

Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопередающиеся матрицы

Е. Ю. Смирнов

Высшая школа экономики
факультет математики

Независимый московский университет

СВГУ, Магадан, 11 декабря 2015 г.

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение.

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$.

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$.
- Разбиения можно изображать при помощи *диаграмм Юнга*.

Разбиения

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$.
- Разбиения можно изображать при помощи *диаграмм Юнга*.

Пример

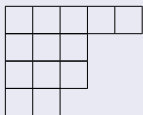
$$13 = 5 + 3 + 3 + 2$$

Разбиения

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$.
- Разбиения можно изображать при помощи *диаграмм Юнга*.

Пример

$$13 = 5 + 3 + 3 + 2$$



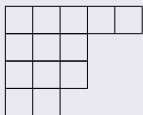
Длины строк соответствуют частям разбиения

Разбиения

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$.
- Разбиения можно изображать при помощи *диаграмм Юнга*.

Пример

$$13 = 5 + 3 + 3 + 2$$



Alfred Young

(1873–1940)

Длины строк соответствуют частям разбиения

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Нетрудно найти его значение при малых n :

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Нетрудно найти его значение при малых n :

$$p(0) = 1 \quad \emptyset$$

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Нетрудно найти его значение при малых n :

$$p(0) = 1 \quad \emptyset$$

$$p(1) = 1 \quad \square$$

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Нетрудно найти его значение при малых n :

$p(0) = 1$	$\emptyset$
$p(1) = 1$	
$p(2) = 2$	

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Нетрудно найти его значение при малых n :

$p(0) = 1$	$\emptyset$
$p(1) = 1$	
$p(2) = 2$	
$p(3) = 3$	

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Нетрудно найти его значение при малых n :

$$p(0) = 1$$



$$p(1) = 1$$



$$p(2) = 2$$



$$p(3) = 3$$



$$p(4) = 5$$



Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Нетрудно найти его значение при малых n :

$$p(0) = 1$$



$$p(1) = 1$$



$$p(2) = 2$$



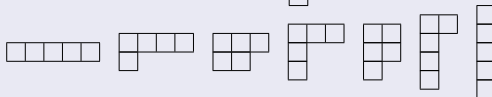
$$p(3) = 3$$



$$p(4) = 5$$



$$p(5) = 7$$



Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Нетрудно найти его значение при малых n :

$$p(0) = 1$$



$$p(1) = 1$$



$$p(2) = 2$$



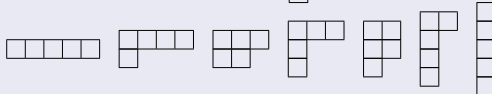
$$p(3) = 3$$



$$p(4) = 5$$



$$p(5) = 7$$



$$p(6) = 11$$

(сами нарисуйте...)

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Нетрудно найти его значение при малых n :

$$p(0) = 1$$



$$p(1) = 1$$



$$p(2) = 2$$



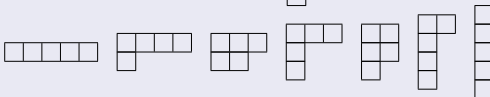
$$p(3) = 3$$



$$p(4) = 5$$



$$p(5) = 7$$



$$p(6) = 11 \quad (\text{сами нарисуйте...})$$

Угадать закономерность не получается!..

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.
Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots);$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.
Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \quad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.
Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \quad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.
Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \quad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.
Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \quad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Ещё пример

$$a_i = C_n^i, \quad 0 \leq i \leq n;$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.
Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \quad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Ещё пример

$$a_i = C_n^i, \quad 0 \leq i \leq n; \quad A(q) = C_n^0 + C_n^1q + C_n^2q^2 + \dots + C_n^nq^n$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.
Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \quad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Ещё пример

$$a_i = C_n^i, \quad 0 \leq i \leq n; \quad A(q) = C_n^0 + C_n^1q + C_n^2q^2 + \dots + C_n^nq^n = (1+q)^n.$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.
Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \quad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Ещё пример

$$a_i = C_n^i, \quad 0 \leq i \leq n; \quad A(q) = C_n^0 + C_n^1 q + C_n^2 q^2 + \dots + C_n^n q^n = (1 + q)^n.$$

Это бином Ньютона.

