s подгруппу группы Br_m , порожденную образами $\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n)$ множителей $u_1, \dots, u_n$ разложения $s = u_1 \cdot \dots \cdot u_n$. Легко видеть, что подгруппа B_s группы Br_m не зависит от представления элемента $s \in S_U$ в виде слова, состоящего из букв $u_i \in U$.

Свяжем с элементом $s \in S_{B_m}$ еще одну группу

$$\begin{aligned} G(s) &= G(W_s) = G(W(B_s, \mathbb{F}_m)) \\ &\simeq \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i^{-1} b(x_i) = \mathbf{1}, i = 1, \dots, m, b \in B_s \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Для $s_1, s_2 \in S_{\text{Br}_m}$ имеем:

(i) существует канонический C -эпиморфизм

$$\psi_{s_1}: G(s_2) \rightarrow G(s_1 \cdot s_2) \simeq G(s_2)/N_{G(s_2)}(\varphi_{W_{s_2}}(W_{s_1}));$$

(ii) если $s_2 = \lambda(b)(s_1)$, то существует C -изоморфизм групп $\gamma_b: G(s_1) \rightarrow G(s_2)$; в частности, если $s_1 = s_2$, то $G(s_1) = G(s_2)$ и $\gamma_1 = \text{Id}$.

Доказательство проводится прямой проверкой.

Пусть множитель u_i элемента $s = u_1 \cdot \dots \cdot u_n$ имеет индекс сплетения $l(u_i) = k_i$ и стандартную форму $\bar{u}_i \in \text{Br}_{k,0}$, $u_i = g_i \bar{u}_i g_i^{-1}$. Обозначим через $G_{u_i, \text{loc}}$ подгруппу в $G(s)$, порожденную элементами $\varphi_{W_s}(g_i(x_j))$, $j = 1, \dots, k_i$. Из (21) следует, что для каждого множителя u_i элемента $s = u_1 \cdot \dots \cdot u_n$ подгруппа $G_{u_i, \text{loc}}$ определена однозначно с точностью до сопряжения в $G(s)$.

Вложение $\text{Br}_m = B_{m,0} \subset \text{Br}_{2m}$ индуцирует вложение $S_{\text{Br}_m} \subset S_{\text{Br}_{2m}}$. Рассмотрим гомоморфизм $\text{sh} = \text{sh}_m: \text{Br}_m \rightarrow \text{Br}_{2m}$, заданный равенствами $\text{sh}(a_i) = a_{m+i}$ для $i = 1, \dots, m-1$. Он индуцирует вложение $\text{sh}: S_{\text{Br}_m} \rightarrow S_{\text{Br}_{2m}}$. Положим также

$$\tilde{r}_m = c_{m,m} \cdot \dots \cdot c_{m,1} \in S_{\text{Br}_{2m}},$$

где $c_{m,i}$ определены формулой (11). Применяя теорему 2.2, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.2 (формула разложения на множители полного поворота для удвоенного числа нитей). *Для четырех элементов $s_1, \dots, s_4 \in S_{\text{Br}_m}$ таких, что $\alpha(s_i) = \Delta_{2m}^2$, элемент*

$$\bar{s} = d(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1 \cdot s_2 \cdot \text{sh}(s_3) \cdot \text{sh}(s_4) \cdot \tilde{r}_m \cdot \tilde{r}_m \quad (23)$$

является разложением элемента Δ_{2m}^2 на множители в подгруппе $S_{\text{Br}_{2m}}$, т. е. $\alpha(\bar{s}) = \Delta_{2m}^2$.

Если $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s$, удвоение $d(s, s, s, s)$ будем обозначать просто через

$$d(s) = d(s, s, s, s) = s \cdot s \cdot \text{sh}(s) \cdot \text{sh}(s) \cdot \tilde{r}_m \cdot \tilde{r}_m \quad (24)$$

и положим

$$d^{n+1}(s) = d(d^n(s)). \quad (25)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Для $s \in S_{\text{Br}_m}$ такого, что $\alpha(s) = \Delta_{2m}^2$, группы $G(s)$ и $G(d(s))$ являются C -изоморфными.*

Доказательство следует из утверждения 1.13.

ЛЕММА 3.4. *Пусть элемент $s \in S_{\text{Br}_M}$ такой, что $\alpha(s) = \Delta_M^2$. Рассмотрим элемент $g \in \text{Br}_M$, для которого $g(x_2) = x_i$ при некотором $i \leq M$. Положим $y = g(x_1) \in \mathbb{F}_M$ и $b = ga_1g^{-1}$. Тогда:*

(i) *C -группа $\bar{G} = G(s)/N_{G(s)}(\varphi_{W_s}(x_i^{-1}y))$ канонически C -изоморфна группе $G(\bar{s})$, где*

$$\bar{s} = d(\lambda_S(b)(d(s)), d(s), d(s), d(s));$$

(ii) *C -группа $\tilde{G} = G(s)/N_{G(s)}(\varphi_{W_s}([x_i, y]))$ канонически C -изоморфна группе $G(\tilde{s})$, где*

$$\tilde{s} = d(\lambda_S(b^2)(d(s)), d(s), d(s), d(s)).$$

Если $M = tk$ и множество соотношений R_{W_s} влечет соотношения $R_{\text{mod } m}$ в $\mathbb{F}_M$, то множество соотношений $R_{W_{\bar{s}}}$ (соответственно, $R_{W_{\tilde{s}}}$) влечет соотношения $R_{\text{mod } m}$ в $\mathbb{F}_{4M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 3.3 C -группа $G(d^2(s))$ канонически C -изоморфна группе $G(s)$. Применяя утверждение 1.10, получаем, что множество соотношений $R_{W(\langle b^k \rangle, \mathbb{F}_M)}$ эквивалентно одному соотношению: или $\{x_i^{-1}y = \mathbf{1}\}$, если $k = 1$, или $\{[x_i, y] = \mathbf{1}\}$, если $k = 2$. Согласно утверждению 3.1 C -группа $\bar{G}$ канонически изоморфна группе $G(b \cdot d^2(s))$, а C -группа $\tilde{G}$ канонически изоморфна группе $G(b^2 \cdot d^2(s))$.

Положим

$$s' = d(s) \cdot \text{sh}_{2M}(d(s)) \cdot \text{sh}_{2M}(d(s)) \cdot \tilde{r}_{2M} \cdot \tilde{r}_{2M}.$$

Элемент

$$\begin{aligned} b^k \cdot d^2(s) &= b^k \cdot d(s) \cdot s' = \lambda_S(b^k)(d(s)) \cdot b^k \cdot s' \\ &= \lambda_S(\lambda_S(b^k)(d(s)))(b^k) \cdot \lambda_S(b^k)(d(s)) \cdot s' \\ &= b^k \cdot \lambda_S(b^k)(d(s)) \cdot s' = \begin{cases} b \cdot \bar{s}, & \text{если } k = 1, \\ b^2 \cdot \tilde{s}, & \text{если } k = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

так как

$$\alpha(d(s)) = \alpha(\lambda_S(b^k)(d(s))) = \Delta_{2M}^2$$

и элементы b^k и Δ_{2M}^2 коммутируют в Br_{2M} . Следовательно, согласно утверждению 3.1 существуют канонические эпиморфизмы $\psi_b: G(\bar{s}) \rightarrow \bar{G}$ и $\psi_{b^2}: G(\tilde{s}) \rightarrow \tilde{G}$. С другой стороны, множители элемента $\bar{s}$, входящие в произведение

$$d(s) \cdot \text{sh}_{2M}(d(s)) \cdot \text{sh}_{2M}(d(s)) \cdot \tilde{r}_{2M} \cdot \tilde{r}_{2M},$$

определяют то же множество соотношений, что и элемент $d^2(s)$. В частности, эти соотношения влекут соотношения $\{x_{M+i} = x_i\} \in R_{\text{mod } M}$ в $\mathbb{F}_{4M}$, и, более того, если множество соотношений R_{W_s} влечет соотношения $R_{\text{mod } m}$ в $\mathbb{F}_M$, то множество соотношений $R_{W_{\bar{s}}}$ (соответственно, $R_{W_{\tilde{s}}}$) влечет соотношения $R_{\text{mod } m}$ в $\mathbb{F}_{4M}$. Множитель $\lambda_S(b^k)(c_{M,i}) = b^k c_{M,i} b^{-k}$ элемента $\lambda_S(b^k)(d(s))$ определяет соотношение $x_{M+i} = b c_{M,i} b^{-1}(x_{M+i})$ в $G(\bar{s})$, если $k = 1$, и соотношение $x_{M+i} = b^2 c_{M,i} b^{-2}(x_{M+i})$ в $G(\tilde{s})$, если $k = 2$. Однако

$$b^k c_{M,i} b^{-k}(x_{M+i}) = b^k c_{M,i}(x_{M+i}) = b^k(x_i).$$

Для $k = 1, 2$ имеем $b(x_i) = y$ и $b^2(x_i) = y x_i y^{-1}$. Соотношения $\{x_{M+i} = y\}$ (соответственно, $\{x_{M+i} = y x_i y^{-1}\}$) и $\{x_{M+i} = x_i\}$ влекут соотношение $x_i = y$ в $G(\bar{s})$ (соответственно, $\{[x_i, y] = \mathbf{1}\}$ в $G(\tilde{s})$). Следовательно, канонические эпиморфизмы $\psi_b: G(\bar{s}) \rightarrow \bar{G}$ и $\psi_{b^2}: G(\tilde{s}) \rightarrow \tilde{G}$ являются C -изоморфизмами.

