И. А. Чельцов, Факториальность трехмерных нодальных многообразий и связность множества лог-канонических особенностей, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 3, 87–116

DOI: https://doi.org/10.4213/sm1536

УДК 512.76

И. А. Чельцов

Факториальность трехмерных нодальных многообразий и связность множества лог-канонических особенностей

Представлен метод доказательства $\mathbb{Q}$-факториальности трехмерных нодальных многообразий, использующий теорему В. В. Шокурова о связности множества лог-канонических особенностей. Полученный метод применяется для доказательства $\mathbb{Q}$-факториальности следующих многообразий: полного пересечения гиперповерхностей F и G в $\mathbb{P}^5$ степени n и k соответственно, где G неособа, при выполнении неравенств $n \geqslant k$ и $|\mathrm{Sing}(F \cap G)| \leqslant (n+k-2)(n-1)/5$; многообразия, полученного как двойное накрытие неособой гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^4$ степени n с ветвлением в поверхности, которая высекается на F гиперповерхностью $G \subset \mathbb{P}^4$ степени $2r \geqslant n$, при выполнении неравенства $|\mathrm{Sing}(F \cap G)| \leqslant (2r+n-2)r/4$.

Библиография: 71 название.

§ 1. Введение

Напомним, что многообразие[1] имеет $\mathbb{Q}$-факториальные особенности, если некоторая ненулевая кратность каждого дивизора Вейля на нем является дивизором Картье. В частности, каждое неособое многообразие $\mathbb{Q}$-факториально. Также принято говорить, что многообразие $\mathbb{Q}$-факториально в случае, когда его особенности $\mathbb{Q}$-факториальны. В частности, неособое многообразие всегда $\mathbb{Q}$-факториально.

В работах [1]–[4] доказана нерациональность трехмерной квартики, имеющей $\mathbb{Q}$-факториальные нодальные особенности[2], а в работах [5]–[7] доказана нерациональность $\mathbb{Q}$-факториального двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в нодальной секстике. Легко видеть, что без выполнения условия $\mathbb{Q}$-факториальности оба эти результата, конечно, неверны.

Пример 1. Хорошо известно, что нодальная квартика в $\mathbb{P}^4$ не может иметь больше чем 45 особых точек (см. [8], [9]). Можно показать, что существуют нодальные квартики с любым количеством особых точек от 0 до 45 (см. [9]), причем существует единственная (см. [10]) нодальная квартика $\mathscr{B}_4$, имеющая ровно 45 особых точек, так называемая квартика Бурхарда (см. [11]–[14]). Квартика $\mathscr{B}_4$ может быть задана уравнением

$$w^4 - w(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) + 3xyzt = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \operatorname{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

она детерминантальна и рациональна. Квартика $\mathscr{B}_4$ – единственный инвариант степени 4 простой группы $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{Z}_3)$ порядка 25920 (см. [15]–[18]), а особые

[1] Все многообразия считаются проективными, нормальными и определенными над полем $\mathbb{C}$.

[2] Многообразие называется *нодальным*, если его особенности состоят не более чем из изолированных обыкновенных двойных точек.

точки $\mathscr{B}_4$ соответствуют 45 трикасательным неособой кубической поверхности, что также связано с тем, что группа Вейля E_6 является нетривиальным расширением группы $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{Z}_3)$ группой $\mathbb{Z}_2$. Несложно видеть, что квартика $\mathscr{B}_4$ содержит плоскость, которая не может быть дивизором Картье на $\mathscr{B}_4$, поскольку в последнем случае плоскость высекалась бы на квартике $\mathscr{B}_4$ некоторой гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$. С другой стороны, локальная группа классов обыкновенной двойной точки есть $\mathbb{Z}$, откуда следует, что никакая ненулевая кратность плоскости, содержащейся в квартике $\mathscr{B}_4$, также не может быть дивизором Картье. В частности, квартика $\mathscr{B}_4$ не является $\mathbb{Q}$-факториальной. Более того, можно показать, что $\mathrm{Cl}(\mathscr{B}_4) \cong \mathbb{Z}^{16}$ (см. [17]), но из теоремы Лефшеца (см. [19], [20]) следует, что $\mathrm{Pic}(\mathscr{B}_4) \cong \mathbb{Z}$.

Пример 2. Пусть $\pi\colon X \to \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие, разветвленное в секстике

$$\begin{aligned}4(\tau^2x^2 - y^2)(\tau^2y^2 - z^2)(\tau^2z^2 - x^2) - t^2(1 + 2\tau)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^2 = 0 \\ \subset \mathbb{P}^3 \cong \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[x, y, z, t]),\end{aligned}$$

где $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Тогда X нодально и $|\mathrm{Sing}(X)| = 65$ (см. [21]). Можно показать, что никакая нодальная секстика в $\mathbb{P}^3$ не может иметь более чем 65 обыкновенных двойных точек (см. [22], [23]), но существуют нодальные секстики в $\mathbb{P}^3$ с любым количеством особых точек от 0 до 65 (см. [24]), так что X имеет наибольшее возможное количество особых точек. Более того, существует детерминантальная нодальная квартика $Y \subset \mathbb{P}^4$, имеющая ровно 42 особые точки, такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\rho"'] & \mathbb{P}^4 \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\ X \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

коммутативна (см. [25], [14]), где ρ – бирациональное отображение, а γ – проекция из особой точки квартики Y. В частности, многообразие X рационально, поскольку детерминантальные квартики рациональны. Рациональное отображение ρ можно представить в виде композиции раздутия особой точки квартики Y и последующего стягивания собственных прообразов 24 прямых на квартики Y, проходящих через раздуваемую особую точку. В частности, никакая ненулевая кратность образа исключительного дивизора раздутия особой точки квартики Y не может быть дивизором Картье на многообразии Y, откуда следует, что многообразие X не является $\mathbb{Q}$-факториальным. Более того, можно показать, что $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$, но $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}^{14}$ (см. [25]).

Таким образом, вполне естественно рассмотреть вопрос о том, как количество обыкновенных двойных точек трехмерного нодального многообразия влияет на выполнение условия $\mathbb{Q}$-факториальности, что, как легко видеть, является глобальным топологическим свойством. Для наглядности сделаем это на примере нодальных гиперповерхностей. Пусть V – нодальная гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени n. Тогда многообразие V является $\mathbb{Q}$-факториальным в том и только том случае, если

$$\mathrm{rk}\, H^2(V, \mathbb{Z}) = \mathrm{rk}\, H_4(V, \mathbb{Z}),$$

что всегда выполнено в неособом случае по двойственности Пуанкаре, более того, можно показать, что верен следующий результат (см. [26]–[29]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Гиперповерхность V является $\mathbb{Q}$-факториальной в том и только том случае, когда ее особые точки налагают независимые линейные условия на глобальные сечения пучка $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^4}(2n-5)$.*

В частности, многообразие V является $\mathbb{Q}$-факториальным при $|\mathrm{Sing}(V)| \leqslant 2n-4$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть X – либо полное пересечение двух гиперповерхностей в $\mathbb{P}^5$, либо двойное накрытие неособой гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$. Предположим, что особенности многообразия X состоят из обыкновенных двойных точек. Тогда из теоремы Лефшеца для многообразий с изолированными особенностями (см. [30]) следует, что группа $\mathrm{Pic}(X)$ порождена либо классом гиперплоского сечения многообразия X в случае, когда X является полным пересечением, либо поднятием на X класса гиперплоского сечения гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$ в случае, когда X является двойным накрытием. Причем многообразие X принято называть факториальным в случае, когда аналогичное утверждение выполнено для группы $\mathrm{Cl}(X)$, поскольку в этом случае все алгебраические локальные кольца многообразия X являются факториальными. С другой стороны, локальная группа классов дивизоров обыкновенной двойной точки изоморфна $\mathbb{Z}$ (см. [31]), откуда следует, что группа $\mathrm{Cl}(X)$ не имеет кручения. Таким образом, следующие условия эквивалентны:

- многообразие V является $\mathbb{Q}$-факториальным;
- многообразие V является факториальным;
- $\mathrm{Cl}(V) \cong \mathrm{Pic}(V)$;
- $\mathrm{Cl}(V) \cong \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(V) = 1$.

Самый простой пример не $\mathbb{Q}$-факториальной гиперповерхности V можно получить посредством нарушения утверждения теоремы Лефшеца.

ПРИМЕР 5. Пусть гиперповерхность V задана уравнением

$$xg(x,y,z,t,w) + yf(x,y,z,t,w) = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[x,y,z,t,w]),$$

где g и f – достаточно общие многочлены степени $n-1$. Тогда V нодальна, содержит плоскость $x=y=0$ и $|\mathrm{Sing}(V)| = (n-1)^2$, в частности, V не $\mathbb{Q}$-факториальна.

В работе [32] было замечено, что проблема $\mathbb{Q}$-факториальности трехмерных многообразий связана с теоремой В. В. Шокурова о связности множества лог-канонических особенностей (см. [33]–[35] и теорему 24 настоящей работы), а точнее, с теоремой В. В. Шокурова об обращении в нуль (см. [36] и теорему 23 настоящей работы). Проиллюстрируем эту связь на следующем примере.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть $\mathscr{H}$ – линейная система, состоящая из поверхностей в $\mathbb{P}^4$ степени $k < n/2$, проходящих через особые точки V. Положим $\widehat{\mathscr{H}} = \mathscr{H}|_V$. Предположим, что* $\dim(\mathrm{Bs}(\widehat{\mathscr{H}})) = 0$. *Тогда V является $\mathbb{Q}$-факториальной.*

Доказательство. Из предложения 3 следует, что для доказательства требуемого утверждения достаточно для произвольно выбранной особой точки P гиперповерхности V построить гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени $2n-5$, которая проходит через все точки множества $\operatorname{Sing}(V)\setminus P$, но не проходит через точку P.

Предположим сначала, что $\dim(\operatorname{Bs}(\mathscr{H}))=0$. Пусть Λ – базисное множество линейной системы $\mathscr{H}$. Тогда $\operatorname{Sing}(V)\subseteq\Lambda$. Рассмотрим достаточно общие дивизоры $H_1,\dots,H_s$ в $\mathscr{H}$ для $s\gg 0$, положим $X=\mathbb{P}^4$ и

$$B_X=\frac{4}{s}\sum_{i=1}^{s}H_i.$$

Пусть $\operatorname{Sing}(V)\setminus P=\{P_1,\dots,P_r\}$, где P_i – точки многообразия $X=\mathbb{P}^4$. Рассмотрим раздутие $f\colon V\to X$ всех точек множества $\operatorname{Sing}(V)\setminus P$. Тогда

$$K_V+\biggl(B_V+\sum_{i=1}^{r}(\operatorname{mult}_{P_i}(B_X)-4)E_i\biggr)+f^*(H)=f^*((4k-4)H)-\sum_{i=1}^{r}E_i,$$

где $E_i=f^{-1}(P_i)$, $B_V=f^{-1}(B_X)$, а H – гиперплоскость в $\mathbb{P}^4$.

Положим $\overline{P}=f^{-1}(P)$ и

$$\widehat{B}_V=B_V+\sum_{i=1}^{r}(\operatorname{mult}_{P_i}(B_X)-4)E_i.$$

Тогда $\widehat{B}_V$ эффективен, поскольку $\operatorname{mult}_{P_i}(B_X)\geqslant 4$ для всех i. Более того, по построению $\operatorname{mult}_P(B_X)\geqslant 4$, откуда следует, что точка $\overline{P}$ является изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(V,\widehat{B}_V)$. С другой стороны, отображение

$$H^0\biggl(\mathscr{O}_V\biggl(f^*((4k-4)H)-\sum_{i=1}^{r}E_i\biggr)\biggr)\to H^0\biggl(\mathscr{O}_{\mathscr{L}(V,\widehat{B}_V)}\otimes\mathscr{O}_V\biggl(f^*((4k-4)H)-\sum_{i=1}^{r}E_i\biggr)\biggr)$$

сюръективно по теореме В. В. Шокурова об обращении в нуль (см. теорему 23), где $\mathscr{L}(V,\widehat{B}_V)$ – подсхема лог-канонических особенностей лог-пары $(V,\widehat{B}_V)$. Однако, как уже отмечалось, в окрестности точки $\overline{P}$ носитель схемы $\mathscr{L}(V,\widehat{B}_V)$ состоит только из точки $\overline{P}$, откуда следует, что существует дивизор

$$D\in\biggl|f^*((4k-4)H)-\sum_{i=1}^{r}E_i\biggr|,$$

который не проходит через точку $\overline{P}$. Следовательно, дивизор $f(D)$ – гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени $4k-4$, которая проходит через все точки множества $\operatorname{Sing}(V)\setminus P$, но не проходит через точку P. С другой стороны, по предположению $4k-4\leqslant 2n-5$, откуда сразу следует существование гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$ степени $2n-5$, которая проходит через все точки множества $\operatorname{Sing}(V)\setminus P$, но не проходит через точку P.

