И. А. Чельцов, Л. Воцлав, Нерациональные полные пересечения, *Тр. МИАН*, 2004, том 246, 316–320

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 246, с. 316–320

УДК 512.7

Нерациональные полные пересечения

©2004 г. И. А. Чельцов[1], Л. Воцлав[2]

Поступило в феврале 2004 г.

Показывается нерациональность общего полного пересечения $\bigcap_{i=1}^{k} F_i \subset \mathbb{P}^M$ при условии, что $\sum_{i=1}^{k} d_i = M$ и $\exists\, d_j \notin \{2,3,5\}$, где F_i — гиперповерхность степени d_i.

Рассмотрим полное пересечение $X = \bigcap_{i=1}^{k} F_i \subset \mathbb{P}^M$, определенное над полем $\mathbb{C}$, такое, что $F_i \subset \mathbb{P}^M$ — гиперповерхность степени d_i и $d_k \geq \ldots \geq d_1 \geq 2$. Следующий результат был получен в работе [1].

Теорема 1. *Пусть X достаточно общее и $\sum_{i=1}^{k} d_i = M > 3k$. Тогда каждый бирациональный автоморфизм многообразия X бирегулярен, многообразие X не может быть бирационально перестроено в расслоение[3] на многообразия кодаировой размерности $-\infty$, многообразие X не может быть бирационально перестроено в терминальное $\mathbb{Q}$-факториальное многообразие Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$, которое небирегулярно многообразию X.*

С другой стороны, следующий результат был получен в работах [2, 3].

Теорема 2. *Пусть X очень общее, $k = 1$ и $d_1 \geq 2\left\lceil \frac{M+2}{3} \right\rceil$. Тогда X нелинейчато.*

Основная цель данной работы состоит в доказательстве следующего результата.

Теорема 3. *Пусть X очень общее, $\sum_{i=1}^{k} d_i = M$ и $\exists\, d_j \notin \{2,3,5\}$. Тогда полное пересечение X не является линейчатым и, в частности, нерационально.*

Замечание 4. $d_k > 5 \;\Rightarrow\; \exists\, d_j \notin \{2,3,5\} \;\Rightarrow\; d_k \geq 4 \;\Leftarrow\; \sum_{i=1}^{k} d_i = M > 3k$.

Замечание 5. Используя аналогичные методы, можно показать, что очень общее полное пересечение X не является линейчатым, если $\exists\, d_j \geq 2\left\lceil \frac{M+2-\sum_{i\neq j} d_i}{3} \right\rceil$.

Следующее предположение было сделано в работе [1].

Гипотеза 6. *Пусть X гладкое, $\sum_{i=1}^{k} d_i = M$ и $M-k \geq 4$. Тогда каждый бирациональный автоморфизм многообразия X бирегулярен, многообразие X не может быть бирационально перестроено в расслоение на многообразия кодаировой размерности $-\infty$, многообразие X не может быть бирационально перестроено в терминальное $\mathbb{Q}$-факториальное многообразие Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$, которое небирегулярно многообразию X.*

В случае выполнения неравенства $\sum_{i=1}^{k} d_i < M$ полное пересечение X можно бирационально перестроить в расслоение на многообразия кодаировой размерности $-\infty$ посредством разрешения неопределенностей рационального отображения, заданного любым пучком гиперплоских сечений многообразия X. В случае выполнения неравенства $\sum_{i=1}^{k} d_i > M$ утверждение гипотезы 6 практически тривиально. В случае, когда выполнено равенство $M - k = 3$, утверждение гипотезы 6 неверно, как показывает пример гладкого полного пересечения квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$, обладающего нетривиальными бирациональными автоморфизмами, или пример гладкого полного пересечения трех квадрик в $\mathbb{P}^6$, которое может быть перестроено в

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: cheltsov@yahoo.com

[2]Institut für Reine Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Germany.
E-mail: wotzlaw@mathematik.hu-berlin.de

[3]Для расслоения $\tau\colon V \to Z$ будем считать, что τ небирационален, а Z не является точкой.