Рассмотрим подклассы $\mathcal{C}_{\Delta^2, m}$, $m \in \mathbb{N}$, класса групп $\mathcal{C}$, состоящие из C -групп, которые являются C -изоморфными C -группам, обладающим C -копредставлениями вида

$$G = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i^{-1} w_{i,j,k}(\bar{x})^{-1} x_j w_{i,j,k}(\bar{x}) = \mathbf{1}, w_{i,j,k}(\bar{x}) \in W \rangle$$

для некоторого конечного множества $W \subset \mathbb{F}_m$ такого, что слова $[x_i^{-1}, x_1 \dots x_m]$ принадлежат множеству W для всех $i = 1, \dots, m$. Положим

$$\mathcal{C}_{\Delta^2} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{\Delta^2, m}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Пусть $s \in S_{\text{Br}_m}$ – такой элемент, что $\alpha(s) = \Delta_m^2$; тогда C -группа $G(s) \in \mathcal{C}_{\Delta^2, m}$. В частности, для $s = \Delta_m^2$ группа $G(\Delta_m^2)$ имеет C -копредставление

$$G(\Delta_m^2) = \langle x_1, \dots, x_m \mid [x_i^{-1}, x_1 \dots x_m] = \mathbf{1}, i = 1, \dots, m \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\Delta_m^2(x_i) = (x_1 \dots x_m)x_i(x_1 \dots x_m)^{-1}$. Следовательно, соотношения $[x_i^{-1}, x_1 \dots x_m] = \mathbf{1}, i = 1, \dots, m$, принадлежат множеству соотношений копредставления (22), так как $\alpha(s) = \Delta_m^2$.

Обозначим через $D_{k,m}, k \leq m$, полное множество сопряженных элементам a_1 и Δ_k^2 в Br_m . Положим $\mathcal{D}_{k,m} = S(\text{Br}_m, D_{k,m})$.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть C -группа G принадлежит $\mathcal{C}_{\Delta^2, m}$. Тогда существуют число $M \in \mathbb{N}$ и элемент $s \in \mathcal{D}_{m,M}$ такие, что:

- (i) $\alpha(s) = \Delta_M^2$;
- (ii) группы G и $G(s)$ являются C -изоморфными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$G = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i^{-1}w_{i,j,k}(\bar{x})x_jw_{i,j,k}(\bar{x})^{-1} = \mathbf{1}, w_{i,j,k}(\bar{x}) \in W \rangle$$

для некоторого конечного множества $W \subset \mathbb{F}_m$ такого, что слова $[x_i^{-1}, x_1 \dots x_m]$ принадлежат множеству W для всех $i = 1, \dots, m$.

Перенумеруем слова $w \in W$ так, чтобы слова $[x_i^{-1}, x_1 \dots x_m]$ имели номер i . Положим $G_n = \mathbb{F}_m/N_n$, где N_n – нормальное замыкание множества слов $\bar{W}_n = \{w_1, \dots, w_n\}$ в $\mathbb{F}_m$. Покажем, что для каждого $n \geq m$ найдется элемент $s_n \in \mathcal{D}_{m,M_n}$ такой, что:

- 1) $\alpha(s_n) = \Delta_{M_n}^2$;
- 2) группы G_n и $G(s_n)$ являются C -изоморфными.

Для $M_m = m$ положим $s_m = \Delta_m^2 \in \mathcal{D}_{m,m}$. Согласно утверждению 3.5 группы G_m и $G(s_m)$ являются C -изоморфными. Предположим, что для некоторых $k \geq 0$ и $p \geq 0$ уже найден элемент $s_{m+k} \in \mathcal{D}_{m,M_{m+k}}$, где $M_{m+k} = 2^p m$, такой, что:

- 1) $\alpha(s_{m+k}) = \Delta_{M_{m+k}}^2$;
- 2) группы G_{m+k} и $G(s_{m+k})$ являются C -изоморфными;
- 3) множество соотношений $R_{W_{s_{m+k}}}$ влечет соотношения $R_{\text{mod } m}$.

Построим элемент s_{m+k+1} , имеющий свойства, аналогичные тем, которые имеет элемент s_{m+k} . Положим $n = m + k$ и рассмотрим слово

$$w_{n+1} = x_{i_n}^{-1}w_{i_n,j_n,k_n}(\bar{x})x_{j_n}w_{i_n,j_n,k_n}(\bar{x})^{-1}.$$

Пусть l – буквенная длина слова w_{i_n,j_n,k_n} . Рассмотрим элемент $\tilde{s}_n = d^{l+2}(s_n)$. Согласно утверждению 1.13 множества соотношений $R_{W_{s_n}}$ и $R_{W_{d^{l+2}(s_n)}}$ являются эквивалентными. Заметим, что $\alpha(d^{l+2}(s_n)) = \Delta_{2^{l+2}M_n}^2$ и условие 3) также выполнено для элемента $\tilde{s}_n = d^{l+2}(s_n)$. Положим

$$y_n = m_{2^l M_n, m}(w_{i_n,j_n,k_n})x_{2^l M_n+j_n}m_{2^l M_n, m}(w_{i_n,j_n,k_n})^{-1}.$$

Согласно утверждениям 1.7 и 1.11 найдется элемент $b \in \text{Br}_{2^{l+2}M_n}$, сопряженный стандартной образующей a_1 и такой, что множество соотношений $R(W_{\langle b \rangle, \mathbb{F}_{2^{l+2}M_n}})$ эквивалентно одному соотношению $x_{i_n+2^{l+1}M_n} = y_n$. Из леммы 3.4, (i) следует, что элемент

$$s_{n+1} = d(\lambda_S(b)(d(\tilde{s}_n)), d(\tilde{s}_n), d(\tilde{s}_n), d(\tilde{s}_n))$$

является искомым, что завершает доказательство теоремы.

§ 4. Слабая μ -эквивалентность

Обозначим через $A_i = A_i(m)$ полное множество сопряженных элементу a_1^{i+1} в группе Br_m , где $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ – множество стандартных образующих группы Br_m (напомним, что все образующие $a_1, \dots, a_{m-1}$ сопряжены друг другу в группе кос Br_m). Положим $\mathcal{A}_k = S(\text{Br}_m, A_{\leq k})$, $\mathcal{A}_k^0 = S(\text{Br}_m, A_{\leq k}^0)$, где $A_{\leq k} = A_{-3} \cup (\bigcup_{i=-1}^k A_i)$ и $A_{\leq k}^0 = \bigcup_{i=0}^k A_i$. Имеем вложение $\mathcal{A}_k^0 \subset \mathcal{A}_k$.

Далее мы ограничимся рассмотрением случая $k = 2$. Полугруппа $\mathcal{A}_2^0$ называется *полугруппой каспидальных разложений на множители*, а $\mathcal{A}_2$ – *полугруппой каспидальных разложений на множители с отрицательными ноудами*.

Пусть $U \subset \text{Br}_m$ – полное множество сопряженных элементов, содержащее $A_1 \cup A_{-3}$. Заметим, что если $g \in A_1$, то $g^{-1} \in A_{-3}$. Рассмотрим полугруппу

$$\overline{S}_U = \langle u \in U \mid R \in \mathcal{R} \cup \overline{\mathcal{R}} \rangle,$$

где $\mathcal{R}$ – множество соотношений, определяющих полугруппу S_U (см. § 3), и

$$\overline{\mathcal{R}} = \{g \cdot (g^{-1}) = (g^{-1}) \cdot g = \mathbf{1} \mid g \in A_1\}$$

– множество *соотношений сокращения*. Существует канонический гомоморфизм полугрупп

$$c: \mathcal{S}_U \rightarrow \overline{S}_U.$$

Скажем, что два элемента $s_1, s_2 \in S_U$ являются *слабо эквивалентными*, если $c(s_1) = c(s_2)$. Легко видеть, что полугруппа $\overline{S}_U$ может быть рассмотрена как полугруппа над Br_m с гомоморфизмом произведения $\overline{\alpha}: \overline{S}_U \rightarrow \text{Br}_m$ таким, что $\alpha = \overline{\alpha} \circ c$.

