УДК 514.756.4

Вик. С. Куликов

О многочленах Александера кривых Гурвица

Исследованы свойства многочленов Александера кривых Гурвица. Дано полное описание множества многочленов Александера неприводимых кривых Гурвица в терминах их корней.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Исследование свойств многочленов Александера кривых Гурвица в $\mathbb{CP}^2$ было начато в работе [1]. Напомним кратко определения кривой Гурвица (относительно линейной проекции $\mathrm{pr}\colon \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1$) и ее многочлена Александера.

Пусть F_1 – относительно минимальная линейчатая поверхность, $\mathrm{pr}\colon F_1 \to \mathbb{CP}^1$ – морфизм, задающий линейчатую структуру, R – слой морфизма pr и E_1 – исключительное сечение, $E_1^2 = -1$. Отождествим $\mathrm{pr}\colon F_1 \to \mathbb{CP}^1$ с линейной проекцией $\mathrm{pr}\colon \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1$ из точки $p_\infty \in \mathbb{CP}^2$ (точка p_∞ является образом кривой E_1 при стягивании его в точку).

Согласно определению, данному в работе [5], образ $\overline{H} = f(S) \subset F_1$ гладкого отображения $f\colon S \to F_1 \setminus E_1$ ориентированной замкнутой вещественной поверхности S называется *кривой Гурвица* (относительно проекции pr) степени m, если найдется конечное подмножество $Z \subset \overline{H}$ такое, что:

(i) f является вложением поверхности $S \setminus f^{-1}(Z)$ и для каждой точки $s \notin Z$ поверхность $\overline{H}$ и слой $R_{\mathrm{pr}(s)}$ проекции pr пересекаются в s трансверсально с положительным индексом пересечения;

(ii) для каждой точки $s \in Z$ найдется окрестность $U \subset F_1$ этой точки такая, что $\overline{H} \cap U$ является комплексно-аналитической кривой и комплексная ориентация на $\overline{H} \cap U \setminus \{s\}$ совпадает с ориентацией, индуцированной с поверхности S отображением f;

(iii) ограничение проекции pr на $\overline{H}$ является конечным отображением степени m.

Это определение кривых Гурвица эквивалентно следующему определению. Пусть $\mathbb{C}^2_i$, $i = 1, 2$, – две копии аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами (u_i, v_i), $u_2 = 1/u_1$ и $v_2 = v_1/u_1$, которые покрывают $\mathbb{CP}^2 \setminus p_\infty$ (где p_∞ – центр проекции) так, что проекция pr задана формулами $(u_i, v_i) \mapsto u_i$ в картах $\mathbb{C}^2_i$. Множество

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 05-01-00455), NWO (грант № 047.011.2004.026/05-02-89000-НВО) и CRDF (грант № RUM1-2692-MO-05).

$\overline{H} \subset \mathbb{CP}^2 \setminus \{p_\infty\}$, замкнутое в $\mathbb{CP}^2$, называется *кривой Гурвица степени* m, если для $i = 1, 2$ множество $\overline{H} \cap \mathbb{C}_i^2$ совпадает с множеством решений уравнения

$$F_i(u_i, v_i) := v_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,i}(u_i) v_i^j = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющего следующим свойствам:

(i) $F_i(u_i, v_i)$ являются C^∞-гладкими комплекснозначными функциями в $\mathbb{C}^2$;

(ii) $F_i(u_i, v_i)$ имеют лишь конечное число критических значений относительно проекции pr, т. е. существует конечное число значений переменной u_i, скажем $u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}$, таких, что полиномиальное уравнение

$$v_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,i}(u_{i,0}) v_i^j = 0 \tag{2}$$

не имеет кратных корней для $u_{i,0} \notin \{u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}\}$;

(iii) если $v_{i,j}$ является кратным корнем уравнения (2) для $u_{i,j} \in \{u_{i,1}, \dots$ $\dots, u_{i,n_i}\}$, то в окрестности точки $(u_{i,j}, v_{i,j})$, которую мы называем *критической точкой* кривой $\overline{H}$, множество $\overline{H}$ совпадает с множеством решений некоторого комплексно-аналитического уравнения.

Кривая Гурвица $\overline{H}$ называется *неприводимой*, если $\overline{H} \setminus M$ связно для любого конечного множества $M \subset \overline{H}$, и мы будем говорить, что кривая Гурвица $\overline{H}$ *состоит из* k *неприводимых компонент*, если

$$k = \max \#\{\text{связные компоненты кривой } \overline{H} \setminus M\},$$

где максимум взят по всем конечным множествам $M \subset \overline{H}$.

Пусть H – *аффинная кривая Гурвица*, т. е. $H = \overline{H} \cap (\mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty)$, где L_∞ – прямая, являющаяся слоем проекции pr, находящаяся в общем положении по отношению к $\overline{H}$. В этом случае фундаментальная группа $\pi_1 = \pi_1\bigl(\mathbb{CP}^2 \setminus (\overline{H} \cup L_\infty)\bigr)$ не зависит от выбора прямой L_∞ и принадлежит классу $\mathcal{C}$ так называемых C-групп.

По определению C*-группа* – это группа вместе с конечным копредставлением

$$G_W = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i = w_{i,j,k}^{-1} x_j w_{i,j,k},\ w_{i,j,k} \in W \rangle, \tag{3}$$

где $W = \{w_{i,j,k} \in \mathbb{F}_m \mid 1 \leqslant i, j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant h(i,j)\}$ – некоторый набор, состоящий из элементов свободной группы $\mathbb{F}_m$ (возможно, что $w_{i_1,j_1,k_1} = w_{i_2,j_2,k_2}$ для $(i_1, j_1, k_1) \neq (i_2, j_2, k_2)$), порожденной свободными порождающими $x_1, \dots, x_m$, и $h\colon \{1, \dots, m\}^2 \to \mathbb{Z}$ – некоторая функция. Такое копредставление называется C*-копредставлением* (буква C означает, что все соотношения являются сопряжениями).

Пусть $\varphi_W : \mathbb{F}_m \to G_W$ – канонический эпиморфизм. Элементы $\varphi_W(x_i) \in G$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и элементы, сопряженные им, называются C*-порождающими элементами* C-группы G. Пусть $f\colon G_1 \to G_2$ – некоторый гомоморфизм C-групп. Он называется C*-гомоморфизмом*, если образы всех C-порождающих элементов группы G_1 при гомоморфизме f являются C-порождающими элементами C-группы G_2. Мы будем рассматривать C-группы с точностью до C-изоморфизмов.

Любую C-группу G можно реализовать как фундаментальную группу $\pi_1(S^4 \setminus S)$ дополнения к замкнутой ориентированной поверхности S в четырехмерной сфере S^4 (см., например, [3], о других свойствах C-групп см. [2], [4], [6]).

C-копредставление (3) называется *гурвицевским C-копредставлением степени m*, если для каждого $i = 1, \dots, m$ слово $w_{i,i,1}$ совпадает с произведением $x_1 \dots x_m$, и C-группа G называется *гурвицевской C-группой степени m*, если она обладает гурвицевским C-копредставлением степени m. Другими словами, C-группа G является гурвицевской C-группой степени m, если существуют C-порождающие элементы $x_1, \dots, x_m$, порождающие группу G, такие, что произведение $x_1 \dots x_m$ принадлежит центру группы G. Отметим, что степень гурвицевской C-группы G определена неканонически и зависит от ее гурвицевского C-копредставления. Обозначим через $\mathcal{H}$ класс всех гурвицевских C-групп.

Пусть $\overline{H}$ – кривая Гурвица степени m. Копредставление Зариского–ван Кампена группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$, где $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ и слой L_∞ проекции pr находится в общем положении относительно кривой $\overline{H}$, определяет на π_1 структуру гурвицевской C-группы степени m (см. [4]). В работе [4] было доказано, что произвольная гурвицевская C-группа G степени m может быть реализована как фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ для некоторой кривой Гурвица $\overline{H}$ с особыми точками типа $w^m - z^m = 0$, имеющей степень $\deg \overline{H} = 2^n m$, где n зависит от гурвицевского C-копредставления группы G. Поскольку мы рассматриваем C-группы с точностью до C-изоморфизмов, то класс $\mathcal{H}$ совпадает с классом $\{\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)\}$ фундаментальных групп дополнений к аффинным кривым Гурвица.

Легко показать, что[1] G/G' является конечно порожденной свободной абелевой группой для любой C-группы G. C-группа G называется *неприводимой*, если $G/G' \simeq \mathbb{Z}$, и мы будем говорить, что группа G состоит из *n неприводимых компонент*, если $G/G' \simeq \mathbb{Z}^n$. Если гурвицевская C-группа G реализована как фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ дополнения к некоторой аффинной кривой Гурвица H, то число неприводимых компонент группы G совпадает с числом неприводимых компонент кривой H. Аналогично, если C-группа G, состоящая из n неприводимых компонент, реализована как $G = \pi_1(S^4 \setminus S)$, то число связных компонент поверхности S равно n.

Свободная группа $\mathbb{F}_n$ с фиксированными свободными порождающими элементами является C-группой, и для любой C-группы G однозначно определен канонический C-эпиморфизм $\nu\colon G \to \mathbb{F}_1$, отображающий все C-порождающие элементы группы G в C-порождающий элемент группы $\mathbb{F}_1$. Обозначим через N его ядро. Отметим, что если C-группа является неприводимой, то N совпадает с G'.