Пусть теперь $\dim(\mathrm{Bs}(\widehat{\mathscr{H}})) = 0$. Тогда мы можем дословно повторить все предыдущие аргументы в применении к линейной системе $\widehat{\mathscr{H}}$ вместо $\mathscr{H}$, положив при этом $X = V$, а затем воспользоваться проективной нормальностью гиперповерхности V.

Следствие 7. *Предположим, что подмножество* $\mathrm{Sing}(V) \subset \mathbb{P}^4$ *является теоретико-множественным пересечением гиперповерхностей степени* $k < n/2$. *Тогда гиперповерхность* V *является* $\mathbb{Q}$*-факториальной.*

В работе [37] было показано, что каждая неособая поверхность на V является дивизором Картье при $\mathrm{Sing}(V) < (n-1)^2$. Естественно предположить, что гиперповерхность V является $\mathbb{Q}$-факториальной при $|\mathrm{Sing}(V)| < (n-1)^2$, однако пока это предположение доказано только для $n \leqslant 4$ (см. [38], [39]). Тем не менее, метод доказательства предложения 6, а также свойства линейных систем на раздутиях $\mathbb{P}^2$ позволили доказать в работе [32], что гиперповерхность V является $\mathbb{Q}$-факториальной при выполнении неравенства $|\mathrm{Sing}(V)| \leqslant (n-1)^2/4$.

Основной результат настоящей работы – в следующей теореме.

Теорема 8. *Пусть* X *– трехмерное нодальное многообразие такое, что выполнено одно из следующего*:

- *многообразие* X *– полное пересечение гиперповерхностей* F *и* G *в* $\mathbb{P}^5$ *степени* n *и* k *соответственно таких, что выполнено неравенство* $n \geqslant k$, *гиперповерхность* G *неособа и выполнено неравенство* $|\mathrm{Sing}(X)| \leqslant (n+k-2)(n-1)/5$;
- *существует двойное накрытие* $\eta\colon X \to F$, *где* F *– неособая гиперповерхность в* $\mathbb{P}^4$ *степени* $n \geqslant 2$, *а* η *разветвлено в поверхности* $S \subset F$, *которая высекается на* F *гиперповерхностью* $G \subset \mathbb{P}^4$ *степени* $2r \geqslant n$, *а количество особых точек* S *не превосходит* $(2r+n-2)r/4$;

тогда X *является* $\mathbb{Q}$*-факториальным.*

Отметим, что нодальные трехмерные многообразия возникают естественным образом в алгебраической геометрии, как видно из следующего примера.

Пример 9. Пусть Y – дивизор бистепени $(2,3)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$. В этом случае трехмерное многообразие Y может быть задано биоднородным уравнением

$$f_3(x,y,z,w)s^2 + g_3(x,y,z,w)st + h_3(x,y,z,w)t^2 = 0$$

в биоднородных координатах $(s:t;\, x:y:z:w)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ (см. [40]), где f_3, g_3 и h_3 суть однородные многочлены степени 3. Пусть $\xi\colon Y \to \mathbb{P}^3$ – естественная проекция, а многочлены f_3, g_3, h_3 достаточно общие. В этом случае Y содержит ровно 27 неособых рациональных кривых $C_1, C_2, \dots, C_{27}$ таких, что выполнено равенство $-K_Y \cdot C_i = 0$, поскольку система уравнений

$$f_3(x,y,z,w) = g_3(x,y,z,w) = h_3(x,y,z,w) = 0$$

имеет ровно 27 решений. Проекция ξ имеет степень 2 вне 27 рациональных неособых кривых C_i, а соответствующая антиканоническая модель

$$X = \mathrm{Proj}\biggl(\bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(Y, \mathscr{O}_V(-nK_Y))\biggr)$$

многообразия Y есть двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в нодальной поверхности

$$g_3^2(x,y,z,w) - 4f_3(x,y,z,w)h_3(x,y,z,w) = 0,$$

откуда следует, что многообразие X имеет ровно 27 обыкновенных двойных точек, являющихся образами кривых C_i, стягиваемых морфизмом

$$\varphi_{|-nK_Y|}\colon Y \to X$$

для натурального $n \gg 0$, а X не является $\mathbb{Q}$-факториальным. Хорошо известно, что общий дивизор бистепени $(2,3)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ нерационален (см. [41]–[43]).

Заметим, однако, что геометрия многообразий может сильно различаться в нодальном и неособом случае, как видно из следующих примеров:

– каждая поверхность на неособой гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$ является полным пересечением по теореме Лефшеца, что, в принципе, неверно в нодальном случае (см. пример 2);
– бирациональные автоморфизмы неособой трехмерной квартики образуют конечную группу (см. [1]), однако в особом случае это не так (см. [2], [4]);
– неособая трехмерная кубика нерациональна (см. [44]), а особая нодальная трехмерная кубика рациональна.

Трехмерная обыкновенная двойная точка имеет два малых разрешения, которые бирационально отличаются посредством стандартного флопа (см. [27], [45]). Таким образом, если трехмерное нодальное многообразие имеет k особых точек, то у него есть 2^k малых разрешений особенностей. Однако в случае $\mathbb{Q}$-факториального многообразия ни одно из его малых разрешений не может быть проективным, поскольку в этом случае все исключительные кривые гомологичны нулю. Естественно предположить, что $\mathbb{Q}$-факториальность трехмерного нодального многообразия эквивалентна отсутствию проективных малых разрешений особенностей. Однако, как показывает следующий пример, сообщенный автору Л. Вотцлавом, это совсем не так.

Пример 10. Пусть $\mathscr{I}_5$ – гиперповерхность

$$x_5 - 6x_5^3\sum_{i=0}^{6} x_i - 27x_5\left(\left(\sum_{i=0}^{5} x_i\right)^2 - 4\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=i+1}^{5} x_ix_j\right) - 648x_0x_1x_2x_3x_4 = 0$$

в $\mathbb{P}^5 \cong \operatorname{Proj}(\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5])$. Тогда $\mathscr{I}_5$ инвариантна относительно стандартного действия группы Вейля E_6 на $\mathbb{P}^5$ отражениями, причем $\mathscr{I}_5$ – единственный инвариант степени 5 группы Вейля E_6 при таком действии (см. [16; § 6], [46]).

Можно показать, что особенности квинтики $\mathscr{I}_5$ состоят из 120 прямых L_i, которые пересекаются в 36 точках O_k, где $i = 1,\dots,120$ и $k = 1,\dots,36$, проективизация касательного конуса к гиперповерхности $\mathscr{I}_5$ в каждой из точек O_k изоморфна трехмерной кубике Сегре (см. [47], [16], [46]), а в каждой точке множества

$$\bigcup_{i=1}^{120} L_i \setminus \bigcup_{k=1}^{36} O_k$$

квинтика $\mathscr{I}_5$ локально изоморфна произведению $\mathbb{C}\times\mathbb{A}$, где $\mathbb{A}$ – трехмерная обыкновенная двойная точка.

Пусть H_α – гиперплоское сечение квинтики $\mathscr{I}_5$, соответствующее достаточно общей точке $\alpha\in(\mathbb{P}^5)^*$, а T_β – гиперплоское сечение $\mathscr{I}_5$, соответствующее достаточно общей точке $\beta\in(\mathscr{I}_5)^*\subset(\mathbb{P}^5)^*$. В частности, гиперповерхность T_β касается квинтики $\mathscr{I}_5$ в некоторой точке $P\in\mathscr{I}_5$. Таким образом, имеется пятимерное семейство гиперплоских сечений H_α квинтики $\mathscr{I}_5$ и четырехмерное семейство касательных гиперплоских сечений H_β квинтики $\mathscr{I}_5$. Как показано в [16], оба семейства версальны, что также следует из непосредственных вычислений (см. [48], [49]). По построению многообразие H_α – нодальная гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 5, имеющая ровно 120 обыкновенных двойных точек $Q_i=L_i\cap H_\alpha$, а T_β – нодальная гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 5, имеющая ровно 121 обыкновенную двойную точку $P_i=L_i\cap T_\beta$ и P, а из теоремы Лефшеца следует, что выполнены равенства

$$\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(H_\alpha)=\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(T_\beta)=1,$$

однако можно показать (см. [50]) или вычислить (см. [48], [49]), что

$$\operatorname{rk}\operatorname{Cl}(H_\alpha)=\operatorname{rk}\operatorname{Cl}(T_\beta)=25,$$

откуда следует, что H_α и T_β не являются $\mathbb{Q}$-факториальными.

Пусть $\pi\colon\widehat{T}_\beta\to T_\beta$ – малое разрешение, т.е. π – бирациональный морфизм такой, что $\widehat{T}_\beta$ неособо, но π не стягивает дивизоров. Пусть C_i и C – кривые на $\widehat{T}_\beta$, стягивающиеся в точки P_i и P соответственно. Тогда

$$\mathscr{N}_{C/\widehat{T}_\beta}\cong\mathscr{N}_{C_i/\widehat{T}_\beta}\cong\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1),$$

где $C\cong C_i\cong\mathbb{P}^1$.

Пусть $\psi\colon\overline{H}_\alpha\to H_\alpha$ – малое разрешение, а $\tau\colon\widehat{T}_\beta\to\overline{T}_\beta$ – малое стягивание неособой рациональной кривой C в нодальную точку $\overline{P}\in\overline{T}_\beta$. Тогда $\overline{P}$ – единственная особая точка многообразия $\overline{T}_\beta$, а пятимерное семейство неособых многообразий $\overline{H}_\alpha$ является сглаживанием трехмерного многообразия $\overline{T}_\beta$. Таким образом, существует точная последовательность (см. [27])

$$0\to H_3(\widehat{T}_\beta,\mathbb{Z})\to H_3(\overline{T}_\beta,\mathbb{Z})\to H_2(C,\mathbb{Z})\to H_2(\widehat{T}_\beta,\mathbb{Z})\to H_2(\overline{T}_\beta,\mathbb{Z})\to 0$$

и изоморфизм $H_2(\overline{T}_\beta,\mathbb{Z})\cong H_2(\overline{H}_\alpha,\mathbb{Z})$, но

$$h_2(\widehat{T}_\beta,\mathbb{Z})=\operatorname{rk}\operatorname{Cl}(T_\beta)=\operatorname{rk}\operatorname{Cl}(H_\alpha)=h_2(\overline{H}_\alpha,\mathbb{Z}),$$

откуда следует, что отображение $H_2(C,\mathbb{Z})\to H_2(\widehat{T}_\beta,\mathbb{Z})$ отображает всю группу когомологий $H_2(C,\mathbb{Z})$ в нуль. Значит, кривая C гомологична нулю на $\widehat{T}_\beta$, откуда следует, что многообразие $\widehat{T}_\beta$ не может быть проективным.

Отметим, что условие $\mathbb{Q}$-факториальности зависит также и от поля определения многообразия. Следующие два примера созданы под влиянием работ [51], [4].