Пусть (s, μ_s) – пара, состоящая из элемента $s \in S_U$ и гомоморфизма $\mu_s: G(s) \rightarrow \mathfrak{S}_N$, где $\mathfrak{S}_N$ – симметрическая группа для некоторого N . Скажем, что две пары (s_1, μ_{s_1}) и (s_2, μ_{s_2}) являются *эквивалентными*, если s_1 и s_2 принадлежат одной и той же орбите при действии сопряжением группы Br_m на S_U (т.е. существует элемент $b \in \text{Br}_m$ такой, что $s_2 = \lambda(b)(s_1)$) и $\mu_2 = \mu_1 \circ \gamma_b$, где γ_b – изоморфизм, определенный в утверждении 3.1.

Говорят, что две пары (s_1, μ_{s_1}) и (s_2, μ_{s_2}) получены друг из друга с помощью *допустимого преобразования* $(s_1, \mu_{s_1}) \leftrightarrow (s_2, \mu_{s_2})$, если существует такой элемент $g \in A_1$, что $s_2 = g \cdot (g^{-1}) \cdot s_1$, $\mu_1 = \psi_{g \cdot (g^{-1})} \circ \mu_2$ и порядок группы $\mu_{s_2}(G_{g, \text{loc}})$ больше двух. Скажем, что две пары $(s', \mu_{s'})$ и $(s'', \mu_{s''})$ являются *слабо μ -эквивалентными*, если существует последовательность пар $(s_1, \mu_1), \dots, (s_n, \mu_n)$ такая, что $(s', \mu_{s'}) = (s_1, \mu_1)$, $(s'', \mu_{s''}) = (s_n, \mu_n)$ и для каждого

$i = 1, \dots, n-1$ пары (s_i, μ_i) и (s_{i+1}, μ_{i+1}) либо эквивалентны, либо получены друг из друга с помощью допустимого преобразования.

Ниже мы рассмотрим случай, когда $U = \mathcal{A}_2$. Пусть $s = u_1 \cdot \dots \cdot u_n \in \mathcal{A}_2$, $u_i \in A_{\leq 2}$. Скажем, что гомоморфизм $\mu_s: G(s) \rightarrow \mathfrak{S}_N$ является *общим*, если:

- (i) μ_s является эпиморфизмом;
- (ii) $\mu_s(\varphi_s(x_i))$ является транспозицией в симметрической группе $\mathfrak{S}_N$ для каждой C -образующей $\varphi_s(x_i)$ группы $G(s)$;
- (iii) группа $\mu_s(G_{u_i, \text{loc}})$ имеет порядок больше двух для каждого множителя $u_i \in A_{-3} \cup A_1 \cup A_2$.

Пусть (s, μ_s) – пара, состоящая из элемента $s \in \mathcal{A}_2$ и гомоморфизма $\mu_s: G(s) \rightarrow \mathfrak{S}_N$ для некоторого N . Согласно утверждению 3.3 существует канонический C -изоморфизм $\psi_d: G(d(s)) \rightarrow G(s)$. Он определяет пару $(d(s), d(\mu_s))$, где $d(\mu_s) = \mu_s \circ \psi_d$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть $s \in \mathcal{A}_2$ и $\mu_s: G(s) \rightarrow \mathfrak{S}_N$ – общий эпиморфизм. Тогда гомоморфизм $d(\mu_s): G(d(s)) \rightarrow \mathfrak{S}_N$ является общим.

Доказательство проводится прямой проверкой.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть элемент $s = u_1 \cdot \dots \cdot u_n \in \mathcal{A}_2 \subset S_{\text{Br}_m}$, $u_i \in A_{\leq 2}$, такой, что $\alpha(s) = \Delta_m^2$, и пусть $\mu_s: G(s) \rightarrow \mathfrak{S}_N$ – общий эпиморфизм. Пусть образующая x_i группы $\mathbb{F}_m$ и элемент y , сопряженный в $\mathbb{F}_m$ некоторой образующей x_j , таковы, что $\mu_s(\varphi_s(x_i))$ и $\mu_s(\varphi_s(y))$ – несовпадающие коммутрующие транспозиции в $\mathfrak{S}_N$. Тогда существуют число $M \in \mathbb{N}$ и две пары $(\bar{s}, \mu_{\bar{s}})$ и $(\tilde{s}, \mu_{\tilde{s}})$, $\bar{s}, \tilde{s} \in \mathcal{A}_2 \subset S_{\text{Br}_M}$, такие, что:

- (i) $\alpha(\bar{s}) = \alpha(\tilde{s}) = \Delta_M^2$;
- (ii) C -группа $G_{\bar{s}}$ является C -изоморфной C -группе $G(s)$, а C -группа $G_{\tilde{s}}$ является C -изоморфной C -группе

$$G(s)/\{[\varphi_s(x_i), \varphi_s(y)] = \mathbf{1}\};$$

- (iii) если $[\varphi_s(x_i), \varphi_s(y)] \neq \mathbf{1}$, то типы элементов $\bar{s}$ и $\tilde{s}$ различны;
 - (iv) $\mu_{\bar{s}}$ и $\mu_{\tilde{s}}$ являются общими эпиморфизмами в симметрическую группу $\mathfrak{S}_N$;
 - (v) пары $(\bar{s}, \mu_{\bar{s}})$ и $(\tilde{s}, \mu_{\tilde{s}})$ слабо μ -эквивалентны.
- Более того, если $s \in \mathcal{A}_2^0 \subset S_{\text{Br}_m}$, то $\bar{s}, \tilde{s} \in \mathcal{A}_2^0 \subset S_{\text{Br}_M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждениям 1.7, 1.8, 1.11 и 4.1 существуют:

- 1) число $M_1 = 2^n m$ (для некоторого $n \in \mathbb{N}$);
- 2) элемент $y_1 \in \mathbb{F}_{M_1}$, являющийся раздвижкой элемента y и такой, что (y_1, x_k) – хорошая пара для некоторого $k \equiv i \pmod m$;
- 3) элемент $s_1 = d^n(s) \in \mathcal{A}_2 \subset S_{\text{Br}_{M_1}}$ такой, что $\mu_s(x_i) = \mu_{s_1}(x_k)$, $\mu_s(y) = \mu_{s_1}(y_1)$, где $\mu_{s_1} = d^n(\mu_s)$.

По определению хороших пар найдется элемент $g \in \text{Br}_{M_1}$ такой, что $g(x_1) = y_1$ и $g(x_k) = x_2$. Положим $b = ga_1g^{-1} \in \text{Br}_{M_1}$, $\bar{s} = d^2(s_1)$ и $\tilde{s} = d(\lambda_S(b^2)(d(s)), d(s), d(s), d(s))$. Согласно утверждению 4.1 группы $G(s)$ и $G(\bar{s})$ канонически C -изоморфны. Следовательно, общий эпиморфизм μ_s индуцирует общий эпиморфизм

$\mu_{\bar{s}}: G(\bar{s}) \rightarrow \mathfrak{S}_N$. Из доказательства леммы 3.4, (ii) следует, что группы $G(\bar{s})$ и $G(b^{-2} \cdot b^2 \cdot \bar{s})$ канонически C -изоморфны группе

$$G(\bar{s})/N_{G(\bar{s})}(\varphi_{W_{\bar{s}}}([x_j, y_1])),$$

где $\bar{s} = d(\lambda_S(b^2)(d(s_1)), d(s_1), d(s_1), d(s_1))$. Поэтому эти изоморфизмы индуцируют общие эпиморфизмы

$$\mu_{b^{-2} \cdot b^2 \cdot \bar{s}}: G(b^{-2} \cdot b^2 \cdot \bar{s}) \rightarrow \mathfrak{S}_N \quad \text{и} \quad \mu_{\bar{s}}: G(\bar{s}) \rightarrow \mathfrak{S}_N.$$

Имеем $(\bar{s}, \mu_{\bar{s}}) \leftrightarrow (b^{-2} \cdot b^2 \cdot \bar{s}, \mu_{b^{-2} \cdot b^2 \cdot \bar{s}})$, пары $(b^{-2} \cdot b^2 \cdot \bar{s}, \mu_{b^{-2} \cdot b^2 \cdot \bar{s}})$ и $(b^{-2} \cdot b^2 \cdot \tilde{s}, \mu_{b^{-2} \cdot b^2 \cdot \tilde{s}})$ являются эквивалентными и $(b^{-2} \cdot b^2 \cdot \tilde{s}, \mu_{b^{-2} \cdot b^2 \cdot \tilde{s}}) \leftrightarrow (\tilde{s}, \mu_{\tilde{s}})$. Следовательно, пары $(\bar{s}, \mu_{\bar{s}})$ и $(\tilde{s}, \mu_{\tilde{s}})$ слабо μ -эквивалентны, что завершает доказательство теоремы.