[1] В настоящей работе используются стандартные обозначения G' для коммутанта группы G и $[g_1, g_2]$ для коммутатора элементов $g_1, g_2 \in G$.

Пусть G – C-группа; C-эпиморфизм ν индуцирует следующую точную последовательность групп:

$$1 \to N/N' \to G/N' \xrightarrow{\nu_*} \mathbb{F}_1 \to 1.$$

C-порождающий элемент группы $\mathbb{F}_1$ действует на N/N' сопряжением $\tilde{x}^{-1}g\tilde{x}$, где $g \in N$ и $\tilde{x}$ – один из C-порождающих элементов группы G. Обозначим это действие через h и через $h_{\mathbb{C}}$ – индуцированное действие на $(N/N')_{\mathbb{C}} = (N/N') \otimes \mathbb{C}$. Характеристический многочлен $\Delta(t) = \det(h_{\mathbb{C}} - t\,\mathrm{Id})$ называется *многочленом Александера* C-группы G (если векторное пространство $(N/N')_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$ является бесконечномерным, то по определению $\Delta(t) \equiv 0$). Для кривой Гурвица $\overline{H}$ многочлен Александера $\Delta(t)$ группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ называется *многочленом Александера* кривой $\overline{H}$. Отметим, что многочлен Александера $\Delta(t)$ кривой Гурвица $\overline{H}$ не зависит от выбора общей прямой L_∞.

Гомоморфизм $\nu\colon \pi_1 \to \mathbb{F}_1$ определяет бесконечное циклическое неразветвленное накрытие $f_\infty\colon X_\infty \to \mathbb{C}^2 \setminus H$. Имеем $H_1(X_\infty, \mathbb{Z}) = N/N'$, и действие h на $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ совпадает с действием порождающего элемента группы накрывающих преобразований накрытия f_∞. Из работы [5] следует, что группа $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ является конечно порожденной.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathrm{mod}_n\colon \mathbb{F}_1 \to \mu_n = \mathbb{F}_1/\{h^n\}$ естественный эпиморфизм в циклическую группу μ_n порядка n. Накрытие f_∞ может быть пропущено через циклическое накрытие $f_n\colon X_n \to \mathbb{C}^2 \setminus H$, ассоциированное с эпиморфизмом $\mathrm{mod}_n \circ \nu$, $f_\infty = g_n \circ f_n$. Поскольку кривая Гурвица $\overline{H}$ имеет только аналитические особенности, то накрытие f_n может быть продолжено до гладкого отображения $\bar{f}_n\colon \overline{X}_n \to \mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль $\overline{H}$ и, возможно, вдоль L_∞ (если n не является делителем $\deg \overline{H}$, то $\bar{f}_n$ разветвлено вдоль L_∞), где $\overline{X}_n$ – некоторое гладкое четырехмерное многообразие. Действие h индуцирует действия $\bar{h}_n$ на $\overline{X}_n$ и $\bar{h}_{n*}$ на $H_1(\overline{X}_n, \mathbb{Z})$.

В работе [1] было показано, что любое такое многообразие $\overline{X}_n$ может быть вложено как симплектическое подмногообразие в рациональное проективное трехмерное комплексное многообразие, симплектическая структура на котором задана некоторой целочисленной кэлеровой формой, а также было доказано, что первое число Бетти $b_1(\overline{X}_n) = \dim_{\mathbb{C}} H_1(\overline{X}_n, \mathbb{C})$ многообразия $\overline{X}_n$ равно $r_{n,\neq 1}$, где $r_{n,\neq 1}$ – число корней многочлена Александера $\Delta(t)$ кривой $\overline{H}$, которые являются не равными единице корнями из единицы степени n. В работе [1] были также исследованы свойства многочленов Александера кривых Гурвица. В частности, было доказано, что если кривая Гурвица $\overline{H}$ степени d состоит из n неприводимых компонент и $\Delta(t)$ – ее многочлен Александера, то:

(i) $\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$;

(ii) $\Delta(0) = \pm 1$;

(iii) корни многочлена $\Delta(t)$ являются корнями степени d из единицы;

(iv) действие $h_{\mathbb{C}}$ на $(N/N') \otimes \mathbb{C}$ полупросто;

(v) $\Delta(t)$ является делителем многочлена $(t-1)(t^d-1)^{d-2}$;

(vi) кратность корня $t = 1$ многочлена $\Delta(t)$ равна $n - 1$;

(vii) если $n = 1$, то $\Delta(1) = 1$ и степень $\deg \Delta(t)$ является четной.

Основными результатами настоящей статьи являются следующие теоремы[2].

Теорема 1. *Многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ является многочленом Александера некоторой неприводимой гурвицевской C-группы G тогда и только тогда, когда корни многочлена $P(t)$ являются корнями из единицы и $P(1)=1$.*

Теорема 2. *Пусть многочлен*

$$P(t) = (-1)^m t^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$$

обладает следующими свойствами:

(i) *корни многочлена $P(t)$ являются корнями из единицы;*

(ii) *если ζ – примитивный корень из единицы степени p^k, где p – простое число, то кратность корня $t=\zeta$ многочлена $P(t)$ не превосходит кратности его корня $t=1$.*

Тогда $P(t)$ является многочленом Александера некоторой гурвицевской C-группы G.

Теорема 3. *Многочлен*

$$P(t) = (-1)^{n+k}(t-1)^n(t+1)^k$$

является многочленом Александера некоторой гурвицевской C-группы G тогда и только тогда, когда $n \geqslant k$.

Доказательство теоремы 1 приведено в § 1, а в § 2 дано доказательство теоремы 2. Несмотря на то, что в доказательствах этих теорем использованы почти одни и те же идеи, для более ясного изложения эти доказательства приведены независимо друг от друга. Доказательство теоремы 3 приведено в § 3. Эти теоремы позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Многочлен*

$$P(t) = (-1)^m t^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$$

является многочленом Александера некоторой гурвицевской C-группы G тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:

(i) *корни многочлена $P(t)$ являются корнями из единицы;*

(ii) *если ζ – примитивный корень из единицы степени p^k, где p – простое число, то кратность корня $t=\zeta$ многочлена $P(t)$ не превосходит кратности его корня $t=1$.*

---

[2]Напомним, что класс гурвицевских C-групп совпадает с классом фундаментальных групп дополнений к аффинным кривым Гурвица. Следовательно, говорить о многочленах Александера кривых Гурвица – это то же самое, что говорить о многочленах Александера гурвицевских C-групп. Поэтому полученные результаты формулируются в терминах гурвицевских C-групп, так как их доказательства являются чисто алгебраическими.

В § 4, чтобы сравнить случай гурвицевских C-групп с общим случаем C-групп, приведены пример (см. пример 2) C-группы, состоящей из двух неприводимых компонент, многочлен Александера которой равен $(1-t)(t+1)^2$ (ср. этот пример с теоремой 3), и пример (см. пример 1) C-группы, также состоящей из двух неприводимых компонент, многочлен Александера которой равен $(t-1)^2$ (ср. этот пример с упомянутым выше свойством (vi); см. [1, теорема 5.9]).

§ 1. Многочлены Александера неприводимых гурвицевских C-групп

В настоящем параграфе будет доказана теорема 1.

В работе [1] было доказано, что если многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ является многочленом некоторой неприводимой гурвицевской C-группы G, то корнями многочлена $P(t)$ являются корни из единицы и имеет место равенство $P(1) = 1$. Следовательно, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать обратное утверждение.

Рассмотрим многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$, корни которого являются корнями из единицы, и такой, что $P(1) = 1$.

Вначале покажем, что для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что для любого многочлена $\Psi(t)$ такого, что:

(i) корни многочлена $\Psi(t)$ являются корнями из единицы,

(ii) $\Psi(t)$ не имеет кратных корней,

(iii) $\Psi(1) = 1$,

найдется неприводимая гурвицевская C-группа, имеющая своим многочленом Александера многочлен $\Psi(t)$.

Действительно, каждый многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ можно разложить в произведение: $P(t) = \prod_i \Psi_i(t)$, где каждый множитель $\Psi_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$ не имеет кратных корней. Поскольку корнями многочлена $P(t)$ являются корни из единицы, $P(1) = 1$ и $\Psi_i(1) \in \mathbb{Z}$, то $\Psi_i(1) = 1$ для каждого i. Затем, если $\Delta_1(t)$ и $\Delta_2(t)$ являются многочленами Александера двух неприводимых гурвицевских C-групп G_1 и G_2, заданных гурвицевскими C-копредставлениями $G_i = \langle x_{1,i}, \dots, x_{m_i,i} \mid \mathcal{R}_i \rangle$ степеней m_i, $i = 1, 2$, то согласно [1, предложение 5.12] многочлен Александера гурвицевского произведения $G = G_1 \diamond G_2$ равен $\Delta_1(t)\Delta_2(t)$, где гурвицевское произведение G неприводимых гурвицевских C-групп G_1 и G_2 – это неприводимая гурвицевская C-группа, заданная C-копредставлением:

$$
\begin{aligned}
G = \big\langle x_{1,i}, \dots, x_{m_i,i},\ i = 1,2 \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2,\ x_{m_1,1} = x_{m_2,2},& \\
\big[x_{j,i}, (x_{1,\bar{i}} \dots x_{m_{\bar{i}},\bar{i}})^{m_i}\big] = 1,\ j = 1, \dots, m_i - 1,\ i = 1, 2\big\rangle&,
\end{aligned}
$$

где $\bar{i} = \{1, 2\} \setminus \{i\}$ (напомним, что из соотношений $\mathcal{R}_{\bar{i}}$ следует, что элементы $x_{1,\bar{i}}, \dots, x_{m_{\bar{i}},\bar{i}}$ коммутируют с произведением $x_{1,\bar{i}} \dots x_{m_{\bar{i}},\bar{i}}$).

