УДК 514.756.4

Г.-М. Гроель, Вик. С. Куликов

О симплектических накрытиях проективной плоскости

Доказано, что разрешение особенностей произвольного конечного накрытия комплексной проективной плоскости, разветвленного вдоль кривой Гурвица $\overline{H}$ и, возможно, вдоль "бесконечно удаленной" прямой, может быть вложено как симплектическое подмногообразие в некоторое проективное алгебраическое многообразие, снабженное целочисленной симплектической кэлеровой формой (предполагается, что если $\overline{H}$ имеет отрицательные ноуды, то накрытие является неособым над ними). Для циклических накрытий это вложение может быть реализовано в некоторое рациональное комплексное трехмерное многообразие. Свойства многочленов Александера кривых Гурвица $\overline{H}$ исследованы и применены для вычисления первого числа Бетти $b_1(\overline{X}_n)$ разрешения $\overline{X}_n$ особенностей n-листного циклического накрытия $\mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль $\overline{H}$ и, возможно, вдоль "бесконечно удаленной" прямой. Доказано, что $b_1(\overline{X}_n)$ является четным числом, если $\overline{H}$ является неприводимой кривой Гурвица, и в отличие от алгебраического случая первое число Бетти может принимать любые неотрицательные значения, когда $\overline{H}$ состоит из нескольких неприводимых компонент.

Библиография: 22 наименования.

Введение

Понятие кривых Гурвица на проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ относительно линейной проекции $\mathrm{pr}\colon \mathbb{CP}^2 \setminus \{p_\infty\} \to \mathbb{CP}^1$, p_∞ – центр проекции pr, было введено в [18] и является естественным обобщением понятия плоских алгебраических кривых (в [18] кривые Гурвица называются "полуалгебраическими кривыми"). Точное определение кривых Гурвица можно найти, например, в [12]. В настоящей статье мы даем другое, эквивалентное (см. лемму 1.1) определение кривых Гурвица. А именно, пусть $\mathbb{C}^2_i$ – две копии аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами (u_i, v_i), $i = 1, 2$, $u_2 = 1/u_1$ и $v_2 = v_1/u_1$, которые покрывают $\mathbb{CP}^2 \setminus \{p_\infty\}$ так, что проекция pr задана формулами $(u_i, v_i) \to u_i$ в картах $\mathbb{C}^2_i$. Множество $\overline{H} \subset \mathbb{CP}^2 \setminus \{p_\infty\}$, замкнутое в $\mathbb{CP}^2$, называется *кривой Гурвица степени m*, если для $i = 1, 2$ множество $\overline{H} \cap \mathbb{C}^2_i$ совпадает с множеством решений уравнения

$$F_i(u_i, v_i) := v_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,i}(u_i) v_i^j = 0, \tag{0.1}$$

Работа первого автора частично поддержана грантом DFG-Schwerpunkt "Globale Methoden in der komplexen Geometrie", работа второго автора – грантом РФФИ (№ 05-01-00455) и грантом DFG (436 RUS 17/84/03).

где:

(i) $F_i(u_i, v_i)$ является C^∞-гладкой комплекснозначной функцией в $\mathbb{C}^2$;

(ii) функция $F_i(u_i, v_i)$ имеет лишь конечное число критических значений, т.е. существует конечное число значений переменной u_i, скажем $u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}$, таких, что полиномиальное уравнение

$$v_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,i}(u_{i,0}) v_i^j = 0 \tag{0.2}$$

не имеет кратных корней для $u_{i,0} \notin \{u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}\}$;

(iii) если $v_{i,j}$ является кратным корнем уравнения (0.2) для $u_{i,j} \in \{u_{i,1}, \dots \dots, u_{i,n_i}\}$, то в окрестности точки $(u_{i,j}, v_{i,j})$, которую мы называем *критической точкой* кривой $\overline{H}$, множество $\overline{H}$ совпадает с множеством решений некоторого комплексно-аналитического уравнения.

Отметим, что после перемасштабирования $\tilde{v}_i = \varepsilon v_i$, $0 < \varepsilon \ll 1$, кривые Гурвица становятся симплектическими поверхностями в $\mathbb{CP}^2$ (см. также доказательство теоремы 3.1).

Более общо, можно рассматривать так называемые *топологические кривые Гурвица*, которые имеют *конусообразные особенности* (см. определение конусообразных особенностей в [12]).

Кривая (соответственно, топологическая кривая) Гурвица $\overline{H}$ называется *неприводимой*, если $\overline{H} \setminus M$ связно для любого конечного множества $M \subset \overline{H}$, и мы будем говорить, что кривая Гурвица $\overline{H}$ *состоит из k неприводимых компонент*, если

$$k = \max \#\{\text{связные компоненты кривой } \overline{H} \setminus M\},$$

где максимум взят по всем конечным множествам $M \subset \overline{H}$.

Пусть H – *аффинная кривая Гурвица*, т.е. $H = \overline{H} \cap (\mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty)$, где L_∞ – комплексная прямая, являющаяся слоем проекции pr и находящаяся в общем положении по отношению к $\overline{H}$. В этом случае фундаментальная группа $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\overline{H} \cup L_\infty))$ не зависит от выбора прямой L_∞ и принадлежит классу $\mathcal{C}$ так называемых C-групп.

По определению *C-группа* – это группа вместе с конечным копредставлением

$$G_W = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i = w_{i,j,k}^{-1} x_j w_{i,j,k},\ w_{i,j,k} \in W \rangle, \tag{0.3}$$

где $W = \{w_{i,j,k} \in \mathbb{F}_m \mid 1 \leqslant i,j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant h(i,j)\}$ – некоторое подмножество элементов свободной группы $\mathbb{F}_m$ (возможно, что $w_{i_1,j_1,k_1} = w_{i_2,j_2,k_2}$ для $(i_1, j_1, k_1) \neq (i_2, j_2, k_2)$), порожденной свободными порождающими $x_1, \dots, x_m$, и $h\colon \{1, \dots, m\}^2 \to \mathbb{Z}$ – некоторая функция. Такое копредставление называется *C-копредставлением* (буква C означает, что все соотношения являются сопряжениями).

Пусть $\varphi_W\colon \mathbb{F}_m \to G_W$ – канонический эпиморфизм. Элементы $\varphi_W(x_i) \in G$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и элементы, сопряженные им, называются *C-порождающими элементами* C-группы G. Пусть $f\colon G_1 \to G_2$ – некоторый гомоморфизм C-групп. Он называется *C-гомоморфизмом*, если образы всех C-порождающих элементов группы G_1 при гомоморфизме f являются C-порождающими элементами C-группы G_2. Мы будем рассматривать C-группы с точностью до C-изоморфизмов.

C-копредставление (0.3) называется *гурвицевским C-копредставлением степени* m, если для каждого $i = 1, \dots, m$ слово $w_{i,i,1}$ совпадает с произведением $x_1 \dots x_m$, и C-группа G называется *гурвицевской C-группой степени* m, если она обладает гурвицевским C-копредставлением степени m. Другими словами, C-группа G является гурвицевской C-группой степени m, если существуют C-порождающие элементы $x_1, \dots, x_m$, порождающие группу G и такие, что произведение $x_1 \dots x_m$ принадлежит центру группы G. Отметим, что степень гурвицевской C-группы G определена неканонически и зависит от ее гурвицевского C-копредставления. Обозначим через $\mathcal{H}$ класс всех гурвицевских C-групп.

Пусть $\overline{H}$ – кривая (соответственно, топологическая кривая) Гурвица степени m. Копредставление Зариского–ван Кампена группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$, где $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ и слой L_∞ проекции pr находится в общем положении относительно кривой $\overline{H}$, определяет на π_1 структуру гурвицевской C-группы степени m (см. [11]). В работе [11] было доказано, что произвольная гурвицевская C-группа G степени m может быть реализована как фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ для некоторой кривой Гурвица $\overline{H}$ с особыми точками типа $w^m - z^m = 0$, имеющей степень $\deg \overline{H} = 2^n m$, где n зависит от гурвицевского C-копредставления группы G. Поскольку мы рассматриваем C-группы с точностью до C-изоморфизмов, то класс $\mathcal{H}$ совпадает с классом $\{\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)\}$ фундаментальных групп дополнений к аффинным кривым (соответственно, топологическим кривым) Гурвица.

Свободная группа $\mathbb{F}_n$ с фиксированными свободными порождающими элементами является C-группой, и для любой C-группы G однозначно определен канонический C-эпиморфизм $\nu\colon G \to \mathbb{F}_1$, отображающий все C-порождающие элементы группы G в C-порождающий элемент группы $\mathbb{F}_1$. Обозначим через N его ядро. Отметим, что если все C-порождающие элементы C-группы G сопряжены друг другу (такая C-группа называется *неприводимой*), то N совпадает с коммутантом[1] G'.

Пусть G – C-группа. C-эпиморфизм ν индуцирует следующую точную последовательность групп:

$$1 \to N/N' \to G/N' \xrightarrow{\nu_*} \mathbb{F}_1 \to 1.$$

C-порождающий элемент группы $\mathbb{F}_1$ действует на N/N' сопряжением $\tilde{x}^{-1} n \tilde{x}$, где $n \in N$ и $\tilde{x}$ – один из C-порождающих элементов группы G. Обозначим через h это действие и через $h_{\mathbb{C}}$ индуцированное действие на $(N/N') \otimes \mathbb{C}$. Характеристический многочлен $\Delta(t) = \det(h_{\mathbb{C}} - t\,\mathrm{Id})$ называется *многочленом Александера* C-группы G (если векторное пространство $(N/N') \otimes \mathbb{C}$ над $\mathbb{C}$ является бесконечномерным, то по определению многочлен Александера $\Delta(t)$ тождественно равен нулю). Для (топологической) кривой Гурвица $\overline{H}$ многочлен Александера $\Delta(t)$ группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ называется *многочленом Александера* кривой $\overline{H}$. Отметим, что многочлен Александера $\Delta(t)$ (топологической) кривой Гурвица $\overline{H}$ не зависит от выбора общей прямой L_∞.

Пусть $G = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ – C-копредставление C-группы G, и пусть $\mathbb{F}_m$ – свободная группа, свободно порожденная C-порождающими элементами

[1] Мы используем стандартные обозначения G' для коммутанта группы G и G'' для коммутанта группы G'.

$x_1, \dots, x_m$. Обозначим через $\frac{\partial}{\partial x_i}$ дифференцирование Фокса [4], т.е. эндоморфизм группового кольца $\mathbb{Z}[\mathbb{F}_m]$ над $\mathbb{Z}$ свободной группы $\mathbb{F}_m$ в себя такой, что $\frac{\partial}{\partial x_i}\colon \mathbb{Z}[\mathbb{F}_m] \to \mathbb{Z}[\mathbb{F}_m]$ является $\mathbb{Z}$-линейным отображением, удовлетворяющим свойствам

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} &= \delta_{i,j}, \\ \frac{\partial uv}{\partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{0.4}$$

для любых $u, v \in \mathbb{Z}[\mathbb{F}_m]$. Хорошо известно (доказано, например, в [19] для групп узлов и обобщено на случай произвольных C-групп в [9]), что многочлен Александера $\Delta(t)$ группы G совпадает (с точностью до умножения на ненулевую константу и на обратимый в $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ элемент $\pm t^k$) с наибольшим общим делителем миноров порядка $m-1$ в матрице

$$\nu_*\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]),$$

где r_i, $i = 1, \dots, n$, – определяющие соотношения для группы G и отображение $\nu_*\colon \mathbb{Z}[\mathbb{F}_m] \to \mathbb{Z}[\mathbb{F}_1] \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ индуцировано каноническим C-эпиморфизмом $\nu\colon \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_1$.

Свойства многочленов Александера плоских алгебраических кривых и их применение к вычислению первых чисел Бетти циклических накрытий проективной плоскости хорошо известны (см., например, [22], [15], [20], [6], [7], [9], [8]). Одной из целей авторов настоящей статьи является обобщение этих результатов на случай кривых Гурвица и их применение к вычислению первых чисел Бетти циклических накрытий проективной плоскости, разветвленных в кривых Гурвица.

Основные результаты этой статьи сформулированы в следующих теоремах и следствиях.

Теорема 0.1. *Пусть $\overline{H}$ – (топологическая) кривая Гурвица степени d и $\Delta(t)$ – ее многочлен Александера. Тогда*:

(i) $\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$;

(ii) $\Delta(0) = \pm 1$;

(iii) *корни многочлена $\Delta(t)$ являются корнями степени d из единицы*;

(iv) *действие $h_{\mathbb{C}}$ на $(N/N')\otimes\mathbb{C}$ является полупростым.*

Более того, многочлены Александера $\Delta(t)$ кривых Гурвица $\overline{H}$ степени d являются делителями многочлена $(t-1)(t^d-1)^{d-2}$ (см. теорему 5.6), и если $\overline{H}$ состоит из k неприводимых компонент, то кратность корня $t=1$ многочлена Александера $\Delta(t)$ кривой $\overline{H}$ равна $k-1$ (см. теорему 5.9).

Теорема 0.2. *Если $\overline{H}$ – неприводимая (топологическая) кривая Гурвица, то*:

(i) $\Delta(t)$ *является возвратным многочленом, т. е. имеет место равенство* $\Delta(t) = t^{\deg\Delta(t)}\Delta(t^{-1})$;

(ii) $\deg\Delta(t)$ *является четным числом*;

(iii) $\Delta(1) = 1$.

Следствие 0.3. *Пусть* $\overline{H}$ – *неприводимая* (*топологическая*) *кривая Гурвица степени* $\deg\overline{H} = p^n$, *где* p – *простое число. Тогда*:

(i) $\Delta(t) \equiv 1$;

(ii) *группа* π_1'/π_1'' *является конечной, где* $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$.

Отметим также, что если J – почти комплексная структура на $\mathbb{CP}^2$, совместимая с симплектической формой Фубини – Штуди, и $\overline{H}$ – J-голоморфная кривая в $\mathbb{CP}^2$ степени m, т.е. класс $[\overline{H}]$ равен $m[\mathbb{CP}^1]$ в $H_2(\mathbb{CP}^2,\mathbb{Z})$, то $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\overline{H}\cup L_\infty))$ является гурвицевской C-группой степени m, где L_∞ – одна из J-прямых, находящихся в общем положении с $\overline{H}$. Действительно, если мы выберем пучок псевдоголоморфных прямых, которому принадлежит L_∞, то согласно теореме Зариского–ван Кампена копредставление группы π_1 определяется брэйд-монодромным разложением на множители кривой $\overline{H}$ относительно выбранного пучка прямых. Следовательно, π_1 является C-группой, и, аналогично случаю кривых Гурвица, легко показать (см. доказательство теоремы 6.1 в [11]), что она является гурвицевской C-группой степени m. Таким образом, многочлены Александера псевдоголоморфных кривых можно определить аналогично случаю кривых Гурвица, и они имеют те же самые свойства.

Гомоморфизм $\nu\colon \pi_1 \to \mathbb{F}_1$, где $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ – фундаментальная группа дополнения к аффинной кривой Гурвица, определяет бесконечное циклическое неразветвленное накрытие $f = f_\infty\colon X'_\infty \to X' = \mathbb{C}^2 \setminus H$. Имеем $H_1(X'_\infty,\mathbb{Z}) = N/N'$, и действие h на $H_1(X'_\infty,\mathbb{Z})$ совпадает с действием порождающего элемента группы накрывающих преобразований накрытия f_∞. Из результатов работы [13] следует, что группа $H_1(X'_\infty,\mathbb{Z})$ является конечно порожденной. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathrm{mod}_n\colon \mathbb{F}_1 \to \mu_n = \mathbb{F}_1/\{h^n\}$ естественный эпиморфизм в циклическую группу μ_n порядка n. Накрытие f_∞ может быть пропущено через циклическое накрытие $f_n\colon X'_n \to \mathbb{C}^2 \setminus H$, ассоциированное с эпиморфизмом $\mathrm{mod}_n \circ \nu$, $f_\infty = g_n \circ f_n$. Поскольку кривая Гурвица $\overline{H}$ имеет только аналитические особенности, то накрытие f_n может быть продолжено до гладкого отображения $\bar f_n\colon \overline{X}_n \to \mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль $\overline{H}$ и, возможно, вдоль L_∞ (если n не является делителем $\deg\overline{H}$, то $\bar f_n$ разветвлено вдоль L_∞), где $\overline{X}_n$ – некоторое гладкое четырехмерное многообразие. Действие h индуцирует действия $\bar h_n$ на $\overline{X}_n$ и $\bar h_{n*}$ на $H_1(\overline{X}_n,\mathbb{Z})$.

В § 4 показано (см. теорему 4.1), что любое такое многообразие $\overline{X}_n$ может быть вложено как симплектическое подмногообразие в проективное рациональное трехмерное комплексное многообразие, на котором симплектическая структура задана некоторой целочисленной кэлеровой формой.

Теорема 0.4. *Пусть* $\overline{X}_n$ – *разрешение особенностей* n-*листного циклического накрытия, разветвленного вдоль кривой Гурвица* $\overline{H}$ *и, возможно, вдоль* L_∞ *и ассоциированного с эпиморфизмом* $\mathrm{mod}_n \circ \nu\colon \pi_1 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. *Тогда первое число Бетти*

$$b_1(\overline{X}_n) = \dim_{\mathbb{C}} H_1(\overline{X}_n,\mathbb{C}) = r_{n,\neq 1},$$

где $r_{n,\neq1}$ – *число не равных единице корней многочлена Александера* $\Delta(t)$ *кривой* $\overline{H}$, *являющихся корнями степени* n *из единицы.*

Теоремы 0.1, 0.2, 0.4 и следствие 0.3 влекут приведенные далее следствия.

Следствие 0.5. *Пусть $\overline{X}_n$ – разрешение особенностей n-листного циклического накрытия, разветвленного вдоль кривой Гурвица $\overline{H}$ и, возможно, вдоль прямой L_∞. Если $\deg\overline{H}$ и n взаимно просты, то $b_1(\overline{X}_n) = 0$.*

Следствие 0.6. *Пусть $\overline{X}_n$ – разрешение особенностей n-листного циклического накрытия, разветвленного вдоль неприводимой кривой Гурвица $\overline{H}$ и, возможно, вдоль L_∞. Тогда $b_1(\overline{X}_n)$ является четным числом.*

Более того, мы доказываем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует неприводимая кривая Гурвица $\overline{H}_k$ такая, что для некоторого n (например, можно взять $n = 6$; см. предложение 6.5) разрешение $\overline{X}_{k,n}$ особенностей n-листного циклического накрытия, разветвленного вдоль $\overline{H}_k$, имеет первое число Бетти $b_1(\overline{X}_{k,n}) = 2k$. Кроме того, мы показываем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется кривая Гурвица $\overline{H}_k$, состоящая из двух неприводимых компонент и такая, что разрешение особенностей $\overline{X}_{k,6}$ циклического накрытия проективной плоскости, разветвленного вдоль $\overline{H}_k$, имеет первое число Бетти $b_1(\overline{X}_{k,6}) = k$. Напомним, что $b_1(\overline{X}_n)$ всегда является четным числом, если $\overline{H}$ является плоской алгебраической кривой, поэтому эти $\overline{H}_k$ не могут быть алгебраическими, если k нечетно. Другие примеры кривых Гурвица, не изотопных алгебраическим кривым, можно найти в работе[2] [18].