Пример 11. Пусть $\pi\colon X \to \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие, разветвленное в нодальной гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^3$ степени 6, такое, что X может быть задано уравнением

$$y^2 + g_3^2(x_0, x_1, x_2, x_3) = h_1(x_0, x_1, x_2, x_3) f_5(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

в $\mathbb{P}(1^4, 3) \cong \operatorname{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, y])$, где g_3, h_1 и f_5 – достаточно общие однородные многочлены степени 3, 1 и 5 соответственно, определенные над полем $\mathbb{R}$. Тогда X не является $\mathbb{Q}$-факториальным над полем $\mathbb{C}$, поскольку дивизор, высекаемый на многообразии X уравнением $h_1 = 0$, распадается в объединение двух дивизоров, не являющихся дивизорами $\mathbb{Q}$-картье[3], которые переставляются действием $\operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ и заданы уравнением

$$\bigl(y + \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3)\bigr)\bigl(y - \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3)\bigr) = 0.$$

Поверхность $S \subset \operatorname{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3])$ имеет 15 обыкновенных двойных точек, которые высекаются на X уравнениями

$$h_1(x, y, z, w) = g_3(x, y, z, w) = f_5(x, y, z, w) = 0.$$

Определяя новые переменные α и β веса 2:

$$\alpha = \frac{y + \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3)}{h_1(x_0, x_1, x_2, x_3)} = \frac{f_5(x_0, x_1, x_2, x_3)}{y - \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3)},$$
$$\beta = \frac{y - \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3)}{h_1(x_0, x_1, x_2, x_3)} = \frac{f_5(x_0, x_1, x_2, x_3)}{y + \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3)},$$

можно *антиспроектировать* (см. [52]) трехмерное многообразие $X \subset \mathbb{P}(1^4, 3)$ на два взвешенных полных пересечения

$$\widehat{V} = \left\{\begin{array}{l} \alpha h_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = y + \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ \alpha(y - \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3)) = f_5(x_0, x_1, x_2, x_3) \end{array}\right\} \subset \mathbb{P}(1^4, 3, 2),$$
$$\overline{V} = \left\{\begin{array}{l} \beta h_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = y - \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ \beta(y + \sqrt{-1}\, g_3(x_0, x_1, x_2, x_3)) = f_5(x_0, x_1, x_2, x_3) \end{array}\right\} \subset \mathbb{P}(1^4, 3, 2)$$

соответственно, которые не определены над полем $\mathbb{R}$.

Теперь, исключая переменную u, мы получаем изоморфизмы

$$\widehat{V} \cong \{\alpha^2 h_1 - 2\sqrt{-1}\, \alpha g_3 - f_5 = 0\} \subset \mathbb{P}(1^4, 2),$$
$$\overline{V} \cong \{\beta^2 h_1 + 2\sqrt{-1}\, \beta g_3 - f_5 = 0\} \subset \mathbb{P}(1^4, 2).$$

Построенные *антипроекции* $\widehat{\rho}\colon X \dashrightarrow \widehat{V}$ и $\overline{\rho}\colon X \dashrightarrow \overline{V}$ можно поместить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \widehat{Y} \arrow[dl, "\widehat{\psi}"'] \arrow[dr, "\widehat{\varphi}"] & & \overline{Y} \arrow[dl, "\overline{\varphi}"'] \arrow[dr, "\overline{\psi}"] & \\
\widehat{V} & & X \arrow[ll, dashed, "\overline{\rho}"'] \arrow[rr, dashed, "\widehat{\rho}"] & & \overline{V}
\end{tikzcd}$$

[3] Дивизор называется *дивизором $\mathbb{Q}$-картье*, если некоторая его кратность есть дивизор Картье.

с бирациональными морфизмами $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$, $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ такими, что $\widehat{\psi}$ и $\overline{\psi}$ – экстремальные стягивания в смысле [53], а $\widehat{\varphi}$ и $\overline{\varphi}$ – флоппирующие стягивания.

Несложно проверить, что взвешенные гиперповерхности $\widehat{V}$ и $\overline{V}$ являются квазигладкими (см. [54]) и $\mathbb{Q}$-факториальными, а их группы Пикара суть $\mathbb{Z}$ (см. [55; лемма 3.5], [56; лемма 3.2.2], [57; гл. XI, теорема 3.13], [58]). Более того, многообразия $\widehat{V}$ и $\overline{V}$ проективно изоморфны в $\mathbb{P}(1^4, 2)$ посредством действия $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}_2$, откуда следует, что

$$\mathrm{Pic}(\widehat{Y}) \cong \mathrm{Pic}(\overline{Y}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

многообразия $\widehat{Y}$ и $\overline{Y}$ являются $\mathbb{Q}$-факториальными и $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

По построению $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-инвариантная часть группы $\mathrm{Cl}(X)$ есть $\mathbb{Z}$, следовательно, трехмерное многообразие X является $\mathbb{Q}$-факториальным над полем $\mathbb{R}$ и, следовательно, оно нерационально над полем $\mathbb{R}$ (см. [7]), однако можно показать, что многообразие X также нерационально над полем $\mathbb{C}$ (см. [55]). Отметим, что бирегулярная инволюция многообразия X, переставляющая слои двойного накрытия π, индуцирует небирегулярную бирациональную инволюцию $\tau \in \mathrm{Bir}(\widehat{V})$, которая регуляризируется рациональным отображением $\widehat{\rho}$ (см. [59]).

Пример 12. Пусть $V \subset \mathbb{P}^4$ – трехмерная квартика, обладающая одной обыкновенной двойной точкой O и неособая вне ее. В этом случае квартика V является $\mathbb{Q}$-факториальной и $\mathrm{Pic}(V) \cong \mathbb{Z}$. Легко видеть, что квартика V может быть задана уравнением

$$t^2 f_2(x,y,z,w) + t f_3(x,y,z,w) + f_4(x,y,z,w) = 0 \subset \mathbb{P}^4 = \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[x,y,z,w,t]),$$

где точка O имеет координаты $(0:0:0:0:1)$. Известно, что квартика V нерациональна, но $\mathrm{Bir}(V) \neq \mathrm{Aut}(V)$, так как проекция $\varphi\colon V \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ из точки O имеет степень 2 в общей точке квартики V и индуцирует небирегулярную инволюцию $\tau \in \mathrm{Bir}(V)$.

Пусть $f\colon Y \to V$ – раздутие точки O. Тогда $|-nK_Y|$ свободна и для некоторого натурального $n \gg 0$ задает бирациональный морфизм

$$g = \varphi_{|-nK_Y|}\colon Y \to X,$$

стягивающий каждую кривую $C_i \subset Y$ такую, что $f(C_i)$ – прямая на квартике V, проходящая через точку O. Более того, существует двойное накрытие $\pi\colon X \to \mathbb{P}^3$ с ветвлением в поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$, заданной уравнением

$$f_3^2(x,y,z,w) - 4f_2(x,y,z,w)f_4(x,y,z,w) = 0,$$

а многообразие X имеет канонические горенштейновы особенности[4].

Предположим теперь, что квартика V достаточно общая. В этом случае каждая кривая $f(C_i)$ соответствует решению системы уравнений

$$f_2(x,y,z,w) = f_3(x,y,z,w) = f_4(x,y,z,w) = 0 \subset \mathbb{P}^3 = \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[x,y,z,w]),$$

[4] Канонические горенштейновы особенности суть рациональные горенштейновы (см. [60]).

что дает 24 различные неособые рациональные кривые $C_1, C_2, \dots, C_{24}$ на многообразии Y. Причем для каждой кривой C_i имеем

$$\mathscr{N}_{C_i/Y} \cong \mathscr{O}_{C_i}(-1) \oplus \mathscr{O}_{C_i}(-1),$$

откуда следует, что морфизм g является стандартным флоппирующим стягиванием, которое отображает каждую кривую C_i в обыкновенную двойную точку на трехмерном многообразии X. В частности, поверхность S имеет 24 обыкновенные двойные точки, многообразие X не является $\mathbb{Q}$-факториальным и $\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Положим $\rho = g \circ f^{-1}$. В этом случае инволюция $\gamma = \rho \circ \tau \circ \rho^{-1}$ бирегулярна на многообразии X и переставляет слои π. Значит, бирациональное отображение ρ является регуляризацией бирациональной и небирегулярной инволюции τ в смысле работы [59], а коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & & Y \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ V \arrow[rr, dashed, "\rho"] & & X \arrow[r, "\gamma"'] & X & & V \arrow[ll, dashed, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

есть не что иное, как разложение бирациональной инволюции $\tau \in \mathrm{Bir}(V)$ в композицию линков Саркисова (см. [53], [55], [61]).

Теперь предположим, что оба многочлена $f_2(x,y,z,w)$ и $f_4(x,y,z,w)$ определены над полем $\mathbb{Q}$, но

$$f_3(x,y,z,w) = \sqrt{2}\, g_3(x,y,z,w),$$

где $g_3(x,y,z,t)$ также определен над полем $\mathbb{Q}$. В этом случае V определена только над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и, конечно, квартика V не является инвариантной относительно действия группы $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$, однако поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ задана уравнением

$$2g_3^2(x,y,z,w) - 4f_2(x,y,z,w)f_4(x,y,z,w) = 0 \subset \mathbb{P}^3 = \mathrm{Proj}\,(\mathbb{Q}[x,y,z,w]),$$

откуда следует, что многообразие X определено над полем $\mathbb{Q}$. Более того, легко видеть, что $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)/\mathbb{Q})$-инвариантная часть группы $\mathrm{Cl}(X)$ является $\mathbb{Z}$, откуда следует, что трехмерное многообразие X является $\mathbb{Q}$-факториальным и нерациональным над полем $\mathbb{Q}$.

Автор очень признателен Л. Вотцлаву, М. М. Гриненко, В. А. Исковских, Дж. Парку, Ю. Г. Прохорову, А. В. Пухликову и В. В. Шокурову за интересные беседы.

§ 2. Вспомогательные результаты

Следующий результат доказан в работе [29], однако многие его частные случае получены ранее в работах [26], [62], [27], [28].

Теорема 13. *Пусть W – неособое четырехмерное многообразие, а $Y \subset W$ – приведенный и неприводимый обильный дивизор такие, что выполнены равенства*

$$h^2(\Omega^1_W) = h^3(\Omega^1_W \otimes \mathscr{O}_W(-Y)) = h^1(\mathscr{O}_W) = h^2(\mathscr{O}_W) = 0,$$

а особенности Y состоят из обыкновенных двойных точек. Пусть $\widetilde{Y}$ – малое разрешение особенностей Y. Тогда $h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}})=h^2(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}})=0$, $h^1(\Omega^1_{\widetilde{Y}})=h^1(\Omega^1_W)+\delta$ и

$$\begin{aligned}h^2(\Omega^1_{\widetilde{Y}}) &= h^0(K_W\otimes\mathscr{O}_W(2Y))+h^3(\mathscr{O}_W)-h^0(K_W\otimes\mathscr{O}_W(Y))\\ &\qquad -h^3(\Omega^1_W)-h^4(\Omega^1_W\otimes\mathscr{O}_W(-Y))-|\mathrm{Sing}(Y)|+\delta,\end{aligned}$$

где δ – количество зависимых линейных условий, налагаемых особыми точками многообразия Y на глобальные сечения линейного расслоения $K_W\otimes\mathscr{O}_W(2Y)$, так называемый дефект нодального трехмерного многообразия.

Из доказательства теоремы 13 в работе [29] вытекает

Следствие 14. *Пусть W – неособое четырехмерное многообразие, а Y – приведенный и неприводимый обильный дивизор на W, особенности которого состоят из обыкновенных двойных точек. Предположим, что выполнены равенства*

$$h^2(\Omega^1_W)=h^1(\mathscr{O}_W)=h^2(\mathscr{O}_W)=0,$$

а особые точки многообразия Y налагают независимые линейные условия на глобальные сечения линейного расслоения $K_W\otimes\mathscr{O}_W(2Y)$. Тогда Y является $\mathbb{Q}$-факториальным.

Следующий результат доказан в работе [63].