Зафиксируем один из многочленов $\Psi_i(t) = \Psi(t)$. Обозначим через k такое наименьшее натуральное число, что все корни многочлена $\Psi(t)$ являются корнями степени k из единицы. Поскольку многочлен $\Psi(t)$ не имеет кратных корней, то он является делителем многочлена $t^k - 1$.

Для доказательства существования неприводимой гурвицевской C-группы, многочлен Александера которой совпадает с $\Psi(t)$, рассмотрим факторкольцо $M = M_\Psi = \mathbb{Z}[t]/\bigl(\Psi(t)\bigr)$ кольца $\mathbb{Z}[t]$.

Кольцо M (рассматриваемое как абелева группа относительно операции сложения) является свободной абелевой группой, свободно порожденной элементами $t_0 = t^0, \dots, t_{d-1} = t^{d-1}$, где $d = \deg \Psi(t)$. Пусть $h_0 \in \mathrm{End}_\mathbb{Z} M$ действует по правилу $h_0\bigl(Q(t)\bigr) = tQ(t)$, и пусть вложение $i\colon \mathbb{F}_1 \to \mathrm{End}_\mathbb{Z} M$ определено равенством $i(x_0) = h_0$, где x_0 – порождающий элемент свободной группы $\mathbb{F}_1$. Очевидно, что $h_0 \in \mathrm{Aut} M$. Нетрудно показать (см., например, [7, гл. XV]), что $\det(h_{0,\mathbb{C}} - t\,\mathrm{Id}) = \Psi(t)$, где $h_{0,\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}(M \otimes \mathbb{C})$ индуцирован автоморфизмом h_0.

Поскольку $h_0 \in \mathrm{Aut}\, M$, можно рассмотреть (далее будем использовать мультипликативную запись групповой операции в M) полупрямое произведение

$$G_\Psi = M \leftthreetimes \mathbb{F}_1 \simeq \Bigl\langle t_0, \dots, t_{d-1}, x_0 \mid [t_i, t_j] = 1,\ 0 \leqslant i, j \leqslant d-1,$$
$$x_0^{-1} t_i x_0 = t_{i+1},\ i = 0, \dots, d-2,\ x_0^{-1} t_{d-1} x_0 = \prod_{i=0}^{d-1} t_i^{-a_i} \Bigr\rangle,$$

где числа a_i являются коэффициентами многочлена $\Psi(t) = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i t^i$.

Пусть $\nu\colon G_\Psi \to \mathbb{F}_1$ – канонический эпиморфизм, $\ker \nu = M \subset G_\Psi$. Очевидно, что $h_0(g) = x_0^{-1} g x_0$ для $g \in M$.

При $i \geqslant d$ обозначим $t_i = x_0^{-i} t_0 x^i$. Очевидно, элемент x_0^k принадлежит центру группы G_Ψ, так как $\Psi(t)$ является делителем многочлена $t^k - 1$ и, следовательно,

$$t^{k+i} \equiv t^i \mod \Psi(t)$$

для всех $i \geqslant 0$. Таким образом, мы имеем $t_i = t_{k+i}$ для всех $i \geqslant 0$.

Для многочлена $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$ обозначим

$$x_{P(t)} = x_0 \prod_{i=0}^n t_i^{c_i}.$$

Очевидно, имеет место следующее равенство:

$$x_{P(t)} = x_{Q(t)}, \quad \text{если} \quad P(t) \equiv Q(t) \mod \Psi(t), \tag{4}$$

а также легко проверить, что

$$x_0^{-1} x_{P(t)} x_0 = x_{tP(t)} \tag{5}$$

и

$$\biggl(\prod_{i=0}^n t_i^{c_i}\biggr) x_{Q(t)} \biggl(\prod_{i=0}^n t_i^{c_i}\biggr)^{-1} = x_{(t-1)P(t)+Q(t)} \tag{6}$$

для $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i$ и любого многочлена $Q(t)$. В частности,

$$x_{t^{i+1}} = x_0^{-1} x_{t^i} x_0 \tag{7}$$

при всех $i \geqslant 0$.

Поскольку $\Psi(1) = 1$, то найдется такой многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$, что $\Psi(t) = (t-1)P(t) + 1$. Поэтому из соотношений (4) и (6) следует, что найдется такой элемент $g_{1,0} \in G_\Psi$, что $x_{t^0} = g_{1,0}^{-1} x_0 g_{1,0}$. Следовательно, согласно (5) элементы $x_0, x_{t^0}, \dots, x_{t^{d-1}}$ являются сопряженными друг другу, и поэтому для каждого i элемент $x_{t^i}^k$ принадлежит центру группы G_Ψ.

Так как $t_i = x_0^{-1} x_{t^i}$ и элементы $x_0, t_0, \dots, t_{d-1}$ порождают группу G_Ψ, то элементы $x_0, x_{t^0}, \dots, x_{t^{d-1}}$ также порождают группу G_Ψ. Пусть $w_{1,0}(x_0, x_{t^0}, \dots \dots, x_{t^{d-1}})$ является словом, состоящим из букв $x_0, x_{t^0}, \dots, x_{t^{d-1}}$ и обратных к ним, представляющим элемент $g_{1,0}$. Рассмотрим C-группу $\widetilde{G}$, заданную C-копредставлением:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{G} = \bigl\langle x_1, \dots, x_{d+1} \mid {} & x_{i+1} = x_1^{-1} x_i x_1,\ 2 \leqslant i \leqslant d,\\
& x_1^{-k} x_i x_1^k = x_i,\ 2 \leqslant i \leqslant d+1,\\
& x_2 = w_{1,0}^{-1}(x_1, \dots, x_{d+1})\, x_1 w_{1,0}(x_1, \dots, x_{d+1}) \bigr\rangle.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Прежде всего заметим, что $\widetilde{G}$ является неприводимой C-группой, так как все C-порождающие элементы группы $\widetilde{G}$ сопряжены друг другу. Элемент x_1^k принадлежит центру группы $\widetilde{G}$. Следовательно, $x_i^k = x_1^k$ для $2 \leqslant i \leqslant d+1$, так как элементы x_i^k также сопряжены элементу x_1^k в группе $\widetilde{G}$. Поэтому произведение $x_1^k \dots x_{d+1}^k$ также принадлежит центру группы $\widetilde{G}$. Следовательно, согласно [1, лемма 5.11] $\widetilde{G}$ является гурвицевской C-группой степени $k(d+1)$. (Действительно, можно рассмотреть другое C-копредставление группы $\widetilde{G}$ с C-порождающими элементами $\bar{x}_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant d+1$, $1 \leqslant j \leqslant k$, удовлетворяющими следующим определяющим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_{i,j_1} &= \bar{x}_{i,j_2} && \text{для всех} \quad i, j_1, j_2,\\
x_{1,1}^{-1} x_{i,1} x_{1,1} &= x_{i+1,1} && \text{для} \quad 2 \leqslant i \leqslant d,\\
x_{1,1}^{-k} x_{i,1} x_{1,1}^{k} &= x_{i,1} && \text{для} \quad 2 \leqslant i \leqslant d+1,\\
\Bigl[\prod_{i=1}^{d+1} \prod_{j=1}^{k} \bar{x}_{i,j},\, \bar{x}_{i,j}\Bigr] &= 1 && \text{для всех} \quad i \text{ и } j,
\end{aligned}
$$

$$
x_{2,1} = w_{1,0}^{-1}(x_{1,1}, \dots, x_{d+1,1}) x_{1,1} w_{1,0}(x_{1,1}, \dots, x_{d+1,1}).
$$

Очевидно, что после перенумерации порождающих элементов это копредставление становится гурвицевским C-копредставлением.)

Обозначим через $\tilde{\nu}\colon \widetilde{G} \to \mathbb{F}_1$ канонический C-эпиморфизм и через $\tilde{h}_1$ действие C-порождающего элемента группы $\mathbb{F}_1$ на группе $\widetilde{N} = \ker \tilde{\nu}$, заданное формулой $\tilde{h}_1(g) = x_1^{-1} g x_1$ для $g \in \widetilde{N}$.

Легко видеть, что отображение $\tilde{f}$, переводящее множество $\{x_i \mid i = 1, \dots \dots, d+1\}$ порождающих элементов группы $\widetilde{G}$ во множество $\{x_0, x_{t^i} \mid i = 0, \dots, d-1\}$ порождающих элементов группы G_Ψ по правилу: $\tilde{f}(x_1) = x_0$ и $\tilde{f}(x_i) = x_{t^{i-2}}$ для $2 \leqslant i \leqslant d+1$, может быть продолжено до эпиморфизма $\tilde{f}\colon \widetilde{G} \to G_\Psi$. Очевидно, что $\tilde{f}(\widetilde{N}) = M$ и $h_0\bigl(\tilde{f}(g)\bigr) = \tilde{f}\bigl(\tilde{h}_1(g)\bigr)$ для всех $g \in \widetilde{N}$.