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2};$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = F_1 = 1;$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = F_1 = 1; \quad F(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = F_1 = 1; \quad F(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q);$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = F_1 = 1; \quad F(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q);$$

- Представьте $F(q)$ в виде

$$F(q) = \frac{1}{1 - q - q^2} =$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = F_1 = 1; \quad F(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q);$$

- Представьте $F(q)$ в виде

$$F(q) = \frac{1}{1 - q - q^2} = \frac{1}{(1 - \varphi q)(1 - \bar{\varphi} q)}$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = F_1 = 1; \quad F(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q);$$

- Представьте $F(q)$ в виде

$$F(q) = \frac{1}{1 - q - q^2} = \frac{1}{(1 - \varphi q)(1 - \bar{\varphi} q)} = \frac{a}{1 - \varphi q} + \frac{b}{1 - \bar{\varphi} q}.$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = F_1 = 1; \quad F(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q);$$

- Представьте $F(q)$ в виде

$$F(q) = \frac{1}{1 - q - q^2} = \frac{1}{(1 - \varphi q)(1 - \bar{\varphi} q)} = \frac{a}{1 - \varphi q} + \frac{b}{1 - \bar{\varphi} q}.$$

- Представьте F_n как сумму двух геометрических прогрессий.

Ответ: формула Бине

Числа Фибоначчи выражаются по *формуле Бине*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Ответ: формула Бине

Числа Фибоначчи выражаются по формуле Бине

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$



Liber Abaci (1202)

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n .

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n .

Упростим задачу

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 1?

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n .

Упростим задачу

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 1?
- Конечно же, одно.

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n .

Упростим задачу

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 1?
- Конечно же, одно.
- А производящая функция равна

$$P_1(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n .

Упростим задачу

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 1?
- Конечно же, одно.
- А производящая функция равна

$$P_1(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

- (пока ничего интересного...)

Чуть-чуть усложним...

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 2?

Чуть-чуть усложним...

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 2?
- Одно или ни одного; производящая функция равна

$$P_2(q) = 1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots = \frac{1}{1 - q^2}.$$

Чуть-чуть усложним...

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 2?
- Одно или ни одного; производящая функция равна

$$P_2(q) = 1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots = \frac{1}{1 - q^2}.$$

А вот чуть более интересный вопрос

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, *не превосходящие* 2? Чему равна соответствующая производящая функция?

Чуть-чуть усложним...

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 2?
- Одно или ни одного; производящая функция равна

$$P_2(q) = 1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots = \frac{1}{1 - q^2}.$$

А вот чуть более интересный вопрос

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, *не превосходящие* 2? Чему равна соответствующая производящая функция?
- Она равна *произведению* двух предыдущих производящих функций!

$$P_{\leq 2}(q) = (1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^4 + \dots) = \frac{1}{(1 - q)(1 - q^2)}.$$

Производящая функция для числа разбиений

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, не превосходящие k ?

Производящая функция для числа разбиений

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, не превосходящие k ?
- Аналогично получаем, что

$$P_{\leq k}(q) = (1 + q + q^2 \dots) \dots (1 + q^k + q^{2k} \dots) = \frac{1}{(1 - q) \dots (1 - q^k)}.$$

Производящая функция для числа разбиений

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, не превосходящие k ?
- Аналогично получаем, что

$$P_{\leq k}(q) = (1 + q + q^2 \dots) \dots (1 + q^k + q^{2k} \dots) = \frac{1}{(1 - q) \dots (1 - q^k)}.$$

Теперь можно сформулировать и общий результат:

Производящая функция для числа разбиений

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, не превосходящие k ?
- Аналогично получаем, что

$$P_{\leq k}(q) = (1 + q + q^2 \dots) \dots (1 + q^k + q^{2k} \dots) = \frac{1}{(1 - q) \dots (1 - q^k)}.$$

Теперь можно сформулировать и общий результат:

Теорема (Л. Эйлер)

Производящая функция $P(q)$ для количества разбиений $p(n)$ числа n имеет вид

$$P(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}.$$



Leonhard Euler

(1707–1783)

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1$$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2$$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7$$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15}$$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26}$$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1 ;

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1 ;
- нулей всё больше и больше;

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1 ;
- нулей всё больше и больше;
- чередование: два минуса, два плюса, два минуса, два плюса...

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1 ;
- нулей всё больше и больше;
- чередование: два минуса, два плюса, два минуса, два плюса...
- разность между соседними слагаемыми одного знака: $2 - 1 = 1$,
 $7 - 5 = 2$, $15 - 12 = 3$, ...