§ 5. Кривые Гурвица

Пусть F_N – относительно минимальная линейчатая поверхность, $N \geq 1$, $\text{pr}: F_N \rightarrow \mathbb{CP}^1$ – ее линейчатая структура, R – слой проекции pr и E_N – исключительное сечение, $E_N^2 = -N$. В дальнейшем $\text{pr}: F_1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ будем отождествлять с линейной проекцией $\text{pr}: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ из точки $p \in \mathbb{CP}^2$ (p – образ при стягивании кривой E_1 в точку).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Образ $\bar{H} = f(S) \subset F_N$ гладкого отображения $f: S \rightarrow F_N \setminus E_N$ ориентированной замкнутой вещественной поверхности S называется *кривой Гурвица (относительно проекции pr) степени m* , если существует конечное подмножество $Z \subset \bar{H}$ такое, что:

- (i) f является вложением поверхности $S \setminus f^{-1}(Z)$ и для любого $s \notin Z$ образ Гурвица $\bar{H}$ и слой $R_{\text{pr}(s)}$ проекции pr пересекаются в s трансверсально с положительным индексом пересечения;
- (ii) для каждой точки $s \in Z$ существует окрестность $U \subset F_N$ такая, что $\bar{H} \cap U$ является комплексно-аналитической кривой и комплексная ориентация на $\bar{H} \cap U \setminus \{s\}$ совпадает с ориентацией, индуцированной ориентацией на S с помощью f ;
- (iii) ограничение pr на $\bar{H}$ является конечным отображением степени m .

Для каждой кривой Гурвица $\bar{H}$ существует единственное минимальное множество $Z \subset \bar{H}$, удовлетворяющее условиям определения 5.1. Обозначим его через $Z(\bar{H})$.

Кривая Гурвица $\bar{H}$ называется *каскадальной*, если для каждой точки $s \in Z(\bar{H})$ найдутся окрестность U и локальные аналитические координаты z, w в U такие, что:

- (iv) проекция $\text{pr}|_U$ совпадает с отображением $(z, w) \mapsto z$;
- (v) $\bar{H} \cap U$ задана уравнением $w^2 = z^k$, $k \geq 1$.

Каскадальная кривая называется *обыкновенной каскадальной*, если в условии (v) имеет место неравенство $k \leq 3$ для всех $s \in Z(\bar{H})$, и *нодальной*, если $k \leq 2$. Кроме того, далее будем рассматривать также (обыкновенные) каскадальные кривые Гурвица $\bar{H}$ с *отрицательными нодами*, т. е. $\bar{H}$ могут иметь еще и особые точки следующего вида:

(vi) в некоторой окрестности $U \subset F_N$ точки $s \in \bar{H}$ пересечение $U \cap \bar{H}$ распадается на две ветви, пересекающиеся трансверсально в s с отрицательным индексом пересечения и пересекающие слой $R_{\text{pr}(s)}$ трансверсально с положительным индексом пересечения.

Поскольку $E_N \cap \bar{H} = \emptyset$, то можно определить брэйд-монодромное разложение на множители $\text{bmf}(\bar{H}) \in S_{\text{Br}_m}$ кривой Гурвица $\bar{H}$ аналогично тому, как это было сделано в алгебраическом случае (см., например, [7]). Чтобы определить $\text{bmf}(\bar{H})$, зафиксируем слой R_∞ , пересекающий трансверсально кривую $\bar{H}$, и рассмотрим аффинную кривую Гурвица $H = \bar{H} \cap \mathbb{C}^2$, где $\mathbb{C}^2 = F_N \setminus (R_\infty \cup E_N)$. Выберем $r \gg 1$ так, что $\text{pr}(Z)$ содержится в диске $D(r) = \{|z| \leq r\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{CP}^1 \setminus \text{pr}(F_\infty)$, $Z = Z(\bar{H})$. Обозначим через $z_1, \dots, z_n$ элементы из $\text{pr}(Z)$. Выберем ε , $0 < \varepsilon \ll 1$, такое, что диски $D_i(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_i| \leq \varepsilon\}$, $i = 1, \dots, n$, не пересекаются друг с другом. Выберем также произвольные точки $u_i \in \partial D_i(\varepsilon)$, точку $u_0 \in \partial D(r)$ и непересекающиеся простые пути $l_i \subset D(r) \setminus \bigcup_{j=1}^n D_j(r)$, $i = 1, \dots, n$, с началом в точке u_0 и концами в точках u_i . Перенумеруем выбранные точки таким образом, чтобы произведение $\gamma_1 \dots \gamma_n$ петель $\gamma_i = l_i \circ \partial D_i(\varepsilon) \circ l_i^{-1}$ стало равно $\partial D(r)$ в $\pi_1(D(r) \setminus \{z_1, \dots, z_n\}, u_0)$.

Каждая петля γ_i , поднятая на H , определяет элемент $b_i \in \text{Br}_m$. Разложение $b_1 \dots b_n \in S_{\text{Br}_m}$ называется *разложением на множители брэйд-монодромии* кривой Гурвица $\bar{H}$. Фактически, каждый b_i сопряжен стандартной форме брэйд-монодромии ростка некоторой алгебраической особенности над точкой z_i , либо $b_i \in A_{-3}$, если соответствующая особая точка кривой $\bar{H}$ является отрицательным ноудом. Следовательно, $\text{bmf}(\bar{H}) = b_1 \dots b_n$ принадлежит полугруппе $\overline{\mathcal{P}} = S(\text{Br}_m, P \cup A_{-3})$, где P – множество брэйд-монодромий всех ростков алгебраических кривых степени m . Орбита элемента $\text{bmf}(\bar{H})$ при действии сопряжением группы Br_m на полугруппе $\overline{\mathcal{P}}$ называется *типом брэйд-монодромного разложения на множители* кривой $\bar{H}$ и обозначается через $\text{bmt}(\bar{H})$.

Если $\bar{H}$ – обыкновенная каспидальная кривая Гурвица с отрицательными ноудами, то ее разложение на множители брэйд-монодромии $\text{bmf}(\bar{H}) \in \mathcal{A}_2$.

Следующая лемма является хорошо известной (см., например, [7]).

ЛЕММА 5.2. *Для кривой Гурвица $\bar{H} \subset F_N$ степени m имеем*

$$\alpha(\text{bmf}(\bar{H})) = \Delta_m^{2N}.$$

Так же можно непосредственно доказать обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 5.3 [15]. *Для каждого $b = b_1 \dots b_n \in \overline{\mathcal{P}}$ такого, что $\alpha(b) = \Delta_m^{2N}$, существует кривая Гурвица $\bar{H} \subset F_N$, имеющая брэйд-монодромное разложение на множители $\text{bmf}(\bar{H})$, равное b .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Две кривые Гурвица $\bar{H}_1, \bar{H}_2 \subset F_N$ называются *H-изотопными*, если существует послойная непрерывная изотопия $\varphi_t: F_N \rightarrow F_N$, $t \in [0, 1]$, гладкая вне слоев $R_{\text{pr}(s)}$, $s \in Z(\bar{H}_1)$, и такая, что:

- (i) $\varphi_0 = \text{Id}$;
- (ii) $\varphi_t(\bar{H}_1)$ является кривой Гурвица для всех $t \in [0, 1]$;
- (iii) $\varphi_1(\bar{H}_1) = \bar{H}_2$;
- (iv) $\varphi_t = \text{Id}$ в окрестности кривой E_N для всех $t \in [0, 1]$.

Согласно [7, теорема 3.2] две каспидальные кривые Гурвица с отрицательными ноудами являются H -изотопными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый брэйд-монодромный тип разложения на множители.