Рассмотрим ограничение $\tilde{f}_{|\widetilde{N}}\colon \widetilde{N} \to M$ эпиморфизма $\tilde{f}$ на $\widetilde{N}$. Поскольку M – свободная абелева группа, то эпиморфизм $\tilde{f}_{|\widetilde{N}}$ разлагается в композицию: $\tilde{f}_{|\widetilde{N}} = \tilde{f}' \circ \tilde{j}$, где $\tilde{j}\colon \widetilde{N} \to \widetilde{N}/\widetilde{N}'$ – канонический эпиморфизм и $\tilde{f}'\colon \widetilde{N}/\widetilde{N}' \to M$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом $\tilde{f}_{|\widetilde{N}}$. Обозначим $\widetilde{K} = \ker \tilde{f}'$.

Из работы [5] следует, что абелева группа $\widetilde{N}/\widetilde{N}'$ является конечно порожденной. Следовательно, группа $\widetilde{K}$ также является конечно порожденной абелевой группой. Пусть $\{g_1, \dots, g_n\}$ – множество элементов из $\widetilde{N}$ таких, что их образы $\tilde{j}(g_1), \dots, \tilde{j}(g_n)$ в $\widetilde{N}/\widetilde{N}'$ порождают группу $\widetilde{K}$, и пусть слова $w_i(x_1, \dots, x_{d+1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, состоящие из букв $x_1^{\pm 1}, \dots, x_{d+1}^{\pm 1}$, представляют элементы g_i. Рассмотрим C-группу G, заданную C-копредставлением:

$$
\begin{aligned}
G = \bigl\langle x_1, \dots, x_{d+1} \mid \mathcal{R},\quad & x_j = w_i^{-1}(x_1, \dots, x_{d+1}) x_j w_i(x_1, \dots, x_{d+1}), \\
& 1 \leqslant j \leqslant d+1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \bigr\rangle,
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $\mathcal{R}$ – множество определяющих соотношений копредставления (8). Группа G также является гурвицевской C-группой. Более того, из определяющих соотношений для группы G следует, что эпиморфизм $\tilde{f}$ может быть разложен в композицию: $\tilde{f} = f \circ r$, где C-эпиморфизм r отображает порождающие элементы x_i, $1 \leqslant i \leqslant d+1$, группы $\widetilde{G}$ в порождающие элементы x_i, $1 \leqslant i \leqslant d+1$, группы G, а $f\colon G \to G_\Psi$ – такой эпиморфизм, что $f(x_1) = x_0$ и $f(x_i) = x_{t^{i-2}}$ при $2 \leqslant i \leqslant d+1$. Из (9) следует, что элементы $r(g_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, принадлежат центру группы G.

Обозначим через $\nu\colon G \to \mathbb{F}_1$ канонический C-эпиморфизм и через $\tilde{h}$ действие C-порождающего элемента группы $\mathbb{F}_1$ на группе $N = \ker \nu$, заданное формулой $\tilde{h}(g) = x_1^{-1} g x_1$ для всех $g \in N$. Очевидно, что $f(N) = M$ и $h_0\bigl(f(g)\bigr) = f\bigl(\tilde{h}(g)\bigr)$ для всех $g \in N$.

Ограничение $f_{|N}\colon N \to M$ эпиморфизма f на группу N также разлагается в композицию: $f_{|N} = f' \circ j$, где $j\colon N \to N/N'$ – канонический эпиморфизм и $f'\colon N/N' \to M$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом $f_{|N}$. Обозначим $K = \ker f'$. Очевидно, что $r'(\widetilde{K}) = K$, где $r'\colon \widetilde{N}/\widetilde{N}' \to N/N'$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом r. Пусть $h \in \operatorname{Aut} N/N'$ – автоморфизм, индуцированный автоморфизмом $\tilde{h}$. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{N} \arrow[rr, "\tilde{j}"] \arrow[dddd, "r"'] & & \widetilde{N}/\widetilde{N}' \arrow[dddd, "r'"'] \arrow[ddr, "\tilde{f}'"] & \\
& \widetilde{K} \arrow[ur] \arrow[dd, "r'"'] & & \\
& & & M \\
& K \arrow[dr] & & \\
N \arrow[rr, "j"'] & & N/N' \arrow[uur, "f'"'] &
\end{tikzcd} \tag{10}
$$

Элементы $\tilde{j}(g_1),\dots,\tilde{j}(g_n)$ порождают группу $\widetilde{K}$. Поскольку гомоморфизмы $\tilde{j}$, j, r и r' в коммутативной диаграмме (10) являются эпиморфизмами, то группа K порождается элементами $j\bigl(r(g_1)\bigr),\dots,j\bigl(r(g_n)\bigr)$.

По построению группы G элементы $r(g_1),\dots,r(g_n)$ принадлежат центру группы G. Следовательно, $h\bigl(j\bigl(r(g_i)\bigr)\bigr)=j\bigl(r(g_i)\bigr)$, т. е. $h_{|K}=\mathrm{Id}$. Однако $t=1$ не является корнем многочлена Александера $\Delta(t)=\det(h_{\mathbb{C}}-t\,\mathrm{Id})$ группы G, так как G – неприводимая C-группа. Поэтому группа K принадлежит ядру естественного гомоморфизма $c\colon N/N'\to(N/N')_{\mathbb{C}}=(N/N')\otimes\mathbb{C}$, который совпадает с подгруппой $\operatorname{Tors}N/N'$ группы N/N', состоящей из всех элементов, имеющих конечные порядки. С другой стороны, $\operatorname{Tors}N/N'\subset\ker f'$, так как M является свободной абелевой группой. Поэтому $K=\operatorname{Tors}N/N'$, и так как f' является эпиморфизмом, то $f'_{\mathbb{C}}\colon(N/N')_{\mathbb{C}}\to M_{\mathbb{C}}$ является изоморфизмом. Следовательно, $\Delta(t)=\Psi(t)$, так как $h_0\bigl(f'(g)\bigr)=f'\bigl(h(g)\bigr)$ для всех $g\in N/N'$.

§ 2. Многочлены Александера гурвицевских C-групп, состоящих из нескольких неприводимых компонент

В настоящем параграфе докажем теорему 2.

Рассмотрим многочлен $P(t)=(-1)^{n+\deg P_0}(t-1)^nP_0(t)\in\mathbb{Z}[t]$ такой, что $P_0(1)\neq0$, все корни многочлена $P_0(t)$ являются корнями из единицы, и если ζ – примитивный корень степени p^k из единицы, где p – простое число, то кратность корня $t=\zeta$ многочлена $P_0(t)$ не превосходит n. Многочлен $P_0(t)$ можно разложить в произведение циклотомических многочленов. Хорошо известно (см., например, [1, лемма 5.3]), что для циклотомического многочлена $\Phi_k(t)$ имеем $\Phi_k(1)\neq1$ тогда и только тогда, когда $k=p^m$ для некоторого простого числа p. Следовательно, можно найти разложение на множители $P(t)=\prod_{i=1}^{n+1}\Psi_i(t)$, где для каждого $i=1,\dots,n$ множитель $\Psi_i(t)=(-1)^{\deg\Psi_{i,0}}(1-t)\Psi_{i,0}(t)\in\mathbb{Z}[t]$ не имеет кратных корней, а $\Psi_{n+1}(t)\in\mathbb{Z}[t]$ – такой многочлен, что $\Psi_{n+1}(1)=1$.

Согласно теореме 1 существует гурвицевская C-группа, многочлен Александера которой совпадает с $\Psi_{n+1}(t)$. Кроме того, согласно [1, предложение 5.12] многочлен Александера гурвицевского произведения $G=G_1\diamond G_2$ двух гурвицевских C-групп равен произведению многочленов Александера этих групп. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно доказать существование гурвицевской C-группы G, многочлен Александера $\Delta(t)$ которой равен $\Psi(t)$, где многочлен $\Psi(t)=(-1)^{\deg\Psi}(1-t)\Psi(t)\in\mathbb{Z}[t]$ не имеет кратных корней и все его корни являются корнями из единицы.

Зафиксируем такой многочлен $\Psi(t)$. Пусть $d=\deg\Psi(t)$. Обозначим через k такое наименьшее положительное целое число, что все корни многочлена $\Psi(t)$ являются корнями степени k из единицы. Поскольку $\Psi(t)$ не имеет кратных корней, то $\Psi(t)$ является делителем многочлена t^k-1. Следовательно, $\Psi(0)=\pm1$ и $\Psi(t)=\pm t^d+\dots$, т. е. его старший коэффициент равен ±1.

Как и в доказательстве теоремы 1, для доказательства существования гурвицевской C-группы, многочлен Александера которой совпадает с $\Psi(t)$, рассмотрим факторкольцо

$$M = M_\Psi = \mathbb{Z}[t]/\big(\Psi(t)\big).$$

Поскольку старший коэффициент многочлена $\Psi(t)$ равен ± 1, то кольцо M (рассматриваемое как абелева группа относительно операции сложения) является свободной абелевой группой, свободно порожденной элементами $t_0 = t^0, \dots, t_{d-1} = t^{d-1}$. Как и выше, пусть эндоморфизм $h_0 \in \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} M$ задан формулой $h_0\big(Q(t)\big) = tQ(t)$ и вложение $i\colon \mathbb{F}_1 \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} M$ определяется равенством $i(x_0) = h_0$, где x_0 – порождающий элемент свободной группы $\mathbb{F}_1$. Имеем $h_0 \in \operatorname{Aut} M$, так как $\Psi(0) = \pm 1$, и $\det(h_{0,\mathbb{C}} - t\operatorname{Id}) = \Psi(t)$.