Теорема 15. *Пусть $\pi\colon Y\to\mathbb{P}^2$ – раздутие точек $P_1,\dots,P_s$ такое, что*

$$s\leqslant\frac{d^2+9d+10}{6},$$

и не более чем $k(d+3-k)-2$ точки P_i лежат на кривой степени $k\leqslant(d+3)/2$ для натурального числа $d\geqslant 3$. Тогда линейная система

$$\biggl|\pi^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(d))-\sum_{i=1}^{s}E_i\biggr|$$

не имеет базисных точек, где $E_i=\pi^{-1}(P_i)$

Заметим, что в случае $d=3$ утверждение теоремы 15 есть не что иное, как свобода от базисных точек полной антиканонической линейной системы *слабой поверхности дель Пеццо* степени $9-s\geqslant 2$ (см. [64]–[66]).

Следствие 16. *Пусть $\Sigma\subset\mathbb{P}^2$ – конечное подмножество такое, что*

$$|\Sigma|\leqslant\frac{d^2+9d+16}{6},$$

и не более $k(d+3-k)-2$ точки множества Σ лежат на кривой $\mathbb{P}^2$ степени $k\leqslant(d+3)/2$, где $d\geqslant 3$ – натуральное число. Тогда для каждой точки P множества Σ существует кривая $C\subset\mathbb{P}^2$ степени d, которая проходит через все точки множества $\Sigma\setminus P$, но не проходит через точку P.

В работе [67] теорема 15 была усилена следующим образом.

Теорема 17. *Пусть* $\pi\colon Y \to \mathbb{P}^2$ – *раздутие точек* $P_1, \dots, P_s$ *на* $\mathbb{P}^2$ *таких, что*

$$s \leqslant \max\biggl\{\biggl\lfloor\frac{d+3}{2}\biggr\rfloor\biggl(d+3-\biggl\lfloor\frac{d+3}{2}\biggr\rfloor\biggr)-1,\ \biggl\lfloor\frac{d+3}{2}\biggr\rfloor^2\biggr\},$$

и не более чем $k(d+3-k)-2$ *точки множества* $\{P_1, \dots, P_s\}$ *лежат на одной кривой степени* $k \leqslant (d+3)/2$ *для некоторого натурального числа* $d \geqslant 3$. *Тогда линейная система*

$$\biggl|\pi^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) - \sum_{i=1}^{s} E_i\biggr|$$

не имеет базисных точек, где $E_i = \pi^{-1}(P_i)$.

В настоящей работе теорема 17 использоваться не будет, несмотря на то что во многих случаях ее применение дает более сильный результат, чем применение теоремы 15.

§ 3. Принцип связности

Пусть (X, B_X) – лог-пара, т.е. X – многообразие, а $B_X = \sum_{i=1}^{k} a_i B_i$, где $a_i \in \mathbb{Q}$, а B_i является эффективным неприводимым и приведенным дивизором на многообразии X. Обычно принято считать (см. [68]), что для всех индексов i либо выполнено неравенство $a_i \geqslant 0$, либо $a_i \in [0,1]$. Мы не будем этого делать, но для простоты предположим, что многообразие X имеет $\mathbb{Q}$-факториальные особенности. В частности, дивизор $K_X + B_X$ является $\mathbb{Q}$-картье дивизором. Заметим, что B_X принято называть границей лог-пары (X, B_X).

Пусть $f\colon V \to X$ – произвольный бирациональный морфизм такой, что многообразие V имеет $\mathbb{Q}$-факториальные особенности. Положим

$$B^V = f^{-1}(B_X) - \sum_{i=1}^{n} a(X, B_X, E_i) E_i,$$

где $a(X, B_X, E_i) \in \mathbb{Q}$, а дивизор E_i является f-исключительным для всех индексов i, причем выполнено соотношение

$$K_V + B^V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X),$$

которое, как легко видеть, однозначно задает B^V. Лог-пару (V, B^V) принято называть лог-поднятием лог-пары (X, B_X).

Определение 18. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется *центром лог-канонических особенностей лог-пары* (X, B_X), если существуют бирациональный морфизм $f\colon W \to X$ и не обязательно f-исключительный дивизор $E \subset W$ такие, что W имеет $\mathbb{Q}$-факториальные особенности, а E содержится в носителе эффективной части дивизора $\lfloor B^Y \rfloor$.

Множество всех центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) обозначим $\mathbb{LCS}(X, B_X)$. Отметим, что объединение центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X), рассматриваемое как собственное подмножество в X, общепринято обозначать $\mathrm{LCS}(X, B_X)$ и называть множеством лог-канонических особенностей.

Пример 19. Пусть O – неособая точка на многообразии X. Тогда из выполнения неравенства $\mathrm{mult}_O(B_X) \geqslant \dim(X)$ следует, что $O \in \mathbb{LCS}(X, B_X)$. Более того, из условия $O \in \mathbb{LCS}(X, B_X)$ и эффективности границы B_X следует, что $\mathrm{mult}_O(B_X) \geqslant 1$.

Замечание 20. Пусть H – общее гиперплоское сечение многообразия X, а Z – собственное неприводимое подмногообразие многообразия X, которое является центром лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X). Тогда $Z \cap H \in \mathbb{LCS}(H, B_X|_H)$.

Пример 21. Пусть O – неособая точка на многообразии X, которая является элементом множества $\mathbb{LCS}(X, B_X)$, $f\colon V \to X$ – раздутие точки O и E – исключительный дивизор раздутия f. Тогда либо $E \in \mathbb{LCS}(V, B^V)$, либо существует собственное подмногообразие $Z \subset E$, которое является центром лог-канонических особенностей лог-пары (V, B^V). Причем по определению 18 исключительный дивизор E является центром лог-канонических особенностей лог-пары (V, B^V) в том и только том случае, когда выполнено неравенство $\mathrm{mult}_O(B_X) \geqslant \dim(X)$.

Пусть $f\colon Y \to X$ – бирациональный морфизм, многообразие Y неособо, а объединение всех дивизоров $f^{-1}(B_i)$ и всех f-исключительных дивизоров образует дивизор с простыми нормальными пересечениями. Бирациональный морфизм f принято называть лог-разрешением лог-пары (X, B_X). Выполнено соотношение

$$K_Y + B^Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X)$$

для лог-поднятия (Y, B^Y) лог-пары (X, B_X).

Определение 22. Подсхема, ассоциированная с пучком идеалов

$$\mathscr{I}(X, B_X) = f_*(\lceil -B^Y \rceil),$$

называется *подсхемой лог-канонических особенностей лог-пары* (X, B_X) и обозначается как $\mathscr{L}(X, B_X)$.

Отметим, что $\mathrm{Supp}(\mathscr{L}(X, B_X)) = \mathrm{LCS}(X, B_X) \subset X$. Следующий результат является теоремой В. В. Шокурова об обращении в нуль (см. [33]–[36]).

Теорема 23. *Предположим, что B_X эффективна. Пусть H – произвольный численно эффективный и объемный дивизор*[5] *на X такой, что дивизор $D = K_X + B_X + H$ является дивизором Картье. Тогда $H^i(X, \mathscr{I}(X, B_X) \otimes D) = 0$ для всех $i > 0$.*

Доказательство. По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль

$$R^i f_*(f^*(K_X + B_X + H) + \lceil -B^W \rceil) = 0$$

для всех $i > 0$ (см. [68]–[70]). Из вырождения соответствующей спектральной последовательности и равенства пучков

$$R^0 f_*(f^*(K_X + B_X + H) + \lceil -B^W \rceil) = \mathscr{I}(X, B_X) \otimes D$$

[5]Заметим, что $\mathbb{Q}$-картье дивизор $H \in \mathrm{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$ называется *численно эффективным*, если для любой кривой $C \subset X$ выполнено неравенство $H \cdot C \geqslant 0$. Численно эффективный дивизор H на многообразии X называется *объемным*, если выполнено неравенство $H^n > 0$, где $n = \dim(X)$.

следует, что для всех $i \geqslant 0$ имеет место равенство групп когомологий

$$H^i(X, \mathscr{I}(X, B_X) \otimes D) = H^i(W, f^*(K_X + B_X + H) + \lceil -B^W \rceil),$$

но для $i > 0$ группы когомологий

$$H^i(W, f^*(K_X + B_X + H) + \lceil -B^W \rceil)$$

тривиальны по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль.

Для произвольного дивизора Картье D на многообразии X рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathscr{I}(X, B_X) \otimes D \to \mathscr{O}_X(D) \to \mathscr{O}_{\mathscr{L}(X,\, B_X)}(D) \to 0$$

и соответствующую точную последовательность

$$H^0(\mathscr{O}_X(D)) \to H^0(\mathscr{O}_{\mathscr{L}(X,\, B_X)}(D)) \to H^1(\mathscr{I}(X, B_X) \otimes D)$$

групп когомологий. Теперь из применения теоремы 23 сразу вытекает следующая теорема, которую принято называть принципом связности В. В. Шокурова множества лог-канонических особенностей.

Теорема 24. *Пусть B_X эффективна, а дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен. Тогда множество $\mathrm{LCS}(X, B_X) \subset X$ связно.*

Рассмотрим следующее применение теоремы 23 (см. [32]).

Лемма 25. *Пусть Σ – конечное подмножество в $\mathbb{P}^n$, $\mathscr{M}$ – линейная система, состоящая из всех гиперповерхностей степени k, проходящих через все точки множества Σ. Предположим, что базисное множество линейной системы $\mathscr{M}$ нульмерно. Тогда точки множества Σ налагают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$, имеющие степень $n(k-1)$.*

Доказательство. Пусть Λ – конечное подмножество в $\mathbb{P}^n$, которое является базисным множеством линейной системы $\mathscr{M}$. Тогда $\Sigma \subseteq \Lambda$. Рассмотрим достаточно общие дивизоры $H_1, \dots, H_s$ в $\mathscr{M}$ для $s \gg 0$, положим $X = \mathbb{P}^n$ и

$$B_X = \frac{n}{s} \sum_{i=1}^{s} H_i.$$

Тогда

$$\mathrm{Supp}(\mathscr{L}(X, B_X)) = \Lambda,$$

где $\mathscr{L}(X, B_X)$ – подсхема лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X).

Для доказательства требуемого утверждения достаточно для произвольно выбранной точки $P \in \Sigma$ построить гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n(k-1)$, которая проходит через все точки множества $\Sigma \backslash P$, но не проходит через точку P.

Пусть $\Sigma \backslash P = \{P_1, \dots, P_k\}$, где P_i – точки многообразия $X = \mathbb{P}^n$. Рассмотрим раздутие $f\colon V \to X$ всех точек множества $\Sigma \setminus P$. Тогда

$$K_V + \biggl(B_V + \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{mult}_{P_i}(B_X) - n) E_i\biggr) + f^*(H) = f^*(n(k-1)H) - \sum_{i=1}^{k} E_i,$$

где $E_i = f^{-1}(P_i)$, $B_V = f^{-1}(B_X)$, а H – гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$. По построению

$$\mathrm{mult}_{P_i}(B_X) = n\,\mathrm{mult}_{P_i}(\mathscr{M}) \geqslant n,$$

а дивизор

$$\widehat{B}_V = B_V + \sum_{i=1}^{k}(\mathrm{mult}_{P_i}(B_X) - n)E_i$$

эффективен.

Пусть $\overline{P} = f^{-1}(P)$. Тогда

$$\overline{P} \in \mathbb{LCS}(V, \widehat{B}_V)$$

и точка $\overline{P}$ является изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(V, \widehat{B}_V)$, поскольку в окрестности точки P бирациональный морфизм $f\colon V \to X$ является изоморфизмом.

С другой стороны, отображение

$$H^0\biggl(\mathscr{O}_V\biggl(f^*(n(k-1)H) - \sum_{i=1}^{k} E_i\biggr)\biggr) \to H^0\biggl(\mathscr{O}_{\mathscr{L}(V,\widehat{B}_V)} \otimes \mathscr{O}_V\biggl(f^*(n(k-1)H) - \sum_{i=1}^{k} E_i\biggr)\biggr)$$

сюръективно по теореме 23, но в окрестности точки $\overline{P}$ носитель схемы $\mathscr{L}(V, \widehat{B}_V)$ состоит только из точки $\overline{P}$, откуда следует, что существует дивизор

$$D \in \biggl|f^*(n(k-1)H) - \sum_{i=1}^{k} E_i\biggr|,$$

который не проходит через точку $\overline{P}$. Следовательно, дивизор $f(D)$ – гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n(k-1)$, которая проходит через все точки множества $\Sigma \setminus P$, но не проходит через точку $P \in \Sigma$, что завершает доказательство.