Очевидно, если $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$ являются H -изотопными, то фундаментальные группы $\pi_1(F_N \setminus \overline{H}_1)$ и $\pi_1(F_N \setminus \overline{H}_2)$ изоморфны.

Рассмотрим два сечения $H_1 = \{u + 1 = 0, v = 0\}$ и $H_2 = \{u = 0, v = 0\}$ проекции $\text{pr}_1: D \rightarrow D_1$ бидиска $D = D_1 \times D_2$, где $D_1 = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$ и $D_2 = \{\sqrt{u^2 + v^2} \leq 2\}$. Пусть h_t – изотопия сечения H_1 , заданная уравнениями

$$\begin{aligned} u + 1 + 2t\rho(\sqrt{x^2 + y^2})(y + x^2 - 1) &= 0, \\ v - t\lambda\rho(\sqrt{x^2 + y^2})y &= 0, \end{aligned}$$

где $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонная C^∞ -функция такая, что $\rho(s) = 0$, если $s \geq 2$, и $\rho(s) = 1$, если $s \leq 1$, а λ – малая положительная константа.

Легко видеть, что:

- 1) $h_t(H_1)$, $0 \leq t \leq 1$, и H_2 являются симплектическими поверхностями в D относительно симплектической формы $\omega = x \wedge y + u \wedge v$;
- 2) сечения $h_t(H_1)$ и H_2 не имеют общих точек, если $0 \leq t < 1/2$;
- 3) сечение $h_t(H_1)$ пересекает H_2 трансверсально в двух точках, соответственно с положительным и отрицательным индексом пересечения, если $1/2 < t \leq 1$.

Назовем “регулярную гомотопию” $h_t(H_1) \cup H_2$ *рождением отрицательного ноуда*. Обратная гомотопия называется *уничтожением отрицательного ноуда*.

Скажем, что две кривые Гурвица $\overline{H}', \overline{H}'' \subset F_N$ получены друг из друга с помощью *допустимого преобразования*, если в некоторой окрестности $U \subset F_N$, диффеоморфной бидиску $D = D_1 \times D_2$ с локальными аналитическими координатами $z = x + iy$ и $w = u + iv$ такими, что $\text{pr}|_U = \text{pr}_1: D \rightarrow D_1$, имеем

$$\begin{aligned} \overline{H}' \cap U &= \{u + 1 = 0, v = 0\} \cup \{u = 0, v = 0\}, \\ \overline{H}'' \cap U &= \{u + 1 + 2(y + x^2 - 1)\rho = 0, v - \rho y = 0\} \cup \{u = 0, v = 0\} \end{aligned}$$

и $\overline{H}' \cap (F_N \setminus U) = \overline{H}'' \cap (F_N \setminus U)$.

Легко видеть, что если $\overline{H}', \overline{H}'' \subset F_N$ получены друг из друга с помощью допустимого преобразования, то

$$\text{bmf}(\overline{H}'') = g \cdot (g^{-1}) \cdot \text{bmf}(\overline{H}') \quad (26)$$

для некоторого $g \in A_1$.

Скажем, что $\overline{H}', \overline{H}'' \subset F_N$ являются *слабо эквивалентными*, если существует такая последовательность кривых Гурвица $\overline{H}_i$, $i = 1, \dots, n$, что $\overline{H}' = \overline{H}_1$, $\overline{H}'' = \overline{H}_n$ и для каждого $i = 1, \dots, n - 1$ кривые Гурвица $\overline{H}_i, \overline{H}_{i+1}$ либо H -изотопны, либо получены друг из друга с помощью допустимого преобразования.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.5. *Две каспидальные кривые Гурвица $\overline{H}', \overline{H}'' \subset F_N$ (возможно, с отрицательными ноудами) являются слабо эквивалентными тогда и только тогда, когда их типы разложения на множители брэйд-монодромии $\text{bmf}(\overline{H}')$ и $\text{bmf}(\overline{H}'')$ являются слабо эквивалентными.*

Доказательство следует из равенства (26) и [7, теорема 3.2].

Отметим, что если две каспидальные кривые Гурвица $\overline{H}', \overline{H}'' \subset F_N$ слабо эквивалентны, то не обязательно их фундаментальные группы $\pi_1(F_N \setminus \overline{H}')$ и $\pi_1(F_N \setminus \overline{H}'')$ являются изоморфными.

§ 6. Фундаментальные группы дополнений к кривым Гурвица

Следующая теорема является хорошо известной.

ТЕОРЕМА (Зариского–ван Кампена). Пусть $\overline{H} \subset F_N$ – кривая Гурвица степени m , имеющая разложение на множители брэйд-монодромии $\text{bmf}(\overline{H}) = s$. Тогда:

- (i) $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \overline{H}) \simeq G(B_s)$, где $\mathbb{C}^2 = F_N \setminus (E_N \cup R_\infty)$;
- (ii) $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \overline{H}) \simeq G(B_s) / \{\varphi_{W_s}(x_1 \dots x_m) = 1\}$.

В случае $N = 1$, так как $\alpha(s) = \Delta_m^2$ для $s = \text{bmf}(\overline{H})$, получаем, что соотношения

$$[x_i^{-1}, x_1 \dots x_m] = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (27)$$

принадлежат множеству определяющих соотношений копредставления (22).

Обозначим через $\mathcal{H}$ подкласс в $\mathcal{C}$, состоящий из фундаментальных групп дополнений аффинных плоских кривых Гурвица, т. е.

$$\mathcal{H} = \{\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\overline{H} \cup R_\infty))\},$$

где R_∞ – общая прямая пучка, определяющего линейчатую структуру $\text{pr}: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ на $\mathbb{CP}^2$.

ТЕОРЕМА 6.1. Имеем $\mathcal{H} = \mathcal{C}_{\Delta^2}$.

Доказательство. Вложение $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}_{\Delta^2}$ следует из формул (22), (27) и утверждения 1.6.

Обратное вложение вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6.2. Для каждой C -группы $G \in \mathcal{C}_{\Delta^2, m}$ существует кривая Гурвица $\overline{H} \subset \mathbb{CP}^2$ с особыми точками типа $\{w^m = z^m\}$ такая, что $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ C -изоморфна группе G , где $\mathbb{C}^2 = \mathbb{CP}^2 \setminus R_\infty$ и $H = \overline{H} \cap \mathbb{C}^2$.

Доказательство. Брэйд-монодромия особой точки $\{w^m = z^m\}$ равна Δ_m^2 . Поэтому теорема следует из теорем 3.6 и 5.3.

Обозначим через $\mathcal{I}$ подкласс в $\mathcal{H}$, состоящий из групп торических узлов, т. е. фундаментальных групп $\pi_1(S^3 \setminus K_{p,q})$ узлов

$$K_{p,q} = \{(z, w) \in S^3 \mid z = e^{2p\pi it}, w = e^{2q\pi it}, t \in [0, 1]\}$$

(p, q – взаимно простые числа, возможно, $p = q = 1$), где

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 2\}.$$

ТЕОРЕМА 6.3. Имеем $\mathcal{H} \cap \mathcal{H} = \mathcal{I}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{H} \subset \mathbb{CP}^2$ – кривая Гурвица степени m и $G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ – фундаментальная группа дополнения к ее аффинной части $H \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{CP}^2 \setminus R_\infty$. Из соотношений (27) следует, что элемент $\varphi_{W_s}(x_1 \dots x_m)$ принадлежит центру группы G . Поэтому из [4, теорема 6.1] следует, что $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{I}$.

Группа $G_{p,q}$ узла $K_{p,q}$ имеет копредставление Виртингера

$$G_{p,q} = \langle x_1, \dots, x_p \mid x_i = (a_1 \dots a_{p-1})^q(x_i), i = 1, \dots, p \rangle.$$

Имеем

$$(a_1 \dots a_{p-1})^{pq} = \Delta_p^{2q}.$$

Следовательно, существует кривая Гурвица $\tilde{H} \subset F_q$ степени p с разложением на множители брэйл-монодромии $\text{bmf}(\tilde{H}) = s^p \in S_{\text{Br}_p}$, где $s = (a_1 \dots a_{p-1})^q$ – одна из образующих полугруппы S_{Br_p} (s является брэйл-монодромией особой точки, заданной уравнением $w^p = z^q$). Согласно теореме Зариского–ван Кампена имеем

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H) \simeq G_{p,q},$$

где $H = \mathbb{C}^2 \cap \tilde{H}$, $\mathbb{C}^2 = F_q \setminus R_\infty$ и R_∞ – слой проекции pr , пересекающий $\tilde{H}$ трансверсально.