Поскольку $h_0 \in \operatorname{Aut} M$, то можно рассмотреть полупрямое произведение

$$\begin{aligned} G_\Psi = M \leftthreetimes \mathbb{F}_1 \simeq \Big\langle t_0, \dots, t_{d-1}, x_0 \mid [t_i, t_j] = 1,\ 0 \leqslant i, j \leqslant d-1,& \\ x_0^{-1} t_i x_0 = t_{i+1},\ i = 0, \dots, d-2,& \\ x_0^{-1} t_{d-1} x_0 = \prod_{i=0}^{d-1} t_i^{-a_i} \Big\rangle,& \end{aligned}$$

где a_i – коэффициенты многочлена $\Psi(t) = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i t^i$.

Пусть $\nu_0\colon G_\Psi \to \mathbb{F}_1$ – канонический эпиморфизм, $\ker \nu_0 = M \subset G_\Psi$. Имеем $h(g) = x_0^{-1} g x_0$ для всех $g \in M$.

Для $i \geqslant d$ обозначим $t_i = x_0^{-i} t_0 x^i$. Очевидно, что x_0^k принадлежит центру группы G_Ψ, так как $\Psi(t)$ является делителем многочлена $t^k - 1$, и поэтому

$$t^{k+i} \equiv t^i \mod \Psi(t)$$

для всех $i \geqslant 0$. Таким образом, имеем равенства $t_i = t_{k+i}$ для всех $i \geqslant 0$.

Обозначим $x_{t^i} = x_0 t_i$. Имеем

$$x_0^{-1} x_{t^i} x_0 = x_{t^{i+1}}. \tag{11}$$

Поскольку каждый элемент t_i принадлежит нормальной абелевой подгруппе M группы G_Ψ, то имеет место равенство $x_0^{-1} g x_0 = x_{t^i}^{-1} g x_{t^i}$ для всех $g \in M$. Следовательно, все элементы $x_{t^i}^k$ так же, как и x_0^k, принадлежат центру группы G_Ψ.

Имеем $t_i = x_0^{-1} x_{t^i}$, и элементы $x_0, t_0, \dots, t_{d-1}$ порождают группу G_Φ, поэтому элементы $x_0, x_{t^0}, \dots, x_{t^{d-1}}$ также порождают G_Ψ.

Рассмотрим C-группу $\widetilde{G}$, заданную C-копредставлением

$$\begin{aligned} \widetilde{G} = \big\langle x_1, \dots, x_{k+1} \mid x_{i+1} = x_1^{-1} x_i x_1,\ 2 \leqslant i \leqslant k,\ x_1^{-1} x_{k+1} x_1 = x_2,& \\ [x_i^k, x_j] = 1,\ 2 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant k+1 \big\rangle.& \end{aligned} \tag{12}$$

Прежде всего заметим, что $\widetilde{G}$ является C-группой, состоящей из двух неприводимых компонент. Все элементы x_i^k, $i = 1, \dots, k+1$, принадлежат центру группы $\widetilde{G}$. Следовательно, произведение $x_1^k \dots x_{k+1}^k$ также принадлежит центру группы $\widetilde{G}$. Поэтому, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\widetilde{G}$ является гурвицевской C-группой степени $k(k+1)$.

Обозначим, как и выше, через $\tilde{\nu}\colon \widetilde{G} \to \mathbb{F}_1$ канонический C-эпиморфизм и через $\tilde{h}_1$ действие C-порождающего элемента группы $\mathbb{F}_1$ на группе $\widetilde{N} = \ker \tilde{\nu}$, заданное формулой $\tilde{h}_1(g) = x_1^{-1} g x_1$ для всех $g \in \widetilde{N}$. Как и выше, легко видеть, что отображение $\tilde{f}$, переводящее множество $\{x_i \mid i = 1, \dots, k+1\}$ порождающих элементов группы $\widetilde{G}$ в множество $\{x_0, x_{t^i} \mid i = 0, \dots, k-1\}$ порождающих элементов группы G_Ψ по правилу: $\tilde{f}(x_1) = x_0$ и $\tilde{f}(x_i) = x_{t^{i-2}}$ для $2 \leqslant i \leqslant k+1$, может быть продолжено до эпиморфизма $\tilde{f}\colon \widetilde{G} \to G_\Psi$. Также очевидно, что имеют место равенства $\tilde{f}(\widetilde{N}) = M$ и $h_0\big(\tilde{f}(g)\big) = \tilde{f}\big(\tilde{h}_1(g)\big)$ для всех $g \in \widetilde{N}$.

Как и в доказательстве теоремы 1, ограничение $\tilde{f}_{|\widetilde{N}}\colon \widetilde{N} \to M$ эпиморфизма $\tilde{f}$ на группу $\widetilde{N}$ можно разложить в композицию: $\tilde{f}_{|\widetilde{N}} = \tilde{f}' \circ \tilde{j}$, где $\tilde{j}\colon \widetilde{N} \to \widetilde{N}/\widetilde{N}'$ – канонический эпиморфизм и $\tilde{f}'\colon \widetilde{N}/\widetilde{N}' \to M$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом $\tilde{f}_{|\widetilde{N}}$. Обозначим $\widetilde{K} = \ker \tilde{f}'$.

Группы $\widetilde{N}/\widetilde{N}'$ и $\widetilde{K}$ являются конечно порожденными абелевыми группами. Пусть $g_1, \dots, g_n \in \widetilde{N}$ – такие элементы, что их образы $\tilde{j}(g_1), \dots, \tilde{j}(g_n)$ в $\widetilde{N}/\widetilde{N}'$ порождают группу $\widetilde{K}$, и пусть слова $w_i(x_1, \dots, x_{k+1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, состоящие из букв $x_1^{\pm 1}, \dots, x_{k+1}^{\pm 1}$, представляют элементы g_i. Рассмотрим C-группу G, заданную C-копредставлением:

$$
\begin{aligned}
G = \big\langle x_1, \dots, x_{k+1} \mid \mathcal{R},\, x_j = w_i^{-1}(x_1, \dots, x_{k+1})\, x_j w_i(x_1, \dots, x_{k+1}),& \\
1 \leqslant j \leqslant k+1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\big\rangle,& \qquad (13)
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{R}$ – множество определяющих соотношений копредставления (12). Группа G также является гурвицевской C-группой, состоящей из двух неприводимых компонент. Более того, по построению группы G эпиморфизм $\tilde{f}$ можно разложить в композицию: $\tilde{f} = f \circ r$, где C-эпиморфизм r отображает порождающие элементы x_i, $1 \leqslant i \leqslant d+1$, группы $\widetilde{G}$ в порождающие элементы x_i, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, группы G и $f\colon G \to G_\Psi$ – такой эпиморфизм, что $f(x_1) = x_0$ и $f(x_i) = x_{t^{i-2}}$ для $2 \leqslant i \leqslant k+1$. Из (13) следует, что элементы $r(g_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, принадлежат центру группы G.

Пусть $\nu\colon G \to \mathbb{F}_1$ – канонический C-эпиморфизм и $\tilde{h}$ – действие C-порождающего элемента группы $\mathbb{F}_1$ на группе $N = \ker \nu$, заданное формулой $\tilde{h}(g) = x_1^{-1} g x_1$ для всех $g \in N$. Очевидно, имеют место равенства $f(N) = M$ и $h_0\big(f(g)\big) = f\big(\tilde{h}(g)\big)$ для всех $g \in N$.

Ограничение $f_{|N}\colon N \to M$ эпиморфизма f на N можно также разложить в композицию: $f_{|N} = f' \circ j$, где $j\colon N \to N/N'$ – канонический эпиморфизм и $f'\colon N/N' \to M$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом $f_{|N}$. Обозначим $K = \ker f'$. Очевидно, что $r'(\widetilde{K}) = K$, где $r'\colon \widetilde{N}/\widetilde{N}' \to N/N'$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом r. Пусть $h \in \operatorname{Aut} N/N'$ – автоморфизм, индуцированный автоморфизмом $\tilde{h}$.

Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{N} \arrow[rr, "\tilde{j}"] \arrow[dddd, "r"'] & & \widetilde{N}/\widetilde{N}' \arrow[rr, "c"] \arrow[dddd, "r'"'] \arrow[ddr, "\tilde{f}'"] & & (\widetilde{N}/\widetilde{N}')_{\mathbb{C}} \arrow[dd, "\tilde{f}'_{\mathbb{C}}"] \\
 & \widetilde{K} \arrow[ur] \arrow[dd, "r'"'] & & & \\
 & & & M \arrow[r, "c"] & M_{\mathbb{C}} \\
 & K \arrow[dr] & & & \\
N \arrow[rr, "j"'] & & N/N' \arrow[rr, "c"'] \arrow[uur, "f'"'] & & (N/N')_{\mathbb{C}} \arrow[uu, "f'_{\mathbb{C}}"']
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

Согласно [1, теорема 5.9] значение $t=1$ является корнем кратности один многочлена Александера $\Delta(t)=\det(h_{\mathbb{C}}-t\,\mathrm{Id})$ группы G, так как гурвицевская C-группа G состоит из двух неприводимых компонент. Кроме того, кратность корня $t=1$ характеристического многочлена $\det(h_{0,\mathbb{C}}-t\,\mathrm{Id})=(-1)^d\,\Psi(t)$ также равна единице. Следовательно, собственные подпространства $\bigl((N/N')_{\mathbb{C}}\bigr)_1\subset(N/N')_{\mathbb{C}}$ и $(M_{\mathbb{C}})_1\subset M_{\mathbb{C}}$, соответствующие собственному значению 1, являются одномерными. Затем, $f_{\mathbb{C}}$ является эпиморфизмом таким, что $f'_{\mathbb{C}}\bigl(h_{\mathbb{C}}(v)\bigr)=h_{0,\mathbb{C}}\bigl(f'_{\mathbb{C}}(v)\bigr)$ для всех $v\in(N/N')_{\mathbb{C}}$. Поэтому $\bigl((N/N')_{\mathbb{C}}\bigr)_1\not\subset\ker f'_{\mathbb{C}}$.