расслоение на коники. Таким образом, условия гипотезы 6 являются вполне естественными ограничениями, необходимыми для выполнения утверждения гипотезы 6. На данный момент гипотеза 6 доказана для гиперповерхностей в работах [4–8], для достаточно общего X и $M > 3k$ в работе [1] и для четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и квартики в $\mathbb{P}^6$, которое не содержит двумерных линейных подпространств, в работе [9]. Однако, несмотря на свою естественность, гипотеза 6 неверна в общем случае, как показывает следующий пример.

Пример 7. Пусть $k = 3$, $d_1 = d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $M = 7$, F_1 задана уравнением

$$x_0x_3 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5^2 + x_6^2 + x_0x_7 + x_6x_7 + x_7^2 = 0,$$

гиперповерхность F_2 задана уравнением

$$x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_7 + 2x_5x_7 = 0,$$

а гиперповерхность F_3 задана уравнением $\sum_{i=0}^{7} x_i^3 = 0$, где $(x_0 : \ldots : x_7)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^7$. Тогда X неособо[4] и содержит двумерное линейное подпространство $\Pi = V(x_0 + x_1, x_2 + x_3, x_4 + x_5, x_6, x_7)$, проекция из Π задает рациональное отображение $\gamma\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^4$, имеющее степень 2 в общей точке, которое индуцирует небирегулярную бирациональную инволюцию полного пересечения X.

Аналогично конструкции примера 7 можно построить гладкое полное пересечение четырех квадрик в $\mathbb{P}^8$, три из которых содержат трехмерное линейное подпространство в $\mathbb{P}^8$, которое задает небирегулярную бирациональную инволюцию данного полного пересечения, индуцированное соответствующей проекцией.

Замечание 8. Общность в теореме 1 означает точку в открытом по Зарискому подмножестве, а общность в теоремах 2 и 3 означает точку в дополнении к счетному множеству замкнутых подмногообразий.

Как ни странно, способов доказательства нерациональности алгебраических многообразий не очень много. Более того, в случае, когда на многообразии нет глобальных голоморфных дифференциальных форм и их тензорных степеней, таких способов долгое время было всего лишь три, которые очень активно применялись в течение последних 30 лет для доказательства нерациональности рационально связных многообразий. В.А. Исковских и Ю.И. Манин разработали [1] метод, позволяющий доказывать так называемую бирациональную жесткость для некоторых классов алгебраических многообразий (см. также [4–9]). Г. Клеменс и Ф. Гриффитс показали, что промежуточный якобиан трехмерных рациональных многообразий является произведением якобианов кривых, и описали способ доказательства того, что промежуточный якобиан некоторых трехмерных многообразий не является произведением якобианов кривых (см. [11, 12]). М. Артин и Д. Мамфорд отметили, что подгруппа кручения группы когомологий $H^3(\mathbb{Z})$ является бирациональным инвариантом алгебраического многообразия, и использовали этот факт для доказательства нерациональности нескольких достаточно специальных унирациональных многообразий произвольной размерности (см. [13]). Несмотря на свою эффективность и наглядность, бирациональная жесткость слишком сильно отличается от рациональности, и долгое время не было способа, позволяющего заполнить образовавшуюся между ними пустоту в высших размерностях, поскольку метод промежуточного якобиана применим только к трехмерным многообразиям, а группа $H^3(\mathbb{Z})$ во многих интересных случаях не имеет кручения или даже тривиальна. Относительно недавно Я. Коллар придумал абсолютно новый, эффективный и очень элегантный способ доказательства нерациональности некоторых рационально связных многообразий, который применим во всех размерностях. Единственное

[4]Из вычислений на Macaulay2 (см. [10]) следует гладкость многообразия X над полем $\mathbb{F}_5$, откуда следует гладкость многообразия X над полем $\mathbb{C}$.

слабое место метода Коллара состоит в том, что он, как правило, доказывает нерациональность не конкретно взятого многообразия, а лишь достаточно общего многообразия в некотором семействе (см. [2, 3]). Подробный обзор всех четырех методов доказательства нерациональности многомерных рационально связных алгебраических многообразий содержится в работе [14]. В данной работе для доказательства теоремы 3 будет использован метод Коллара.