Следствие 0.7. *Пусть $\overline{X}_n$ – разрешение особенностей циклического накрытия проективной плоскости, разветвленного вдоль кривой Гурвица $\overline{H}$, состоящей из k неприводимых компонент, и, возможно, вдоль L_∞. Если $\deg\overline{H}$ является делителем n, то $b_1(\overline{X}_n) = \deg\Delta(t) - k + 1$.*

Следствие 0.8. *Пусть $\overline{X}_n$ – разрешение особенностей циклического накрытия проективной плоскости произвольной степени n, разветвленного вдоль неприводимой кривой Гурвица $\overline{H}$ и, возможно, вдоль L_∞. Если степень $\deg\overline{H} = p^k$, где p – простое число, то $b_1(\overline{X}_n) = 0$.*

Следствие 0.9. *Пусть $\overline{X}_{p^k}$ – разрешение особенностей циклического накрытия проективной плоскости степени p^k, разветвленного вдоль неприводимой кривой Гурвица $\overline{H}$ и, возможно, вдоль L_∞, где p – простое число. Тогда $b_1(\overline{X}_{p^k}) = 0$.*

Отметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ мы доказываем существование кривой Гурвица $\overline{H}_k$, состоящей из $k+1$ неприводимых компонент, такой, что разрешение $\overline{X}_{k,2}$ особенностей двулистного циклического накрытия плоскости имеет $b_1(\overline{X}_{k,2}) = k$ (см. предложение 6.6). В частности, в нашем примере кривая Гурвица $\overline{H}_1$ имеет $\deg\overline{H}_1 = 2^{10}$, число особых точек кривой $\overline{H}_1$ равно 2^{16} и все ее особые точки являются особыми точками типа $w^4 - z^4 = 0$.

Недавно Д. Ору и Л. Катзарков (см. [1], [2]) доказали следующую теорему. Пусть (X, ω) – компактное симплектическое четырехмерное многообразие с сим-

[2] Мойшезон в [18] доказал существование бесконечной последовательности неприводимых каспидальных кривых Гурвица $\overline{H}_i$ степени 54, имеющих ровно 378 каспов и 756 ноудов. Каждая пара кривых в этой последовательности имеет различные типы брэйд-монодромии. В частности, эти кривые попарно не изотопны и почти все из них не изотопны алгебраическим каспидальным кривым.

плектической формой ω, класс которой $[\omega] \in H^2(X,\mathbb{Z})$. Зафиксируем ω-совместимую почти комплексную структуру J и соответствующую риманову метрику g. Пусть L – линейное расслоение на $\overline{X}$, первый класс Черна которого совпадает с $[\omega]$. Тогда для $k \gg 0$ линейное расслоение $L^{\otimes k}$ имеет достаточно много почти голоморфных сечений, так что можно выбрать три из них, дающих почти голоморфное общее накрытие $f_k\colon \overline{X} \to \mathbb{CP}^2$ степени $N_k = k^2\omega^2$, разветвленное вдоль каспидальной кривой Гурвица $\overline{H}_k$ (возможно, с отрицательными ноудами).

Любое такое накрытие $f_k\colon \overline{X} \to \mathbb{CP}^2$ степени N_k, разветвленное вдоль каспидальной кривой Гурвица $\overline{H}$, определяет монодромию μ, т.е. эпиморфизм μ: $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H) \to \Sigma_{N_k}$ в симметрическую группу Σ_{N_k}, удовлетворяющий некоторым дополнительным свойствам общности накрытия. С другой стороны, любой гомоморфизм $\mu\colon \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H) \to \Sigma_N$ такой, что $\mu(\pi_1)$ действует транзитивно на множестве, состоящем из N элементов, определяет неразветвленное накрытие $f\colon X \to \mathbb{C}^2 \setminus H$ степени N. Накрытие f может быть продолжено до накрытия $\tilde{f}\colon \widetilde{X} \to \mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль кривой Гурвица $\overline{H}$ и, возможно, вдоль L_∞. В настоящей статье мы доказываем (см. следствие 3.2), что если $\widetilde{X}$ имеет произвольные аналитические особенности (и если $\overline{H}$ имеет отрицательные ноуды, то мы предполагаем, что накрывающее пространство неособо над ними), то разрешение $\overline{X}$ особенностей пространства $\widetilde{X}$ может быть снабжено симплектической структурой.

Доказательства теорем 0.1, 0.2 и следствия 0.3 приведены в § 5, а § 6 посвящен доказательству теоремы 0.4.

Второй автор выражает свою благодарность Университету г. Кайзерслаутерн, во время пребывания в котором была сделана данная работа.

§ 1. Представление кривых Гурвица в виде нулей сечений линейных расслоений

Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 1.1. *Определения кривых Гурвица на проективной плоскости* $\mathbb{CP}^2$, *данные во введении настоящей статьи и в работе* [12], *являются эквивалентными.*

Доказательство. Напомним определение кривых Гурвица, данное в [12]. Пусть F_1 – относительно минимальная линейчатая поверхность, $\mathrm{pr}\colon F_1 \to \mathbb{CP}^1$ – морфизм, задающий линейчатую структуру, R – слой морфизма pr и E_1 – исключительное сечение, $E_1^2 = -1$. Отождествим $\mathrm{pr}\colon F_1 \to \mathbb{CP}^1$ с линейной проекцией $\mathrm{pr}\colon \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1$ из точки $p \in \mathbb{CP}^2$ (p является образом кривой E_1 при его стягивании в точку).

Согласно определению, данному в [12], образ $\overline{H} = f(S) \subset F_1$ гладкого отображения $f\colon S \to F_1 \setminus E_1$ ориентированной замкнутой вещественной поверхности S называется *кривой Гурвица* (относительно проекции pr) степени m, если найдется конечное подмножество $Z \subset \overline{H}$ такое, что:

(i) f является вложением поверхности $S \setminus f^{-1}(Z)$ и для каждой точки $s \notin Z$ поверхность $\overline{H}$ и слой $R_{\mathrm{pr}(s)}$ проекции pr пересекаются в s трансверсально с положительным индексом пересечения;

(ii) для каждой точки $s \in Z$ найдется окрестность $U \subset F_1$ этой точки такая, что $\overline{H} \cap U$ является комплексно-аналитической кривой и комплексная ориентация на $\overline{H} \cap U \setminus \{s\}$ совпадает с ориентацией, индуцированной с S отображением f;

(iii) ограничение проекции pr на $\overline{H}$ является конечным отображением степени m.

Чтобы показать, что определение, данное во введении, влечет определение из [12], осуществим несколько моноидальных преобразований с центрами в особых точках кривой $\overline{H}$ (и в особых точках собственных прообразов кривой $\overline{H}$), разрешающих все особые точки кривой $\overline{H}$. Обозначим через $\sigma\colon \widetilde{\mathbb{CP}}^2 \to \mathbb{CP}^2$ композицию этих моноидальных преобразований и через S собственный прообраз вещественной поверхности $\overline{H}$. Тогда S является гладкой вещественной поверхностью и $f = \sigma_{|S}$ является гладким отображением. Чтобы определить ориентацию на S, выберем ориентацию в каждой некритической точке p проекции $\mathrm{pr}_{|\overline{H}}$ так, чтобы локальный индекс пересечения поверхности $\overline{H}$ и слоя R, проходящего через p, был равен $+1$ в точке p. Очевидно, эти ориентации совместимы для всех некритических точек кривой $\overline{H}$. Поскольку вблизи критических точек эта ориентация совпадает с ориентацией, заданной комплексно-аналитической структурой (напомним, что $\overline{H}$ является комплексно-аналитической кривой вблизи критических точек проекции $\mathrm{pr}_{|\overline{H}}$), эта ориентация может быть продолжена в прообразы этих критических точек.

Чтобы показать, что определение из [12] влечет определение, данное во введении, выберем слой R_∞ проекции pr и положим $\mathbb{C}^2 = F_1 \setminus (R_\infty \cup E_1)$. Пусть (u, v) – такие координаты в $\mathbb{C}^2$, что ограничение проекции pr задается формулой $(u, v) \to u$. Пусть $(u, v_1(u)), \dots, (u, v_m(u))$ – координаты точек пересечения кривой $\overline{H}$ и слоя R проекции pr над некритическим значением u. Рассмотрим

$$F(u, v) = \prod_{i=1}^{m} (v - v_i(u)). \tag{1.1}$$

Очевидно, функция $F(u, v)$, определенная всюду вне слоев над критическими значениями, является гладкой и может быть продолжена до функции на всем $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющей всем условиям из данного во введении определения.

Пусть кривая Гурвица $\overline{H}_0$ степени m задана уравнениями (0.1). Гладкая изотопия $h_t\colon \mathbb{CP}^2 \times [0,1] \to \mathbb{CP}^2 \times [0,1]$ называется *H-изотопией*, если для каждого $t \in [0,1]$ образ $\overline{H}_t = h_t(\overline{H}_0)$ является кривой Гурвица, заданной уравнениями

$$v_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,i}(u_i, t) v_i^j = 0, \qquad i = 1, 2,$$

$c_{j,i}(u_i, 0) = c_{j,i}(u_i)$ для всех i, j. (Отметим, что в определении H-изотопии, данном в [12], предполагается дополнительно, что число критических значений кривых $\overline{H}_t$ не зависит от t.) Легко видеть, что если $\overline{H}_0$ и $\overline{H}_1$ H-изотопны, а прямая L_∞ находится в общем положении по отношению к обеим кривым Гурвица $\overline{H}_0$ и $\overline{H}_1$, то $\mathbb{C}^2 \setminus H_0$ и $\mathbb{C}^2 \setminus H_1$ диффеоморфны.

Обозначим через $p_\infty = \mathbb{CP}^2 \setminus (\mathbb{C}^2_1 \cup \mathbb{C}^2_2)$ центр проекции pr. Далее мы будем предполагать, что слой проекции pr над точкой $u_2 = 0$ является общим относительно кривой $\overline{H}_0$. Обозначим его через L_∞. Очевидно, существует гладкая H-изотопия h_t, тождественная вне малой окрестности U прямой L_∞, такая, что функция $F_2(u_2, v_2, 1)$, задающая кривую $\overline{H}_1 = h_1(\overline{H}_0)$ в $\mathbb{C}^2_2$, совпадает с функцией $v_2^m - 1$ во всех точках (u_2, v_2) при $|u_2| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Далее мы будем предполагать, что

(*) *L_∞ задается уравнением $u_2 = 0$ и кривая $\overline{H}$ – уравнением $v_2^m - 1 = 0$ в некоторой окрестности прямой L_∞.*

Пусть $u_{1,j}$ – критическое значение кривой Гурвица $\overline{H}_0$ степени m, заданной в $\mathbb{C}^2_1$ уравнением $F_1(u_1, v_1) = 0$, т. е. число различных корней уравнения

$$F_1(u_{1,j}, v_1, 0) = 0 \tag{1.2}$$

строго меньше m, и пусть v_{1,j_0} – корень уравнения (1.2) кратности один. Очевидно, существует гладкая H-изотопия h_t, тождественная вне малой окрестности $U = \{|u_1 - u_{1,j}| < \varepsilon\}$, такая, что функция $F_1(u_1, v_1, 1)$, определяющая $\overline{H}_1 = h_1(\overline{H}_0)$ в $\mathbb{C}^2_1$, такова, что $v_1 = v_{1,j_0}$ является корнем уравнения $F_1(u_1, v_1, 1) = 0$ для всех u_1, удовлетворяющих неравенству $|u_1 - u_{1,j}| < \varepsilon_1$ при некотором положительном $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Поэтому далее мы можем (и будем) предполагать, что если $(u_{1,j}, v_{1,j})$ является критической точкой кривой $\overline{H}$, то

(**) *существует такое $\varepsilon > 0$, что функция $F_1(u_1, v_1)$, определяющая кривую $\overline{H}$, является аналитической в точках (u_1, v_1) при $|u_1 - u_{1,j}| < \varepsilon$ и $|v_1 - v_{1,j}| < \varepsilon$.*

Рассмотрим линейное расслоение $p\colon \mathcal{L}(k) \to \mathbb{CP}^2$, ассоциированное с пучком $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(k)$. Напомним его определение. Проективная плоскость $\mathbb{CP}^2$ с однородными координатами $(z_0 : z_1 : z_2)$ покрывается тремя картами $\mathbb{C}^2_i$, $i = 1, 2, 3$, изоморфными $\mathbb{C}^2$, с координатами (u_i, v_i), $u_1 = z_1/z_0$, $v_1 = z_2/z_0$, $u_2 = z_0/z_1$, $v_2 = z_2/z_1$, $u_3 = z_0/z_2$, $v_3 = z_1/z_2$. Расслоение $\mathcal{L}(k)$ также покрыто тремя картами $W_i = \mathbb{C}^2_i \times \mathbb{C}^1_i$ с третьей координатой w_i, $w_1 = w_2/u_2^k$, $w_1 = w_3/u_3^k$, $w_2 = w_3/v_3^k$, и ограничение $p_{|W_i}$ совпадает с проекцией на первую координату.

Лемма 1.2. *Функции $w_i = F_i(u_i, v_i)$, $i = 1, 2$, определяющие кривую $\overline{H}$, задают гладкое сечение s расслоения $\mathcal{L}(m)$ над $\mathbb{CP}^2 \setminus \{p_\infty\}$.*

Доказательство. В пересечении карт $\mathbb{C}^2_1 \cap \mathbb{C}^2_2$ имеем

$$F_1(u_1, v_1) = v_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,1}(u_1) v_1^j = \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,1}\left(\frac{1}{u_2}\right)\left(\frac{v_2}{u_2}\right)^j$$
$$= \left(\frac{1}{u_2}\right)^m \left(v_2^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,1}\left(\frac{1}{u_2}\right) u_2^{m-j} v_2^j\right).$$

Функции

$$F_2(u_2, v_2) = v_2^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,2}(u_2) v_2^j$$

и

$$v_2^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,1}\left(\frac{1}{u_2}\right) u_2^{m-j} v_2^j$$

совпадают друг с другом, так как они являются гладкими и для почти всех (за исключением конечного числа) значений $u_{2,0}$ переменной u_2 многочлены

$$v_2^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,2}(u_{2,0}) v_2^j$$

и

$$v_2^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,1}\left(\frac{1}{u_{2,0}}\right) u_{2,0}^{m-j} v_2^j$$

имеют одно и то же множество корней.

Лемма 1.3. *Пусть* $f_0\colon S^3 \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *– гладкая функция, заданная на* $S^3 = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 \mid u\bar{u} + v\bar{v} = \varepsilon^2\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, *такая, что* f_0 *совпадает с функцией* $v^m - 1$ *в некоторой окрестности* $U \subset S^3$ *окружности* $u = 0$. *Тогда существует гладкая функция* $F\colon S^3 \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ *такая, что*:

(i) $F(u,v,0) = f_0(u,v)$;

(ii) $F(u,v,t) = v^m - 1$ *для* $(u,v) \in U$ *и всех* $t \in [0,1]$;

(iii) $F(u,v,1) = v^m - 1$.

Доказательство. Поскольку сфера S^3 является односвязной, то существует подъем $\tilde{f}_0\colon S^3 \to \widetilde{\mathbb{C}}^*$ функции f_0 такой, что $f_0 = e \circ \tilde{f}_0$, где $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ – комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с комплексной координатой x, а $e\colon \widetilde{\mathbb{C}}^* \to \mathbb{C}^*$ – универсальное накрытие, заданное функцией $y = e^x$. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $\tilde{f}_0(0,\varepsilon) = \ln(1-\varepsilon^m) + \pi i$. Обозначим через $f_1\colon S^3 \to \mathbb{C}^*$ функцию $v^m - 1$ и через $\tilde{f}_1\colon S^3 \to \widetilde{\mathbb{C}}^*$ – ее подъем такой, что $\tilde{f}_1(0,\varepsilon) = \ln(1-\varepsilon^m) + \pi i$. Имеем $\tilde{f}_{0|U} \equiv \tilde{f}_{1|U}$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{F}\colon S^3 \times [0,1] \to \mathbb{C}$, заданную формулой

$$x = t\tilde{f}_1(u,v) + (1-t)\tilde{f}_0(u,v).$$

Очевидно, функция $F = e \circ \widetilde{F}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Лемма 1.4. *Существуют вещественное число* ε_1, $0 < \varepsilon_1 \ll 1$, *и гладкое сечение* $\bar{s}_m$ *расслоения* $\mathcal{L}(m)$ *над* $\mathbb{CP}^2$ *такие, что*:

(i) $\overline{H} \subset \mathbb{CP}^2 \setminus B(\varepsilon_1)$, *где* $B(\varepsilon_1) = \{u_3\bar{u}_3 + v_3\bar{v}_3 \leqslant \varepsilon_1^2\}$ *– некоторый шар в* $\mathbb{CP}^2$ *с центром в* p_∞;

(ii) *над* $\mathbb{CP}^2 \setminus B(\varepsilon_1)$ *сечение* $\bar{s}_m$ *совпадает с сечением* s *из леммы* 1.2;

(iii) *сечение* $\bar{s}_m$ *является комплексно-аналитическим в некоторой окрестности прямой* L_∞.

Доказательство. Согласно определению кривых Гурвица существует шар $B(\varepsilon_1) = \{u_3\bar{u}_3 + v_3\bar{v}_3 \leqslant \varepsilon_1^2\}$ при некотором положительном ε_1 такой, что $\overline{H} \subset \mathbb{CP}^2 \setminus B(\varepsilon_1)$.

Линейное расслоение $\mathcal{L}_m$ является тривиальным над $B(\varepsilon_1)$. Следовательно, ограничение сечения s из леммы 1.2 на $\partial B(\varepsilon_1) = S^3$ задается функцией $f_0\colon S^3 \to \mathbb{C}^*$. Обозначим через $F\colon S^3 \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ функцию, существование которой доказано в лемме 1.3 (в обозначениях леммы 1.3 положим $u = u_3$, $v = v_3$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$). Выберем $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и гладкую монотонную функцию $r\colon [\varepsilon_2, \varepsilon_1] \to [0,1]$ такую, что $r(\varepsilon_1) = 0$ и $r(\varepsilon_2) = 1$. Обозначим через $h\colon B(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = B(\varepsilon_1) \setminus B(\varepsilon_2) \to \partial B(\varepsilon_1)$ отображение, заданное равенством

$$h(u_3, v_3) = \left(\frac{\varepsilon_1 u_3}{\sqrt{u_3\bar{u}_3 + v_3\bar{v}_3}}, \frac{\varepsilon_1 v_3}{\sqrt{u_3\bar{u}_3 + v_3\bar{v}_3}} \right),$$

положим $\widetilde{F}(u_3, v_3, t) = h^*(F)$ и

$$\overline{F}(u_3, v_3) = \left(\frac{\sqrt{u_3\bar{u}_3 + v_3\bar{v}_3}}{\varepsilon_1} \right)^m \bigl(\widetilde{F}(u_3, v_3, r(\sqrt{u_3\bar{u}_3 + v_3\bar{v}_3}\,)) + 1\bigr) - 1.$$

Тогда сечение $\tilde{s}$, заданное следующим образом:

$$\tilde{s}(p) = \begin{cases} s(p) & \text{для} \;\; p \in \mathbb{CP}^2 \setminus B(\varepsilon_1), \\ \overline{F}(u_3, v_3) & \text{для} \;\; p \in B(\varepsilon_1) \setminus B(\varepsilon_2), \\ v_3^m - 1 & \text{для} \;\; p \in B(\varepsilon_2), \end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям леммы 1.4, за исключением, возможно, того, что оно не является гладким, а только непрерывным, в точках из $B = (\partial B(\varepsilon_1) \cup \partial B(\varepsilon_2)) \setminus U$, где U – некоторая окрестность прямой L_∞. Применяя стандартные теоремы математического анализа, легко показать, что существует сечение $\bar{s}_m$, достаточно близкое к $\tilde{s}$, совпадающее с $\tilde{s}$ вне достаточно малой окрестности V шара B такой, что $\overline{V} \cap (\overline{H} \cup L_\infty) = \varnothing$, где $\overline{V}$ – замыкание множества V.