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

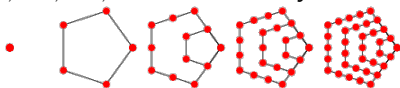
$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1 ;
- нулей всё больше и больше;
- чередование: два минуса, два плюса, два минуса, два плюса...
- разность между соседними слагаемыми одного знака: $2 - 1 = 1$, $7 - 5 = 2$, $15 - 12 = 3$, ...
- а что такое 1, 5, 12, 22, 35...?

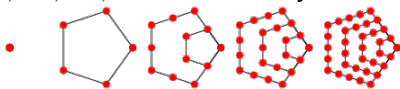
Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные* числа.



Пятиугольные числа

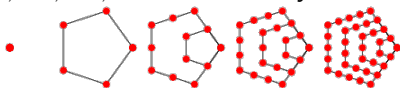
- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные* числа.



- n -е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные* числа.



- n -е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

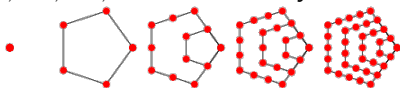
Пентагональная теорема Эйлера

Ряд, обратный к производящей функции для разбиений, равен

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right).$$

Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные* числа.



- n -е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

Пентагональная теорема Эйлера

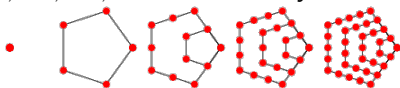
Ряд, обратный к производящей функции для разбиений, равен

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right).$$

- этот ряд позволяет быстро вычислять $p(n)$;

Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные* числа.



- n -е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

Пентагональная теорема Эйлера

Ряд, обратный к производящей функции для разбиений, равен

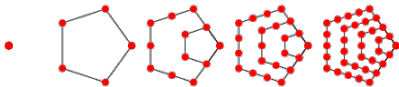
$$P(q)^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right).$$

- этот ряд позволяет быстро вычислять $p(n)$;

(подробности см.: С.Л.Табачников, Д.Б.Фукс, «Математический дивертисмент»);

Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные* числа.



- n -е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

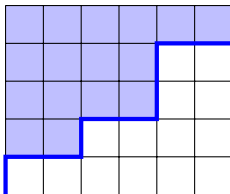
Пентагональная теорема Эйлера

Ряд, обратный к производящей функции для разбиений, равен

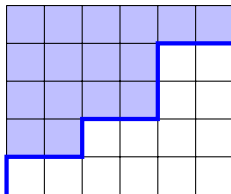
$$P(q)^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right).$$

- этот ряд позволяет быстро вычислять $p(n)$;
(подробности см.: С.Л.Табачников, Д.Б.Фукс, «Математический дивертисмент»);
- обобщения: тройное тождество Якоби, η -функция Дедекинда...

Диаграммы Юнга в прямоугольнике

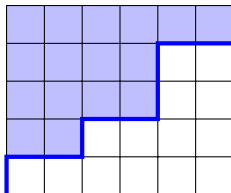


Диаграммы Юнга в прямоугольнике



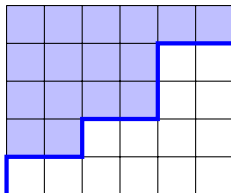
- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.

Диаграммы Юнга в прямоугольнике



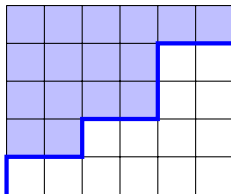
- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?

Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?
- В таких диаграммах должно быть не более m строк и n столбцов.

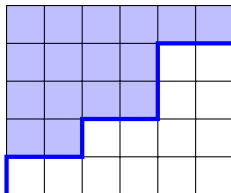
Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?
- В таких диаграммах должно быть не более m строк и n столбцов.

Пример: $m = n = 2$

Диаграммы Юнга в прямоугольнике

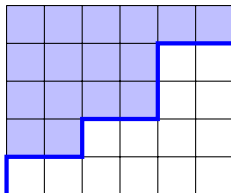


- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?
- В таких диаграммах должно быть не более m строк и n столбцов.

Пример: $m = n = 2$



Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?
- В таких диаграммах должно быть не более m строк и n столбцов.

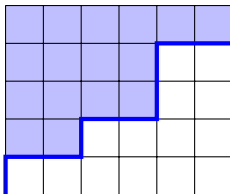
Пример: $m = n = 2$

$\emptyset$

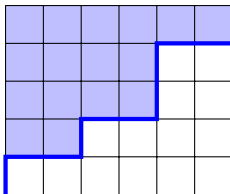


Всего 6 диаграмм.