Как известно (см., например, [16]),

$$\Delta_{p+1}^2 = \prod_{l=p+1}^2 \prod_{k=1}^{l-1} b_{k,l}^2 = \Delta_p^2 \prod_{k=1}^p b_{k,p+1}^2,$$

где $b_{k,l} = (a_{l-1} \dots a_{k+1})a_k(a_{l-1} \dots a_{k+1})^{-1}$ для $k < l$ (здесь $\prod_k^n$ обозначает произведение слева направо от k до n).

Положим

$$s_1 = \prod_{k=1}^p (b_{k,p+1}^2) \in S_{\text{Br}_{p+1}},$$

где произведение взято в полугруппе $S_{\text{Br}_{p+1}}$. Элемент $s^p \cdot s_1^q \in S_{\text{Br}_{p+1}}$ является разложением на множители брэйл-монодромии кривой Гурвица в F_q , так как $\alpha(s^p \cdot s_1^q) = \Delta_{p+1}^{2q}$. Легко видеть, что эта кривая распадается на две компоненты, одна из которых H -изотопна кривой $\tilde{H}$, а другая – сечению $\tilde{C}$, не пересекающемуся с E_q , $\text{bmf}(\tilde{H} \cup \tilde{C}) = s^p \cdot s_1^q$. Кривые $\tilde{H}$ и $\tilde{C}$ пересекаются трансверсально. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{C} \subset F_q$ является алгебраическим сечением. Из вида разложения на множители брэйл-монодромии $\text{bmf}(\tilde{H} \cup \tilde{C}) = s^p \cdot s_1^q$ следует, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{H} \cup \tilde{C}))$ канонически C -изоморфна прямому произведению

$$G_{p,q} \times \mathbb{F}_1 \simeq \langle x_1, \dots, x_p \mid x_i = (a_1 \dots a_{p-1})^q(x_i), i = 1, \dots, p \rangle \times \langle x_{p+1} \rangle$$

(множитель $\mathbb{F}_1 = \langle x_{p+1} \rangle$ соответствует фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \tilde{C})$).

Выберем неоднородные координаты (u, v) в $\mathbb{C}^2 = F_q \setminus (E_q \cup R_\infty)$ так, что $u = 0$ является уравнением кривой $C = \tilde{C} \cap (F_q \setminus (E_q \cup R_\infty))$, и координаты (z, w) в дополнении к некоторой прямой $L = L_\infty \subset \mathbb{CP}^2$. Пусть $f: \mathbb{CP}^2 \rightarrow F_q$ –

циклическое (рациональное) накрытие степени p , заданное уравнениями $z = u^q$, $w = v$. Оно разветвлено вдоль $\tilde{C} \cup E_q$. Положим $\bar{H} = f^{-1}(\tilde{H})$ и $\bar{C} = F^{-1}(\tilde{C})$. Имеем $L_\infty = f^{-1}(R_\infty \cup E_q)$, $\bar{H}$ – кривая Гурвица степени pq и $\bar{C}$ – прямая в $\mathbb{CP}^2$, пересекающая $\bar{H}$ трансверсально. Легко видеть, что f_* определяет изоморфизм групп $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (\bar{H} \cup \bar{C}))$ и $G_{p,q} \times \langle x_{p+1}^q \rangle$, где группа $\langle x_{p+1}^q \rangle$ порождена образом обхода вокруг прямой $\bar{C}$. Следовательно, канонический эпиморфизм

$$\psi: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (\bar{H} \cup \bar{C})) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \bar{H}),$$

имеющий ядро $\ker \psi = \langle x_{p+1}^q \rangle$, задает изоморфизм между $G_{p,q}$ и $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \bar{H})$.

§ 7. Симплектоморфизмы общих накрытий плоскости

По определению алгебраическое разветвленное накрытие плоскости $\mathbb{CP}^2$ – это конечное голоморфное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ нормальной проективной неприводимой комплексной поверхности X в проективную плоскость. *Дивизор ветвления* $R \subset X$ – это дивизор якобиана отображения f (кратность R равна локальной степени отображения f минус 1). *Кривая ветвления* $\bar{H} \subset \mathbb{CP}^2$ – это образ носителя дивизора R , или, другими словами, множество точек, над которыми f не является локально обратимым отображением.

Фундаментальная группа $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}, p)$ дополнения кривой $\bar{H}$, где $p \in \mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}$, действует на слое $f^{-1}(p)$. Тем самым определен гомоморфизм (*монодромия степени* $N = \deg f$) $\bar{\mu} = \bar{\mu}(f): \pi_1 \rightarrow \mathfrak{S}_N$ из π_1 в симметрическую группу $\mathfrak{S}_N$. Монодромия $\bar{\mu}$ определяется отображением f однозначно с точностью до внутренних автоморфизмов симметрической группы. Обратно, согласно теореме Грауэрта–Ремерта [6] гомоморфизм $\bar{\mu}: \pi_1 \rightarrow \mathfrak{S}_N$, образ $\text{Im } \bar{\mu}$ которого транзитивно действует на множестве из N элементов, является монодromией некоторого конечного морфизма $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ степени $\deg f = N$.

Чтобы описать фундаментальную группу дополнения кривой $\bar{H}$ степени $\deg \bar{H} = m$, зафиксируем точку $p \in \mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}$, выберем точку $x \in \bar{H} \setminus \text{Sing } \bar{H}$ и рассмотрим проективную прямую $\Pi = \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$, пересекающую $\bar{H}$ трансверсально в точке x . Пусть $\Gamma \subset \Pi$ – окружность малого радиуса с центром в x . Комплексная ориентация на $\mathbb{CP}^2$ определяет ориентацию на Γ . Пусть γ – петля, состоящая из пути L в $\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}$, соединяющего p с точкой $q \in \Gamma$, окружности Γ (с положительной ориентацией), имеющей начало и конец в q , и возврата в p вдоль L в обратном направлении. Такие петли γ (и соответствующие им элементы в π_1) называются *геометрическими образующими* фундаментальной группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}, p)$. Хорошо известно, что π_1 порождается геометрическими образующими, и если $\bar{H}$ – неприводимая кривая, то любые две геометрические образующие сопряжены в π_1 .

Для каждой особой точки s_i кривой $\bar{H}$ кратности k_i выберем малую окрестность $U_i \subset \mathbb{CP}^2$ такую, что $\bar{H} \cap U_i$ задается (в локальных координатах в U_i) нормализованным уравнением Вейерштрасса

$$w^{k_i} + \sum_{j=0}^{k_i-1} c_j(z)w^j = 0$$

(в частности, $w^2 = z^3$, если s_i является обыкновенным каспом, и $w^2 = z^2$, если s_i – ноуд). Пусть p_i – произвольная точка в $U_i \setminus \bar{H}$. Напомним, что если s_i – обыкновенный касп, то $\pi_1(U_i \setminus \bar{H}, p_i)$ изоморфна группе кос Br_3 из трех нитей и порождена двумя геометрическими образующими, скажем a_1 и a_2 , удовлетворяющими соотношению $a_1 a_2 a_1 = a_2 a_1 a_2$, и если s_i – ноуд, то $\pi_1(U_i \setminus \bar{H}, p_i)$ изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и порождена двумя коммутирующими геометрическими образующими.

Выберем гладкие пути L_i в $\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}$, соединяющие точки p_i с точкой p . Этот выбор определяет гомоморфизмы $\psi_i: \pi_1(U_i \setminus \bar{H}, p_i) \rightarrow \pi_1$. Назовем группу $\psi_i(\pi_1(U_i \setminus \bar{H}, p_i)) = G_i$ *локальной фундаментальной группой* особой точки s_i . Локальные фундаментальные группы G_i зависят от выбора путей L_i и, следовательно, определены однозначно с точностью до сопряжения в π_1 . Если брэйд-монодромное разложение $\text{bmf}(\bar{H})$ равно $s = u_1 \cdot \dots \cdot u_n \in S_{\text{Br}_m}$ и множитель u_i соответствует особой точке s_i кривой $\bar{H}$, то ввиду теоремы Зариского–ван Кампена группа G_i совпадает (с точностью до сопряжения) с образом группы $G_{u_i, \text{loc}}$ при естественном эпиморфизме $r: G(B_s) \rightarrow G(B_s)/\{\varphi_{W_s}(x_1 \dots x_m) = 1\}$. Монодромия $\bar{\mu}: \pi_1 \rightarrow \mathfrak{S}_N$ общего накрытия плоскости $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль $\bar{H}$, определяет гомоморфизм $\mu = \bar{\mu} \circ r: G(s) \rightarrow \mathfrak{S}_N$, который также называется *монодромией* отображения f .