§ 2. Симплектические многообразия с аналитическими особенностями

Пусть Y – неособое проективное комплексное многообразие комплексной размерности $\dim_{\mathbb{C}} Y = n$ и ω – кэлерова форма на Y, $[\omega] \in H^2(Y, \mathbb{Z})$. Рассмотрим симплектическое многообразие (Y, ω), $\dim_{\mathbb{R}} Y = 2n$. Замкнутое подмногообразие X в Y называется *симплектическим многообразием с аналитическими особенностями*, если существуют открытые подмножества $U_0 \subset U \subset Y$ такие, что замыкание $\overline{U}_0$ в Y содержится в U, $X \cap U$ является комплексно-аналитическим подмножеством в U и $X \setminus \overline{U}_0$ является гладким симплектическим подмногообразием. Обозначим через $\operatorname{Sing} X$ множество точек из X, в которых X не является гладким. Тогда $\operatorname{Sing} X$ является проективным алгебраическим подмногообразием в Y.

Лемма 2.1. *Пусть X – симплектическое многообразие с аналитическими особенностями в комплексном проективном многообразии Y с кэлеровой формой ω. Пусть $Z \subset \operatorname{Sing} X$ – неособое проективное подмногообразие в Y, $\sigma\colon \overline{Y} \to Y$ – моноидальное преобразование многообразия Y с центром в Z и $\overline{X}$ – собственный прообраз многообразия X. Тогда существует кэлерова форма $\overline{\omega}$ на $\overline{Y}$ такая, что $\overline{X}$ является симплектическим многообразием с аналитическими особенностями в $(\overline{Y}, \overline{\omega})$.*

Доказательство. Многообразие $\overline{Y}$ является проективным алгебраическим. Рассмотрим некоторое вложение $i\colon \overline{Y} \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ в какое-нибудь проективное пространство и обозначим через $\varphi = i \circ \sigma^{-1}$ рациональное отображение из Y в $\mathbb{CP}^N$. Пусть $\Gamma \subset Y \times \mathbb{CP}^N$ – замыкание графика отображения φ и p_i, $i = 1, 2$, – проекции из $Y \times \mathbb{CP}^N$ на множители. Морфизмы i и σ определяют морфизм $\sigma \times i\colon \overline{Y} \to \Gamma \subset Y \times \mathbb{CP}^N$. Поскольку композиция $p_2 \circ (\sigma \times i)\colon \overline{Y} \to \overline{Y}$ является изоморфизмом, то $p_{2|\Gamma}\colon \Gamma \to \overline{Y}$ также является изоморфизмом. Более того, если мы отождествим $\overline{Y}$ с Γ с помощью $p_{2|\Gamma}$, то $p_{1|\Gamma}$ будет совпадать с σ.

Обозначим через $\Omega = \Omega_N$,

$$\Omega_N = \frac{i}{\left(\sum_{j=0}^N \bar{z}_j z_j\right)^2} \sum_{k=0}^N \sum_{j\neq k} (\bar{z}_j z_j \, dz_k \wedge d\bar{z}_k - \bar{z}_j z_k \, dz_j \wedge d\bar{z}_k),$$

симплектическую форму Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^N$. Она является целочисленной кэлеровой формой. Рассмотрим ограничение формы $\omega_\varepsilon = p_1^*(\omega) + \varepsilon p_2^*(\Omega)$ на Γ. Она является кэлеровой формой на Γ при каждом $\varepsilon > 0$.

Выберем открытые окрестности $V_0 \subset V \subset Y$ множества $\operatorname{Sing} X$ такие, что $V \cap X$ является аналитическим подмногообразием и замыкание $\overline{V}_0$ множества V_0 в Y содержится в V. Обозначим $X_0 = X \setminus V_0$. Это множество является компактом, и $\sigma^{-1}_{|X_0}\colon X_0 \to \overline{X}_0 = \sigma^{-1}(X_0)$ является изоморфизмом. Следовательно, $\overline{X}_0$ является компактом.

Очевидно, ограничение формы ω_ε на $\Gamma \cap p_1^{-1}(V)$ является симплектической формой в каждой точке из $\Gamma \cap p_1^{-1}(V)$ для всех $\varepsilon > 0$, так как $\Gamma \cap p_1^{-1}(V)$ является аналитическим подмножеством в $p_1^{-1}(V)$. Поскольку ограничение формы ω на X_0 является симплектической формой в каждой точке из X_0 и $\overline{X}_0$ является компактом, то мы можем выбрать достаточно маленькое ε такое, что ограничение формы $\omega_\varepsilon = p_1^*(\omega) + \varepsilon p_2^*(\Omega)$ на $\overline{X}_0 = \Gamma \cap p_1^{-1}(X_0)$ является симплектической формой в каждой точке из $\overline{X}_0$. Если мы возьмем рациональное $\varepsilon = \frac{m}{n}$, то $n\omega_\varepsilon$ будет целочисленной формой.

§ 3. Симплектичность накрытий проективной плоскости, разветвленных вдоль кривых Гурвица

В этом параграфе мы используем обозначения и предположения из § 1.

Пусть $\overline{H}$ – кривая Гурвица, возможно, с *отрицательными ноудами*, т. е. в некоторой окрестности U каждой критической точки p либо $\overline{H}$ локально задается аналитическим уравнением, либо $\overline{H} \cap U$ состоит из двух гладких ветвей, пересекающихся трансверсально в точке p с индексом пересечения, равным -1, и каждая ветвь кривой $\overline{H} \cap U$ пересекает слой $\operatorname{pr}^{-1}(\operatorname{pr}(p))$ в точке p трансверсально с индексом пересечения, равным $+1$.

Зафиксируем точку $p \in \mathbb{CP}^2 \setminus (\overline{H} \cup L_\infty)$. Рассмотрим фундаментальную группу $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H, p)$ дополнения к аффинной кривой Гурвица $H = (\mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty) \cap \overline{H}$. Выберем точку $x \in \overline{H} \setminus \operatorname{Sing} \overline{H}$ и рассмотрим комплексную прямую $L \subset \mathbb{C}^2$, пересекающую H трансверсально в точке x. Пусть $\gamma \subset L$ – окружность малого радиуса с центром в x. Выбор ориентации на $\mathbb{C}^2$ определяет ориентацию на γ. Пусть Γ – замкнутый путь, состоящий из пути l в $\mathbb{C}^2 \setminus H$, соединяющего точку p с точкой $q \in \gamma$, петли γ (обходимой в положительном направлении) с началом и концом в точке q и обратного пути в точку p вдоль l в противоположном направлении. Такая петля Γ (и соответствующий элемент в π_1) называется *геометрическим порождающим элементом* (с центром в x) фундаментальной группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H, p)$. Хорошо известно, что π_1 порождается геометрическими порождающими элементами.

Для каждой критической точки s_i кривой H выберем окрестность $U_i \subset \mathbb{C}^2$ такую, что $H \cap U_i$ либо задается (в локальных координатах на U_i) аналитическим уравнением, либо, если s_i – отрицательный ноуд, состоит из двух гладких ветвей, пересекающихся трансверсально в точке p. Заметим, что если s_i – отрицательный ноуд, то группа $\pi_1(U_i \setminus H, p_i)$ изоморфна группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и порождается двумя коммутирующими геометрическими порождающими элементами.

Выберем гладкие пути γ_i, лежащие в $\mathbb{C}^2 \setminus H$ и соединяющие точки p_i с точкой p. Этот выбор определяет гомоморфизмы $\psi_i\colon \pi_1(U_i \setminus H, p_i) \to \pi_1$. Назовем $\psi_i(\pi_1(U_i \setminus H, p_i)) = G_i$ *локальной фундаментальной группой* критической точки s_i. Локальные фундаментальные группы определены однозначно с точностью до сопряжения в π_1.

Рассмотрим такой гомоморфизм $\mu\colon \pi_1 \to \Sigma_N$ из фундаментальной группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ дополнения к аффинной кривой Гурвица $H = (\mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty) \cap \overline{H}$ в симметрическую группу Σ_N, что его образ $\operatorname{Im}\mu$ действует транзитивно на множестве, состоящем из N элементов.

Пусть s_i – отрицательный ноуд кривой H. Как было упомянуто выше, локальная фундаментальная группа G_i порождается двумя коммутирующими геометрическими порождающими элементами, скажем $\Gamma_{i,1}$ и $\Gamma_{i,2}$. Обозначим

$$N_{i,j} = \{1 \leqslant n \leqslant N \mid \mu(\Gamma_{i,j})(n) \neq n\}.$$

Скажем, что гомоморфизм μ является *хорошим в отрицательном ноуде* s_i, если $N_{i,1} \cap N_{i,2} = \varnothing$. Гомоморфизм μ называется *монодромией степени* N, если он является хорошим во всех отрицательных ноудах.

Гомоморфизм μ определяет неразветвленное накрытие $f = f_\mu\colon Y \to \mathbb{C}^2 \setminus H$ степени N. Это накрытие может быть продолжено до конечного разветвленного накрытия $\tilde{f}\colon \widetilde{Y} \to \mathbb{CP}^2$ с ветвлением вдоль $\overline{H}$ и, возможно, вдоль L_∞.

Для того чтобы описать это продолжение, рассмотрим одну из геометрических порождающих Γ с центром в точке $x \in H \setminus \operatorname{Crit} H$, где $\operatorname{Crit} H$ – множество критических точек кривой H. Образ $\mu(\Gamma)$ в Σ_N является произведением циклических перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_x}$ (возможно, что порядки некоторых из них равны единице). Каждая из этих перестановок σ_l циклически переставляет элементы в множестве $\{n_{1,l}, \dots, n_{r_l,l}\}$, $1 \leqslant n_{j,l} \leqslant N$, где r_l – порядок перестановки. Тогда число прообразов $\tilde{f}^{-1}(x)$ равно n_x и каждая точка y из $\tilde{f}^{-1}(x)$ соответствует некоторой циклической перестановке σ_l. Вблизи точки y_l, соответствующей циклической перестановке σ_l, накрытие $\tilde{f}$ является циклическим накрытием степени r_l, разветвленным вдоль H и локально изоморфным подмногообразию в $\mathbb{C}^3$, заданному уравнением $w^{r_l} = v - v_j(u)$, где $v - v_j(u) = 0$ – локальное уравнение кривой $\overline{H}$ в точке x (см. (1.1)). Эти локальные изоморфизмы определяют на $\widetilde{Y}$ структуру гладкого многообразия в каждой точке y, лежащей над точкой $x \in H \setminus \operatorname{Crit} H$.

Пусть $s_i \in \operatorname{Crit} H$ является отрицательным ноудом. Как было упомянуто выше, локальная фундаментальная группа G_i порождается двумя геометрическими порождающими элементами $\Gamma_{i,1}$ и $\Gamma_{i,2}$. Образы $\mu(\Gamma_{i,j})$ в Σ_N являются произведениями циклических перестановок $\sigma_{1,i,j}, \dots, \sigma_{k_{i,j},i,j}$. Пусть

$$\sigma_{l,i,j} = (n_{1,l,i,j}, \dots, n_{r_{l,i,j},l,i,j})$$

– перестановка порядка $r_{l,i,j}$. Положим $N_{i,1,2} = \{1 \leqslant n \leqslant N \mid \mu(\Gamma_{i,1})(n) = n$ и $\mu(\Gamma_{i,2})(n) = n\}$. Поскольку μ является монодромией, множество $\tilde f^{-1}(s_i)$ находится во взаимно однозначном соответствии с объединением всех циклических перестановок $\sigma_{l,i,j}$, $j = 1, 2$, имеющих порядки больше единицы, и множества $N_{i,1,2}$. Более того, если $y \in \tilde f^{-1}(s_i)$ соответствует элементу из $N_{i,1,2}$, то $\tilde f$ является изоморфизмом некоторой окрестности V точки y и ее образа $\tilde f(V)$, и если $y \in \tilde f^{-1}(s_i)$ соответствует циклической перестановке $\sigma_{l,i,j}$ порядка больше единицы, то ограничение накрывающего отображения $\tilde f$ на некоторую окрестность точки y является циклическим накрытием некоторой окрестности точки s_i степени $r_{l,i,j}$, разветвленным в j-й ветви отрицательного ноуда. Это накрытие локально изоморфно многообразию в $\mathbb{C}^3$, заданному уравнением $w^{r_{l,i,j}} = v - v_j(u)$, где $v - v_j(u) = 0$ – локальное уравнение j-й ветви кривой $\overline{H}$ в точке s_i. Эти локальные изоморфизмы определяют на $\widetilde{Y}$ структуру гладкого многообразия в каждой точке $y \in \tilde f^{-1}(s_i)$.

Пусть $x = s_i \in \operatorname{Crit}_{\text{analytic}} H$, т. е. s_i – критическая точка кривой H, не являющаяся отрицательным ноудом. Тогда над небольшой окрестностью U точки s_i, в которой кривая H задается аналитическим уравнением, прообраз $\tilde f^{-1}(U)$ является несвязным объединением n_{s_i} открытых окрестностей, находящихся во взаимно однозначном соответствии с элементами из множества орбит действия группы $\mu(G_i)$ на множестве, состоящем из N элементов. Согласно теореме Грауерта–Реммерта–Штейна (доказательство см. в [21]) над окрестностью U точки s_i многообразие $\widetilde{Y}$ может быть снабжено структурой двумерного комплексно-аналитического многообразия.

По предположению в некоторой окрестности U прямой L_∞ (где $U = \mathbb{CP}^2 \setminus B(R)$ и $B(R) \subset \mathbb{C}^2_1$ – шар большого радиуса R) кривая $\overline{H}$ совпадает с алгебраической кривой $\overline{C} \subset \mathbb{CP}^2$ степени m, заданной в U уравнением $v_2^m - 1 = 0$. Если мы выберем базисную точку p лежащей в U, мы можем рассмотреть копредставления Зариского–ван Кампена группы π_1 и фундаментальной группы $\tilde\pi_1 = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\overline{C} \cup L_\infty), p)$, имеющие одни и те же множества порождающих элементов, и легко видеть, что эти представления определяют эпиморфизм $e\colon \tilde\pi_1 \to \pi_1$. Композиция $\mu \circ e$ определяет разветвленное накрытие $\tilde g\colon \widetilde{Z} \to \mathbb{CP}^2$ с ветвлением вдоль $\overline{C}$ и, возможно, вдоль L_∞. Легко видеть, что накрытия $\tilde f$ и $\tilde g$ изоморфны над U. Следовательно, многообразие $\tilde f^{-1}(U)$ может быть отождествлено с $\tilde g^{-1}(U)$ с помощью изоморфизма $h\colon \tilde f^{-1}(U) \to \tilde g^{-1}(U)$. Таким образом, мы можем рассматривать $\tilde f^{-1}(U)$ как комплексно-аналитическое многообразие.

Пусть $i\colon \widetilde{Z} \hookrightarrow \mathbb{CP}^{m_\infty}$ – вложение такое, что $\tilde g$ задается проекцией

$$(z'_0 : z'_1 : \ldots : z'_{m_\infty}) \to (z'_0 : z'_1 : z'_2).$$

Положим

$$z_j = h^*(z'_j), \qquad j = 3, \dots, m_\infty,$$
$$w'_{j,\infty} = \frac{z_j}{z_0}, \qquad j = 3, \dots, m_\infty. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\overline{H}$ – кривая Гурвица с отрицательными ноудами, $\mu\colon \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H) \to \Sigma_N$ – монодромия и $\tilde{f}\colon Y \to \mathbb{CP}^2$ – накрытие, ассоциированное с монодромией μ. Тогда $\widetilde{Y}$ может быть вложено в некоторое проективное пространство $\mathbb{CP}^M$ как симплектическое подмногообразие с аналитическими особенностями.*

Доказательство. Ниже для каждой точки $p \in \mathbb{C}^2_1$ обозначим через $V_p \subset U_p$ небольшие шары $V_p = \{|u_1 - u_1(p)|^2 + |v_1 - v_1(p)|^2 < \delta_1^2\}$ и $U_p = \{|u_1 - u_1(p)|^2 + |v_1 - v_1(p)|^2 < \delta_2^2\}$ радиусов δ_1 и δ_2, $0 < \delta_1 < \delta_2 \ll 1$, и через $\rho_p\colon \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{R}$ обозначим гладкую неотрицательную функцию такую, что $\rho_{p|V_p} \equiv 1$ и $\rho_{p|\mathbb{CP}^2 \setminus U_p} \equiv 0$.

Чтобы построить требуемое вложение, выберем следующим образом два покрытия $\{U_i\}$ и $\{V_i\}$ плоскости $\mathbb{CP}^2$ открытыми множествами.

Для каждой точки $s_i \in \mathrm{Crit}_{\mathrm{analytic}}\,\overline{H}$, не являющейся отрицательным ноудом, выберем небольшие окрестности $V'_{s_i} \subset V_{s_i} \subset U_{s_i} \subset U'_{s_i}$ такие, что:

(c_1) кривая $U'_{s_i} \cap \overline{H}$ является аналитической в U'_{s_i};

(c_2) прообраз $\tilde{f}^{-1}(U'_{s_i})$ распадается в несвязное объединение окрестностей точек $y_{i,j} \in \tilde{f}^{-1}(s_i)$;

(c_3) радиус шара V'_{s_i} (соответственно, U_{s_i}) строго меньше радиуса шара V_{s_i} (соответственно, U'_{s_i}).

Пусть $V'_\infty \subset V_\infty \subset U_\infty \subset U'_\infty$ – открытые окрестности прямой L_∞ такие, что:

(c_4) в U'_∞ кривая Гурвица $\overline{H}$ совпадает с кривой $\overline{C}$, заданной в U'_∞ уравнением $v_2^m - 1 = 0$;

(c_5) $U'_\infty \cap V'_{s_i} = \varnothing$ для всех окрестностей V'_{s_i} критических точек s_i, выбранных выше;

(c_6) $\overline{V}'_\infty \subset V_\infty$ и $\overline{U}_\infty \subset U'_\infty$ (где $\overline{V}'_\infty$, соответственно $\overline{U}_\infty$, является замыканием множества V'_∞, соответственно U_∞).

Пусть $\rho_\infty\colon \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{R}$ – гладкая неотрицательная функция такая, что $\rho_{\infty|V_\infty} \equiv 1$ и $\rho_{\infty|\mathbb{CP}^2 \setminus U_\infty} \equiv 0$. Добавим окрестности U_∞ и V_∞ к множествам выбранных выше окрестностей $\{U_{s_i}\}$ и $\{V_{s_i}\}$. Затем для каждой точки $p \in \mathbb{C}^2_1 \setminus \big(\big(\bigcup V_{s_i}\big) \cup V_\infty\big)$ найдем открытые окрестности $V_p \subset U_p$ точки p такие, что:

(c_7) $U_p \cap V'_{s_i} = \varnothing$ и $U_p \cap V'_\infty = \varnothing$ для всех выбранных выше окрестностей V'_{s_i} и V'_∞;

(c_8) прообраз $\tilde{f}^{-1}(U_p)$ распадается в несвязное объединение окрестностей точек $y_j \in \tilde{f}^{-1}(p)$;

(c_9) если $p \in U'_{s_i}$ (соответственно, $p \in U'_\infty$) для некоторой выбранной выше окрестности U'_{s_i} (соответственно, U'_∞), то $U_p \subset U'_{s_i}$ (соответственно, $U_p \subset U'_\infty$);

(c_{10}) если $p \notin \big(\bigcup_{s_i \in \mathrm{Crit}_{\mathrm{analytic}}\,\overline{H}} U'_{s_i}\big) \cup U'_\infty$, то $U_p \cap \big(\big(\bigcup_{s_i \in \mathrm{Crit}_{\mathrm{analytic}}\,\overline{H}} U_{s_i}\big) \cup U_\infty\big) = \varnothing$.