Диаграммы Юнга в прямоугольнике

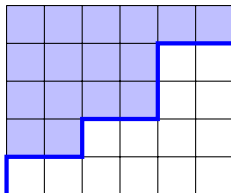


Диаграммы Юнга в прямоугольнике



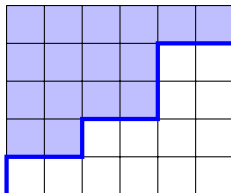
- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.

Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.
- Путь — это последовательность $m + n$ отрезков, из которых m вертикальны и n горизонтальны.

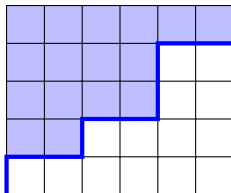
Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.
- Путь — это последовательность $m + n$ отрезков, из которых m вертикальны и n горизонтальны.
- Например, путь на рисунке соответствует последовательности

$N \ E \ E \ N \ E \ E \ N \ N \ E \ E \ N$

Диаграммы Юнга в прямоугольнике

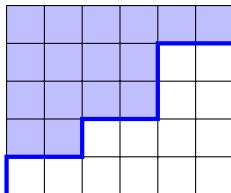


- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.
- Путь — это последовательность $m + n$ отрезков, из которых m вертикальны и n горизонтальны.
- Например, путь на рисунке соответствует последовательности

$N \ E \ E \ N \ E \ E \ N \ N \ E \ E \ N$

- Число таких последовательностей равно C_{m+n}^m .

Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.
- Путь — это последовательность $m + n$ отрезков, из которых m вертикальны и n горизонтальны.
- Например, путь на рисунке соответствует последовательности

$N \ E \ E \ N \ E \ E \ N \ N \ E \ E \ N$

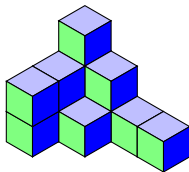
- Число таких последовательностей равно C_{m+n}^m .
- Нам это пригодится чуть позже...

Трёхмерные диаграммы Юнга

Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».

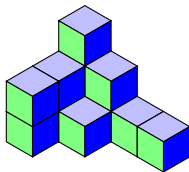
Трёхмерные диаграммы Юнга

Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».



Трёхмерные диаграммы Юнга

Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».

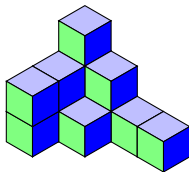


Её можно рассматривать как диаграмму Юнга, заполненную числами:

3	2	1	1
2	1		
2			

Трёхмерные диаграммы Юнга

Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».



Её можно рассматривать как диаграмму Юнга, заполненную числами:

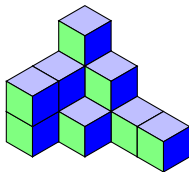
3	2	1	1
2	1		
2			

...или как последовательность вложенных диаграмм Юнга:



Трёхмерные диаграммы Юнга

Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».



Её можно рассматривать как диаграмму Юнга, заполненную числами:

3	2	1	1
2	1		
2			

...или как последовательность вложенных диаграмм Юнга:



А сколько трёхмерных диаграмм Юнга можно поместить в параллелепипед размера $k \times m \times n$?

Двухэтажные диаграммы

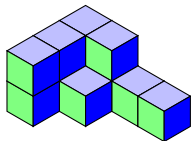
Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$.

Двухэтажные диаграммы

Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:

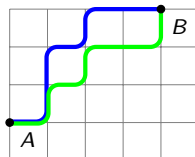
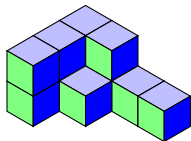
Двухэтажные диаграммы

Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:



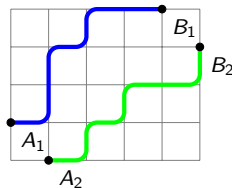
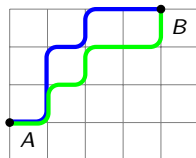
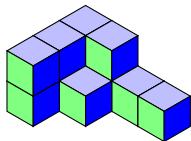
Двухэтажные диаграммы

Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:



Двухэтажные диаграммы

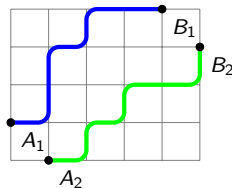
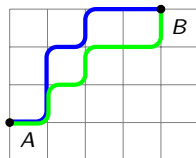
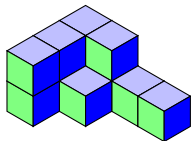
Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:



Сдвинем зелёный путь вниз и вправо.