Замечание 9. Более тщательное и аккуратное применение метода работ [2, 3] позволяет, хотя и с определенной трудностью, строить явные примеры рационально связных многообразий, определенных над кольцом $\mathbb{Z}$, которые нерациональны и нелинейчаты над полем $\mathbb{C}$.

Предположим, что имеющееся полное пересечение X является очень общим, выполнено равенство $\sum_{i=1}^{k} d_i = M$, выполнено неравенство $d_k \geq 4$ и существует такой индекс j, что выполнено неравенство $d_j \neq 5$. В оставшейся части работы будет показано, что многообразие X нелинейчато и, как следствие, нерационально. Следующий результат является частью утверждения 5.12 книги [3], которое в свою очередь обобщает известный результат Т. Мацусаки, полученный в работе [15].

Теорема 10. *Пусть $f\colon X \to S$ — собственный и плоский морфизм с неприводимыми и приведенными слоями, $g\colon Z \to T$ — собственный и плоский морфизм с приведенными слоями, S неприводимо, а схема T является спектром кольца дискретного нормирования с замкнутой точкой O. Предположим, что некоторая компонента слоя $g^{-1}(O)$ не является геометрически линейчатой (нелинейчата над алгебраическим замыканием поля определения) и общий слой морфизма g бирационально эквивалентен некоторому слою морфизма f. Тогда слои морфизма f над очень общими точками схемы S также не являются геометрически линейчатыми.*

Определение 11. Пусть V — схема, L — линейное расслоение на V и s — глобальное сечение расслоения L^k для $k \in \mathbb{N}$. Построим накрытие $V_{s,L}^k$ схемы V степени k, разветвленное в нулях сечения s, следующим образом: обозначим через K неоднородный идеал в $\mathrm{Sym}(L^*)$, локально порожденный $\{y^k - \langle s|y^k\rangle \mid y \in L^*\}$, и положим

$$V_{s,L}^k = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(L^*)/K),$$

тензорное умножение на L^k задает глобальную образующую $y^k - s$ идеала $K \otimes L^k$ и уравнение схемы $V_{s,L}^k$ в $U = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(L^*))$, где $y \equiv 1 \in L \otimes L^* \subset \mathrm{Sym}(L^*) \otimes L^k$.

Пример 12. Пусть $V = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, c и q — натуральные числа, $L = \mathcal{O}_V(q)$, $s \in H^0(\mathcal{O}_V(d))$ и $d = cq$. Рассмотрим взвешенное проективное пространство

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}(1, \ldots, 1, d) = \mathrm{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n, y]),$$

где $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, переменная y имеет вес d, а переменная x_i имеет вес 1. Отождествление $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,\ldots,1,d)}(D(x_i)) = \mathbb{K}\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]\left[\frac{y}{x_i}\right]$ с

$$\mathrm{Sym}\left(\frac{1}{x_i^d} \cdot \mathbb{K}\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]\right) = \mathrm{Sym}\bigl(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)\bigr)\bigr|_{D(x_i)}$$

приводит к изоморфизму между $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}(1, \ldots, 1, d) \setminus \{[1:0:\ldots:0]\} = \bigcup D(x_i)$ и U, который индуцирует естественный изоморфизм $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}(1,\ldots,1,d)}|_U \simeq \pi^*(L^c)$, отображающий y в 1, где $\pi\colon U \to \mathbb{P}^n$ — естественная проекция. Значит, $V_{s,L}^k \simeq V(y^c - s) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}(1, \ldots, 1, d)$.

Следующий результат является теоремой 5.11 работы [3].

Теорема 13. *Пусть V — гладкое проективное многообразие размерности $n \geq 3$, определенное над алгебраически замкнутым полем характеристики p, L — линейное расслоение на многообразии V такое, что дивизор $L^p \otimes K_V$ обилен, а естественное ограничение $H^0(V, L^p) \to (\mathcal{O}_V/m_x^4) \otimes L^p$ сюръективно для всех замкнутых точек x многообразия V. Тогда* *многообразие $V^p_{s,L}$ не является сепарабельно унилинейчатым и, в частности, не является линейчатым для достаточно общего глобального сечения s расслоения L^p.*

Следующая конструкция обобщает пример 4.3 работы [16].