Элементы $\tilde{j}(g_1),\dots,\tilde{j}(g_n)$ порождают группу $\widetilde{K}$. Поскольку гомоморфизмы $\tilde{f},f,r$ и r' в коммутативной диаграмме (14) являются эпиморфизмами, то группа K порождается элементами $j\bigl(r(g_1)\bigr),\dots,j\bigl(r(g_n)\bigr)$.

По построению группы G элементы $r(g_1),\dots,r(g_n)$ принадлежат центру группы G. Поэтому $h\Bigl(j\bigl(r(g_i)\bigr)\Bigr)=j\bigl(r(g_i)\bigr)$, т. е. $h_{|K}=\mathrm{Id}$, и, следовательно, $c(K)=\ker f'_{\mathbb{C}}\cap\bigl((N/N')_{\mathbb{C}}\bigr)_1=0$. Имеем $K\subset\ker c=\operatorname{Tors}N/N'$. С другой стороны, $\operatorname{Tors}N/N'\subset K$, так как M является свободной абелевой группой. Поэтому $K=\operatorname{Tors}N/N'$ и $f'_{\mathbb{C}}$ является эквивариантным изоморфизмом. Следовательно, $\Delta(t)=\Psi(t)$. Теорема 2 доказана.

§ 3. Гурвицевские C-группы с многочленами Александера $\Delta(t)=(-1)^{n+k}(t-1)^n(t+1)^k$

В настоящем параграфе доказана теорема 3.

Рассмотрим пары $A=(M,h)$, состоящие из конечно порожденных свободных абелевых групп M и автоморфизмов $h\in\operatorname{Aut}M$. В частности, положим $A_{\pm}=(\mathbb{Z},\pm\mathrm{Id})$ и $A_{+-}=(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},h_{\pm})$, где автоморфизм $h_{\pm}$ в некотором базисе e_1,e_2 группы $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ действует по правилу: $h_{\pm}(e_1)=e_2$ и $h_{\pm}(e_2)=e_1$. Для двух пар $A=(M,h)$ и $A'=(M',h')$ равенство $A=A'$ будет означать, что пары A и A' являются изоморфиными, т. е. существует изоморфизм $g\colon M\to M'$ такой, что $h=g^{-1}\circ h'\circ g$. Для A и A' положим $A\oplus A'=(M\oplus M',h\oplus h')$ и обозначим через nA прямую сумму n копий пары A.

Предложение 1. *Пусть $A=(M,h)$ – такая пара, что $h^2=\mathrm{Id}$. Тогда существуют целые числа n_1, n_2 и n_3 такие, что $A=n_1A_+\oplus n_2A_-\oplus n_3A_{+-}$.*

Доказательство. Обозначим $M_+=\{a\in M\mid h(a)=a\}$ и $M_-=\{a\in M\mid h(a)=-a\}$. Рассмотри подгруппу M' в M, порожденную элементами $a\in M_+\cup M_-$. Очевидно, что $M'=M_+\oplus M_-$. Обозначим через $p_+\colon M'\to M_+$

и $p_-: M' \to M_-$ проекции на слагаемые. Поскольку M является свободным $\mathbb{Z}$-модулем, то его подмодули M_+ и M_- также являются свободными $\mathbb{Z}$-модулями. Пусть M_+ и M_- свободно порождаются над $\mathbb{Z}$ элементами $e_1, \dots, e_{k_1}$ и $e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2}$ соответственно.

Покажем, что для любого $a \in M$ элемент $2a$ принадлежит модулю M'. Действительно, для каждого $a \in M$ имеем $a + h(a) \in M_+$, $a - h(a) \in M_-$ и $2a = \big(a + h(a)\big) + \big(a - h(a)\big)$. Следовательно, все элементы абелевой группы M/M' являются элементами второго порядка. Заметим также, что согласно определению подгрупп $M_\pm$ если для элемента $a \in M$ имеет место включение $2a \in M_+$ (соответственно, $2a \in M_-$), то $a \in M_+$ (соответственно, $a \in M_-$).

Имеем $M/M' \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_3}$ для некоторого целого числа $n_3 \geqslant 0$. Выберем элементы $a_1, \dots, a_{n_3} \in M$, образы которых порождают группу M/M', и пусть $2a_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,k_1+k_2})$, $i = 1, \dots, n_3$, – координаты элементов $2a_i$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$. Не ограничивая общности, прибавляя или вычитая элементы, принадлежащие M', можем предполагать, что при каждом $i = 1, \dots, n_3$ каждая координата $\alpha_{i,j}$ равна 0 или 1 и найдется j, для которого $\alpha_{i,j} = 1$.

Покажем, что элементы $2a_1, \dots, 2a_{n_3}$ являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}$. Действительно, предположим, что для некоторых $m_1, \dots, m_{n_3} \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $\sum m_i(2a_i) = 0$ в M'. Так как M' – свободная абелева группа, то можно предполагать, что по крайней мере одно из чисел m_i, скажем m_{n_3}, является нечетным числом. В этом случае образ элемента a_{n_3} в M/M' является линейной комбинацией образов элементов $a_1, \dots, a_{n_3-1}$. Противоречие.

Покажем, что элементы $p_+(2a_1), \dots, p_+(2a_{n_3})$ (соответственно, элементы $p_-(2a_1), \dots, p_-(2a_{n_3})$) являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}$. Действительно, предположим, что для некоторых $m_1, \dots, m_{n_3} \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $\sum m_i p_+(2a_i) = 0$ в M_+. Поскольку M_+ – свободная абелева группа, то можем предполагать, что по крайней мере одно из чисел m_i, скажем m_{n_3}, является нечетным числом. Тогда $2a = 2\sum m_i a_i \in M_-$ и, следовательно, $a = \sum m_i a_i \in M_-$. Но это невозможно, так как образы элементов $a_1, \dots, a_{n_3-1}$ не могут порождать $M/M' \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_3}$. В качестве следствия получаем, что $n_3 \leqslant \min(k_1, k_2)$.

Покажем, что можно так выбрать элементы $a_1, \dots, a_{n_3}$, образы которых порождают M/M', что система элементов $p_-(2a_1), \dots, p_-(2a_{n_3})$ может быть расширена до свободного базиса свободного $\mathbb{Z}$-модуля M_-. Действительно, не ограничивая общности (если необходимо, перенумеруем элементы $e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2}$), предположим, что $\alpha_{1,k_1+k_2} = 1$. Для $i = 2, \dots, n_3$, заменяя a_i на

$$a_i' = a_i - \alpha_{i,k_1+k_2}\Bigg(a_1 - \sum_{j=1}^{k_1+k_2-1} \alpha_{1,j}(1 - \alpha_{i,j})e_j\Bigg),$$

получим новую систему элементов $a_1, a_2', \dots, a_{n_3}'$ такую, что:

(i) образы элементов $a_1, a_2', \dots, a_{n_3}'$ порождают M/M';

(ii) координаты элементов $2a_1, 2a_2', \dots, 2a_{n_3}'$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$ равны 0 или 1;

(iii) для каждого $i = 2, \dots, n_3$ последняя координата элемента $2a'_i$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$ равна нулю.

Теперь ясно, что, повторяя подобные замены n_3 раза, можем найти новые элементы $a_1, a_2, \dots, a_{n_3}$ и новый базис $e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2}$ модуля M_- такие, что:

(i) образы элементов $a_1, a_2, \dots, a_{n_3}$ порождают M/M';

(ii) для каждого $i = 1, \dots, n_3$ координаты $\alpha_{i,j}$ элемента $2a_i$ в новом базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$ равны 0 или 1;

(iii) для каждого $i = 1, \dots, n_3$ координата $\alpha_{i,j}$ элемента $2a_i$ в новом базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$ равна нулю при $j > k_1 + k_2 - i + 1$ и $\alpha_{i,k_1+k_2-i+1} = 1$.

В результате получаем разложение группы M_- в прямую сумму: $M_- = \widetilde{M}_- \oplus \overline{M}_-$, где группа $\overline{M}_-$ порождена элементами $e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2-n_3}$, а $\widetilde{M}_-$ порождена элементами $p_-(2a_1), \dots, p_-(2a_{n_3})$.

Обозначим через $\widetilde{M}$ подгруппу в M, порожденную элементами $a_1, \dots, a_{n_3}$ вместе с элементами $e_1, \dots, e_{k_1} \in M_+$. Легко видеть, что $M = \widetilde{M} \oplus \overline{M}_-$, группа $\widetilde{M}$ инвариантна относительно действия h, $M_+ = \{a \in \widetilde{M} \mid h(a) = a\}$ и $\widetilde{M}_- = \{a \in \widetilde{M} \mid h(a) = -a\}$. Пусть $\widetilde{M}' = M_+ \oplus \widetilde{M}_- \subset \widetilde{M}$, и обозначим через $\tilde{p}_+ \colon \widetilde{M}' \to M_+$ и $\tilde{p}_- \colon \widetilde{M}' \to \widetilde{M}_-$ проекции на прямые слагаемые.