Добавим окрестности U_p и V_p к выбранным выше множествам окрестностей $\{U_{s_i}\}$ и $\{V_{s_i}\}$ (здесь одно из s_i равно бесконечности). В результате мы получим два открытых покрытия $\mathcal{V} = \{V_p\}$ и $\mathcal{U} = \{U_p\}$ проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$.

Для $U' = U'_\infty$ пусть $(w_{3,\infty}, \dots, w_{m_\infty,\infty})$ – функции в $\widetilde{Y} \setminus \tilde{f}^{-1}(L_\infty)$, определенные как $w_{j,\infty} = \tilde{f}^*(\rho_\infty) w'_j$ для $j = 3, \dots, m_\infty$, где функции w'_j были определены в (3.1).

Для каждой окрестности U'_{s_i}, где $s_i \in \operatorname{Crit}_{\mathrm{analytic}} \overline{H}$, существуют комплексно-аналитические функции $w'_{1,s_i}, \dots, w'_{m_{s_i},s_i}$ в $\widetilde{U}'_{s_i} = \tilde{f}^{-1}(U'_{s_i})$ такие, что эти функции вместе с $\tilde{f}^*(u_1)$ и $\tilde{f}^*(v_1)$ задают аналитическое вложение окрестности $\widetilde{U}'_{s_i}$ в $\mathbb{C}^{m_{s_i}+2}$. Обозначим через $w_{j,s_i} = \tilde{f}^*(\rho_{s_i}) w'_{j,s_i}$, $1 \leqslant j \leqslant m_{s_i}$, функции на $\widetilde{Y}$.

По построению открытых покрытий прообраз $\tilde{f}^{-1}(V_p) = \bigsqcup \widetilde{V}_{p,j}$ (соответственно, $\tilde{f}^{-1}(U_p) = \bigsqcup \widetilde{U}_{p,j}$) распадается в несвязное объединение $m_p = n_p$ связных окрестностей $\widetilde{V}_{p,j}$ (соответственно, $\widetilde{U}_{p,j}$), $j = 1, \dots, n_p$. Если $p \in \overline{H}$, то окрестность $\widetilde{U}_{p,j}$ изоморфна подмногообразию в $\mathbb{C}^3$, заданному в координатах $(u_1, v_1, w'_{j,p})$ уравнением

$$(w'_{j,p} - w^0_{j,p})^{r_{j,p}} = v_1 - v_{1,p}(u_1),$$

где $v_1 - v_{1,p}(u_1) = 0$ – уравнение кривой $\overline{H}$ в U_p. Продолжим функции $w'_{j,p}$, положив $w'_{j,p|\widetilde{U}_{p,l}} \equiv 0$ для $l \neq j$, и выберем константы $w^0_{j,p}$, $j = 1, \dots, m_p$, так, что функции $(u_1, v_1, w'_{1,p}, \dots, w'_{m_p,p})$ задают гладкое вложение окрестности $\widetilde{U}_p$ в $\mathbb{C}^{m_p+2}$. Обозначим через $w_{j,p} = \tilde{f}^*(\rho_p) w'_{j,p}$, $j = 1, \dots, m_p$, функции в $\widetilde{Y}$.

Заметим, что если $y \in \tilde{f}^{-1}(\overline{H}\,) \cap \widetilde{V}_{p,j} \cap \widetilde{U}_{q,j}$, где $p, q \neq \infty$ и $p, q \notin \operatorname{Crit}_{\mathrm{analytic}} \overline{H}$, то из определения функций $w_{j,p}$ и $w_{j,q}$ следует, что $r_{j,p} = r_{j,q} = r_j$ и существует корень $\zeta_{p,q}$ степени r_j из единицы такой, что

$$\begin{aligned} &w_{j,q} = \rho_q(u_1, v_1)(\zeta_{p,q}(w_{j,p} - w^0_{j,p}) + w^0_{j,p}), \\ &w_{j',q} \equiv 0, \qquad j' \neq j, \end{aligned} \tag{3.2}$$

в некоторой окрестности точки y.

Аналогично, если $y \in \tilde{f}^{-1}(\overline{H}\,) \cap \widetilde{V}_{p,j} \cap \widetilde{U}_q$ (соответственно, если $y \in \tilde{f}^{-1}(\overline{H}\,) \cap \widetilde{V}_q \cap \widetilde{U}_{p,j}$), где $q = \infty$ либо $q \in \operatorname{Sing}_{\mathrm{analytic}} \overline{H}$, то из определения функций $w_{j,p}$ и $w_{i,q}$ из свойств (c_1), (c_4), (c_9) и (c_{10}) следует, что

$$(w_{j,p} - w^0_{j,p})^{r_j} = v_1 - F(u_1) \tag{3.3}$$

и

$$w_{i,q} = \rho_q(u_1, v_1) h_i(u_1, v_1, w_{j,p}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m_q \tag{3.4}$$

(соответственно, $w_{j,p} = \rho_p(u_1, v_1) h_j(u_1, v_1, w_{1,q}, w_{2,q}, w_{3,q}, \dots, w_{m_q,q})$, и здесь $w_{1,q}$ и $w_{2,q}$ являются константами, если $q = \infty$), в некоторой окрестности точки y, где F и все функции h_i (соответственно, h_j) являются аналитическими функциями, а $v_1 - F(u_1) = 0$ – аналитическое уравнение одной из ветвей кривой $\overline{H}$.

Если $p \notin \overline{H} \cup L_\infty$, то мы можем предполагать, что $\tilde{f}$ задает изоморфизмы окрестностей $\widetilde{U}_{p,j}$ и U_p для $j = 1, \ldots, m_p = N$. Выберем N различных констант $w^0_{j,p}$ и определим функции $w_{j,p} = \tilde{f}^*(\rho_p) w'_{j,p}$, $j = 1, \ldots, m_p$, в $\widetilde{Y}$, где $w'_{j,p}$ – это функции, определенные в $\widetilde{U}_p$ следующим образом:

$$w'_{j,p}(q) \equiv \begin{cases} w^0_{j,p}, & \text{если } q \in \widetilde{U}_{p,j}, \\ 0, & \text{если } q \notin \widetilde{U}_{p,j}. \end{cases}$$

Выберем конечное покрытие $\widetilde{\mathcal{V}}_0 = \{\widetilde{V}_{p_i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant m_{p_i}\} \cup \{\widetilde{V}_\infty\}$ плоскости $\widetilde{Y}$ и положим

$$M = m_\infty + \sum_{j=1}^{k} m_{p_j},$$

$w_3 = w_{3,\infty}, \ldots, w_{m_\infty} = w_{m_\infty,\infty}$. Перенумеруем множество функций

$$\{w_{j,p_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant m_{p_i}\}$$

числами $m_\infty + 1, \ldots, M$.

Рассмотри линейную проекцию $p\colon \mathbb{CP}^M \to \mathbb{CP}^2$, заданную формулой

$$(z_0 : z_1 : z_2 : \ldots : z_M) \to (z_0 : z_1 : z_2).$$

Базисное множество проекции p совпадает с проективным подпространством $P \simeq \mathbb{CP}^{M-3}$, заданным уравнениями $z_0 = z_1 = z_2 = 0$. Ограничение проекции p на $\mathcal{L} = \mathbb{CP}^M \setminus P$ определяет на $\mathcal{L}$ структуру векторного расслоения над $\mathbb{CP}^2$, нулевое сечение которого задано уравнениями $z_3 = \cdots = z_M = 0$. Над картами $\mathbb{C}^2_i$ с координатами (u_i, v_i), $i = 1, 2, 3$, расслоение $\mathcal{L}$ является тривиальным и изоморфно произведению $\mathbb{C}^M_i \simeq \mathbb{C}^2_i \times \mathbb{C}^{M-2}_i$. В частности, $(z_3/z_0, \ldots, z_M/z_0)$ являются координатами в $\mathbb{C}^{M-2}_1$.

Над картой $\mathbb{C}^2_1$ рассмотрим отображение $\alpha'\colon \tilde{f}^{-1}(\mathbb{C}^2_1) \to \mathbb{C}^M_1$, заданное формулой

$$\alpha'(y) = (\tilde{f}^*(u_1)(y), \tilde{f}^*(v_1)(y), w_3(y), \ldots, w_M(y)).$$

Поскольку для точки $p_i \neq \infty$ каждая окрестность U_{p_i} содержится в $\mathbb{C}^2_1$ и все функции w_{j,p_i} тождественно равны нулю в точках, лежащих над дополнением к U_{p_i}, то отображение α' может быть продолжено до отображения $\alpha\colon \widetilde{Y} \to \mathcal{L}$ следующим образом. Над окрестностью $\tilde{f}^{-1}(V'_\infty)$ отображение α совпадает с $i \circ h$, где отображение h было определено выше, а i – это линейное вложение $\mathbb{CP}^{m_\infty}$ в $\mathbb{CP}^M$, заданное формулой

$$i((z_0 : \ldots : z_{m_\infty})) = (z_0 : \ldots : z_{m_\infty} : 0 : \ldots : 0).$$

Легко видеть, что α является вложением таким, что $\alpha(\widetilde{V}'_{s_i})$ и $\alpha(\widetilde{V}'_\infty)$ – аналитические множества $\mathcal{L}$ для $\widetilde{V}'_\infty = \tilde{f}^{-1}(V'_\infty)$ и для всех окрестностей $\widetilde{V}'_{s_i} = \tilde{f}^{-1}(V'_{s_i})$, $s_i \in \operatorname{Crit}_{\text{analytic}} \overline{H}$.

Обозначим через Ω ограничение формы Фубини–Штуди Ω_M на $\mathcal{L}$. В карте $\mathbb{C}_1^M$ она имеет следующий вид:

$$\Omega = \frac{i\sum_{k=1}^{M}\big(dw_k\wedge d\overline{w}_k+\sum_{j\neq k}(\overline{w}_j w_j\,dw_k\wedge d\overline{w}_k-\overline{w}_j w_k\,dw_j\wedge d\overline{w}_k)\big)}{\big(1+\sum_{j=1}^{M}\overline{w}_j w_j\big)^2}, \quad (3.5)$$

где $w_k=\frac{z_k}{z_0}$ и $w_1=u_1,\ w_2=v_1$.

Обозначим одинаково набор из двух положительных чисел $\bar\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ и линейное преобразование $\bar\varepsilon\colon\mathbb{CP}^M\to\mathbb{CP}^M$, заданное формулой

$$(z_0:z_1:z_2:z_3:\ldots:z_M)\to(z_0:z_1:\varepsilon_1 z_2:\varepsilon_2 z_3:\ldots:\varepsilon_2 z_M).$$

Обозначим через $\omega_{\bar\varepsilon}$ ограничение формы Ω на $\widetilde{Y}_{\bar\varepsilon}=(\bar\varepsilon\circ\alpha)(\widetilde{Y})$. Покажем, что существуют положительная константа c_1 и положительная функция $c_2(t),\ t\in(0,c_1]$, такие, что $\widetilde{Y}_{\bar\varepsilon}$ является симплектическим подмногообразием в $\mathcal{L}$ для всех $\bar\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ при $\varepsilon_1\leqslant c_1$ и $\varepsilon_2\leqslant c_2(\varepsilon_1)$. Заметим, что если ε_1 достаточно мало, то образ кривой $\overline{H}$ при отображении $(z_0:z_1:z_2)\to(z_0:z_1:\varepsilon_1 z_2)$ является симплектическим.

Для каждого $\bar\varepsilon$ форма $\omega_{\bar\varepsilon}$ является симплектической в точках, принадлежащих окрестностям $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(\widetilde{V}'_{s_i})$, где s_i – аналитические критические точки кривой $\overline{H}$, и в точках из $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(\widetilde{V}'_{\infty})$, так как $\widetilde{Y}_{\bar\varepsilon}$ является аналитическим подмногообразием многообразия $\mathcal{L}$ в этих точках.

Рассмотрим точку $y\in\tilde f^{-1}(\overline{H}\,)$, принадлежащую точкам ветвления отображения $\tilde f$ и такую, что $\tilde f(y)\notin\widetilde{U}_p$ для $p\in\mathrm{Crit}_{\mathrm{analytic}}\overline{H}$ и $p=\infty$. Из (3.2) следует, что после перенумерации координат $w_3,\ldots,w_M$ мы можем предполагать, что $\widetilde{Y}$ задается в окрестности точки $\alpha(y)$ уравнениями

$$\begin{aligned}(w_3-w_{3,0})^r&=v_1-F(u_1),\\ w_j&=\rho_j(u_1,v_1)h_j(w_3),\qquad j\geqslant 4,\end{aligned}\qquad(3.6)$$

где $r\geqslant 2,\ \rho_j$ – гладкие функции, $h_j=\zeta_{3,j}(w_3-w_{3,0})+w_{j,0}$ – аналитические функции (здесь либо $\zeta_{3,j}$ – корень степени r из единицы, либо $\zeta_{3,j}=0$), $v_1-F(u_1)=0$ – уравнение ветви кривой $\overline{H}$ в точке $\tilde f(y)$ и $\alpha(y)=(u_{1,0},F(u_{1,0}),w_{3,0},\ldots,w_{M,0})$. Тогда многообразие $\widetilde{Y}_{\bar\varepsilon}$ задается уравнениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(w_3-\varepsilon_2 w_{3,0})^r&=\varepsilon_2^r(v_1-\varepsilon_1 F(u_1)),\\ w_j&=\varepsilon_2\rho_j\left(u_1,\frac{v_1}{\varepsilon_1}\right)h_j\left(\frac{w_3}{\varepsilon_2}\right),\qquad j\geqslant 4,\end{aligned}\qquad(3.7)$$

в окрестности точки $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)=(u_{1,0},\varepsilon_1 F(u_{1,0}),\varepsilon_2 w_{3,0},\ldots,\varepsilon_2 w_{M,0})$.

Обозначим $A_1=\frac{\partial F}{\partial u_1}(\alpha(y)),\ A_2=\frac{\partial F}{\partial\bar u_1}(\alpha(y)),\ B_j=\frac{\partial h_j}{\partial w_3}(\alpha(y)),\ C_{j,1}=\frac{\partial\rho_j}{\partial u_1}(\alpha(y)),\ C_{j,2}=\frac{\partial\rho_j}{\partial\bar u_1}(\alpha(y)),\ D_{j,1}=\frac{\partial\rho_j}{\partial v_1}(\alpha(y)),\ D_{j,2}=\frac{\rho_j}{\partial\bar v_1}(\alpha(y)),\ \rho_{j,0}=\rho_j(\alpha(y)),\ h_{j,0}=h_j(w_{3,0}),\ j=4,\ldots,M$. Из (3.7) следует, что в точке $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$ имеет место

$$\begin{aligned}dv_1&=\varepsilon_1(A_1\,du_1+A_2\,d\bar u_1),\\ d\bar v_1&=\varepsilon_1(\bar A_2\,du_1+\bar A_1\,d\bar u_1),\end{aligned}\qquad(3.8)$$

а также имеют место равенства

$$
\begin{aligned}
dw_j &= \rho_{j,0}B_j\,dw_3 + \varepsilon_2 h_{j,0}\left(C_{j,1}\,du_1 + C_{j,2}\,d\bar u_1 + D_{j,1}\frac{dv_1}{\varepsilon_1} + D_{j,2}\frac{d\bar v_1}{\varepsilon_1}\right),\\
d\overline{w}_j &= \rho_{j,0}\overline{B}_j\,d\overline{w}_3 + \varepsilon_2 \bar h_{j,0}\left(\overline{C}_{j,2}\,d\bar u_1 + \overline{C}_{j,1}\,du_1 + \overline{D}_{j,2}\frac{dv_1}{\varepsilon_1} + \overline{D}_{j,1}\frac{d\bar v_1}{\varepsilon_1}\right),
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

$j=4,\dots,M$.

Если мы подставим (3.8) в (3.9), то получим

$$
\begin{aligned}
dw_j &= \rho_{j,0}B_j\,dw_3 + \varepsilon_2\nu_j,\\
d\overline{w}_j &= \rho_{j,0}\overline{B}_j\,d\overline{w}_3 + \varepsilon_2\bar\nu_j,
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

где формы ν_j и $\bar\nu_j$ не зависят от $\bar\varepsilon$ при $j=4,\dots,M$.

Из (3.8) и (3.10) следует, что для каждого достаточно малого $\bar\varepsilon$ касательное пространство к многообразию $\widetilde{Y}_{\bar\varepsilon}$ в точке $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$ очень близко к касательному пространству в точке $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$ алгебраического многообразия Z, заданного уравнениями $v_1=\varepsilon_1F(u_{1,0})$, $w_j-w_{j,0}=\rho_{j,0}B_j(w_3-w_{3,0})$, $j=4,\dots,M$. Следовательно, для каждого очень малого $\bar\varepsilon$ форма $\omega_{\bar\varepsilon}$ является симплектической в точке $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$. По непрерывности она является симплектической в некоторой окрестности точки $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$.

Рассмотрим точку $y\in\tilde f^{-1}(\overline{H}\,)$, принадлежащую к точкам ветвления отображения $\tilde f$ и такую, что $\tilde f(y)\in U_p$ для некоторого $p\in\mathrm{Crit}_{\mathrm{analytic}}\overline{H}$ либо $p=\infty$. Из (3.3) и (3.4) следует, что после перенумерации координат $w_3,\dots,w_M$ мы можем предполагать, что существует некоторое n, $3\leqslant n\leqslant M$, такое, что $\widetilde{Y}$ задается в окрестности точки $\alpha(y)$ уравнениями

$$
\begin{aligned}
h_j(u_1,v_1,w_3,\dots,w_n) &= 0, \qquad j=3,\dots,n,\\
\rho_j(u_1,v_1)h_j(u_1,v_1,w_3,\dots,w_n) &= w_j, \qquad j=n+1,\dots,M,
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

где ρ_j – гладкие функции и h_j – аналитические функции в точке $\tilde f(y)$. Пусть $(u_{1,0},v_{1,0},w_{3,0},\dots,w_{M,0})$ – координаты точки $\alpha(y)$. Тогда многообразие $\widetilde{Y}_{\bar\varepsilon}$ задается в окрестности точки $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)=(u_{1,0},\varepsilon_1v_{1,0},\varepsilon_2w_{3,0},\dots,\varepsilon_2w_{M,0})$ уравнениями

$$
\begin{aligned}
h_j\left(u_1,\frac{v_1}{\varepsilon_1},\frac{w_3}{\varepsilon_2},\dots,\frac{w_n}{\varepsilon_2}\right) &= 0, \qquad j=3,\dots,n,\\
\varepsilon_2\rho_j\left(u_1,\frac{v_1}{\varepsilon_1}\right)h_j\left(u_1,\frac{v_1}{\varepsilon_1},\frac{w_3}{\varepsilon_2},\dots,\frac{w_n}{\varepsilon_2}\right) &= w_j, \qquad j=n+1,\dots,M.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Положим $A_{j,l}=\frac{\partial h_j}{\partial w_l}(\alpha(y))$ для $1\leqslant j\leqslant M$, $1\leqslant l\leqslant n$ (здесь $w_1=u_1$ и $w_2=v_1$), и пусть $B_j=\rho_j(u_{1,0},v_{1,0})$ для $n+1\leqslant j\leqslant M$.