Конечный морфизм $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$, $\deg f = N$, разветвленный над каспидальной кривой $\bar{H}$, называется *общим накрытием плоскости с дискриминантной кривой $\bar{H}$* , если монодромия μ отображения f является общим гомоморфизмом, т. е. удовлетворяет следующим условиям:

- (i) μ – эпиморфизм;
- (ii) образ $\mu(\gamma)$ каждой геометрической образующей γ является транспозицией в симметрической группе $\mathfrak{S}_N$;
- (iii) образы $\mu(G_i)$ локальных фундаментальных групп G_i , соответствующих особым точкам кривой $\bar{H}$, являются подгруппами в $\mathfrak{S}_N$ порядков больше чем 2.

Последнее условие эквивалентно тому, что X является неособой алгебраической поверхностью (см., например, [10]). Отметим, что если $\bar{H}$ является дискриминантной кривой некоторого общего накрытия, то ее степень является четным числом. Для общего накрытия f полный прообраз $f^*(\bar{H})$ распадается (если $\deg f > 2$) в сумму: $f^*(\bar{H}) = 2R + C$, где $R \subset X$ – дивизор ветвления отображения f , имеющий кратность ветвления, равную двум, и C – приведенная кривая, в которой f не разветвлено. Ограничение $f|_R$ на R является морфизмом степени 1.

В симплектическом случае, как это было замечено М. Громовым, приведенное выше обсуждение свойств общих накрытий плоскости в терминах монодромий общих накрытий может быть перенесено также и в симплектическую ситуацию (см. [5, лемма 1] и [2, предложение 10]). Во-первых, если заданы каспидальная симплектическая поверхность $\bar{H}$ (возможно, с отрицательными ноудами) в $\mathbb{CP}^2$ и общий эпиморфизм (монодромия) $\bar{\mu}$ из фундаментальной группы ее дополнения в симметрическую группу $\mathfrak{S}_N$, то можно построить гладкое накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ степени N , разветвленное над $\bar{H}$. Прообраз симплектической формы обращается в нуль на нормальном расслоении к поверхности ветвления $R \subset X$ и в точках прообраза каспидальных точек поверхности $\bar{H}$, лежащих на R . Однако можно добавить точную 2-форму $\eta \in \Lambda^2(X)$ так, что форма $f^*\omega_{\mathbb{CP}^2} + \eta$ станет симплектической. Существенно здесь то, что хотя нет канонического подъема симплектической

формы на многообразии X , тем не менее, полученная в результате симплектическая структура определена канонически благодаря аргументам мозерова типа.

Сформулируем все сказанное выше в виде следующей леммы.

ЛЕММА 7.1. *Предположим, что каспидальная симплектическая поверхность $\bar{H} \subset \mathbb{CP}^2$ (возможно, с отрицательными нодами) имеет общую монодромию $\bar{\mu}: \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}) \rightarrow \mathfrak{S}_n$. Тогда существует единственное симплектическое четырехмерное многообразие X с гладким отображением $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$, разветвленным над $\bar{H}$, как это описано выше, такое, что симплектическая структура на X является поднятием стандартной симплектической структуры на $\mathbb{CP}^2$.*

Ясно, что если задана симплектическая изотопия $\bar{H}_t$, $t \in [0, 1]$, каспидальных симплектических поверхностей и существует эпиморфизм $\bar{\mu}: \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}_0) \rightarrow \mathfrak{S}_N$, то мы получим семейство симплектических четырехмерных многообразий X_t . (Напомним, что по определению изотопии топология дополнения $\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}_t$ не меняется.) Используя аргументы, аналогичные применявшимся в [7], можно показать, что любые симплектические поверхности с отрицательными нодами в $\mathbb{CP}^2$ симплектически изотопны каспидальному симплектическому кривому Гурвица с отрицательными нодами. Поэтому в симплектическом случае при исследовании общих накрытий плоскости $\mathbb{CP}^2$, разветвленных вдоль каспидальных симплектических поверхностей $\bar{H}$, можно ограничиться случаем, когда $\bar{H}$ является кривой Гурвица.

Рассмотрим два общих накрытия $f': X' \rightarrow \mathbb{CP}^2$ и $f'': X'' \rightarrow \mathbb{CP}^2$ степени N , разветвленных соответственно вдоль каспидальных кривых Гурвица $\bar{H}'$ и $\bar{H}''$ (возможно, с отрицательными нодами). Пусть $s' = \text{bmf}(\bar{H}')$ и $s'' = \text{bmf}(\bar{H}'')$ – разложения на множители брэйд-монодромии кривых $\bar{H}'$ и $\bar{H}''$, накрытие f' (соответственно, f'') определено монодромией $\mu': G(s') \rightarrow \mathfrak{S}_N$ (соответственно, μ''). Скажем, что $\bar{H}'$ и $\bar{H}''$ являются слабо μ -эквивалентными, если пары $(s', \mu_{s'})$ и $(s'', \mu_{s''})$ слабо μ -эквивалентны.

ЛЕММА 7.2. *Пусть две кривые Гурвица $\bar{H}'$ и $\bar{H}''$ являются кривыми ветвления двух общих накрытий f' и f'' плоскости. Если $\bar{H}'$ и $\bar{H}''$ слабо μ -эквивалентны, то существует симплектоморфизм $h: X' \rightarrow X''$ такой, что накрытия f' и $f'' \circ h$ являются изотопными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определения слабой μ -эквивалентности, утверждения 5.5 и теоремы 3.3, доказанной в [7].

В алгебраическом случае, если (X, L) – поляризованная проективная поверхность, где L – очень обильное линейное расслоение на X , для достаточно большого k сечения расслоения $L^{\otimes k}$ определяют вложение поверхности X в некоторое проективное пространство $\mathbb{CP}^r$. Ограничение общей проекции $\mathbb{CP}^r \rightarrow \mathbb{CP}^2$ на X дает общее накрытие $f_k: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$, разветвленное в некоторой кривой $\bar{H}_k$. Заметим, что степень накрытия равна $k^2 \deg L = k^2 c_1(L)^2$. Пространство общих проекций является связным, следовательно, корректно следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Назовем k -м брэйд-монодромным инвариантом $\mu_k(X, L)$ поляризованной комплексной поверхности (X, L) тип брэйд-монодромного разложения на множители кривой $\bar{H}_k$.

Поляризация определяет канонически симплектическую структуру ω_L на X . Для ее определения выберем положительную $(1, 1)$ -форму, представляющую первый класс Черна $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Любые две такие формы можно соединить линейной гомотопией, следовательно, они диффеоморфны по теореме Мозера.

ТЕОРЕМА 7.4. *Пусть (X, L) и (X', L') – две поляризованные проективные поверхности. Предположим, что $\mu_k(X, L) = \mu_k(X', L')$ для некоторого k такого, что $k^2 c_1(L)^2 \geq 12$. Тогда (X, ω_L) и $(X', \omega_{L'})$ симплектоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению кривые ветвления $\bar{H}$ и $\bar{H}'$ общих проекций на $\mathbb{CP}^2$, определенных соответственно сечениями расслоений $L^{\otimes k}$ и $(L')^{\otimes k}$, имеют один и тот же тип разложений брэйд-монодромии на множители. Таким образом, согласно [7, теорема 3.3] кривые $\bar{H}$ и $\bar{H}'$ являются симплектически изотопными как каспидальные кривые Гурвица. Из [12, теорема 3] следует, что существует единственная общая монодромия $\mu: \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H}) \rightarrow \mathfrak{S}_N$ для $N = k^2 c_1(L_1)^2$. Следовательно, ввиду леммы 7.1 имеем единственное семейство разветвленных симплектических накрытий плоскости $\mathbb{CP}^2$, связывающее многообразия X и X' . Из теоремы Мозера следует, что X и X' симплектоморфны относительно поднятых с плоскости симплектических структур. С другой стороны, эти поднятые структуры пропорциональны с одним и тем же коэффициентом k симплектическим структурам, определенным поляризациями, что завершает доказательство теоремы.