Конструкция 14. Возьмем кольцо дискретного нормирования R с параметром t, полем частных $\mathbb{T}$, полем вычетов $\mathbb{K}$ и спектром T. Пусть f и g — однородные многочлены в кольце $R[x_0,\ldots,x_n]$ степени cd и d соответственно, h_i — однородный многочлен степени d_i в кольце $R[x_0,\ldots,x_n]$, где $i=1,\ldots,r$ и c — натуральное число, такие, что оба многообразия $V(g^c-f,h_1,\ldots,h_r)$ и $V(g,h_1,\ldots,h_r)$ являются полными пересечениями коразмерности $r+1$ в $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Тогда схема

$$V(y^c-f,ty-g,h_1,\ldots,h_r)\subset\mathbb{P}_T(1,\ldots,1,d)$$

задает семейство взвешенных полных пересечений над T, слой которого над общей точкой схемы T является полным пересечением $V(g^c-t^cf,h_1,\ldots,h_r)\subset\mathbb{P}^n_{\mathbb{T}}$, а слой над замкнутой точкой схемы T является определенным ранее многообразием $V^c_{f,\mathcal{O}_V(d)}$ для полного пересечения $V=V(g,h_1,\ldots,h_r)\subset\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, которое является накрытием степени c многообразия V с ветвлением в дивизоре, высекаемом гиперповерхностью $V(f)$.

Утверждение 15. *Предположим, что для некоторого индекса j степень d_j не является простым числом. Тогда полное пересечение X нелинейчато.*

Доказательство. Пусть $d_j=pq$ для простого p и натурального $q\neq1$. В этом случае непосредственно из конструкции 14 следует существование семейства полных пересечений $\bigcap_{i=1}^k G_i\subset\mathbb{P}^M$, где $G_i\subset\mathbb{P}^M$ — гиперповерхность степени d_i, которое вырождается в определенную над полем характеристики p схему $V^p_{s,L}$, где в обозначениях определения 11 схема V является определенным над полем характеристики p полным пересечением $\bigcap_{i=1}^k\overline{G}_i\subset\mathbb{P}^M$, $\overline{G}_i$ — гиперповерхность степени d_i в случае, когда выполнено $i\neq j$, $\overline{G}_j$ — гиперповерхность степени q, $L=\mathcal{O}_V(q)$ и s — достаточно общее глобальное сечение линейного расслоения L^p. Из $L^p\sim\mathcal{O}_V(d_j)$ и $d_j\geq4$ следует, что отображение $H^0(V,L^p)\to(\mathcal{O}_V/m_x^4)\otimes L^p$ сюръективно, но дивизор

$$L^p\otimes K_V\sim\mathcal{O}_V\left(\sum_{i=1}^k d_i-M-1+q\right)\sim\mathcal{O}_V(q-1)$$

обилен. Значит, схема $V^p_{s,L}$ не является геометрически линейчатой по теореме 13, а полное пересечение X не является линейчатым по теореме 10. □

Лемма 16. *Пусть V — очень общее полное пересечение $\bigcap_{i=1}^k G_i\subset\mathbb{P}^M$, G_i — гиперповерхность степени d_i для $i\neq j$, а G_j — гиперповерхность степени $d'_j=d_j-1$, целое число d'_j не является простым и $d'_j\neq4$. Тогда V нелинейчато.*

Доказательство. Пусть $d'_j=pq$ для простого p и $q\in\mathbb{N}$. Можно считать, что $q>2$, поскольку $d'_j\neq4$. Теперь необходимое утверждение получается непосредственным повторением доказательства утверждения 15. □

Утверждение 17. *Предположим, что для некоторого индекса j выполнено неравенство $d_j\geq6$. Тогда полное пересечение X нелинейчато.*

Доказательство. Из утверждения 15 следует, что число d_j можно считать простым. Существует плоское семейство полных пересечений $\bigcap_{i=1}^k G_i\subset\mathbb{P}^M$, где G_i — гиперповерхность степени d_i, которое вырождается в полное пересечение $\bigcap_{i=1}^k\overline{G}_i\subset\mathbb{P}^M$, где $\overline{G}_i\subset\mathbb{P}^M$ — гиперповерхность степени d_i при $i\neq j$, $\overline{G}_j=\Delta\cup H$, где Δ — гиперповерхность степени $d'=d_j-1\geq6$, а H — гиперплоскость в $\mathbb{P}^M$. Можно считать, что полное пересечение $V=\bigcap_{i\neq j}\overline{G}_i\cap\Delta$ достаточно общее. В этом случае полное пересечение V нелинейчато по утверждению 16, а X нелинейчато по теореме 10. □

Таким образом, утверждение теоремы 3 доказано полностью.