§ 4. Полные пересечения в $\mathbb{P}^5$

Пусть X – полное пересечение двух гиперповерхностей F и G в $\mathbb{P}^5$ такое, что многообразие X нодально. Положим $n = \deg(F)$ и $k = \deg(G)$ и предположим, что выполнено неравенство $n \geqslant k$.

Пример 26. Пусть F и G – общие гиперповерхности в $\mathbb{P}^5$, содержащие некоторую плоскость $\Pi \subset \mathbb{P}^5$. Тогда многообразие X нодально и не является $\mathbb{Q}$-факториальным, обе гиперповерхности F и G неособы, а также $|\mathrm{Sing}(X)| = (n+k-2)^2$.

Следующий результат доказан в работе [71].

Теорема 27. *Пусть G неособа и $|\mathrm{Sing}(X)| \leqslant 3n/8$. Тогда X является $\mathbb{Q}$-факториальным.*

В настоящем параграфе будет доказан следующий результат.

Теорема 28. *Пусть G неособа и $|\mathrm{Sing}(X)| \leqslant (n+k-2)(n-1)/5$. Тогда X является $\mathbb{Q}$-факториальным.*

Утверждение теоремы 28 неверно, если гиперповерхность G особа.

Пример 29. Пусть Q – неособая двумерная квадрика в $\mathbb{P}^5$, G – конус над Q с вершиной в общей прямой $L \subset \mathbb{P}^5$, F – общая гиперповерхность степени n, а X – полное пересечение гиперповерхностей G и F. Тогда X – трехмерное нодальное многообразие степени $2n$ и $|\mathrm{Sing}(X)| = n$. Пусть Ω – линейное пространство в $\mathbb{P}^5$, натянутое на некоторую прямую, лежащую на квадрике Q, и на прямую L. Тогда $\Omega \subset G$, а поверхность $\Omega \cap F$ имеет степень n и не является $\mathbb{Q}$-картье дивизором на X.

В случае $k=1$ утверждение теоремы 28 следует из работы [32].

Гипотеза 30. *Пусть G неособа и $|\mathrm{Sing}(X)| \leqslant (n+k-2)^2$. Тогда трехмерное многообразие X является $\mathbb{Q}$-факториальным.*

Следующее утверждение вытекает из следствия 14.

Предложение 31. *Предположим, что G неособа. Тогда X является $\mathbb{Q}$-факториальным, если особые точки многообразия X налагают независимые линейные условия на сечения в $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(2n+k-6)|_G)$.*

Следствие 32. *Пусть G неособа и $|\mathrm{Sing}(X)| \leqslant 2n+k-5$. Тогда трехмерное многообразие X является $\mathbb{Q}$-факториальным.*

Несложно показать, что X является $\mathbb{Q}$-факториальным в том и только том случае, когда группа $\mathrm{Cl}(X)$ порождена классом гиперплоского сечения полного пересечения X (см. замечание 4), что также принято называть факториальностью полного пересечения X. В частности, из $\mathbb{Q}$-факториальности многообразия X вытекает, что каждая поверхность, содержащаяся в X, является полным пересечением в $\mathbb{P}^5$.

Теперь докажем теорему 28.

Доказательство теоремы 28. Предположим, что $|\mathrm{Sing}(X)| \leqslant (n+k-2) \times (n-1)/5$, а гиперповерхность G неособа. Заметим, что $n = \deg(F) \geqslant k = \deg(G)$. Покажем, что особые точки полного пересечения $X \subset \mathbb{P}^5$ налагают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^5$ степени $2n+k-6$, откуда будет следовать утверждение теоремы 28. Можно считать, что выполнены неравенства $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 5$, поскольку при $k=1$ утверждение теоремы 28 следует из [32], а при $4 \geqslant n \geqslant k \geqslant 2$ утверждение теоремы 28 легко следует из следствия 32.

Лемма 33. *Существует гиперповерхность $\widehat{F} \subset \mathbb{P}^5$ степени n такая, что многообразие X является полным пересечением $\widehat{F}$ и G, но $\mathrm{Sing}(\widehat{F}) \subseteq \mathrm{Sing}(X)$.*

Доказательство. Пусть X задано системой уравнений

$$\begin{cases} f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=0, \\ g(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=0 \end{cases} \subset \mathbb{P}^5 \cong \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]),$$

где f и g – однородные многочлены степени n и k соответственно, задающие гиперповерхности F и G в $\mathbb{P}^5$. Рассмотрим линейную систему

$$\mathscr{L} = \bigl|\lambda f + h(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)g\bigr| \subset |\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(n)|,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, а h – однородный многочлен степени $n-k$. Тогда базисное множество линейной системы $\mathscr{L}$ есть X. Из теоремы Бертини следует существование гиперповерхности $\widehat{F} \subset \mathscr{L}$ с требуемыми свойствами.

Можно считать, что $\operatorname{Sing}(F) \subseteq \operatorname{Sing}(X)$.

Определение 34. Точки подмножества $\Gamma \subset \mathbb{P}^r$ обладают *свойством* $(\star)$, если не более чем $t(n+k-2)$ точек множества Γ могут лежать на кривой в $\mathbb{P}^r$ степени $t \in \mathbb{N}$.

Пусть $\Sigma = \operatorname{Sing}(X) \subset \mathbb{P}^5$.

Предложение 35. *Точки подмножества* $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$ *обладают свойством* $(\star)$.

Доказательство. Пусть $F \subset \mathbb{P}^5$ задается уравнением

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \subset \mathbb{P}^5 \cong \operatorname{Proj}\left(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]\right),$$

где f – однородный многочлен степени n, а $g \subset \mathbb{P}^5$ задается уравнением

$$g(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \subset \mathbb{P}^5 \cong \operatorname{Proj}\left(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]\right),$$

где g – однородный многочлен степени k. Тогда множество Σ задается обращением в нуль многочленов f и g, а также обращением в нуль миноров порядка 1 матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f}{\partial x_4} & \dfrac{\partial f}{\partial x_5} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_0} & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g}{\partial x_3} & \dfrac{\partial g}{\partial x_4} & \dfrac{\partial g}{\partial x_5} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что множество Σ является теоретико-числовым пересечением гиперповерхностей в $\mathbb{P}^5$ степени $n+k-2$, откуда сразу следует требуемое утверждение.

Рассмотрим произвольную точку $P \in \Sigma$. Необходимо доказать существование гиперповерхности в $\mathbb{P}^5$ степени $2n+k-6$, которая содержит множество $\Sigma \setminus P$ и не содержит точки P, откуда будет следовать утверждение теоремы 28 ввиду произвольности выбора точки P.

Лемма 36. *Пусть существует двумерное линейное подпространство* $\Pi \subset \mathbb{P}^5$ *такое, что* $\Sigma \subset \Pi \subset \mathbb{P}^5$. *Тогда существует гиперповерхность в* $\mathbb{P}^5$ *степени* $2n+k-6$, *которая проходит через все точки множества* $\Sigma \setminus P$ *и не содержит точки* $P \in \Sigma$.

Доказательство. Применим следствие 16 к $\Sigma \subset \Pi$ и $d = 2n+k-6 \geqslant 6$, необходимо проверить выполнение всех условий следствия 16.

Требуется показать, что $|\Sigma| \leqslant (d^2+9d+16)/6$. Пусть это не так. Тогда

$$\frac{(n+k-2)(n-1)}{5} > \frac{(2n+k-6)^2 + 9(2n+k-6) + 16}{6}$$

для $n \geqslant 5$ и $k \geqslant 2$. Положим $A = n+k \geqslant 7$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &> (A+n-6)^2 + 9(A+n-6) + 16 - 6An \\ &= 5A^2 - 3A - 10 + 5n^2 - 3n + 4An \geqslant 464, \end{aligned}$$

получили противоречие.

Требуется показать, что не более $t(2n+k-3-t)-2$ точек в Σ лежат на кривой степени $t \leqslant (2n+k-3)/2$, но не более $t(n+k-2)$ точек множества Σ лежат на кривой степени t по предложению 35. В частности, в случае $t=1$

$$t(2n+k-3-t)-2 = 2n+k-6 \geqslant n+k-2 = t(n-1),$$

поскольку $n \geqslant 5$. В случае, когда $t>1$, достаточно показать, что

$$t(2n+k-3-t)-2 \geqslant t(n+k-2)$$

для всех $t \leqslant (2n+k-3)/2$ таких, что $t(2n+k-3-t)-2 < |\Sigma|$. Легко видеть, что

$$t(2n+k-3-t)-2 \geqslant t(n+k-2) \quad \Longleftrightarrow \quad n-1>t$$

при $t>1$. Таким образом, можно считать, что $t \geqslant n-1$, но в этом случае

$$t(2n+k-3-t)-2 \geqslant (n-1)(n+k-2) > |\Sigma|.$$

Таким образом, из следствия 16 следует существование кривой $C \subset \Pi$, имеющей степень $2n+k-6$, которая проходит через все точки множества $\Sigma \setminus P$, но не проходит через точку P. Пусть Y – общий четырехмерный конус в $\mathbb{P}^5$ над C. Тогда Y – искомая гиперповерхность.

Пусть Π и Γ – достаточно общие плоскости в $\mathbb{P}^5$. Рассмотрим проекцию

$$\psi\colon \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \Pi$$

из плоскости Γ. Положим $\Sigma' = \psi(\Sigma) \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$ и $\widehat{P} = \psi(P) \in \Sigma'$.

Лемма 37. *Пусть точки множества $\Sigma' \subset \Pi$ обладают свойством $(\star)$, т.е. не более чем $t(n-1)$ точек множества Σ' могут лежать на кривой в $\Pi \cong \mathbb{P}^2$ степени $t \in \mathbb{N}$. Тогда существует гиперповерхность в $\mathbb{P}^5$ степени $2n+k-6$, которая проходит через все точки множества $\Sigma \setminus P$ и не содержит точки $P \in \Sigma$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 36 следует существование кривой $C \subset \Pi$ степени $2n+k-6$, которая проходит через все точки множества $\Sigma' \setminus \widehat{P}$, но не проходит через точку $\widehat{P}$. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^5$ – четырехмерный конус над кривой C с вершиной в плоскости Γ. Тогда Y – искомая гиперповерхность.

Таким образом, можно считать, что точки множества

$$\Sigma' \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

не обладают свойством $(\star)$. Значит, существует подмножество $\Lambda^1_r \subset \Sigma$ такое, что выполнено неравенство $|\Lambda^1_r| > r(n+k-2)$, а все точки множества

$$\widetilde{\Lambda}^1_r = \psi(\Lambda^1_r) \subset \Sigma' \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

лежат на кривой $C \subset \Pi$ степени r. Более того, число r можно считать минимальным натуральным числом, обладающим таким свойством, откуда сразу следует, что кривая C неприводима и приведена.

Построение подмножества $\Lambda_r^1 \subset \Sigma$ можно повторить несколько раз и получить несвязное объединение подмножеств $\Lambda_j^i \subset \Sigma$ для $j = r, \dots, l \geqslant r$ таких, что выполнено строгое неравенство $|\Lambda_j^i| > j(n+k-2)$, но при этом точки множества

$$\widetilde{\Lambda}_j^i = \psi(\Lambda_j^i) \subset \Sigma'$$

лежат на неприводимой кривой в $\Pi \cong \mathbb{P}^2$ степени j, а подмножество

$$\overline{\Sigma} = \Sigma' \setminus \bigcup_{j=r}^{l} \bigcup_{i=1}^{c_j} \widetilde{\Lambda}_j^i \subsetneq \Sigma' \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

удовлетворяет свойству $(\star)$, где $c_j \geqslant 0$ – число подмножеств $\widetilde{\Lambda}_j^i$.

По построению выполнены неравенства $c_r > 0$ и

$$|\overline{\Sigma}| < \frac{(n+k-2)(n-1)}{5} - \sum_{i=r}^{l} c_i(n-1)i = \frac{n+k-2}{5}\left(n-1-\sum_{i=r}^{l} 5ic_i\right). \qquad (1)$$

Следствие 38. *Выполнено неравенство* $\sum_{i=r}^{l} ic_i < (n-1)/5$.