Пусть (X, ω) – компактное симплектическое четырехмерное многообразие с симплектической формой ω , класс когомологий которой $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Зафиксируем совместимую с ω почти комплексную структуру J и соответствующую риманову метрику g . Пусть L – линейное расслоение на X , первый класс Черна которого есть $[\omega]$. В [2] доказано, что для $k \gg 0$ линейное расслоение $L^{\otimes k}$ имеет много почти голоморфных сечений, так что можно выбрать три из них, которые дают почти голоморфное общее накрытие $f_k: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ степени $N_k = k^2 \omega^2$, разветвленное вдоль каспидальной кривой Гурвица $\bar{H}$ (возможно, с отрицательными нодами). Обозначим, как и выше, через $\text{bmf}(\bar{H}_k) = s_k$ разложение на множители брэйд-монодромии кривой Гурвица $\bar{H}_k$ и через $\mu_k: G(B_{s_k}) \rightarrow \mathfrak{S}_{N_k}$ – монодромию накрытия f_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5. Пара $(\text{bmf}(\bar{H}_k), \mu_k)$ называется k -м брэйд-монодромным инвариантом $\bar{\mu}_k(X, \omega)$ симплектического четырехмерного многообразия (X, ω) .

ТЕОРЕМА 7.6 [3]. *Если два симплектических четырехмерных многообразия (X', ω') и (X'', ω'') симплектоморфны, то для достаточно большого k брэйд-монодромные инварианты $\mu_k(X', \omega')$ и $\mu_k(X'', \omega'')$ являются слабо μ -эквивалентными.*

Появление условия слабой эквивалентности в теореме 7.6 связано с конструкцией изотопии накрытий, которая непрерывно зависит от выбора ручных почти комплексных структур. Поэтому для симплектических четырехмерных многообразий мы получаем “регулярную гомотопию” кривых ветвления, которая приводит к слабой μ -эквивалентности их брэйд-монодромных разложений на множители. Из следующей теоремы вытекает, что в общем случае мы не можем избежать появления отрицательных ноудов.

ТЕОРЕМА 7.7. Для любого $N \geq 4$ существуют два регулярно гомотопных общих накрытия $f_1: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ и $f_2: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ степени N , разветвленных вдоль каспидальных кривых Гурвица $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ без отрицательных ноудов, такие, что:

- (i) $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ имеют разные типы брэйд-монодромных разложений на множители;
- (ii) пары $(\text{bmf}(\bar{H}_1), \mu_1)$ и $(\text{bmf}(\bar{H}_2), \mu_2)$ слабо μ -эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{H}_N$ – дискриминантная кривая общей линейной проекции $\text{pr}: X_N \rightarrow \mathbb{CP}^2$ гладкой проективной поверхности $X_N \subset \mathbb{CP}^3$ степени $\deg X_N = N$. Обозначим через $m = N(N-1)$ степень кривой $\bar{H}_N$ и через $s = s_N = \text{bmf}(\bar{H}_N)$ – разложение на множители ее брэйд-монодромии. Проекция pr определяет общий эпиморфизм (монодромию) $\mu = \mu_N: G(B_s) \rightarrow \mathfrak{S}_N$. В работе [14] доказано, что C -группа

$$G(s) = G(W(B_s, \mathbb{F}_m)) \simeq \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i^{-1} b(x_i) = \mathbf{1}, i = 1, \dots, m, b \in B_s \rangle \quad (28)$$

C -изоморфна группе кос Br_N и μ совпадает с каноническим эпиморфизмом $\sigma: \text{Br}_N \rightarrow \mathfrak{S}_N$, имеющим своим ядром группу крашенных кос. Без ограничения общности можно предполагать, что $\varphi_s(x_1) = a_1 \in \text{Br}_N$. Поскольку μ является эпиморфизмом, то существует элемент y , сопряженный в $\mathbb{F}_m$ некоторой образующей x_i и такой, что $\varphi_s(y) = a_2^{-2} a_3 a_2^2$. Заметим, что $[\varphi_s(x_1), \varphi_s(y)] \neq \mathbf{1}$ в Br_N , но $\mu(\varphi_s(x_1)) = (1, 2)$ и $\mu(\varphi_s(y)) = (3, 4)$ являются коммутирующими транспозициями в группе $\mathfrak{S}_N$. Тогда из теоремы 4.2 следует, что существуют число $M \in \mathbb{N}$ и две пары $(\bar{s}, \mu_{\bar{s}})$ и $(\tilde{s}, \mu_{\tilde{s}})$, $\bar{s}, \tilde{s} \in \mathcal{A}_2 \subset S_{\text{Br}_M}$, такие, что:

- 1) $\alpha(\bar{s}) = \alpha(\tilde{s}) = \Delta_M^2$;
- 2) $G_{\bar{s}}$ является C -изоморфной C -группе $G(s) \simeq \text{Br}_N$, а $G_{\tilde{s}}$ является C -изоморфной C -группе $\text{Br}_N / \{[a_1, a_2^{-2} a_3 a_2^2] = \mathbf{1}\}$;
- 3) элементы $\bar{s}$ и $\tilde{s}$ имеют различные типы;
- 4) $\mu_{\bar{s}}$ и $\mu_{\tilde{s}}$ являются общими эпиморфизмами в группу $\mathfrak{S}_N$;
- 5) пары $(\bar{s}, \mu_{\bar{s}})$ и $(\tilde{s}, \mu_{\tilde{s}})$ слабо μ -эквивалентны;
- 6) $\bar{s}, \tilde{s} \in \mathcal{A}_2^0 \subset S_{\text{Br}_M}$.

Согласно теореме 5.3 существуют две каспидальные кривые Гурвица $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ в $\mathbb{CP}^2$ степени M , имеющие $\text{bmf}(\bar{H}_1) = \bar{s}$ и $\text{bmf}(\bar{H}_2) = \tilde{s}$. Общие эпиморфизмы $\mu_{\bar{s}}$ и $\mu_{\tilde{s}}$ определяют два общих накрытия $f': X' \rightarrow \mathbb{CP}^2$ и $f'': X'' \rightarrow \mathbb{CP}^2$, разветвленные соответственно вдоль $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$. Из леммы 7.2 следует, что существует симплектоморфизм $h: X' \rightarrow X''$ такой, что накрытия $f_1 = f': X = X' \rightarrow \mathbb{CP}^2$ и $f_2 = f'' \circ h: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$ являются регулярно гомотопными, но их гурвицовские кривые ветвления имеют разные типы разложений на множители брэйд-монодромии.

Список литературы

1. Artin E. Theorie der Zöpfe // Hamburg Abh. 1925. V. 4. P. 47–72.
2. Auroux D. Symplectic 4-manifolds as branched coverings of $\mathbb{P}^2$ // Invent. Math. 2000. V. 139. P. 551–602.
3. Auroux D., Katzarkov L. Branched coverings of $\mathbb{P}^2$ and invariants of symplectic 4-manifolds // Invent. Math. 2000. V. 142. P. 631–673.
4. Burde G., Zieschang H. Knots. Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1985.

5. *Gompf R.* Symplectically aspherical manifolds with nontrivial π_2 // *Math. Res. Letters.* 1998. V. 5. P. 599–603.
6. *Grauert H., Remmert R.* Komplexe Raume // *Math. Ann.* 1958. V. 136. P. 245–318.
7. *Куликов Вик. С., Харламов В. М.* О брэйд-монодромных разложениях на множители // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2003. Т. 67. №3. С. 79–118.
8. *Куликов В. С., Куликов Вик. С.* Общие накрытия плоскости с A - D - E -особенностями // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2000. Т. 64. №6. С. 1153–1195.
9. *Куликов Вик. С., Тайхер М.* Брэйд-монодромные разложения на множители и диффеоморфные типы // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2000. Т. 64. №2. С. 311–341.
10. *Куликов Вик. С.* О гипотезе Кизини // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1999. Т. 63. №6. С. 1139–1170.
11. *Куликов Вик. С.* Геометрическая реализация C -групп // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1995. Т. 45. №1. С. 197–206.
12. *Куликов Вик. С.* Обобщенная гипотеза Кизини // *Тр. МИАН.* 2003. Т. 241. С. 122–131.
13. *Немировский С. Ю.* К теореме Куликова о гипотезе Кизини // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2001. Т. 65. №1. С. 71–74.
14. *Moishezon B.* Stable branch curves and braid monodromies // *Lect. Notes Math.* 1981. V. 862. P. 107–192.
15. *Moishezon B.* The arithmetic of braids and a statement of Chisini // *Contemp. Math.* 1994. V. 164. P. 151–175.
16. *Moishezon B., Teicher M.* Braid group technique in complex geometry. I. Line arrangements in $\mathbb{CP}^2$ // *Contemp. Math.* 1988. V. 78. P. 425–555.
17. *Moishezon B., Teicher M.* Braid group technique in complex geometry. V. The fundamental group of a complement of a branch curve of a Veronese generic projection // *Comm. Anal. Geom.* 1996. V. 4. № 11. P. 1–120.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
26.08.2003