Замечание 18. Из утверждения 5.12 книги [3] и доказательства теоремы 3 следует, что степень доминантного рационального отображения $\rho\colon Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ четна в случае, когда полное пересечение X очень общее, $\sum_{i=1}^k d_i = M$ и $\exists\, d_j \notin \{2,3,5\}$.

Следующий результат — теорема 5.14.2 книги [3].

Теорема 19. *Очень общая гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^M$ не может быть бирационально перестроена в расслоение на коники, если $d \geq 3\lceil \frac{M+2}{4} \rceil$.*

Аналогичные аргументы влекут следующее утверждение.

Теорема 20. *Предположим, что полное пересечение X является очень общим, выполнено равенство $\sum_{i=1}^k d_i = M$ и $\exists\, d_j \notin \{2,3,4,5,7,8,11\}$. Тогда степень любого доминантного рационального отображения $\rho\colon Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ кратна 3.*

Доказательство. Для доказательства необходимого утверждения нужно воспользоваться всеми аргументами доказательства теоремы 3, используя простое число 3 вместо простого числа 2, где необходимо, и использовать утверждение 5.12 книги [3] вместо теоремы 10 данной работы. □

Следствие 21. *Полное пересечение X не может быть бирационально перестроено в расслоение на коники в случае, когда X является очень общим, выполнено равенство $\sum_{i=1}^k d_i = M$ и $\exists\, d_j \notin \{2,3,4,5,7,8,11\}$.*

Авторы очень признательны В. Алексееву, М.М. Гриненко, В.А. Исковских, Г. Курке, М. Мелле, Дж. Парку, Ю.Г. Прохорову, А.В. Пухликову, В.В. Шокурову и Р. Варлею за плодотворные беседы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pukhlikov A.V.* Birationally rigid Fano complete intersections // J. reine und angew. Math. 2001. Bd. 541. S. 55–79.
2. *Kollár J.* Nonrational hypersurfaces // J. Amer. Math. Soc. 1995. V. 8. P. 241–249.
3. *Kollár J.* Rational curves on algebraic varieties. Berlin: Springer, 1996.
4. *Исковских В.А., Манин Ю.И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Мат. сб. 1971. Т. 86. С. 140–166.
5. *Pukhlikov A.V.* Birational isomorphisms of four-dimensional quintics // Invent. math. 1987. V. 87. P. 303–329.
6. *Pukhlikov A.V.* Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. math. 1998. V. 134. P. 401–426.
7. *Пухликов А.В.* Бирационально жесткие гиперповерхности Фано // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, №6. С. 159–186.
8. *Чельцов И.А.* О гладкой четырехмерной квинтике // Мат. сб. 2000. Т. 191, №9. С. 139–160.
9. *Чельцов И.А.* Нерациональность четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и квартики, не содержащего плоскости // Мат. сб. 2003. Т. 194, №11. С. 95–116.
10. *Eisenbud D., Grayson D.R., Stillman M., Sturmfels B.* Computations in algebraic geometry with Macaulay 2. Berlin: Springer, 2002.
11. *Clemens H., Griffiths P.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. Math. Ser. 2. 1972. V. 95. P. 73–100.
12. *Beauville A.* Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires // Ann. sci. Ecole Norm. Super. 1977. V. 10. P. 304–392.
13. *Artin M., Mumford D.* Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. 1972. V. 25. P. 75–95.
14. *Исковских В.А.* О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 190–232.
15. *Matsusaka T.* Algebraic deformations of polarized varieties // Nagoya Math. J. 1968. V. 31. P. 185–245.
16. *Mori S.* On a generalization of complete intersections // J. Math. Kyoto Univ. 1975. V. 15. P. 619–646.