В частности, из $\Lambda_j^i \neq \varnothing$ следует, что $j < (n-1)/5$.

Лемма 39. *Предположим, что* $\Lambda_j^i \neq \varnothing$. *Пусть* $\mathscr{M}$ *– линейная система гиперповерхностей в* $\mathbb{P}^5$ *степени* j, *проходящих через все точки множества* Λ_j^i. *Тогда базисное множество системы* $\mathscr{M}$ *нульмерно.*

Доказательство. По построению множества Λ_j^i все точки подмножества

$$\widetilde{\Lambda}_j^i = \psi(\Lambda_j^i) \subset \Sigma' \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

лежат на неприводимой кривой $C \subset \Pi$ степени j. Пусть Y – конус в $\mathbb{P}^5$ с вершиной в некоторой плоскости $\Upsilon \subset \mathbb{P}^5$ над кривой C. Тогда Y является гиперповерхностью в $\mathbb{P}^5$ степени j, которая содержит все точки построенного множества Λ_j^i, откуда следует, что $Y \in \mathscr{M}$.

Предположим, что базисное множество линейной системы $\mathscr{M}$ содержит неприводимую кривую $Z \subset \mathbb{P}^5$. Тогда $Z \subset Y$. С другой стороны, из общности проекции ψ и неприводимости кривых Z и C следует, что $\psi(Z) = C$ и

$$\Lambda_j^i \subset Z,$$

а ограничение $\psi|_Z \colon Z \to C$ является бирациональным морфизмом, в частности, выполнено равенство $\deg(Z) = j$, но Z содержит не менее $|\Lambda_j^i| > j(n+k-2)$ точек подмножества $\Sigma \subset \mathbb{P}^4$, что противоречит предложению 35.

Следствие 40. *Выполнено неравенство* $r \geqslant 2$.

Каждому $\Lambda_j^i \neq \varnothing$ сопоставим подмножество $\Xi_j^i \subset \mathbb{P}^5$, являющееся базисным множеством линейной системы гиперповерхностей в $\mathbb{P}^5$ степени j, которые содержат множество Λ_j^i. В случае $\Lambda_j^i = \varnothing$ положим $\Xi_j^i = \varnothing$. Тогда Ξ_j^i – конечное подмножество в $\mathbb{P}^5$ по лемме 39, а по построению $\Lambda_j^i \subseteq \Xi_j^i$.

Лемма 41. *Пусть* $\Xi_j^i \neq \varnothing$. *Тогда точки множества* Ξ_j^i *налагают независимые линейные условия на гиперповерхности в* $\mathbb{P}^5$ *степени* $5(j-1)$.

Доказательство следует из леммы 25.

В частности, тогда точки множества Λ_j^i налагают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^5$ степени $5(j-1)$, если $\Lambda_j^i \neq \varnothing$.

Лемма 42. *Предположим, что $\overline{\Sigma} = \varnothing$. Тогда существует гиперповерхность в $\mathbb{P}^5$ степени $2n+k-6$, которая содержит все точки множества $\Sigma \setminus P$, но не содержит точку $P \in \Sigma$.*

Доказательство. По построению имеется несвязное объединение

$$\Sigma = \bigcup_{j=r}^{l} \bigcup_{i=1}^{c_j} \Lambda_j^i,$$

и, следовательно, существует единственное множество Λ_a^b, содержащее точку P. В частности, точка P также содержится в множестве Ξ_a^b, однако точка P, в принципе, может содержаться в нескольких множествах Ξ_j^i.

По лемме 41 для каждого непустого множества Ξ_j^i, содержащего точку P, существует гиперповерхность степени $5(j-1)$, которая проходит через все точки множества $\Xi_j^i \setminus P$, но не содержит при этом точку P. С другой стороны, для каждого непустого множества Ξ_j^i, не содержащего точку P, существует гиперповерхность степени j, которая проходит через все точки множества Ξ_j^i и не содержит точку P, по определению множества Ξ_j^i.

Заметим, что $j < 5(j-1)$, поскольку $j \geqslant r \geqslant 2$ (см. следствие 40).

Итак, для каждого непустого множества Ξ_j^i, содержащего точку P, существует гиперповерхность $F_j^i \subset \mathbb{P}^5$ степени $5(j-1)$, которая содержит множество $\Xi_j^i \setminus P$, но не содержит точку P. Рассмотрим гиперповерхность

$$F = \bigcup_{j=r}^{l} \bigcup_{i=1}^{c_j} F_j^i \subset \mathbb{P}^5$$

степени $\sum_{i=r}^{l} 5(i-1)c_i$. По построению гиперповерхность F содержит все точки множества $\Sigma \setminus P$ и не содержит точку P, более того, выполнены неравенства

$$\deg(F) = \sum_{i=r}^{l} 5(i-1)c_i < \sum_{i=r}^{l} 5ic_i \leqslant n-1 \leqslant 2n+k-6$$

по следствию 38, так как $n \geqslant 5$.

Пусть $\widehat{\Sigma} = \bigcup_{j=r}^{l} \bigcup_{i=1}^{c_j} \Lambda_j^i$ и $\check{\Sigma} = \Sigma \setminus \widehat{\Sigma}$. Тогда $\Sigma = \widehat{\Sigma} \cup \check{\Sigma}$ и $\psi(\check{\Sigma}) = \overline{\Sigma} \subset \Pi$.

Замечание 43. Из доказательства леммы 42 следует существование гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^5$ степени $\sum_{i=r}^{l} 5(i-1)c_i$ такой, что F проходит через все точки подмножества $\widehat{\Sigma} \setminus P \subsetneq \Sigma$ и не содержит точку $P \in \Sigma$.

Положим $d = 2n+k-6-\sum_{i=r}^{l} 5(i-1)c_i$. Проверим, что подмножество $\overline{\Sigma} \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$ и натуральное число d удовлетворяют всем условиям теоремы 15. Можно считать, что $\widehat{\Sigma} \neq \varnothing$ и $\check{\Sigma} \neq \varnothing$.

Лемма 44. *Выполнено неравенство $d \geqslant 5$.*

Доказательство вытекает из следствия 38, так как $c_r \geqslant 1$.

Лемма 45. *Выполнено неравенство* $|\overline{\Sigma}|\leqslant (d^2+9d+10)/6$.

Доказательство. Покажем, что $6(n+k-2)\bigl(n-1-\sum_{i=r}^{l}5ic_i\bigr)$ не превосходит

$$5\biggl(2n+k-6-\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i\biggr)^2+45\biggl(2n+k-6-\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i\biggr)+50,$$

откуда будет следовать требуемое утверждение, поскольку

$$|\overline{\Sigma}|<\frac{(n+k-2)}{5}\biggl(n-1-5\sum_{i=r}^{l}ic_i\biggr)$$

из неравенства (1).

Предположим, что неравенство, которое мы хотим доказать, не выполнено. Положим $A=n-1-\sum_{i=r}^{l}5ic_i$ и $B=\sum_{i=r}^{l}5c_i$. Тогда

$$6A(n+k-2)>5(A+n+k-5+B)^2+45(A+n+k-5+B)+50,$$

что является противоречием, поскольку $A>0$ по следствию 38 и $n\geqslant 5$.

Лемма 46. *Не более чем $t(d+3-t)-2$ точки множества $\overline{\Sigma}$ лежат на кривой степени t в $\mathbb{P}^2$ для всех $t\leqslant (d+3)/2$.*

Доказательство. Пусть сначала $t=1$. Тогда

$$\begin{aligned}t(d+3-t)-2=d=2n+k-6-\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i\geqslant n+k-5+\sum_{i=r}^{l}5c_i\\ \geqslant n+k-5+5c_r>n+k-2\end{aligned}$$

по следствию 38. Последнее означает, что не более d точек множества $\overline{\Sigma}$ лежат на прямой в $\mathbb{P}^2$ по предложению 35.

Пусть теперь $t>1$. Точки подмножества $\overline{\Sigma}\subset\mathbb{P}^2$ обладают свойством $(\star)$, откуда следует, что не более $(n+k-2)t$ точек множества $\overline{\Sigma}$ лежат на кривой в $\mathbb{P}^2$ степени t. Таким образом, достаточно показать, что

$$t(d+3-t)-2\geqslant (n+k-2)t$$

при всех $t>1$ таких, что $t\leqslant (d+3)/2$ и $t(d+3-t)-2<|\overline{\Sigma}|$.

Несложно видеть, что

$$t(d+3-t)-2\geqslant t(n+k-2)\quad\iff\quad n-1-\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i>t,$$

поскольку $t>1$. Предположим, что выполнены неравенства

$$n-1-\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i\leqslant t\leqslant\frac{d+3}{2}$$

и $t(d+3-t)-2<|\overline{\Sigma}|$. Покажем, что это предположение противоречиво.

Пусть $g(x)=x(d+3-x)-2$. Тогда $g(x)$ возрастает при $x\leqslant(d+3)/2$. Значит,

$$g(t)\geqslant g\biggl(n-1-\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i\biggr),$$

откуда следует выполнение неравенств

$$\frac{n+k-2}{5}\biggl(n-1-\sum_{i=r}^{l}5ic_i\biggr)>|\overline{\Sigma}|>g(t)\geqslant g\biggl(n-1-\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i\biggr).$$

Пусть $A=n-1-\sum_{i=r}^{l}5ic_i$ и $B=\sum_{i=r}^{l}5c_i$. Тогда

$$A\,\frac{n+k-2}{5}>g(A+B),$$

где $A>0$ по следствию 38, откуда следует, что

$$0>4(n+k-2)(A+B)+5(A+B)-2\geqslant 118,$$

получили противоречие.

Таким образом, из лемм 44–46 следует, что можно применить теорему 15 к точкам подмножества $\overline{\Sigma}\setminus\widehat{P}\subset\Pi\cong\mathbb{P}^2$ и натуральному числу d. Значит, существует кривая $C\subset\Pi$ степени

$$2n+k-6-\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i,$$

которая содержит $\overline{\Sigma}\setminus\widehat{P}$, но не содержит $\widehat{P}=\psi(P)$. Пусть G – четырехмерный конус в $\mathbb{P}^5$ над кривой C с вершиной в плоскости Γ. Тогда G – гиперповерхность степени

$$2n+k-6-\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i,$$

которая содержит $\check{\Sigma}\setminus P$ и не содержит P. С другой стороны, из замечания 43 следует существование гиперповерхности $F\subset\mathbb{P}^5$ степени

$$\sum_{i=r}^{l}5(i-1)c_i,$$

которая содержит $\widehat{\Sigma}\setminus P$ и не содержит P. Таким образом, $F\cup G$ является гиперповерхностью в $\mathbb{P}^5$ степени $2n+k-6$, проходящей через все точки множества $\Sigma\setminus P$ и не содержащей при этом точки $P\in\Sigma$.

Итак, теорема 28 доказана.

§ 5. Двойные гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$

Пусть $\eta\colon X\to F$ – двойное накрытие такое, что F – неособая гиперповерхность степени $n\geqslant 2$, а η разветвлено в нодальной поверхности $S\subset F$, которая высекается на гиперповерхности F гиперповерхностью G в $\mathbb{P}^4$ степени $2r\geqslant n$.

В настоящем параграфе будет доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 47. *Пусть* $|\mathrm{Sing}(X)| \leqslant (2r+n-2)r/4$. *Тогда* X *является* $\mathbb{Q}$-*факториальным.*

Следующее утверждение вытекает из следствия 14.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 48. *Трехмерное многообразие* X *является* $\mathbb{Q}$-*факториальным, если особые точки многообразия* S *налагают независимые линейные условия на сечения в* $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^4}(3r+n-5)|_F)$.