Из (3.12) следует, что для каждого фиксированного ε_1 и для достаточно малого ε_2 касательное пространство к $\widetilde{Y}_{\bar\varepsilon}$ в точке $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$ очень близко к касательному пространству в точке $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$ линейного многообразия Z, заданного уравнениями

$$\sum_{l=3}^{n} A_{j,l}(w_l-\varepsilon_2 w_{l,0}) = -A_{j,1}(u_1-u_{1,0}) - \frac{A_{j,2}}{\varepsilon_1}(v_1-\varepsilon_1 v_{1,0}), \qquad 3\leqslant j\leqslant n,$$
$$B_j\sum_{l=3}^{n} A_{j,l}(w_l-\varepsilon_2 w_{l,0}) = w_j-\varepsilon_2 w_{j,0}, \qquad n+1\leqslant j\leqslant M.$$

Следовательно, для фиксированного ε_1 и для достаточно малого ε_2 форма $\omega_{\bar\varepsilon}$ является симплектической в точке $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$. По непрерывности она является симплектической в некоторой окрестности точки $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$.

Наконец, для каждой точки y, не принадлежащей множеству ветвления отображения $\tilde f$, многообразие $\widetilde{Y}$ локально задается в точке $\alpha(y)$ уравнениями $w_j = F_j(u_1,v_1)$, $j=3,\dots,M$, где $F_j(u_1,v_1)$ – некоторые гладкие функции в окрестности точки $\tilde f(y)$. Следовательно, многообразие $\widetilde{Y}_{\bar\varepsilon}$ локально задается в точке $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$ уравнениями $w_j=\varepsilon_2 F_j\bigl(u_1,\frac{v_1}{\varepsilon_1}\bigr)$, $j=3,\dots,M$. Легко видеть, что для каждого фиксированного ε_1 и для достаточно малых ε_2 форма $\omega_{\bar\varepsilon}$ является симплектической в $(\bar\varepsilon\circ\alpha)(y)$, так как многообразие $\widetilde{Y}_{\bar\varepsilon}$ очень близко к алгебраическому многообразию, заданному уравнениями $w_j=0$, $j=3,\dots,M$, которое является симплектическим.

Чтобы завершить доказательство, достаточно воспользоваться компактностью многообразия $\widetilde{Y}$.

Применяя лемму 2.1 и теорему Хиронаки о разрешении особенностей, получаем

Следствие 3.2. *Пусть $\tilde f\colon \widetilde{Y}\to\mathbb{CP}^2$ – конечное накрытие, разветвленное вдоль кривой Гурвица $\overline{H}$ (возможно, с отрицательными ноудами) и, возможно, вдоль L_∞, ассоциированное с монодромией $\mu\colon \pi_1(\mathbb{C}^2\setminus H)\to\Sigma_N$. Тогда существуют наборы $(M_1,\dots,M_k)$ и $(n_1,\dots,n_k)$ положительных целых чисел такие, что разрешение $\overline{Y}$ особенностей многообразия $\widetilde{Y}$ может быть вложено как симплектическое подмногообразие в $\bigl(\mathbb{CP}^{M_1}\times\dots\times\mathbb{CP}^{M_k}, \Omega_{n_1,\dots,n_k}\bigr)$, где $\Omega_{n_1,\dots,n_k}=n_1p_1^*(\Omega_{M_1})+\dots+n_kp_k^*(\Omega_{M_k})$ и Ω_{M_j} – форма Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^{M_j}$.*

Теорема 3.3. *В обозначениях теоремы 3.1 пусть $\widetilde{Y}$ является гладким многообразием. Тогда симплектическая структура, заданная симплектической формой $\omega_{\bar\varepsilon}$, построенной в доказательстве теоремы 3.1, не зависит ни от $\bar\varepsilon$, если координаты в $\bar\varepsilon$ являются достаточно небольшими, ни от выбора покрытий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, ни от выбора функций $w_{i,j}$.*

Кроме того, если $i\colon \widetilde{Y}\hookrightarrow\mathbb{CP}^N$ является алгебраическим вложением (в случае, когда $\overline{H}$ – алгебраическая кривая) и $\tilde f=p\circ i$, где $p\colon\mathbb{CP}^N\to\mathbb{CP}^2$ – линейная проекция, то $(\widetilde{Y},\omega_{\bar\varepsilon})$ и $(\widetilde{Y}, i^*(\Omega_N))$ симплектоморфны при достаточно малых $\bar\varepsilon$, где Ω_N – форма Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^N$ и $\omega_{\bar\varepsilon}$ – форма, построенная в доказательстве теоремы 3.1.

Доказательство. Пусть $\omega_{\bar\varepsilon} = (\bar\varepsilon \circ \alpha)^*(\Omega)$, где вложение $\alpha\colon \widetilde{Y} \to \mathcal{L}$ было построено в доказательстве теоремы 3.1. Очевидно, формы $\omega_{\bar\varepsilon}$ гладко зависят от $\bar\varepsilon$. Заметим, что для каждого $\bar\varepsilon$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant c_1$ и $0 < \varepsilon_2 \leqslant c_2(\varepsilon_1)$, класс $[\omega_{\bar\varepsilon}] \in H^2(\widetilde{Y}, \mathbb{Z})$ является двойственным к классу $[\tilde f^{-1}(L)] \in H_2(\widetilde{Y}, \mathbb{Z})$, где L – некоторая прямая в $\mathbb{CP}^2$. Следовательно, согласно теореме Мозера о стабильности симплектических структур (см. [16, теорема 3.17]) формы $\omega_{\bar\varepsilon}$ определяют одну и ту же симплектическую структуру, если $0 < \varepsilon_1 \leqslant c_1$ и $0 < \varepsilon_2 \leqslant c_2(\varepsilon_1)$.

Покажем, что симплектическая структура на $\widetilde{Y}$, задаваемая формами $\omega_{\bar\varepsilon}$, не зависит от выбора покрытий $\{U_i\}$ и $\{V_i\}$ и не зависит от выбора функций $w_{i,j}$, определяющих вложение α. Действительно, пусть два набора $\{w'_{i,j}\}$ и $\{w''_{i,j}\}$ функций задают два вложения $\alpha'\colon \widetilde{Y} \to \mathcal{L}' \subset \mathbb{CP}^{M'}$ и $\alpha''\colon \widetilde{Y} \to \mathcal{L}'' \subset \mathbb{CP}^{M''}$. Положим

$$\omega'_{\bar\varepsilon} = (\bar\varepsilon \circ \alpha')^*(\Omega'), \qquad \omega''_{\bar\varepsilon} = (\bar\varepsilon \circ \alpha'')^*(\Omega''),$$

где Ω' и Ω'' – симплектические формы Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^{M'}$ и $\mathbb{CP}^{M''}$ соответственно. В этом случае мы имеем вложение $\alpha' \times \alpha''\colon \widetilde{Y} \to \mathcal{L}' \times_{\mathbb{CP}^2} \mathcal{L}''$. Заметим, что форма $\Omega_t = t(p')^*(\Omega') + (1-t)(p'')^*(\Omega'')$ является кэлеровой формой для каждого $t \in [0,1]$. Поскольку отрезок $[0,1]$ является компактом, применяя вычисления, аналогичные вычислениям, проведенным в доказательстве теоремы 3.1, легко показать, что существует $\bar\varepsilon = \bar\varepsilon' = \bar\varepsilon''$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \min(c'_1, c''_1)$, $0 < \varepsilon_2 \leqslant \min(c'_2(\varepsilon_1), c''_2(\varepsilon_1))$, такое, что $\omega_{t,\bar\varepsilon} = (\bar\varepsilon \circ (\alpha' \times \alpha''))^*(\Omega_t)$ является симплектической формой на $\widetilde{Y}$ для всех $t \in [0,1]$. С другой стороны, $\omega_{0,\bar\varepsilon} = \omega'_{\bar\varepsilon}$, $\omega_{1,\bar\varepsilon} = \omega''_{\bar\varepsilon}$ и формы $\omega_{t,\bar\varepsilon}$ принадлежат одному и тому же классу когомологий. Следовательно, по теореме Мозера о стабильности симплектических структур формы $\omega_{t,\bar\varepsilon}$ определяют одну и ту же симплектическую структуру на $\widetilde{Y}$.

В случае алгебраического вложения $i\colon \widetilde{Y} \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ такого, что $\tilde f = p \circ i$, где $p\colon \mathbb{CP}^N \to \mathbb{CP}^2$ – линейная проекция, обозначим через $\alpha'\colon \widetilde{Y} \to \mathcal{L}' \subset \mathbb{CP}^{M'}$ одно из вложений, построенных в доказательстве теоремы 3.1, и положим $\alpha'' = i$. Применяя те же аргументы, что и выше, получим, что $(\widetilde{Y}, \omega_{\bar\varepsilon})$ и $(\widetilde{Y}, i^*(\Omega_N))$ симплектоморфны для достаточно малых $\bar\varepsilon$, так как симплектические многообразия $(\widetilde{Y}, \omega''_{\bar\varepsilon})$ симплектоморфны для всех положительных наборов $\bar\varepsilon$, где $\omega''_{\bar\varepsilon} = (\bar\varepsilon \circ \alpha'')^*(\Omega_N)$.

§ 4. Вложения циклических накрытий плоскости в рациональные проективные трехмерные многообразия

В этом параграфе мы используем предположения и обозначения из § 1.

Пусть $\overline{H}$ – кривая Гурвица степени m. Рассмотрим бесконечное циклическое накрытие $f = f_\infty\colon X_\infty \to X' = \mathbb{C}^2 \setminus H$, ассоциированное с эпиморфизмом $\nu\colon \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H) \to \mathbb{F}_1$. Накрытие f_∞ может быть пропущено через циклическое накрытие $f_n\colon X'_n \to \mathbb{C}^2 \setminus H$, ассоциированное с эпиморфизмом $\mathrm{mod}_n \circ \nu$, $f_\infty = g_n \circ f_n$.

В этом параграфе мы покажем, что накрытие f_n может быть продолжено до отображения $\bar f_n\colon \overline{X}_n \to \mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль $\overline{H}$ и, возможно, вдоль L_∞ (если n не является делителем $\deg \overline{H}$, то $\bar f_n$ разветвлено вдоль L_∞), где $\overline{X}_n$ – некоторое компактное вещественное четырехмерное многообразие.

Теорема 4.1. *Разрешение $\overline{X}_n$ особенностей циклического накрытия проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ степени n, разветвленного вдоль кривой Гурвица $\overline{H}$ и, возможно, вдоль L_∞, может быть вложено в некоторое рациональное проективное комплексное трехмерное многообразие (снабженное целочисленной кэлеровой симплектической структурой) как симплектическое подмногообразие.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{C}^2 \setminus H_1$ и $\mathbb{C}^2 \setminus H_2$ диффеоморфны для H-изотопных кривых Гурвица $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$, мы будем предполагать, что $\overline{H}$ удовлетворяет условиям (*) и (**).

Из леммы 2.1 и теоремы Хиронаки о разрешении особенностей следует, что для доказательства теоремы достаточно показать, что для некоторого продолжения $\tilde{f}_n\colon \widetilde{X}_n \to \mathbb{CP}^2$ отображения $f'_n\colon X'_n \to X'$ многообразие $\widetilde{X}_n$ может быть вложено в проективное комплексное рациональное трехмерное многообразие (снабженное целочисленной кэлеровой симплектической структурой) как симплектическое подмногообразие с аналитическими особенностями.

Чтобы показать это, обозначим через d наименьшее неотрицательное целое число такое, что $m+d$ делится нацело на n. Положим $m+d=kn$ и рассмотрим линейное расслоение $p\colon \mathcal{L}(k) \to \mathbb{CP}^2$ (см. §1), ассоциированное с пучком $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(k)$. Согласно лемме 1.4 кривая Гурвица $\overline{H}$ совпадает с множеством нулей гладкого сечения $\bar{s}_m$ расслоения $\mathcal{L}(m)$ над $\mathbb{CP}^2$ таким, что $\bar{s}_m$ является аналитическим в некоторой окрестности U прямой L_∞ и в некоторых окрестностях всех критических точек кривой $\overline{H}$.

Обозначим через $\bar{s}_d$ сечение расслоения $\mathcal{L}(d)$, заданного над $\mathbb{C}^2_2$ функцией $w_2 = u_2^d$. Произведение

$$\bar{s}_{m+d} = \bar{s}_m \bar{s}_d \tag{4.1}$$

является сечением расслоения $\mathcal{L}(m+d)$, где $\bar{s}_m$ – это сечение расслоения $\mathcal{L}(m)$, удовлетворяющее всем условиям из леммы 1.4.

Определим $\alpha\colon \widetilde{X}_n \hookrightarrow \mathcal{L}(k)$ с помощью уравнения

$$w_i^n = \bar{s}_{m+d}(u_i, v_i) \tag{4.2}$$

и положим $\tilde{f}_n = p_{|X_n}$, где $p\colon \mathcal{L}(k) \to \mathbb{CP}^2$ – морфизм, задающий на $\mathcal{L}(k)$ структуру линейного расслоения. В частности, $\widetilde{X}_n$ задается уравнением

$$w_1^n = F_1(u_1, v_1)$$

в карте $\mathbb{C}^3_1$ и задается уравнением

$$w_2^n = u_2^d F_2(u_2, v_2)$$

в карте $\mathbb{C}^3_2$.

Очевидно, над $\mathbb{CP}^2 \setminus (\overline{H} \cup L_\infty)$ накрытие $\tilde{f}_n$ является неразветвленным n-листным циклическим накрытием. Затем, все особые точки многообразия $\widetilde{X}_n$ лежат над особыми точками кривой $\overline{H}$ и, возможно, над L_∞. Более того, по построению сечения $\bar{s}_{m+d}$ множество $\operatorname{Sing}\widetilde{X}_n$ является комплексно-аналитическим в некоторой окрестности $U \subset \mathcal{L}(k)$.

Линейное расслоение $\mathcal{L}(k)$ является квазипроективным многообразием, и при добавлении сечения "в бесконечности" оно может быть компактифицировано до проективного трехмерного рационального многообразия $\overline{\mathcal{L}}(k)$.

Многообразие $\overline{\mathcal{L}}(k)$ имеет много различных вложений в проективные пространства, так как группа Пикара $\operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{L}}(k)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Мы можем выбрать одно из них, например следующее вложение.

В окрестности $\mathbb{C}^3_1$ с координатами (u_1, v_1, w_1) рассмотрим мономы $u_1^{a_1} v_1^{a_2} w_1^{a_3}$, $0 \leqslant a_1 + a_2 + ka_3 \leqslant k + 1$, число которых равно $\frac{(k+2)(k+3)}{2} + 3$. Положим $N = \frac{(k+2)(k+3)}{2} + 2$ и рассмотрим рациональное отображение $h\colon \overline{\mathcal{L}}(k) \to \mathbb{CP}^N$, заданное в $\mathbb{C}^3_1$ функциями $z_{\bar{a}} = u_1^{a_1} v_1^{a_2} w_1^{a_3}$, где $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – тройки целых чисел и $z_{\bar{a}}$ – однородные координаты в $\mathbb{CP}^N$. Легко проверяется, что h является вложением.

Рассмотрим форму Фубини–Штуди Ω_N на $\mathbb{CP}^N$. Обозначим через $\Omega = h^*(\Omega_N)$ ее прообраз.

Как и в доказательстве теоремы 3.1, используем одно и то же обозначение $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ для набора двух положительных чисел и для автоморфизма расслоения $\overline{\mathcal{L}}(k)$, заданного в $\mathbb{C}^3_1$ формулой $(u_1, v_1, w_1) \to (u_1, \varepsilon_1 v_1, \varepsilon_2 w_1)$.

Вычисления (мы опускаем их), аналогичные тем, которые были проведены в доказательстве теоремы 3.1, показывают, что существуют положительная константа c_1 и положительная функция $c_2(t)$ такие, что $\widetilde{X}_{\bar{\varepsilon}} = (\bar{\varepsilon} \circ \alpha)(X_n)$ является симплектическим подмногообразием расслоения $\mathcal{L}$ с аналитическими особенностями для всех $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ таких, что $\varepsilon_1 \leqslant c_1$ и $\varepsilon_2 \leqslant c_2(\varepsilon_1)$.

§ 5. Многочлены Александера гурвицевских C-групп

Пусть $\overline{H}$ – кривая (соответственно, топологическая кривая) Гурвица степени m. Поскольку копредставление Зариского–ван Кампена группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ является C-копредставлением гурвицевской C-группы степени m, то теоремы 0.1 и 0.2 являются следствиями следующих теорем 5.1 и 5.2.

Теорема 5.1. *Пусть $G \in \mathcal{H}$ – гурвицевская C-группа степени m и $\Delta(t)$ – ее многочлен Александера. Тогда*:

(i) $\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$;

(ii) $\Delta(0) = \pm 1$;

(iii) *корни многочлена $\Delta(t)$ являются корнями степени m из единицы*;

(iv) *ранг свободной части абелевой группы N'/N'' равен* $\deg \Delta(t)$;

(v) *действие $h_{\mathbb{C}}$ на $N/N' \otimes \mathbb{C}$ полупросто.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность групп

$$1 \to N \to G \xrightarrow{\nu} \mathbb{F}_1 \to 1.$$

Эта точная последовательность индуцирует автоморфизм $\tilde{h} \in \operatorname{Aut} N$ (действие C-порождающего элемента $x \in \mathbb{F}_1$ на N) задано сопряжением $\tilde{h}(n) = \tilde{x}^{-1} n \tilde{x}$ для $n \in N$, где $\tilde{x}$ – это один из C-порождающих элементов группы G. Очевидно, автоморфизм $\tilde{h}$ определен однозначно с точностью до внутренних автоморфизмов группы N, следовательно, $\tilde{h}$ определяет автоморфизм $h \in \operatorname{Aut} N/N'$.

В работе [13] было доказано, что для гурвицевской C-группы G группа N является конечно представимой. Следовательно, N/N' является конечно порожденной абелевой группой. Пусть $N/N' = T \oplus F$ – разложение в прямую сумму группы кручения T и свободной абелевой группы F. Отметим, что T является конечной группой и F – конечно порожденная группа. Автоморфизм h группы N/N' индуцирует автоморфизм группы T и, следовательно, автоморфизм $\bar{h}$ группы $F \simeq (N/N')/T$. Если мы выберем свободный над $\mathbb{Z}$ базис $\mathbb{Z}$-модуля F, то этот автоморфизм задается матрицей H с целыми коэффициентами. Так как автоморфизм $h_{\mathbb{C}}$ векторного пространства $N/N' \otimes \mathbb{C}$ может быть задан той же самой матрицей H, то многочлен $\Delta(t) = \det(H - t\,\mathrm{Id}) \in \mathbb{Z}[t]$. Поскольку $\bar{h} \in \operatorname{Aut} F$, то $\det \widetilde{H} = \pm 1$ и, следовательно, $\Delta(0) = \pm 1$.

Покажем, что $\tilde{h}^m$ является внутренним автоморфизмом группы N. Действительно, так как G – гурвицевская C-группа степени m, то она порождается некоторыми C-порождающими элементами $x_1, \dots, x_m$ такими, что произведение $x_1 \dots x_m$ принадлежит центру группы G, и поэтому $\tilde{x}^m = \tilde{n} \cdot x_1 \dots x_m$ для некоторого $\tilde{n} \in N$ задает на N внутренний автоморфизм. Таким образом, индуцированные автоморфизмы h^m группы N/N' и $h_{\mathbb{C}}^m$ векторного пространства $N/N' \otimes \mathbb{C}$ являются тривиальными, т.е. $h_{\mathbb{C}}^m = \mathrm{Id}$.