Покажем, что с помощью линейного треугольного преобразования можно заменить выбранную выше систему элементов $a_1, \dots, a_{n_3}$ на систему элементов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n_3}$ так, что образы элементов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n_3}$ порождают $\widetilde{M}/\widetilde{M}'$, элементы $\tilde{p}_-(2\bar{a}_1), \dots, \tilde{p}_-(2\bar{a}_{n_3})$ порождают $\widetilde{M}_-$ и система элементов $\tilde{p}_+(2\bar{a}_1), \dots, \tilde{p}_+(2\bar{a}_{n_3})$ может быть расширена до свободного базиса свободного $\mathbb{Z}$-модуля M_+. Действительно, как и выше, не ограничивая общности (если это необходимо, то перенумеруем элементы $e_1, \dots, e_{k_1}$), можем предполагать, что $\alpha_{1,k_1} = 1$. Тогда для $i = 2, \dots, n_3$, заменяя a_i на

$$a'_i = a_i - \alpha_{i,k_1}\biggl(a_1 - \sum_{j=1}^{k_1-1} \alpha_{1,j}(1 - \alpha_{i,j})e_j\biggr),$$

получаем новую систему элементов $a_1, a'_2, \dots, a'_{n_3}$ такую, что:

(i) образы элементов $a_1, a'_2, \dots, a'_{n_3}$ порождают $\widetilde{M}/\widetilde{M}'$;

(ii) элементы $\tilde{p}_-(2a_1), \tilde{p}_-(2a'_2), \dots, \tilde{p}_-(2a'_{n_3})$ порождают $\tilde{M}_-$;

(iii) координаты элементов $2a_1, 2a'_2, \dots, 2a'_{n_3}$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1}$, $\tilde{p}_-(2a_1)$, $\tilde{p}_-(2a'_2), \dots, \tilde{p}_-(2a'_{n_3})$ равны 0 или 1;

(iv) для $i = 2, \dots, n_3$ координаты α_{i,k_1} элементов $2a'_i$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1}$, $\tilde{p}_-(2a_1), \tilde{p}_-(2a'_2), \dots, \tilde{p}_-(2a'_{n_3})$ равны нулю.

Очевидно, что, повторяя подобные замены n_3 раза, можно найти новые элементы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n_3}$ и новый базис $e_1, \dots, e_{k_1}$ свободного $\mathbb{Z}$-модуля M_+ такие, что:

(i) образы элементов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n_3}$ порождают $\widetilde{M}/\widetilde{M}'$;

(ii) элементы $\tilde{p}_-(2\bar{a}_1), \tilde{p}_-(2\bar{a}_2), \dots, \tilde{p}_-(2\bar{a}_{n_3})$ порождают $\widetilde{M}_-$;

(iii) для каждого $i = 1, \dots, n_3$ координаты $\alpha_{i,j}$ элемента $2\bar{a}_i$ в новом базисе $e_1, \dots, e_{k_1}$, $\tilde{p}_-(2\bar{a}_1), \tilde{p}_-(2\bar{a}_2), \dots, \tilde{p}_-(2\bar{a}_{n_3})$ равны 0 или 1;

(iv) для каждого $i = 1, \dots, n_3$ координаты $\alpha_{i,j}$, $j \leqslant k_1$, элемента $2\bar{a}_i$ в новом базисе $e_1, \dots, e_{k_1}$, $\tilde{p}_-(2\bar{a}_1), \tilde{p}_-(2\bar{a}_2), \dots, \tilde{p}_-(2\bar{a}_{n_3})$ равны нулю при $j > k_1 - i + 1$ и $\alpha_{i,k_1-i+1} = 1$.

В результате группа M_+ разлагается в прямую сумму: $M_+ = \widetilde{M}_+ \oplus \overline{M}_+$, где $\overline{M}_+$ порождена элементами $e_1, \dots, e_{k_1-n_3}$, а $\widetilde{M}_+$ порождена элементами $\tilde{p}_+(2\bar{a}_1), \dots, \tilde{p}_+(2\bar{a}_{n_3})$. Обозначим через $\overline{M}_{+-}$ подгруппу группы M, порожденную элементами $\bar{a}_1, h(\bar{a}_1), \dots, \bar{a}_{n_3}, h(\bar{a}_{n_3})$. Легко видеть, что группа $\overline{M}_{+-}$ инвариантна относительно действия h и, кроме того, $\widetilde{M}_+ \oplus \widetilde{M}_- \subset \overline{M}_{+-}$. Поэтому $\operatorname{rk} \overline{M}_{+-} = 2n_3$ и по построению имеем $(\overline{M}_{+-}, h) \simeq n_3 A_{+-}$. Более того,

$$(M, h) = (\overline{M}_+ \oplus \overline{M}_- \oplus \overline{M}_{+-}, h) \simeq n_1 A_+ \oplus n_2 A_- \oplus n_3 A_{+-},$$

где $n_1 = k_1 - n_3$ и $n_2 = k_2 - n_3$. Предложение доказано.

Лемма 1. *Пусть* $(M, h) = n_1 A_+ \oplus n_2 A_- \oplus n_3 A_{+-}$. *Рассмотрим полупрямое произведение* $G = M \rtimes \langle h \rangle$. *Тогда*:

(i) $G/G' \simeq \mathbb{Z}^{n_1+n_3+1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_2}$;

(ii) $\det(t \operatorname{Id} - h_{\mathbb{C}}) = (t-1)^{n_1+n_3}(t+1)^{n_2+n_3}$.

Доказательство. Группа G задается копредставлением:

$$\begin{aligned} G \simeq \bigl\langle e_1, \dots, e_{n_1+n_2+2n_3}, h \mid {} & [e_i, e_j] = 1,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n_1 + n_2 + 2n_3, \\ & h^{-\varepsilon} e_i h^{\varepsilon} = e_{n_3+i},\ 1 \leqslant i \leqslant n_3,\ \varepsilon = \pm 1, \\ & h^{-1} e_{2n_3+i} h = e_{2n_3+i},\ 1 \leqslant i \leqslant n_1, \\ & h^{-1} e_{2n_3+n_1+i} h = e^{-1}_{2n_3+n_1+i},\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 \bigr\rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, группа G/G' может быть задана копредставлением:

$$\begin{aligned} G/G' \simeq \bigl\langle e_1, \dots, e_{n_1+n_2+2n_3+1} \mid {} & [e_i, e_j] = 1,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n_1 + n_2 + 2n_3 + 1, \\ & e_i = e_{n_3+i},\ 1 \leqslant i \leqslant n_3, \\ & e_{2n_3+n_1+i} = e^{-1}_{2n_3+n_1+i},\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 \bigr\rangle, \end{aligned}$$

т. е. $G/G' \simeq \mathbb{Z}^{n_1+n_3+1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_2}$.

Утверждение (ii) леммы тривиально.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Пусть многочлен $\Delta(t) = (-1)^{n+k} \times (t-1)^n (t+1)^k$ является многочленом Александера гурвицевской C-группы G. Тогда согласно [1, теорема 5.9] группа G состоит из $n+1$ неприводимых компонент, т. е. $G/G' \simeq \mathbb{Z}^{n+1}$.

Рассмотрим канонический C-эпиморфизм $\nu\colon G \to \mathbb{F}_1$, $N = \ker \nu$. В работе [5] доказано, что группа N является конечно представленной. Поэтому N/N' – конечно порожденная абелева группа. Пусть $T = \operatorname{Tors}(N/N')$ – подгруппа группы N/N', состоящая из элементов конечных порядков. Тогда группа T инвариантна при действии h. Следовательно, h индуцирует действие (обозначим его той же самой буквой) h на свободной абелевой группе $M = (N/N')/T$. Так как действие $h_{\mathbb{C}}$ на $(N/N') \otimes \mathbb{C} \simeq M \otimes \mathbb{C}$ является полупростым и все корни характеристического многочлена $\det(h_{\mathbb{C}} - t \operatorname{Id}) = \Delta(t)$ равны ± 1, то $h^2_{\mathbb{C}} = \operatorname{Id}$. Следовательно, $h^2 = \operatorname{Id}$ на M. Из предложения 1 следует, что $(M, h) \simeq n_1 A_+ \oplus n_2 A_- \oplus n_3 A_{+-}$ для некоторых неотрицательных целых чисел n_1, n_2, n_3.

Легко видеть, что T является нормальной подгруппой в G/N'. Поэтому точная последовательность

$$1 \to N/N' \to G/N' \xrightarrow{\nu} \mathbb{F}_1 \to 1$$

влечет точную последовательность

$$1 \to M \to \overline{G} \xrightarrow{\nu} \mathbb{F}_1 \to 1, \tag{15}$$

где $\overline{G} = (G/N')/T$. Обозначим через $f\colon G \to \overline{G}$ и $g\colon N \to M$ канонические эпиморфизмы и через $\nu_1\colon \overline{G} \to \mathbb{F}_1$ эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом ν. Точная последовательность (15) может быть включена в следующую коммутативную диаграмму точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{F}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 1 \\
1 \arrow[r] & M \arrow[r] & \overline{G} \arrow[r, "\nu_1"] & \mathbb{F}_1 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что $\overline{G} \simeq M \leftthreetimes \langle h\rangle$. Поэтому согласно лемме 1 имеем

$$n = n_1 + n_3 \quad \text{и} \quad k = n_2 + n_3. \tag{16}$$

Эпиморфизм f индуцирует эпиморфизм $f_*\colon G/G' \simeq Z^{n+1} \to \overline{G}/\overline{G}'$. Применяя лемму 1 еще раз, имеем $\overline{G}/\overline{G}' \simeq \mathbb{Z}^{n_1+n_3+1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_2}$. Следовательно,

$$n_1 + n_2 + n_3 + 1 \leqslant n + 1. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что $n_2 = 0$ и $k \leqslant n$.