СЛЕДСТВИЕ 49. *Пусть* $|\mathrm{Sing}(X)| \leqslant 3r+n-4$. *Тогда* X *является* $\mathbb{Q}$-*факториальным.*

Теперь докажем теорему 47. Предположим, что

$$|\mathrm{Sing}(X)| \leqslant \frac{(2r+n-2)r}{4},$$

и покажем, что особые точки поверхности $S \subset \mathbb{P}^4$ налагают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$ степени $3r-n-5$, при этом можно считать, что выполнены неравенства $r \geqslant 3$ и $n \geqslant 2$, поскольку при $r \leqslant 2$ утверждение теоремы 47 следует из следствия 49, а при $n = 1$ утверждение теоремы 47 следует из работы [32].

ЛЕММА 50. *Существует гиперповерхность* $\widehat{G} \subset \mathbb{P}^4$ *степени* $2r$ *такая, что поверхность* S *является полным пересечением* $\widehat{G}$ *и* F, *но* $\mathrm{Sing}(\widehat{G}) \subseteq \mathrm{Sing}(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. доказательство леммы 33.

Итак, можно считать, что $\mathrm{Sing}(G) \subseteq \mathrm{Sing}(S)$.

Пусть $\Sigma = \mathrm{Sing}(S) \subset \mathbb{P}^4$, а P – произвольная точка в Σ. Необходимо доказать существование гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$ степени $3r+n-5$, которая содержит все точки множества $\Sigma \setminus P$, но не содержит точки P, откуда будет следовать утверждение теоремы 47 ввиду произвольности выбора точки P. Заметим, что из доказательства предложения 35 следует, что не более чем $t(2r+n-2)$ точек множества Σ лежат на кривой в $\mathbb{P}^4$ степени $t \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 51. *Пусть существует двумерное линейное подпространство* $\Pi \cong \mathbb{P}^2$ *такое, что* $\Sigma \subset \Pi \subset \mathbb{P}^4$. *Тогда существует гиперповерхность в* $\mathbb{P}^4$ *степени* $3r+n-5$, *которая проходит через все точки множества* $\Sigma \setminus P$ *и не содержит точки* $P \in \Sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим выполнение всех условий следствия 16 в применении к множеству $\Sigma \subset \Pi$ и натуральному числу $d = 3r+n-5 \geqslant 6$.

Неравенство

$$|\Sigma| \leqslant \frac{d^2+9d+16}{6}$$

очевидно, поскольку $r \geqslant 3$, $2r \geqslant n$ и $|\Sigma| \leqslant (2r+n-2)r/4$. Таким образом, необходимо показать, что не более чем $t(3r+n-2-t)-2$ точки множества Σ могут лежать на кривой в $\mathbb{P}^2$ степени $t \leqslant (3r+n-2)/2$.

Достаточно показать, что

$$t(3r+n-2-t)-2 \geqslant t(2r+n-2)$$

для всех t таких, что $t \leqslant (3r+n-2)/2$ и $t(3r+n-2-t)-2 < |\Sigma|$.

Можно считать, что $t \geqslant 2$, поскольку $3r+n-5 \geqslant 2r+n-2$. Тогда

$$t(3r+n-2-t)-2 \geqslant t(2r+n-2) \quad \iff \quad r > t.$$

Предположим, что выполнено неравенство $r \leqslant t$ для некоторого натурального числа t такого, что

$$t \leqslant \frac{3r+n-2}{2}$$

и $t(3r+n-2-t)-2 < |\Sigma|$. Пусть $g(x) = x(3r+n-2-x)-2$, тогда квадратичная функция $g(x)$ возрастает при $x < (3r+n-2)/2$, откуда сразу следует, что выполнено неравенство $g(t) \geqslant g(r)$. Таким образом,

$$\frac{(2r+n-1)r}{4} \geqslant |\Sigma| > g(t) \geqslant g(r) = r(2r+n-2)-2,$$

что невозможно при $r \geqslant 3$.

Из следствия 16 следует существование кривой $C \subset \Pi$ степени $3r+n-5$, которая проходит через все точки в $\Sigma \setminus P$, но не проходит через точку P. Пусть Y – достаточно общий трехмерный конус в $\mathbb{P}^4$ над кривой C. Тогда Y – искомая гиперповерхность.

Пусть Π и Γ – общие плоскость и прямая в $\mathbb{P}^4$ соответственно. Рассмотрим проекцию $\psi\colon \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \Pi$ из прямой Γ. Положим $\Sigma' = \psi(\Sigma) \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$ и $\widehat{P} = \psi(P) \in \Sigma'$.

Лемма 52. *Предположим, что не более чем $t(2r+n-2)$ точек множества Σ' могут лежать на кривой в плоскости $\Pi \cong \mathbb{P}^2$ степени $t \in \mathbb{N}$. Тогда существует гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени $3r+n-5$, которая содержит множество $\Sigma \setminus P$, но не содержит точку $P \in \Sigma$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 51 следует существование кривой C степени $3r+n-5$, которая содержится в плоскости Π, проходит через все точки множества $\Sigma' \setminus \widehat{P}$, но не проходит через точку $\widehat{P}$. Пусть Y – трехмерный конус в $\mathbb{P}^5$ над кривой C с вершиной в прямой Γ. Тогда Y – искомая гиперповерхность.

Таким образом, можно считать, что точки множества

$$\Sigma' \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

не удовлетворяют условиям леммы 52. Значит, существует подмножество $\Lambda_k^1 \subset \Sigma$ такое, что выполнено неравенство $|\Lambda_k^1| > k(2r+n-2)$, а все точки множества

$$\widetilde{\Lambda}_k^1 = \psi(\Lambda_k^1) \subset \Sigma' \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

лежат на кривой $C \subset \Pi$ степени k. Более того, k можно считать минимальным натуральным числом с таким свойством, откуда следует, что C неприводима и приведена.

Построение подмножества $\Lambda_k^1 \subset \Sigma$ можно повторить несколько раз и получить несвязное объединение подмножеств $\Lambda_j^i \subset \Sigma$ для $j = k, \dots, l \geqslant k$ таких, что выполнено строгое неравенство $|\Lambda_j^i| > j(2r+n-2)$, но при этом точки множества

$$\widetilde{\Lambda}_j^i = \psi(\Lambda_j^i) \subset \Sigma'$$

лежат на неприводимой кривой в Π степени j и никакие $t(2r+n-2)$ точек подмножества

$$\overline{\Sigma} = \Sigma' \setminus \bigcup_{j=k}^{l} \bigcup_{i=1}^{c_j} \widetilde{\Lambda}_j^i \subsetneq \Sigma' \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$$

не лежат на кривой степени t в $\mathbb{P}^2$, где $c_j \geqslant 0$ – число подмножеств $\widetilde{\Lambda}_j^i$.

По построению выполнены неравенства $c_k > 0$ и

$$|\overline{\Sigma}| < \frac{(2r+n-2)r}{4} - \sum_{i=k}^{l} c_i(2r+n-2)i = \frac{2r+n-2}{4}\biggl(r - \sum_{i=k}^{l} 4ic_i\biggr). \qquad (2)$$

Следствие 53. *Выполнено неравенство* $\sum_{i=k}^{l} ic_i < r/4$.

Лемма 54. *Предположим, что* $\Lambda_j^i \neq \varnothing$. *Пусть* $\mathscr{M}$ *– линейная система гиперповерхностей в* $\mathbb{P}^4$ *степени* j, *проходящих через все точки множества* Λ_j^i. *Тогда базисное множество системы* $\mathscr{M}$ *нульмерно.*

Доказательство. См. доказательство леммы 39.

Следствие 55. *Выполнено неравенство* $k \geqslant 2$.

Каждому $\Lambda_j^i \neq \varnothing$ сопоставим подмножество $\Xi_j^i \subset \mathbb{P}^4$, являющееся базисным множеством линейной системы гиперповерхностей в $\mathbb{P}^4$ степени j, которые содержат множество Λ_j^i. В случае $\Lambda_j^i = \varnothing$ просто положим $\Xi_j^i = \varnothing$. Тогда множество Ξ_j^i является конечным подмножеством в $\mathbb{P}^4$ по лемме 54, а по построению $\Lambda_j^i \subseteq \Xi_j^i$.

Лемма 56. *Пусть* $\Xi_j^i \neq \varnothing$. *Тогда точки множества* Ξ_j^i *налагают независимые линейные условия на гиперповерхности в* $\mathbb{P}^4$ *степени* $4(j-1)$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 25.

В частности, тогда точки множества Λ_j^i налагают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$ степени $4(j-1)$, если $\Lambda_j^i \neq \varnothing$.

Лемма 57. *Пусть* $\overline{\Sigma} = \varnothing$. *Тогда существует гиперповерхность в* $\mathbb{P}^4$ *степени* $3r+n-5$, *которая содержит множество* $\Sigma \setminus P$, *но не содержит точку* $P \in \Sigma$.

Доказательство. См. доказательство леммы 42.

Пусть $\widehat{\Sigma} = \bigcup_{j=k}^{l} \bigcup_{i=1}^{c_j} \Lambda_j^i$ и $\check{\Sigma} = \Sigma \setminus \widehat{\Sigma}$. Тогда $\Sigma = \widehat{\Sigma} \cup \check{\Sigma}$ и $\psi(\check{\Sigma}) = \overline{\Sigma} \subset \Pi$. Более того, из доказательства леммы 57 следует существование некоторой гиперповерхности $\Upsilon \subset \mathbb{P}^4$ степени $\sum_{i=k}^{l} 4(i-1)c_i$, которая содержит все точки подмножества $\widehat{\Sigma} \setminus P \subsetneq \Sigma$ и не содержит точку $P \in \Sigma$.

Положим $d = 3r + n - 5 - \sum_{i=k}^{l} 4(i-1)c_i$. Проверим, что подмножество $\overline{\Sigma} \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$ и натуральное число d удовлетворяют всем условиям теоремы 15, при этом можно считать, что $\widehat{\Sigma} \neq \varnothing$ и $\check{\Sigma} \neq \varnothing$.

Лемма 58. *Выполнено неравенство* $d \geqslant 3$.

Доказательство вытекает из следствия 53 и того, что $r \geqslant 3$ и $c_k \geqslant 1$.

Лемма 59. *Выполнено неравенство* $|\overline{\Sigma}| \leqslant (d^2 + 9d + 10)/6$.

Доказательство. Покажем, что

$$6(2r+n-2)\left(r-\sum_{i=k}^{l}4ic_i\right)\leqslant 4(d^2+9d+10),$$

откуда будет следовать требуемое утверждение. Предположим, что

$$6(2r+n-2)\left(r-\sum_{i=k}^{l}4ic_i\right)> 4(d^2+9d+10),$$

и положим $A=r-\sum_{i=k}^{l}4ic_i$ и $B=\sum_{i=k}^{l}c_i$. Тогда

$$6A(2r+n-2)>4(2r+n-5+A+4B)^2+36(2r+n-5+A+4B)+40,$$

где $A>0$ по следствию 53 и $r\geqslant 3$, что, как легко видеть, является противоречием.

Лемма 60. *Не более чем $t(d+3-t)-2$ точки множества $\overline{\Sigma}$ лежат на кривой степени t в $\mathbb{P}^2$ для всех $t\leqslant (d+3)/2$.*

Доказательство. Пусть сначала $t=1$. Тогда

$$t(d+3-t)-2=d=3r+n-5-\sum_{i=k}^{l}4(i-1)c_i\geqslant 2r+n-5+4c_k\geqslant 2r+n-2$$

по следствию 53.

Пусть теперь $t>1$. Не более $(2r+n-2)t$ точек множества $\overline{\Sigma}$ лежат на кривой в $\mathbb{P}^2$ степени t. Таким образом, достаточно показать, что

$$t(d+3-t)-2\geqslant (2r+n-2)t$$

при всех $t>1$ таких, что $t\leqslant (d+3)/2$ и $t(d+3-t)-2<|\overline{\Sigma}|$.

Несложно видеть, что

$$t(d+3-t)-2\geqslant t(2r+n-2)\quad\iff\quad r-\sum_{i=k}^{l}4(i-1)c_i>t,$$

поскольку $t>1$. Предположим, что выполнены неравенства

$$r-\sum_{i=k}^{l}4(i-1)c_i\leqslant t\leqslant \frac{d+3}{2}$$

и $t(d+3-t)-2<|\overline{\Sigma}|$. Покажем, что это невозможно.