Поскольку $h_{\mathbb{C}}^m = \mathrm{Id}$, то все корни многочлена $\Delta(t) = \det(h_{\mathbb{C}} - t\,\mathrm{Id})$ являются корнями степени m из единицы и действие $h_{\mathbb{C}}$ на $N/N' \otimes \mathbb{C}$ является полупростым.

Теорема 5.2. *Пусть G – неприводимая гурвицевская C-группа. Тогда*:
(i) $\Delta(1) = 1$;
(ii) $\deg \Delta(t)$ *является четным числом*;
(iii) $\Delta(t)$ *является возвратным многочленом.*

Доказательство. Из работы [9, лемма 6] следует, что $\Delta(1) = \pm 1$. Покажем, что $t = -1$ также не является корнем многочлена $\Delta(t)$. Действительно, если $t = -1$ является корнем многочлена $\Delta(t)$, то $\Delta(t) = (t+1)P(t)$, где $P(t)$ – некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Следовательно, $2P(1) = \pm 1$, но это невозможно, так как $P(1)$ является целым числом.

Согласно теореме 5.1 все корни многочлена $\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ являются корнями из единицы. Эти корни не являются вещественными числами, так как $t = \pm 1$ не являются корнями многочлена $\Delta(t)$. Следовательно, $\deg \Delta(t)$ является четным числом, и утверждение (ii) доказано.

Хорошо известно, что если λ является примитивным корнем степени k из единицы, $k > 2$, и многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ имеет λ в качестве одного из своих корней, то все примитивные корни степени k из единицы являются корнями многочлена $P(t)$. В частности, λ^{-1} также является корнем многочлена $P(t)$, и утверждение (iii) доказано.

Поскольку $\Delta(t) = \det(h_{\mathbb{C}} - t\,\mathrm{Id})$ и $\deg \Delta(t)$ является четным числом, то $\Delta(t) = t^{\deg \Delta(t)} + \dots$. Пусть $\Delta(t) = \prod_i \Phi_{k_i}(t)$ – разложение в произведение k_i-х циклотомических многочленов. Поэтому утверждение (i) следует из хорошо известной леммы 5.3, так как $\Delta(1) = \pm 1$.

Лемма 5.3. *Пусть $\Phi_k(t)$ – k-й циклотомический многочлен, $k>1$. Тогда*

$$\Phi_k(1)=\begin{cases} p, & \text{если } k=p^n \text{ для некоторого простого числа } p,\\ 1, & \text{если } k\neq p^n \text{ для любого простого числа } p.\end{cases}$$

Доказательство. Применяя индукцию по $k>1$, утверждение леммы следует из равенств

$$\Phi_k(t)=\frac{\sum_{i=0}^{k-1}t^i}{\prod_{\substack{d\mid k\\ d<k}}\Phi_d(t)}\,,\qquad \Phi_k(1)=\frac{k}{\prod_{\substack{d\mid k\\ d<k}}\Phi_d(1)}\,,\qquad \Phi_k(0)=\frac{1}{\prod_{\substack{d\mid k\\ d<k}}\Phi_d(0)}\,.$$

Следствие 5.4. *Пусть G – неприводимая гурвицевская C-группа степени $m=p^n$, где p – простое число. Тогда*:

(i) $\Delta(t)\equiv 1$;

(ii) *группа G'/G'' является конечной абелевой группой.*

Доказательство. Согласно теореме 5.1 все корни многочлена $\Delta(t)$ являются корнями степени m из единицы. Пусть λ – один из его корней. Предположим, что λ является примитивным корнем степени p^k из единицы, $1\leqslant k\leqslant n$. Тогда λ является корнем p^k-го циклотомического многочлена

$$\Phi_{p^k}(t)=\sum_{i=0}^{p-1}t^{ip^{k-1}}$$

и существует некоторый многочлен $f(t)\in\mathbb{Z}[t]$ такой, что $\Delta(t)=\Phi_{p^k}(t)f(t)$. Согласно теореме 5.2 значение $\Phi_{p^k}(1)f(1)=\pm1$. С другой стороны, $f(1)\in\mathbb{Z}$ и $\Phi_{p^k}(1)=p$. Поэтому многочлен $\Delta(t)$ не имеет корней. Следовательно, $\deg\Delta(t)$ равна нулю и группа G'/G'' не имеет свободной части, т. е. она является конечной абелевой группой.

Следствие 0.3 вытекает из следствия 5.4.

Лемма 5.5. *Пусть G_1, G_2 – C-группы и $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$ – их многочлены Александера. Предположим, что существует C-эпиморфизм $f\colon G_1\to G_2$. Тогда многочлен $\Delta_2(t)$ является делителем многочлена $\Delta_1(t)$.*

Доказательство. Обозначим через N_i ядро канонического C-эпиморфизма $\nu_i\colon G_i\to\mathbb{F}_1$, $i=1,2$. Легко видеть, что гомоморфизм g в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & G_1 \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{F}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & G_2 \arrow[r, "\nu_2"] & \mathbb{F}_1 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

является эпиморфизмом. Эта диаграмма индуцирует следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N_1/N_1' & \longrightarrow & G_1/N_1' & \xrightarrow{\nu_{1*}} & \mathbb{F}_1 & \longrightarrow & 1 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle g_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \Big\downarrow{\simeq} & & \\ 1 & \longrightarrow & N_2/N_2' & \longrightarrow & G_2/N_2' & \xrightarrow{\nu_{2*}} & \mathbb{F}_1 & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{5.1}$$

в которой g_* также является эпиморфизмом.

Из диаграммы (5.1) следует, что $\Delta_2(t)$ является делителем многочлена $\Delta_1(t)$, так как $h_2(g_*(n)) = g_*(h_1(n))$ для всех $n \in N_1/N_1'$.

Теорема 5.6. *Пусть G – гурвицевская C-группа степени m. Тогда ее многочлен Александера $\Delta(t)$ делит многочлен $(t-1)(t^m-1)^{m-2}$.*

Доказательство. Рассмотрим гурвицевскую C-группу

$$\widetilde{G}_m = \langle x_1, \dots, x_m \mid [x_i, x_1 \dots x_m] = 1,\ i = 1, \dots, m \rangle. \tag{5.2}$$

Для любой гурвицевской C-группы G степени m существует естественный C-эпиморфизм $f\colon \widetilde{G}_m \to G$, отображающий C-порождающие элементы x_i группы $\widetilde{G}_m$ в C-порождающие элементы x_i группы G, произведение которых $x_1 \dots x_m$ принадлежит центру группы G. Следовательно, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что многочлен Александера группы $\widetilde{G}_m$ равен $(-1)^{m-1}(t-1) \times (t^m-1)^{m-2}$.

Обозначим через $\widetilde{N}_m$ ядро канонического гомоморфизма $\nu\colon \widetilde{G}_m \to \mathbb{F}_1$ и положим $y = x_1 \dots x_m$. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $\tilde{h}(n) = x_m n x_m^{-1}$ для $n \in \widetilde{N}_m$. В работе [13] при использовании метода Рейдемейстера–Шрайера было показано, что $\widetilde{N}_m$ порождается элементами

$$a_{k,j} = x_m^k x_j x_m^{-(k+1)}, \tag{5.3}$$

где $j = 2, \dots, m-1,\ k \in \mathbb{Z}$, вместе с элементами

$$a_{k,m} = x_m^k y x_m^{-(k+m)}, \tag{5.4}$$

где $k \in \mathbb{Z}$. В этом случае действие $\tilde{h}$ задается формулами $\tilde{h}(a_{k,j}) = a_{k+1,j}$.

Из соотношений $yx_j = x_j y,\ j = 2, \dots, m$, вытекают (см. [13]) соотношения

$$a_{k,m} = a_{k+1,m} \tag{5.5}$$

для $k \in \mathbb{Z}$ и соотношения

$$a_{k,m} a_{k+m,j} a_{k+1,m}^{-1} = a_{k,j} \tag{5.6}$$

для $j = 2, \dots, m-1$ и $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\widetilde{N}_m$ является свободной группой, свободно порожденной элементами $a_{0,m}$ и $a_{k,j},\ k = 1, \dots, m,\ j = 2, \dots, m-1$.

Имеем $\tilde{h}(a_{0,m}) = a_{0,m}$, $\tilde{h}(a_{k,j}) = a_{k+1,j}$ для $k = 1, \dots, m-1$, $j = 2, \dots, m-1$ и $\tilde{h}(a_{m,j}) = a_{0,m}^{-1} a_{1,j} a_{0,m}$ для $j = 2, \dots, m-1$.

Пусть $\bar{a}_{k,j}$ – образ элемента $a_{k,j}$ в группе $\widetilde{N}_m/\widetilde{N}'_m$. Тогда действие h задается формулами

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\bar{a}_{0,m}) &= \bar{a}_{0,m}, \\ h(\bar{a}_{k,j}) &= \bar{a}_{k+1,j}, \qquad k = 1, \dots, m-1, \quad j = 2, \dots, m-1, \\ h(\bar{a}_{m,j}) &= \bar{a}_{1,j}, \qquad j = 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

С помощью простых вычислений легко показать, что характеристический многочлен автоморфизма h равен $(-1)^{m-1}(t-1)(t^m-1)^{m-2}$.

Легко видеть [9, лемма 4], что для любой C-группы G группа G/G' является конечно порожденной свободной абелевой группой. Более того, канонический эпиморфизм $\mathrm{ab}\colon G \to G/G'$ является C-гомоморфизмом, если мы выберем $\mathrm{ab}(x_i)$ в качестве C-порождающих элементов группы G/G', где $\{x_i\}$ – множество всех C-порождающих элементов группы G. Скажем, что C-группа G *состоит из n неприводимых компонент*, если $G/G' \simeq \mathbb{Z}^n$. Введение понятия числа неприводимых компонент гурвицевской C-группы объясняет следующая простая лемма (случай произвольной C-группы см. в [10]).

Лемма 5.7. *Кривая (соответственно, топологическая кривая) Гурвица $\overline{H}$ состоит из n неприводимых компонент тогда и только тогда, когда $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ состоит из n неприводимых компонент.*

С помощью простых вычислений легко показать, что многочлен Александера $\Delta(t)$ абелевой C-группы $\mathbb{Z}^n$ равен $(-1)^{n-1}(t-1)^{n-1}$. Следовательно, лемма 5.5 влечет следующую лемму.

Лемма 5.8. *Многочлен Александера $\Delta(t)$ гурвицевской C-группы G, состоящей из n неприводимых компонент, делится на $(t-1)^{n-1}$.*

Теорема 5.9. *Пусть гурвицевская C-группа G состоит из n неприводимых компонент, и пусть $\Delta(t)$ – ее многочлен Александера. Тогда*

$$\Delta(t) = (t-1)^{n-1} P(t),$$

где $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ – некоторый многочлен, удовлетворяющий условию $P(1) \neq 0$.

Доказательство. Пусть гурвицевская C-группа G имеет степень m. Чтобы получить некоторое C-копредставление группы G, достаточно добавить несколько C-соотношений в копредставление (5.2).

Поскольку G состоит из n неприводимых компонент, то множество $\{1, \dots, m\}$ распадается в несвязное объединение n подмножеств $J_1, \dots, J_n$ таких, что $j_1, j_2 \in J_k$ тогда и только тогда, когда x_{j_1} и x_{j_2} сопряжены в группе G. Пусть $J_k = \{j_{1,k} < \dots < j_{m_k,k}\}$. Не ограничивая общности, можем предполагать, что среди добавленных C-соотношений имеются соотношения

$$x_{j_{i,k}} w_{j_{i,k}, j_{i+1,k}, 1} = w_{j_{i,k}, j_{i+1,k}, 1} x_{j_{i+1,k}} \tag{5.7}$$

для $i = 1, \dots, m_k - 1$, $k = 1, \dots, n$, и для некоторых слов $w_{j_{i,k}, j_{i+1,k}, 1}$. Пусть $\nu(w_{j_{i,k}, j_{i+1,k}, 1}) = x^{t_{j_{i,k}}}$, где x – C-порождающий элемент группы $\mathbb{F}_1$.

Рассмотрим диаграмму (5.1), в которой $G_1 = \widetilde{G}_m$ и $G_2 = G$. В обозначениях из доказательства теоремы 5.6 элементы $\bar{a}_{0,m}$ и $\sum_{k=1}^{m} \bar{a}_{k,j}$, $j = 2, \dots, m-1$, порождают подгруппу

$$(N_1/N_1')_1 = \{y \in N_1/N_1' \mid h(y) = y\}$$

группы N_1/N_1' и подпространство $(N_1/N_1' \otimes \mathbb{C})_1$, порожденное собственными векторами автоморфизма $h_{\mathbb{C}}$ с собственным значением 1. Образ $g_*((N_1/N_1')_1) \otimes \mathbb{C}$ совпадает с собственным подпространством пространства $N_2/N_2' \otimes \mathbb{C}$, соответствующим собственному значению 1.

Применяя метод Рейдемейстера–Шрайера, можно показать, что элемент $a_{0,m}$, определенный в (5.4), вместе с элементами $a_{k,j}$, $k = 1, \dots, m$, $j = 2, \dots, m-1$, определенными в (5.3) (более точно, их образы при отображении g_*), также порождают группу N_2, и каждое соотношение (5.7) (после подстановки $x_1 = y(x_2 \dots x_m)^{-1}$) дает соотношения

$$a_{r,j_{i,k}} \overline{w}_{r+1, j_{i,k}, j_{i+1,k}} = \overline{w}_{r, j_{i,k}, j_{i+1,k}} a_{r+t_{j_{i,k}}, j_{i+1,k}}, \tag{5.8}$$

если $1 < j_{i,k} < j_{i+1,k} < m$,

$$a_{0,m} \Big(\prod_{s=2}^{m-1} a^{-1}_{r+m-s, m+1-s} \Big) \overline{w}_{r+1, 1, j_{i+1,k}} = \overline{w}_{r, 1, j_{i+1,k}} a_{r+t_{1, j_{i+1,k}}}, \tag{5.9}$$

если $1 = j_{i,k} < j_{i+1,k} < m$,

$$a_{r,j_{i,k}} \overline{w}_{r+1, j_{i,k}, m} = \overline{w}_{r, j_{i,k}, m}, \tag{5.10}$$

если $1 < j_{i,k} < j_{i+1,k} = m$, и

$$a_{0,m} \Big(\prod_{s=2}^{m-1} a^{-1}_{r+m-s, m+1-s} \Big) \overline{w}_{r+1, 1, m} = \overline{w}_{r, 1, m}, \tag{5.11}$$

если $1 = j_{i,k} < j_{i+1,k} = m$, где $r \in \mathbb{Z}$ и каждое слово

$$\overline{w}_{r, j_{i,k}, j_{i+1,k}} = x_m^r w_{j_{i,k}, j_{i+1,k}, 1} x_m^{-(r+t_{j_{i,k}})}$$

записано в алфавите $a_{l,s}$.

Как и в работе [13], можно показать, что $\overline{w}_{r, j_{i,k}, j_{i+1,k}}$ и $\overline{w}_{r+m, j_{i,k}, j_{i+1,k}}$ сопряжены в группе G_2 с помощью элемента $a_{0,m}$. Следовательно, взяв сумму по r, из соотношений (5.8)–(5.11) получим следующие соотношения в группе N_2/N_2':

$$\sum_{r=1}^{m} \bar{a}_{r, j_{i,k}} = \sum_{r=1}^{m} \bar{a}_{r, j_{i+1,k}}, \tag{5.12}$$

если $1 < j_{i,k} < j_{i+1,k} < m$,

$$m\bar{a}_{0,m} - \sum_{s=2}^{m-1}\sum_{r=1}^{m}\bar{a}_{r,s} = \sum_{r=1}^{m}\bar{a}_{r,j_{i+1,k}}, \tag{5.13}$$

если $1 = j_{i,k} < j_{i+1,k} < m$,

$$\sum_{r=1}^{m}\bar{a}_{r,j_{i,k}} = 0, \tag{5.14}$$

если $1 < j_{i,k} < j_{i+1,k} = m$, и

$$m\bar{a}_{0,m} - \sum_{s=2}^{m-1}\sum_{r=1}^{m}\bar{a}_{r,s} = 0, \tag{5.15}$$

если $1 = j_{i,k} < j_{i+1,k} = m$.

Легко видеть, что для любого разложения $\{1,\dots,m\} = \bigsqcup_{k=1}^{n} J_k$ уравнения (5.12)–(5.15) являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}$, число этих уравнений равно $m-n$ и элементы $\bar{a}_{0,m}$ и $\sum_{r=1}^{m}\bar{a}_{r,s}$, $s=2,\dots,m-1$, порождают группу $(N_1/N_1')_1$. Следовательно, ранг ядра ограничения g_* на $(N_1/N_1')_1$ не меньше $m-n$. Таким образом,

$$\dim(N_2/N_2'\otimes\mathbb{C})_1 \leqslant \dim(N_1/N_1'\otimes\mathbb{C})_1 - (m-n) = n-1.$$

С другой стороны, согласно лемме 5.8 многочлен Александера $\Delta(t)$ C-группы G, состоящей из n неприводимых компонент, делится на $(t-1)^{n-1}$.

Следствие 5.10. *Пусть гурвицевская C-группа G состоит из n неприводимых компонент, и пусть $\Delta(t)$ – ее многочлен Александера. Тогда*

$$\Delta(0) = (-1)^{\deg\Delta(t)-(n-1)}.$$

Доказательство. Многочлен Александера $\Delta(t)$ имеет вид

$$\Delta(t) = \det(h_{\mathbb{C}} - t\,\mathrm{Id}) = (-t)^{\deg\Delta(t)} + \sum_{i=0}^{\deg\Delta(t)-1} c_i t^i,$$

и согласно теореме 5.9 имеем $\Delta(t) = (t-1)^{n-1}P(t)$, где $P(t)\in\mathbb{Z}[t]$ – некоторый многочлен такой, что $P(1)\neq 0$. Следовательно, многочлен

$$P(t) = (-1)^{\deg\Delta(t)}\prod_i \Phi_{n_i}(t)$$

является (с точностью до знака) произведением некоторых циклотомических многочленов $\Phi_{n_i}(t)$ при $n_i > 1$. Согласно лемме 5.3 имеем $\Phi_{n_i}(0) = 1$ для всех $n_i > 1$. Следовательно, $\Delta(0) = (-1)^{n-1}(-1)^{\Delta(t)} = (-1)^{\deg\Delta(t)-(n-1)}$.

Лемма 5.11. *Пусть $j\colon \{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,m\}$ – инъективное отображение. Предположим, что C-группа G порождена C-порождающими элементами $x_1,\dots,x_n$ и $w=\bar x_1\dots\bar x_m$ является квазиположительным словом от $x_1,\dots,x_n$ (т. е. $\bar x_k$ сопряжен некоторому $x_{i_k}\in\{x_1,\dots,x_n\}$) таким, что $\bar x_{j(i)}=x_i$ для $i=1,\dots,n$. Если элемент w принадлежит центру группы G, то G является гурвицевской C-группой степени m.*

Доказательство. Пусть $G=\langle x_1,\dots,x_n\mid R\rangle$ – C-копредставление группы G. Положим $J=\{1\leqslant j\leqslant m\mid j=j(i),\,i=1,\dots,n\}$. По предположению имеем $\bar x_{j(i)}=x_i$ и

$$\bar x_j=w_j^{-1}x_{i_j}w_j \tag{5.16}$$

для $j\notin J$, где w_j – некоторые слова, записанные в алфавите, состоящем из $x_1,\dots$ $\dots,x_n$ и обратных к ним элементов. Заметим, что соотношения (5.16) являются C-соотношениями. Следовательно, если мы добавим порождающие элементы $\bar x_j$, $j\notin J$, к множеству порождающих элементов $\{x_1,\dots,x_n\}$ и добавим соотношения (5.16) к множеству R, то получим некоторое C-копредставление той же самой группы G. Для завершения доказательства достаточно перенумеровать полученное в результате добавления множество порождающих.