В работе [1] было показано, что многочлен Александера гурвицевской C-группы

$$G(2) = \bigl\langle x_1, \dots, x_4 \mid x_2^2 x_1 x_2^{-2} = x_4,\ x_3 = x_2,\ x_4^2 x_2 x_4^{-2} = x_2, \\ [x_i, x_1 \dots x_4] = 1,\ i = 1, \dots, 4\bigr\rangle$$

равен $t^2 - 1$. Кроме того, многочлен Александера абелевой C-группы $\mathbb{Z}^n$ равен $(-1)^{n-1}(t-1)^{n-1}$. Следовательно, при $k \leqslant n$ для доказательства существования гурвицевской C-группы G, имеющей многочлен Александера $\Delta(t) = (-1)^{n+k}(t-1)^n(t+1)^k$, достаточно рассмотреть гурвицевское произведение $G = G(2)^{\diamond k} \diamond Z^{n+1-k}$. Теорема 3 доказана.

§ 4. Два примера C-групп

В настоящем параграфе покажем, что в общем случае C-групп утверждения, аналогичные теореме 5.9 из [1] и теореме 3, не имеют места.

Пример 1. Существует C-группа, состоящая из двух неприводимых компонент, многочленом Александера которой является $\Delta(t) = (t-1)^2$.

Рассмотрим C-группу G, заданную C-копредставлением:

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3 = x_1^{-1}x_2x_1, \quad x_3 = x_1^{-1}x_3x_2x_3^{-1}x_1\rangle.$$

Легко видеть, что C-группа G состоит и двух неприводимых компонент. Обозначим через N ядро канонического C-эпиморфизма $\nu\colon G \to \mathbb{F}_1$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\tilde{h}(g) = x_1gx_1^{-1}$ для $g \in N$.

Для нахождения конечного копредставления группы N используем метод Рейдемейстера–Шрайера. Напомним кратко этот метод (см., например, [8, § 2.3]). Вначале выбирается так называемая шрайерова система представителей, т. е. выбирается по представителю s_i в каждом правом классе смежности группы $G = \langle x \in X \mid r = 1,\ r \in \mathcal{R}\rangle$ по подгруппе N таким образом, что если слово s_i является представителем, то все его начальные подслова также являются представителями некоторых смежных классов (в нашем случае в качестве шрайеровых представителей смежных классов группы G по подгруппе N выберем элементы x_1^k, $k \in \mathbb{Z}$). В этом случае группа N порождается элементами $a_{i,j} = s_i \cdot x_j \cdot \overline{s_ix_j}^{\,-1}$, где $\overline{s_ix_j}$ – шрайеров представитель смежного класса, содержащего элемент s_ix_j, а системой определяющих соотношений для N является множество

$$\{s_irs_i^{-1} = 1 \mid r \in \mathcal{R}\},$$

где соотношения $s_irs_i^{-1}$ записаны в виде слов, состоящих из букв $a_{i,j}$ и $a_{i,j}^{-1}$.

В нашем случае группа N порождается элементами

$$a_{k,j} = x_1^kx_jx_1^{-(k+1)}, \tag{18}$$

где $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что действие $\tilde{h}$ задается формулой $\tilde{h}(a_{k,j}) = a_{k+1,j}$.

Соотношение $x_3 = x_1^{-1}x_2x_1$ дает соотношения

$$a_{k,3} = a_{k-1,2} \tag{19}$$

для $k \in \mathbb{Z}$, а соотношение $x_3 = x_1^{-1}x_3x_2x_3^{-1}x_1$ приводит к соотношениям

$$a_{k,3} = a_{k-1,3}a_{k,2}a_{k,3}^{-1} \tag{20}$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Согласно методу Рейдемейстера–Шрайера множество, состоящее из соотношений (19) и (20), является множеством определяющих соотношений для N.

Обозначим через $\bar{a}_{k,j}$ образ в N/N' элемента $a_{k,j}$. Из (19) и (20) следует, что абелева группа N/N' порождается элементами $\bar{a}_{k,j}$, $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$, которые связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{k,3} &= \bar{a}_{k-1,2}, \\ 2\bar{a}_{k,3} &= \bar{a}_{k-1,3} + \bar{a}_{k,2} \end{aligned} \tag{21}$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Действие h на N/N', индуцированное действием $\tilde{h}$, задается формулой $h(\bar{a}_{k,j}) = \bar{a}_{k+1,j}$ для $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Из (21) следует, что группа N/N' порождается элементами $\bar{a}_{0,3}$ и $\bar{a}_{1,3}$ и имеет место равенство $\bar{a}_{2,3} = -\bar{a}_{0,3} + 2\bar{a}_{1,3}$. Следовательно, в базисе $\bar{a}_{0,3}$, $\bar{a}_{1,3}$ автоморфизм h задается матрицей:

$$h = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\det(h - t\,\mathrm{Id}) = (t-1)^2$.

Пример 2. Существует C-группа, состоящая из двух неприводимых компонент, многочленом Александера которой является $\Delta(t) = (1-t)(t+1)^2$.

Рассмотрим C-группу G, заданную C-копредставлением:

$$G = \bigl\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3 = x_1^{-1}x_2x_1, \bigl[x_1, (x_3^2x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3)\bigr] = 1 \bigr\rangle.$$

Очевидно, G является C-группой, состоящей из двух неприводимых компонент. Обозначим через N ядро канонического C-эпиморфизма $\nu\colon G \to \mathbb{F}_1$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\tilde{h}(g) = x_1gx_1^{-1}$ для $g \in N$. Применяя метод Рейдемейстера–Шрайера, покажем, что группа N порождается элементами

$$a_{k,j} = x_1^kx_jx_1^{-(k+1)}, \tag{22}$$

где $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$. Действие $\tilde{h}$ на N задается формулой $\tilde{h}(a_{k,j}) = a_{k+1,j}$.

Как и в примере 1, соотношение $x_3 = x_1^{-1}x_2x_1$ приводит к соотношениям

$$a_{k,3} = a_{k-1,2} \tag{23}$$

для $k \in \mathbb{Z}$, а соотношение $\bigl[x_1, (x_3^2x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3)\bigr] = 1$ дает соотношения

$$a_{k,3}a_{k+1,3}a_{k+1,2}a_{k+1,3}a_{k+2,3}^{-1}a_{k+2,2}^{-1}a_{k+2,3}^{-1}a_{k+1,3}^{-1} = 1 \tag{24}$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Согласно методу Рейдемейстера–Шрайера множество соотношений (23) и (24) является множеством определяющих соотношений для N.

Обозначим через $\bar{a}_{k,j}$ образ элемента $a_{k,j}$ в группе N/N'. Из (23) и (24) следует, что абелева группа N/N' порождена элементами $\bar{a}_{k,j}$, $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{gathered} \bar{a}_{k,3} = \bar{a}_{k-1,2}, \\ \bar{a}_{k,3} + \bar{a}_{k+1,3} + \bar{a}_{k+1,2} - 2\bar{a}_{k+2,3} - \bar{a}_{k+2,3} = 0 \end{gathered} \tag{25}$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Действие h на N/N', индуцированное автоморфизмом $\tilde{h}$, задается формулой $h(\bar{a}_{k,j}) = \bar{a}_{k+1,j}$ для $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Из (25) следует, что группа N/N' порождается элементами $\bar{a}_{0,3}$, $\bar{a}_{1,3}$, $\bar{a}_{2,3}$ и имеет место равенство $\bar{a}_{3,3} = \bar{a}_{0,3} + \bar{a}_{1,3} - \bar{a}_{2,3}$. Следовательно, в базисе $\bar{a}_{0,3}$, $\bar{a}_{1,3}$, $\bar{a}_{2,3}$ автоморфизм h задается матрицей:

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно легко проверить, что

$$\det(h - t\,\mathrm{Id}) = (1-t)(t+1)^2.$$

Список литературы

1. Гроель Г.-М., Куликов Вик. С., “О симплектических накрытиях проективной плоскости”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 19–58.
2. Куликов Вик. С., “Многочлены Александера плоских алгебраических кривых”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:1 (1993), 76–101.
3. Куликов Вик. С., “Геометрическая реализация C-групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 194–203.
4. Куликов Вик. С., “Формула разложения на множители полного поворота с удвоенным числом нитей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:1 (2004), 123–158.
5. Куликов Вик. С., Харламов И. М., “О брэйд-монодромных разложениях на множители”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 79–118.
6. Куликова О. В., “О фундаментальных группах дополнений к кривым Гурвица”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 125–132.
7. Кузьмин Ю. В., “Об одном способе построения C-групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4 (1995), 105–124.
8. Ленг С., *Алгебра*, Мир, М., 1968.
9. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., *Комбинаторная теория групп*: *Представления групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974.

Вик. С. Куликов (Vik. S. Kulikov)
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
21.12.2004