Пусть $g(x)=x(d+3-x)-2$. Тогда $g(x)$ возрастает при $x\leqslant (d+3)/2$. Значит,

$$g(t)\geqslant g\left(r-\sum_{i=k}^{l}4(i-1)c_i\right).$$

Пусть $A=r-\sum_{i=k}^{l}4ic_i$ и $B=\sum_{i=k}^{l}c_i$. Тогда

$$A\frac{2r+n-2}{4}>g(A+4B)=(A+4B)(2r+n-5)-2,$$

что является противоречием, поскольку $A>0$ по следствию 53.

Таким образом, из лемм 58–60 следует, что можно применить теорему 15 к точкам подмножества $\overline{\Sigma} \setminus \widehat{P} \subset \Pi \cong \mathbb{P}^2$ и натуральному числу d. Значит, существует кривая $C \subset \Pi$ степени

$$3r + n - 5 - \sum_{i=k}^{l} 4(i-1)c_i,$$

которая содержит множество $\overline{\Sigma} \setminus \widehat{P}$, но не содержит $\widehat{P} = \psi(P)$. Пусть Φ – трехмерный конус в $\mathbb{P}^4$ над C с вершиной в Γ. Тогда Φ – гиперповерхность степени

$$3r + n - 5 - \sum_{i=k}^{l} 4(i-1)c_i,$$

которая содержит $\check{\Sigma} \setminus P$ и не содержит P. С другой стороны, у нас уже имеется в наличии гиперповерхность $\Upsilon \subset \mathbb{P}^4$ степени

$$\sum_{i=k}^{l} 4(i-1)c_i,$$

которая содержит $\widehat{\Sigma} \setminus P$ и не содержит P. Значит, $\Phi \cup \Upsilon$ является гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$ степени $3r + n - 5$, содержащей $\Sigma \setminus P$ и не содержащей при этом точки $P \in \Sigma$.

Итак, теорема 47 доказана, что завершает доказательство теоремы 8.

Список литературы

[1] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, “Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86**:1 (1971), 140–166.

[2] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью”, *Матем. сб.*, **135(177)**:4 (1988), 472–496.

[3] A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **281** (2000), 259–312.

[4] M. Mella, “Birational geometry of quartic 3-folds. II: The importance of being $\mathbb{Q}$-factorial”, *Math. Ann.*, **330**:1 (2004), 107–126.

[5] В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Совр. проблемы матем.*, **12** (1979), 159–236.

[6] A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of double spaces with sigularities”, *J. Math. Sci.* (*New York*), **85**:4 (1997), 2128–2141.

[7] I. Cheltsov, J. Park, “Sextic double solids”, `arXiv: math.AG/0404452`.

[8] А. Н. Варченко, “О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности”, *Докл. АН СССР*, **270**:6 (1983), 1294–1297.

[9] R. Friedman, “Simultaneous resolution of threefold double points”, *Math. Ann.*, **274** (1986), 671–689.

[10] A. J. de Jong, N. I. Shepherd-Barron, A. Van de Ven, “On the Burkhardt quartic”, *Math. Ann.*, **286**:1–3 (1990), 309–328.

[11] H. Burkhardt, “Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen, II”, *Math. Ann.*, **38** (1890), 161–224.

[12] H. Burkhardt, “Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen, III”, *Math. Ann.*, **41** (1893), 313–343.

[13] J. A. Todd, “On a quartic primal with forty-five nodes, in space of four dimensions”, *Quart. J. Math.*, **7** (1936), 168–174.

[14] K. Petterson, *On nodal determinantal quartic hypersurfaces in* $\mathbb{P}^4$, Thesis, University of Oslo, 1998; http://folk.uio.no/ranestad/kfpthesis.ps.

[15] G. van der Geer, “Note on abelian schemes of level three”, *Math. Ann.*, **278** (1987), 401–408.

[16] B. Hunt, *The geometry of some special arithmetic quotients*, Lecture Notes in Math., **1637**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[17] J. W. Hoffman, S. H. Weintraub, “The Siegel modular variety of degree two and level three”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353**:8 (2001), 3267–3305.

[18] K. Hulek, G. K. Sankaran, “The geometry of Siegel modular varieties”, *Higher dimensional birational geometry* (Kyoto, Japan, 1997), Adv. Stud. Pure Math., **35**, 2002, 89–156.

[19] A. Andreotti, T. Frankel, “The Lefschetz theorem on hyperplane sections”, *Ann. of Math.* (2), **69** (1959), 713–717.

[20] R. Bott, “On a theorem of Lefschetz”, *Michigan Math. J.*, **6** (1959), 211–216.

[21] W. Barth, “Two projective surfaces with many nodes, admitting the symmetries of the icosahedron”, *J. Algebraic Geom.*, **5**:1 (1996), 173–186.

[22] D. B. Jaffe, D. Ruberman, “A sextic surface cannot have 66 nodes”, *J. Algebraic Geom.*, **6**:1 (1997), 151–168.

[23] J. Wahl, “Nodes on sextic hypersurfaces in $\mathbb{P}^3$”, *J. Differential Geom.*, **48**:3 (1998), 439–444.

[24] F. Catanese, G. Ceresa, “Constructing sextic surfaces with a given number d of nodes”, *J. Pure Appl. Algebra*, **23** (1982), 1–12.

[25] S. Endraß, “On the divisor class group of double solids”, *Manuscripta Math.*, **99**:3 (1999), 341–358.

[26] C. H. Clemens, “Double solids”, *Adv. Math.*, **47** (1983), 107–230.

[27] J. Werner, “Kleine Auflösungen spezieller dreidimensionaler Varietäten”, *Bonner Math. Schriften*, **186**, Univ. Bonn, Math. Inst., Bonn, 1987.

[28] A. Dimca, “Betti numbers of hypersufaces and defects of linear systems”, *Duke Math. J.*, **60**:1 (1990), 285–298.

[29] S. Cynk, “Defect of a nodal hypersurface”, *Manuscripta Math.*, **104**:3 (2001), 325–331.

[30] C. Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry*, II, Cambridge Stud. Adv. Math., **77**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[31] J. W. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1968.

[32] I. Cheltsov, “On factoriality of nodal threefolds”, *J. Algebraic Geom.*, **14**:4 (2005), 663–690.

[33] В. В. Шокуров, “Трехмерные лог-перестройки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203.

[34] J. Kollár (ed.), *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry (University of Utah, Salt Lake City, UT, 1991), Astérisque, **211**, Soc. Math. France, Paris, 1992.

[35] J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry* (Santa Cruz, CA, USA, 1995), Proc. Symp. Pure. Math., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.

[36] F. Ambro, “Ladders on Fano varieties”, *J. Math. Sci.* (*New York*), **94** (1999), 1126–1135.

[37] C. Ciliberto, V. di Gennaro, “Factoriality of certain hypersurfaces of $\mathbb{P}^4$ with ordinary double points”, *Algebraic transformation groups and algebraic varieties* (Vienna, Austria, 2001), Encyclopaedia Math. Sci., **132**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 1–7.

[38] H. Finkelberg, J. Werner, “Small resolutions of nodal cubic threefolds”, *Indag. Math.* (*N.S.*), **51**:2 (1989), 185–198.

[39] I. Cheltsov, “Non-rational nodal quartic threefolds”, *Pacific J. Math.* (to appear); arXiv: math.AG/0405150.

[40] M. Reid, “Chapters on algebraic surfaces”, *Complex algebraic geometry* (Park City, UT, 1993), IAS/Park City Math. Ser., **3**, ed. J. Kollár, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1997, 5–159.

[41] F. Bardelli, “Polarized mixed Hodge structures: on irrationality of threefolds via degeneration”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **137** (1984), 287–369.

[42] И. В. Соболев, “Бирациональные автоморфизмы одного класса многообразий, расслоенных на кубические поверхности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 203–224.

[43] И. А. Чельцов, “Метод вырождения и нерациональность трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо”, *УМН*, **59**:4 (2004), 203–204.

[44] C. H. Clemens, P. A. Griffiths, “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math.* (2), **95** (1972), 281–356.

[45] J. Kollár, “Flops”, *Nagoya Math. J.*, **113** (1989), 15–36.

[46] B. Hunt, “Nice modular varieties”, *Experiment. Math.*, **9** (2000), 613–622.

[47] H. Finkelberg, “Small resolutions of the Segre cubic”, *Indag. Math.* (*N.S.*), **49** (1987), 261–277.

[48] D. Grayson, M. Stillman, “Macaulay 2: a software system for algebraic geometry and commutative algebra”, http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.

[49] D. Eisenbud, D. Grayson, M. Stillman, B. Sturmfels (eds.), *Computations in algebraic geometry with Macaulay* 2, Algorithms Comput. Math., **8**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[50] C. Borcea, “Nodal quintic threefolds and nodal octic surfaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109** (1990), 627–635.

[51] B. Kreussler, “Another description of certain quartic double solids”, *Math. Nachr.*, **212** (2000), 91–100.

[52] M. Reid, “Graded rings and birational geometry”, *Proc. of Algebraic Geometry Symposium* (Kinosaki, October 2000), 2000, 1–72;
http://www.maths.warwick.ac.uk/~miles/3folds/Ki/Ki.pdf.

[53] A. Corti, “Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:2 (1995), 223–254.

[54] A. R. Iano-Fletcher, “Working with weighted complete intersections”, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **281** (2000), 101–173.

[55] A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, “Fano 3-fold hypersurfaces”, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **281** (2000), 175–258.

[56] I. Dolgachev, “Weighted projective varieties”, *Group actions and vector fields* (Vancouver, 1981), Lecture Notes in Math., **956**, 1982, 34–71.

[57] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorémes de Lefschetz locaux et globaux*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie, 1962, Soc. Math. France, Paris, 2005.

[58] F. Call, G. Lyubeznik, “A simple proof of Grothendieck's theorem on the parafactoriality of local rings”, *Contemp. Math.*, **159** (1994), 15–18.

[59] И. А. Чельцов, “Регуляризация бирациональных автоморфизмов”, *Матем. заметки*, **76**:2 (2004), 286–299.

[60] R. Elkik, “Rationalite des singularites canoniques”, *Invent. Math.*, **64** (1981), 1–6.

[61] В. А. Исковских, “Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори”, *УМН*, **51**:4 (1996), 3–72.

[62] Ch. Schoen, “Algebraic cycles on certain desingularized nodal hypersurfaces”, *Math. Ann.*, **279** (1985), 17–27.

[63] E. Bese, “On the spannedness and very ampleness of certain line bundles on the blow-ups of $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ and F^r”, *Math. Ann.*, **262** (1983), 225–238.

[64] M. Demazure, “Surfaces de del Pezzo”, *Séminaire sur les Singularités des Surfaces* (Palaiseau, 1976–77), Lecture Notes in Math., **777**, Springer, Berlin, 1980, 21–69.

[65] F. Hidaka, K. Watanabe, “Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor”, *Tokyo J. Math.*, **4** (1981), 319–330.

[66] H. Maeda, “Surfaces with nef anticanonical bundles”, *Boll. Union Mat. Ital.*, **8** (1994), 425–430.

[67] E. D. Davis, A. V. Geramita, “Birational morphisms to $\mathbb{P}^2$: an ideal-theoretic perspective”, *Math. Ann.*, **279** (1988), 435–448.

[68] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, “Introduction to the minimal model problem”, *Adv. Stud. Pure Math.*, **10** (1987), 283–360.

[69] Yu. Kawamata, “A generalization of Kodaira–Ramanujam’s vanishing theorem”, *Math. Ann.*, **261** (1982), 43–46.

[70] V. Viehweg, “Vanishing theorems”, *J. Reine Angew. Math.*, **335** (1982), 1–8.

[71] C. Ciliberto, V. di Gennaro, “Factoriality of certain threefolds complete intersection in $\mathbb{P}^5$ with ordinary double points”, *Comm. Algebra*, **32**:7 (2004), 2705–2710.

И. А. Чельцов (I. A. Cheltsov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `cheltsov@yahoo.com`

Поступила в редакцию
08.02.2005