Предложение 5.12. *Пусть G_1 и G_2 – гурвицевские C-группы степени m_1 и m_2 соответственно, и пусть $\Delta_i(t)$, $i=1,2$, – их многочлены Александера. Тогда существует гурвицевская C-группа степени $2m_1m_2$ с многочленом Александера $\Delta(t)=\Delta_1(t)\Delta_2(t)$.*

Доказательство. Пусть $G_i=\langle x_{1,i},\dots,x_{m_i,i}\mid R_i\rangle$ – гурвицевское C-копредставление группы G_i степени m_i.

Рассмотрим свободное произведение $\widetilde G=G_1*_{\{x_{m_1,1}=x_{m_2,2}\}}G_2$ с объединенной подгруппой. Это произведение является C-группой, заданной копредставлением

$$\widetilde G=\langle x_{1,i},\dots,x_{m_i,i},\ i=1,2\mid R_1\cup R_2,\ x_{m_1,1}=x_{m_2,2}\rangle.$$

Положим $y_i=x_{1,i}\dots x_{m_i,i}$, $i=1,2$, и обозначим через N_i (соответственно, через $\widetilde N$) ядро канонического гомоморфизма $\nu\colon G_i\to\mathbb F_1$ (соответственно, гомоморфизма $\nu\colon\widetilde G\to\mathbb F_1$).

Как и в доказательстве теоремы 5.6, применяя метод Рейдемейстера–Шрайера, покажем, что группа N_i (соответственно, $\widetilde N$) порождается элементами $a_{k,j,i}=x^k_{m_i,i}x_{j,i}x^{-(k+1)}_{m_i,i}$, где $j=2,\dots,m_i-1$, $k\in\mathbb Z$, вместе с элементами $a_{k,m_i,i}=x^k_{m_i,i}y_ix^{-(k+m_i)}_{m_i,i}$, $k\in\mathbb Z$ (соответственно, объединением этих элементов, так как $x_{m_1,1}=x_{m_2,2}$ в группе $\widetilde G$). Множество определяющих соотношений для N_i (соответственно, для $\widetilde N$) получается из множества $\overline R_i=\{x^n_{m_i,i}r_{l,i}x^{-n}_{m_i,i}\mid r_{l,i}\in R_i,$ $n\in\mathbb Z\}$ (соответственно, из $\overline R=\overline R_1\cup\overline R_2$) после переписывания слов в виде слов из алфавита $\{a_{k,j,i}\}$ (соответственно, из объединения этих алфавитов). Следовательно, $\widetilde N=N_1*N_2$ является свободным произведением групп N_1 и N_2.

Отметим, что из доказательства теоремы 5.6 следует, что элементы $a_{k,j,i}$ и $a_{k+lm_i,j,i}$ являются сопряженными в группе N_i при всех $l\in\mathbb Z$.

Пусть $\tilde{h}_i$ – автоморфизм группы N_i, заданный сопряжением на элемент $x_{m_i,i}$. Тогда автоморфизм $\tilde{h}$ группы $\widetilde{N}$ задается сопряжением на элемент $x_{m_1,1} = x_{m_2,2}$ и этот автоморфизм равен $\tilde{h}_1 * \tilde{h}_2$. Следовательно, многочлен Александера $\tilde{\Delta}(t)$ группы $\widetilde{G}$ равен $\Delta_1(t)\Delta_2(t)$.

Рассмотрим группу

$$G = \langle x_{1,i}, \dots, x_{m_i,i},\ i = 1,2 \mid R_1 \cup R_2,\ x_{m_1,1} = x_{m_2,2},\\ [x_{j,i}, y_{\bar{i}}^{m_i}] = 1,\ j = 1, \dots, m_i - 1,\ i = 1,2\rangle,$$

где $\bar{i} = \{1,2\} \setminus \{i\}$ (напомним, что $x_{1,\bar{i}}, \dots, x_{m_{\bar{i}},\bar{i}}$ коммутируют с $y_{\bar{i}}$). Пусть N – ядро канонического гомоморфизма $\nu\colon G \to \mathbb{F}_1$.

Чтобы получить копредставление группы N из копредставления группы $\widetilde{N}$, описанного выше, нужно добавить соотношения, индуцированные соотношениями

$$[x_{j,i}, y_{\bar{i}}^{m_i}] = 1, \qquad j = 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1,2.$$

Легко видеть, что эти добавленные соотношения имеют следующий вид:

$$a_{k,j,i}a_{0,m_{\bar{i}}}^{m_i} = a_{0,m_{\bar{i}}}^{m_i}a_{k+m_1m_2,j,i}, \tag{5.17}$$

так как $a_{k,m_{\bar{i}}} = a_{k+1,m_{\bar{i}}}$ в группе $N_{\bar{i}}$ при всех k. Из дополнительных соотношений (5.17) видно, что $a_{k,j,i}$ и $a_{k+m_1m_2,j,i}$ сопряжены друг другу. Однако эти элементы были уже сопряжены в группе $\widetilde{N}$. Следовательно, $\widetilde{N}/\widetilde{N}' \simeq N/N'$, и группы $\widetilde{G}$ и G имеют одинаковые многочлены Александера. Для завершения доказательства предложения 5.12 достаточно заметить, что

$$y_1^{m_2}y_2^{m_1} = (x_{1,1} \dots x_{m_1,1})^{m_2}(x_{1,2} \dots x_{m_2,2})^{m_1}$$

принадлежит центру группы G. Следовательно, согласно лемме 5.11 группа G является гурвицевской C-группой степени $2m_1m_2$.

Для двух гурвицевских C-групп G_1 и G_2, заданных гурвицевскими C-копредставлениями групп $G_i = \langle x_{1,i}, \dots, x_{m_i,i} \mid R_i\rangle$, $i = 1,2$, гурвицевская C-группа G, построенная в доказательстве предложения 5.12, называется *гурвицевским произведением* групп G_1 и G_2. Гурвицевское произведение групп G_1 и G_2 будем обозначать через $G_1 \diamond G_2$. Конечно, гурвицевское произведение групп G_1 и G_2 зависит от гурвицевских C-копредставлений групп G_1 и G_2, но согласно предложению 5.12 многочлен Александера группы $G_1 \diamond G_2$ не зависит от гурвицевских C-копредставлений множителей.

Лемма 5.13. *Фундаментальная группа $G_{n,m} = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C_{n,m})$ дополнения к плоской аффинной алгебраической кривой $C_{m,n}$, заданной уравнением $w^n - z^m = 0$, где n и m – произвольные положительные целые числа, является гурвицевской C-группой.*

Замечание 5.14. Лемма 5.13 не следует из упомянутого выше утверждения о фундаментальных группах дополнений к аффинным кривым Гурвица, так как в нем предполагается, что "бесконечно удаленная" прямая находится в общем положении по отношению к кривой Гурвица, а в рассматриваемом случае это не так. Если мы рассмотрим локальную фундаментальную группу $G = \pi_1(B_\varepsilon \setminus C)$, где C – неприводимая особенность в небольшом шаре B_ε, то G всегда имеет естественную структуру неприводимой C-группы. Эта группа имеет нетривиальный центр тогда и только тогда, когда особенность C имеет тип $x^p = y^q$, где p и q взаимно просты (см. [3]).

Доказательство леммы 5.13. Действительно, брэйд-монодромия особенности $w^n = z^m$ относительно проекции $(z,w) \to z$ равна

$$b_{n,m} = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^m \in \mathrm{Br}_n,$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ – стандартные порождающие элементы группы кос Br_n, т. е. порождающие, связанные следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \qquad i = 1, \dots, n-2, \\ [\sigma_i, \sigma_j] = 1, \qquad |i-j| \geqslant 2. \end{gathered}$$

Группа Br_n действует на свободной группе $\mathbb{F}_n$, порожденной элементами $x_1, \dots$ $\dots, x_n$. Это действие задается формулами $\sigma_j(x_i) = x_i$, если $j \neq i, i+1$, и $\sigma_j(x_{j+1}) = x_j$, $\sigma_j(x_j) = x_j x_{j+1} x_j^{-1}$. Обозначим через $B_{n,m}$ циклическую подгруппу группы Br_n, порожденную элементом $b_{n,m}$. Тогда (см. [11]) группа

$$G_{n,m} = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i = b(x_i),\ i = 1, \dots, n,\ b \in B_{n,m} \rangle$$

является C-группой и согласно лемме 5.11 она является гурвицевской C-группой, так как $b_{n,m}^n = (\Delta_n^2)^m \in B_{n,m}$, где Δ_n – элемент Гарсайда в группе кос Br_n, и, следовательно, элемент $(x_1 \dots x_n)^m$ принадлежит центру группы $G_{n,m}$ (так как $\Delta_n^2(x_i) = (x_1 \dots x_n) x_i (x_1 \dots x_n)^{-1}$ и $\Delta_n^2(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$).

Предложение 5.15 [14]. *Если целые числа m и n являются взаимно простыми, то многочлен Александера группы $G_{n,m}$ имеет вид*

$$\Delta_{n,m}(t) = \frac{(t-1)(t^{nm}-1)}{(t^n-1)(t^m-1)}.$$

Предложение 5.16. *Многочлен Александера группы $G_{2,2m}$ имеет вид*

$$\Delta(t) = (1-t) \sum_{i=0}^{m-1} t^{2i}.$$

Доказательство. Из доказательства леммы 5.13 следует, что

$$G_{2,2m} = \langle x_1, x_2 \mid [x_1, (x_1x_2)^m] = [x_2, (x_1x_2)^m] = 1\rangle.$$

Покажем, что соотношения

$$[x_2, (x_1x_2)^m] = 1, \qquad i = 1, 2, \tag{5.18}$$

эквивалентны одному соотношению $(x_1x_2)^m = (x_2x_1)^m$. Действительно, соотношения (5.18) влекут

$$(x_1x_2)^m = x_1^{-1}(x_1x_2)^m x_1 = (x_2x_1)^m,$$

а соотношение $(x_1x_2)^m = (x_2x_1)^m$ влечет

$$x_2(x_1x_2)^m = (x_2x_1)^m x_2 = (x_1x_2)^m x_2$$

и

$$x_1(x_1x_2)^m = x_1(x_2x_1)^m = (x_1x_2)^m x_1.$$

Следовательно,

$$G_{2,2m} = \langle x_1, x_2 \mid (x_1x_2)^m (x_2x_1)^{-m} = 1\rangle.$$

Пусть $r = (x_1x_2)^m(x_2x_1)^{-m}$. Применяя свободное дифференциальное исчисление Фокса [4], получим

$$\nu_*\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right) = 1 + t^2 + \cdots + t^{2(m-1)} - t^{2m-1} - t^{2m-3} - \cdots - t^1,$$
$$\nu_*\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right) = t + \cdots + t^{2m-1} - t^{2(m-1)} - t^{2(m-2)} - \cdots - t^2 - 1.$$

Следовательно,

$$\Delta(t) = (1-t)\sum_{i=0}^{m-1} t^{2i}.$$

Рассмотрим группу

$$G(2) = \langle x_1, \ldots, x_4 \mid x_2^2 x_1 x_2^{-2} = x_4,\ x_3 = x_2,\ x_4^2 x_2 x_4^{-2} = x_2,$$
$$[x_i, x_1 \ldots x_4] = 1 \text{ для } i = 1, \ldots, 4\rangle. \tag{5.19}$$

Предложение 5.17. *Многочлен Александера* $\Delta(t)$ *группы* $G(2)$ *равен* t^2-1.

Доказательство. Обозначим через $N(2)$ ядро канонического C-гомоморфизма $\nu\colon G(2) \to \mathbb{F}_1$ и положим $m = 4$ и $y = x_1 \dots x_4$. В обозначениях, используемых в доказательстве теоремы 5.6, из соотношений $[x_i, y] = 1$ для $i = 1, \dots, 4$ следует, что группа $N(2)$ порождается элементами $a_{k,j} = x_4^k x_j x_4^{-(k+1)}$, $k = 1, \dots, 4$, $j = 2, 3$, вместе с элементом $a_{0,4} = yx_4^{-4}$. В нашем случае соотношения (5.5) и (5.6) имеют вид

$$a_{k,4} = a_{0,4}, \qquad a_{k+4,j} = a_{0,4}^{-1} a_{k,j} a_{0,4} \tag{5.20}$$

для всех k.

Из соотношения $x_3 = x_2$ следуют соотношения

$$a_{k,3} = a_{k,2} \tag{5.21}$$

для всех k, а из соотношения $x_4^2 x_2 = x_2 x_4^2$ – соотношения

$$a_{k+2,2} = a_{k,2} \tag{5.22}$$

для всех k.

Из соотношения $x_2^2 x_1 = x_4 x_2^2$, записанного как $x_2^2 y = x_4 x_2^4 x_4$ (так как $x_2 = x_3$), имеем соотношения

$$a_{k,2} a_{k+1,2} a_{k+2,4} = a_{k+1,2} a_{k+2,2} a_{k+3,2} a_{k+4,2} \tag{5.23}$$

для всех k.

Из (5.20)–(5.23) следует, что группа $N(2)$ порождается элементами $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ и $a_{0,4}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$a_{0,4} = (a_{1,2}a_{2,2})^{-1}(a_{2,2}a_{1,2})^2 = (a_{2,2}a_{1,2})^{-1}(a_{1,2}a_{2,2})^2$$

и

$$[a_{1,2}, a_{0,4}] = [a_{2,2}, a_{0,4}] = 1.$$

Следовательно, группа $N(2)/N(2)'$ является свободной абелевой группой, порожденной образами $\bar{a}_{1,2}$ и $\bar{a}_{2,2}$ элементов $a_{1,2}$ и $a_{2,2}$.

Как и в доказательстве теоремы 5.6, действие $\tilde{h}$ на $N(2)$ задается формулами $\tilde{h}(a_{1,2}) = a_{2,2}$, $\tilde{h}(a_{2,2}) = a_{3,2} = a_{1,2}$. Индуцированное действие h на $N(2)/N(2)'$ задается формулами $h(\bar{a}_{1,2}) = \bar{a}_{2,2}$, $h(\bar{a}_{2,2}) = \bar{a}_{1,2}$, и характеристический многочлен этого действия равен $(t-1)(t+1)$.

Следствие 5.18. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует гурвицевская C-группа G, состоящая из двух неприводимых компонент, имеющая многочлен Александера $\Delta(t) = (t-1)P(t)$ такой, что $|P(1)| = k$.*

Доказательство. Если $k > 2$, то согласно предложению 5.16 имеем $P(1) = -k$, где $P(t) = -\sum_{i=0}^{k-1} t^{2i}$ является множителем многочлена Александера $\Delta(t) = (1-t)\sum_{i=0}^{k-1} t^{2i}$ группы $G_{2,2k}$. Если $k = 2$, то согласно предложению 5.17 группа $G(2)$ обладает требуемым свойством, так как ее многочлен Александера $\Delta(t) = (t-1)(t+1)$. В случае $k = 1$ можно взять абелеву гурвицевскую C-группу $G = \mathbb{Z}^2$.

Предложение 5.19. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существуют*:

(i) *неприводимая гурвицевская* C*-группа, многочлен Александера* $\Delta(t)$ *которой имеет степень* $\deg \Delta(t) = 2k$;

(ii) *гурвицевская* C*-группа, состоящая из двух неприводимых компонент, многочлен Александера которой есть* $\Delta(t) = (t-1)P(t)$, *где многочлен* $P(t)$ *имеет степень* $\deg P(t) = k$.

Доказательство. Согласно предложениям 5.12 и 5.15 многочлен Александера $\Delta(t)$ гурвицевского произведения $G_{2,3}^{\diamond k}$ равен $(t^2 - t + 1)^k$.

Чтобы доказать утверждение (ii), достаточно взять гурвицевские C-группы $G(2) \diamond G_{2,3}^{\diamond n}$, если $k = 2n+1$, т.е. является нечетным числом, и $\mathbb{Z}^2 \diamond G_{2,3}^{\diamond n}$, если $k = 2n$, т.е. четно.

Вопрос 5.20. *Пусть* $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ – *многочлен, все корни которого являются корнями из единицы,* $t = 1$ *является корнем многочлена* $P(t)$ *кратности* k, *и пусть* $P(0) = (-1)^{\deg P(t) - k}$. *Предположим также, что* $P(1) = 1$, *если* $k = 0$. *Существует ли гурвицевская* C*-группа* G, *имеющая многочлен Александера* $\Delta(t) = P(t)$?

§ 6. Первое число Бетти циклических накрытий плоскости

Рассмотрим циклическое накрытие $f = f_\infty : X_\infty \to X' = \mathbb{C}^2 \setminus H$, соответствующее каноническому эпиморфизму $\nu : \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H) \to \mathbb{F}_1$. Пусть $h \in \operatorname{Deck}(X_\infty / X') \simeq \mathbb{F}_1$ – накрывающее преобразование, соответствующее C-порождающему элементу $x \in \mathbb{F}_1$. Будем называть h *монодромией кривой Гурвица* H. Пространство X' будем рассматривать как факторпространство $X' = X_\infty / \mathbb{F}_1$. В этой ситуации Милнор [17] рассмотрел точную последовательность цепных комплексов

$$0 \to C.(X_\infty) \xrightarrow{h - \mathrm{id}} C.(X_\infty) \xrightarrow{\varphi_*} C.(X') \to 0,$$

которая приводит к точной последовательности групп гомологий

$$\cdots \to H_1(X_\infty) \xrightarrow{h - \mathrm{id}} H_1(X_\infty) \xrightarrow{f_*} H_1(X') \to H_0(X_\infty) \to 0 \tag{6.1}$$

(будем писать h вместо h_*, когда это не приводит к недоразумению).

Если $G_n \subset \mathbb{F}_1$ – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом h^n, то $X'_n = X_\infty / G_n$ и $X' = X'_n / \mu_n$, где $\mu_n = \mathbb{F}_1 / G_n$ – циклическая группа порядка n. Обозначим через h_n автоморфизм пространства X'_n, индуцированный монодромией h. Тогда h_n является порождающим элементом группы накрывающих преобразований $\operatorname{Deck}(X'_n / X') = \mu_n$, действующей на X'_n. Применим последовательность

$$\cdots \to H_1(X_\infty) \xrightarrow{h^n - \mathrm{id}} H_1(X_\infty) \xrightarrow{g_{n,*}} H_1(X'_n) \to H_0(X_\infty) \to 0, \tag{6.2}$$

построенную аналогично последовательности (6.1), к бесконечному циклическому накрытию $g_n = g_{\infty,n} : X_\infty \to X'_n$ для исследования группы $H_1(X'_n)$.

Обозначим через $H_1(X_\infty,\mathbb{C})_n$ подпространство векторного пространства $H_1(X_\infty,\mathbb{C})$, порожденное собственными векторами автоморфизма h_*, которые имеют собственные значения λ, являющиеся корнями степени n из единицы, и через $H_1(X_\infty,\mathbb{C})_{n,\neq 1}$ – векторное подпространство, порожденное собственными векторами, которые имеют собственные значения $\lambda\neq 1$, являющиеся корнями степени n из единицы. Согласно теореме 5.1 имеем $\dim H_1(X_\infty,\mathbb{C})_n=r_n$ и $\dim H_1(X_\infty,\mathbb{C})_{n,\neq 1}=r_{n,\neq 1}$, где r_n (соответственно, $r_{n,\neq 1}$) – число корней многочлена Александера $\Delta(t)$ кривой Гурвица $\overline{H}$, являющихся (соответственно, не равными 1) корнями степени n из единицы. Отметим, что согласно лемме 5.7 и теореме 5.9 выполнено

$$r_n-r_{n,\neq 1}=r_1=\#\{\text{неприводимые компоненты кривой }\overline{H}\,\}-1.$$

Предложение 6.1. *Имеем*:
(i) $\dim H_1(X'_n,\mathbb{C})=r_n+1$;
(ii) $\dim H_1(X'_n,\mathbb{C})_1=r_1+1=\#\{$*неприводимые компоненты кривой* $\overline{H}\,\}$.

Доказательство следует из точной последовательности (6.2).

Пусть $\overline{H}$ – кривая Гурвица, состоящая из k неприводимых компонент $\overline{H}_1,\dots$ $\dots,\overline{H}_k$. Выберем прямую $L\subset\mathbb{C}^2$, принадлежащую пучку прямых (относительно которого кривая $\overline{H}$ определена) и трансверсально пересекающую кривую H. Обозначим через γ_i окружность малого радиуса, лежащую в L, с центром в одной из точек пересечения $H_i\cap L$. Легко видеть, что циклы $\gamma_1,\dots,\gamma_k$, соответствующие выбранным окружностям, образуют базис группы $H_1(\mathbb{C}^2\setminus H,\mathbb{Z})$ и не зависят от выбора прямой L. Пусть $\bar\gamma_i$ – цикл в $H_1(X'_n,\mathbb{Z})$, соответствующий простому пути $f_n^{-1}(\gamma_i)$, $i=1,\dots,k$.

Лемма 6.2. *Циклы* $\bar\gamma_i$, $i=1,\dots,k$, *являются линейно независимыми в* $H_1(X'_n,\mathbb{Z})$ *и образуют базис в* $H_1(X'_n)_1$.

Доказательство. Очевидно, все циклы $\bar\gamma_i$ инвариантны при действии h_n. Поэтому доказательство следует из предложения 6.1, (ii) и из замечания о том, что при гомоморфизме $(f_n)_*\colon H_1(X'_n,\mathbb{Z})\to H_1(\mathbb{C}^2\setminus H,\mathbb{Z})$ мы имеем $(f_n)_*(\bar\gamma_i)=n\gamma_i$.

В обозначениях из доказательства теоремы 4.1 накрытие f_n может быть продолжено до отображения $\tilde f_n\colon\widetilde X_n\to\mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль $\overline{H}$ и, возможно, вдоль $\bar L_\infty$, где $\widetilde X_n$ является замкнутым четырехмерным многообразием, локально изоморфным над каждой особой точкой кривой $\overline{H}$ комплексно-аналитической особенности, заданной уравнением $w_1^n=\widetilde F_1(u_1,v_1)$, где

$$\widetilde F_1(u_1,v_1)=\prod_j(v_1-v_{1,j}(u_1))$$

и произведение взято по всем ветвям кривой $\overline{H}$, замыкание которых содержит эту особую точку. Кроме того, $\widetilde X_n$ над каждой точкой пересечения кривой $\overline{H}$ и прямой L_∞ локально изоморфно особенности, заданной уравнением $w_2^n=\bigl(v_2-e^{\frac{2\pi i}{m}}\bigr)u^d$, где d – наименьшее неотрицательное целое число, для которого число $m+d$ делится на n. Многообразие $\widetilde X_n$, если $\tilde f_n^{-1}(L_\infty)\subset\operatorname{Sing}\widetilde X_n$, может быть нормализовано (как и в алгебраическом случае), и мы получаем накрытие $\tilde{f}_{n,\mathrm{norm}}\colon \widetilde{X}_{n,\mathrm{norm}} \to \mathbb{CP}^2$, в котором $\widetilde{X}_{n,\mathrm{norm}}$ является особым аналитическим многообразием в его особых точках, число которых конечно. Мы можем разрешить эти особые точки и получить гладкое многообразие $\overline{X}_n$. Пусть $\sigma\colon \overline{X}_n \to \widetilde{X}_{n,\mathrm{norm}}$ – разрешение особых точек, $E = \sigma^{-1}(\operatorname{Sing}\widetilde{X}_{n,\mathrm{norm}})$ и $\bar{f}_n = \tilde{f}_{n,\mathrm{norm}} \circ \sigma$. Пусть $R_i = \tilde{f}^{-1}_{n,\mathrm{norm}}(\overline{H}_i)$, $i = 1,\dots,k$, и $R_\infty = \tilde{f}^{-1}_{n,\mathrm{norm}}(L_\infty)$. Заметим, что ограничение отображения $\tilde{f}_{n,\mathrm{norm}}$ на каждую кривую R_i, $i = 1,\dots,k$, является взаимно однозначным, а ограничение $\tilde{f}_{n,\mathrm{norm}}$ на R_∞ является n_0-листным циклическим накрытием, где $n_0 = \text{НОД}(n,d)$ и индекс ветвления n_∞ отображения $\tilde{f}_{n,\mathrm{norm}}$ вдоль R_∞ равен $\frac{n}{n_0}$. Как и в алгебраическом случае, легко показать, что кривая R_∞ является неприводимой. Обозначим через $\overline{R}_i = \sigma^{-1}(R_i)$, $i = 1,\dots,k,\infty$, собственный прообраз кривой R_i.

Имеем вложения $i_1\colon X'_n \hookrightarrow X_n = \overline{X}_n \setminus E$ и $i_2\colon X_n \hookrightarrow \overline{X}_n$.

Лемма 6.3. *Индуцированный гомоморфизм* $i_{1*}\colon H_1(X'_n) \to H_1(X_n)$ *является эпиморфизмом, ядро которого* $\ker i_{1*} = H_1(X'_n)_1$.

Доказательство. Имеем

$$X'_n = X_n \setminus \biggl(\bigcup_{i=1}^k \overline{R}_i\biggr) \cup \overline{R}_\infty,$$

и каждая кривая $\overline{R}_i$, $i = 1,\dots,k,\infty$, является подмногообразием коразмерности два в X_n. Поэтому каждый одномерный цикл $\gamma \subset X_n$ может быть сдвинут в дополнение к $\bigl(\bigcup_{i=1}^k \overline{R}_i\bigr) \cup \overline{R}_\infty$. Следовательно, $i_{1,*}$ является эпиморфизмом.

Пусть комплексная прямая $L \subset \mathbb{CP}^2$ пересекает прямую L_∞ в точке $q \in L_\infty \setminus \overline{H}$, и пусть γ_∞ – небольшая простая петля вокруг L_∞, лежащая в L. Тогда $f_n^{-1}(\gamma_\infty)$ распадается в несвязное объединение n_0 простых петель $\bar{\gamma}_{\infty,i}$, $i = 1,\dots,n_0$. Поскольку кривая R_∞ неприводима, каждые две петли $\bar{\gamma}_{\infty,i}$ и $\bar{\gamma}_{\infty,j}$ принадлежат одному и тому же классу гомологий в $H_1(X'_n)$ (обозначим его $\bar{\gamma}_\infty$). Следовательно, $n_0\bar{\gamma}_\infty \in H_1(X'_n)_1$. Теперь лемма следует из замечания о том, что $\bar{\gamma}_1,\dots,\bar{\gamma}_k,\bar{\gamma}_\infty$ порождают ядро $\ker i_{1*}$ и $\bar{\gamma}_1,\dots,\bar{\gamma}_k$ порождают $H_1(X'_n)_1$.

Лемма 6.4. *Гомоморфизм* $i_{2*}\colon H_1(X_n,\mathbb{C}) \to H_1(\overline{X}_n,\mathbb{C})$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Имеем $X_n = \overline{X}_n \setminus E$. Обозначим через $T \subset \overline{X}_n$ замкнутую регулярную окрестность дивизора E, и пусть ∂T – ее граница, $T' = T \setminus E$ и $T^0 = T\setminus\partial T$. Известно (см., например, доказательство предложения 3.4 в [5]), что гомоморфизм $i_*\colon H_1(\partial T,\mathbb{C}) \to H_1(T,\mathbb{C})$, индуцированный вложением $i\colon \partial T \hookrightarrow T$, является изоморфизмом и, кроме того, существует деформационная ретракция $T' \searrow \partial T$. Следовательно, существует деформационная ретракция $X_n \searrow X_n^0$, где $X_n^0 = X_n \setminus T^0$. Поэтому лемма следует из точной последовательности Майера–Виеториса

$$H_2(\overline{X}_n) \to H_1(\partial T) \to H_1(T) \oplus H_1(X_n^0) \to H_1(\overline{X}_n) \to 0.$$

Доказательство теоремы 0.4 следует из лемм 6.3, 6.4 и предложения 6.1.

Предложение 6.5. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существуют*:

(i) *неприводимая кривая Гурвица* $\overline{H}_k$ *такая, что разрешение* $\overline{X}_{k,6}$ *особенностей циклического накрытия плоскости* $\mathbb{CP}^2$ *степени шесть, разветвленного вдоль* $\overline{H}_k$, *имеет первое число Бетти* $b_1(\overline{X}_{k,6}) = 2k$;

(ii) *кривая Гурвица* $\overline{H}_k$, *состоящая из двух неприводимых компонент, такая, что первое число Бетти* $b_1(\overline{X}_{k,6})$ *разрешения* $\overline{X}_{k,6}$ *особенностей циклического накрытия степени шесть, разветвленного вдоль* $\overline{H}$, *равно* k.

Доказательство. При доказательстве предложения 5.19 было показано, что многочлен Александера $\Delta(t)$ гурвицевского произведения $G_{2,3}(k) = G_{2,3}^{\diamond k}$ равен $(t^2 - t + 1)^k$ и что многочлены Александера $\Delta(t)$ гурвицевских произведений $G_{2,3}(2,n) = G(2) \diamond G_{2,3}^{\diamond n}$ и $G_{2,3}(\mathrm{ab}, n) = \mathbb{Z}^2 \diamond G_{2,3}^{\diamond n}$ соответственно равны $(t-1) \times (t+1)(t^2 - t + 1)^n$ и $(1-t)(t^2 - t + 1)^n$.

Группы $G_{2,3}(k)$, $G_{2,3}(2,n)$ и $G_{2,3}(\mathrm{ab}, n)$ являются гурвицевскими C-группами. Кроме того, мы можем предполагать, что степени этих гурвицевских C-групп делятся на шесть (можно взять y^6, где y – произведение C-порождающих в гурвицевском C-копредставлении группы, и применить лемму 5.11). Следовательно, согласно [11, теорема 6.2] каждая из этих групп может быть реализована как фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ для некоторой кривой Гурвица степени, делящейся на шесть. Кривая $\overline{H}$ является неприводимой в случае групп $G_{2,3}(k)$ и состоит из двух неприводимых компонент в остальных двух случаях. Поэтому из теоремы 0.4 вытекает предложение 6.5.

Предложение 6.6. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует кривая Гурвица* $\overline{H}_k$, *состоящая из* $k+1$ *неприводимых компонент, имеющая особые точки типа* $w^{2^{3k-1}} - z^{2^{3k-1}} = 0$ *и являющаяся кривой ветвления двулистного циклического накрытия* $\bar{f}_2 \colon \overline{X}_{k,2} \to \mathbb{CP}^2$ *с* $b_1(\overline{X}_{k,2}) = k$.

В частности, кривая Гурвица $\overline{H}_1$ *имеет* $\deg \overline{H}_1 = 2^{10}$, *число ее особых точек равно* 2^{16}, *и все эти точки являются особыми точками типа* $w^4 - z^4 = 0$.

Доказательство. Гурвицевское произведение $G(2,k) = G(2)^{\diamond k}$ является гурвицевской C-группой степени $m = 2^{3k-1}$. Согласно предложениям 5.12 и 5.17 ее многочлен Александера – это

$$\Delta_k(t) = (t-1)^k (t+1)^k.$$

Согласно [11, теорема 6.2] каждая группа $G(2,k)$ может быть реализована как фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H_k)$ для некоторой кривой Гурвица $\overline{H}_k$ четной степени и с особыми точками типа $w^m - z^m = 0$. Поскольку кратность корня $t = 1$ многочлена Александера $\Delta_k(t)$ равна k, из леммы 5.7 и теоремы 5.9 следует, что кривая $\overline{H}_k$ состоит из $k+1$ неприводимых компонент.

Согласно теореме 0.4 первое число Бетти $b_1(\overline{X}_{k,2}) = k$, так как кратность корня $t = -1$ многочлена Александера $\Delta_k(t)$ равна k.

Чтобы доказать существование кривой Гурвица $\overline{H}_1$ с требуемыми свойствами, достаточно найти некоторое целое число m и некоторое брэйд-монодромное разложение на множители (см. [12])

$$\Delta_m^2 = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n$$

кривой Гурвица $\overline{H}$ такое, что группа, заданная копредставлением

$$\langle x_m, \dots, x_m \mid x_i = b_j(x_i) \text{ для } i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\rangle,$$

является C-изоморфной группе $G(2)$.

Чтобы найти такое копредставление, напомним кратко доказательство теоремы 6.2 из [11] и применим его для вычисления инвариантов кривой Гурвица $\overline{H}_1$, для которой $\pi_1(\mathbb{C} \setminus H_1) \simeq G(2)$.

Группа $G(2)$ задана копредставлением (5.19). Рассмотрим группу

$$G_{4,4} \simeq \langle x_1, \dots, x_4 \mid x_i = \Delta_4^2(x_i) \text{ для } i = 1, \dots, 4\rangle, \tag{6.3}$$

где Δ_4 – элемент Гарсайда в группе кос Br_4. Коса Δ_4^2 является брэйд-монодромией особенности, заданной уравнением $w^4 - z^4 = 0$, и $s_0 = \Delta_4^2$ (разложение на множители с единственным множителем) является брэйд-монодромным разложением на множители четырех прямых в $\mathbb{CP}^2$, пересекающихся в одной точке.

Чтобы получить копредставление (5.19), необходимо добавить соотношения

$$x_2^2 x_1 x_2^{-2} = x_4, \qquad x_4^2 x_2 x_4^{-2} = x_2, \qquad x_3 = x_2 \tag{6.4}$$

в копредставление (6.3). Для этого в обозначениях и терминологии из [11] сначала необходимо осуществить несколько раз удвоение (см. [11, теорема 3.2]) брэйд-монодромного разложения на множители $s_0 = \Delta_4^2$ для того, чтобы иметь возможность раздвинуть порождающие элементы $x_1, \dots, x_4$ и заменить каждое соотношение из (6.4) на соотношения $x_i = x_{i+4}$ и соотношения, имеющие вид $x_i = b(x_i)$, где b – некоторая коса, сопряженная стандартному порождающему элементу группы кос. Легко видеть, что в нашем случае достаточно осуществить два раза операцию удвоения, и мы получим брэйд-монодромное разложение на множители $s_1 = d^2(s_0)$ элемента Δ_{16}^2 (удвоение $d^2(s_0)$ определено в [11] формулой (25)), каждый множитель которого либо сопряжен элементу Δ_4^2, либо сопряжен стандартному порождающему элементу группы Br_{16}, и группа

$$\langle x_1, \dots, x_{16} \mid x_i = b(x_i),\ i = 1, \dots, 16, \text{ и } b \text{ – множители в } s_1\rangle$$

C-изоморфна группе $G_{4,4}$. Число множителей в s_1, сопряженных элементу Δ_4^2, равно 4^2.

Затем, чтобы добавить соотношения (6.4) к копредставлению (6.3), достаточно три раза применить лемму 3.4 из [11] и получить брэйд-монодромное разложение на множители s_2 элемента $\Delta_{2^{10}}^2$, каждый множитель которого сопряжен либо элементу Δ_4^2, либо стандартному порождающему элементу группы $\mathrm{Br}_{2^{10}}$. Число множителей разложения s_2, сопряженных элементу Δ_4^2, равно 4^8. Разложение s_2 является брэйд-монодромным разложением на множители кривой Гурвица $\overline{H}_1$, $\deg \overline{H}_1 = 2^{10}$, кривая $\overline{H}_1$ имеет 4^8 особых точек вида $w^4 - z^4 = 0$, и $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H) \cong G(2)$ по построению разложения s_2.

Список литературы

1. *Auroux D.* Symplectic 4-manifolds as branched coverings of $\mathbb{P}^2$ // Invent. Math. 2000. V. 139. P. 551–602.
2. *Auroux D., Katzarkov L.* Branched coverings of $\mathbb{P}^2$ and invariants of symplectic 4-manifolds // Invent. Math. 2000. V. 142. P. 631–673.
3. *Burde G., Zieschang H.* Knots. Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1985.
4. *Crowell R., Fox R.* Knot Theory. Boston: Ginn, 1963.
5. *Dimca A.* Singularities and Topology of Hypersurfaces. Berlin–N.Y: Springer-Verlag, 1992.
6. *Esnault E.* Fibre de Milnor d'un cone sur une courbe plane singuliére // Invent. Math. 1982. V. 68. P. 477–496.
7. *Kohno T.* An algebraic computation of the Alexander polynomial of a plane algebraic curve // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1983. V. 59. P. 94–97.
8. *Куликов В. С., Куликов Вик. С.* О монодромии и смешанной структуре Ходжа в когомологиях бесконечного циклического накрытия дополнения к плоской кривой // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №2. С. 143–162.
9. *Куликов Вик. С.* Многочлены Александера плоских алгебраических кривых // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №1. С. 76–101.
10. *Куликов Вик. С.* Геометрическая реализация C-групп // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №4. С. 194–203.
11. *Куликов Вик. С.* Формула разложения на множители полного поворота с удвоенным числом нитей // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. №1. С. 123–158.
12. *Куликов Вик. С., Харламов В. М.* О брэйд-монодромных разложениях на множители // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. №3. С. 79–118.
13. *Куликова О. В.* О фундаментальных группах дополнений к кривым Гурвица // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. №1. С. 125–132.
14. *Lê Dũng Tráng.* Sur les noeuds algébriques // Compositio Math. 1972. V. 25. P. 281–321.
15. *Libgober A.* Alexander polynomials of plane algebraic curves and cyclic multiple planes // Duke Math. J. 1982. V. 49. P. 833–851.
16. *McDuff D., Salamon D.* Introduction to Symplectic Topology (second edition). Oxford Math. Monographs. Oxford: Clarendon Press, 1998.
17. *Milnor J.* Infinite cyclic coverings // Conf. on the Topology of manifolds. Boston: Weber & Schmidt, 1968. P. 115–133.
18. *Moishezon B.* The arithmetic of braids and a statement of Chisini // Contemporary Math. 1994. V. 164. P. 151–175.
19. *Rolfsen D.* Knots and Links // Math. Lect. Series 7. Houston: Publish or Perish, 1990.
20. *Randell R.* Milnor fibres and Alexander polynomials of plane curves // Proc. Symp. Pure Math. 40. Part 2. (Arcata Singularities Conference). AMS, 1983. P. 415–420.
21. *Stein K.* Analytische Zerlegungen komplexer Räume // Math. Ann. 1956. V. 132. P. 63–93.
22. *Zariski O.* Algebraic surfaces. N.Y.: Springer-Verlag, 1971.

Университет г. Кайзерслаутерн
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
E-mail: `greuel@mathematik.uni-kl.de`,
`kulikov@mi.ras.ru`

Поступило в редакцию
23.11.2004