Двухэтажные диаграммы

Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:



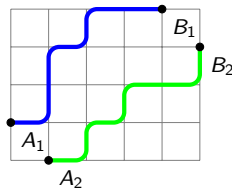
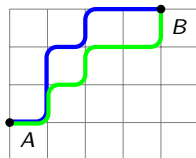
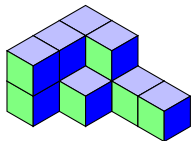
Сдвинем зелёный путь вниз и вправо. Теперь пути не пересекаются!

Вывод

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равно числу пар непересекающихся путей $(A_1 \rightarrow B_1)$ и $(A_2 \rightarrow B_2)$.

Двухэтажные диаграммы

Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:



Сдвинем зелёный путь вниз и вправо. Теперь пути не пересекаются!

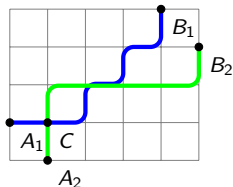
Вывод

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равно числу пар непересекающихся путей $(A_1 \rightarrow B_1)$ и $(A_2 \rightarrow B_2)$.

А всего таких пар (без каких-либо условий) будет $(C_{m+n}^m)^2$.

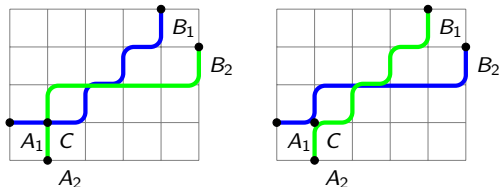
Биекция Линдстрёма–Гесселя–Вьенно

Вместо того чтобы считать число пар непересекающихся путей, найдём число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \rightarrow B_1)$ и $(A_2 \rightarrow B_2)$. Рассмотрим какую-нибудь такую пару.



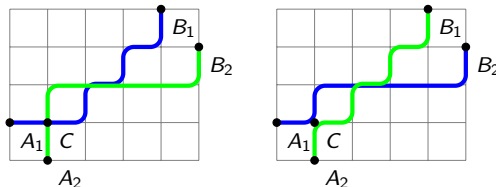
Биекция Линдстрёма–Гесселя–Вьенно

Вместо того чтобы считать число пар непересекающихся путей, найдём число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \rightarrow B_1)$ и $(A_2 \rightarrow B_2)$. Рассмотрим какую-нибудь такую пару.



Биекция Линдстрёма–Гесселя–Вьенно

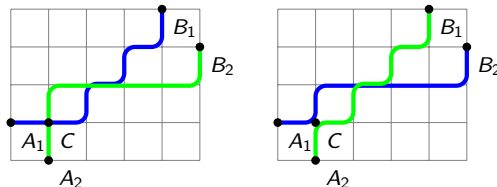
Вместо того чтобы считать число пар непересекающихся путей, найдём число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \rightarrow B_1)$ и $(A_2 \rightarrow B_2)$. Рассмотрим какую-нибудь такую пару.



По ней строится пара путей, соединяющих точки в «неправильном» порядке!

Биекция Линдстрёма–Гесселя–Вьенно

Вместо того чтобы считать число пар непересекающихся путей, найдём число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \rightarrow B_1)$ и $(A_2 \rightarrow B_2)$. Рассмотрим какую-нибудь такую пару.



По ней строится пара путей, соединяющих точки в «неправильном» порядке!

Предложение

Число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \rightarrow B_1)$ и $(A_2 \rightarrow B_2)$ равно $C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1}$.

Теорема

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = (C_{m+n}^m)^2 - C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1}$$

Теорема

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = (C_{m+n}^m)^2 - C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1} = \begin{vmatrix} C_{m+n}^m & C_{m+n}^{m-1} \\ C_{m+n}^{m+1} & C_{m+n}^m \end{vmatrix}.$$

Теорема

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = (C_{m+n}^m)^2 - C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1} = \begin{vmatrix} C_{m+n}^m & C_{m+n}^{m-1} \\ C_{m+n}^{m+1} & C_{m+n}^m \end{vmatrix}.$$

Упражнение

Докажите, что это же число равно

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = \prod_{i=1}^n \frac{(m+i)(m+i+1)}{i(i+1)}.$$

Формула Макмагона

Теорема

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = (C_{m+n}^m)^2 - C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1} = \begin{vmatrix} C_{m+n}^m & C_{m+n}^{m-1} \\ C_{m+n}^{m+1} & C_{m+n}^m \end{vmatrix}.$$

Упражнение

Докажите, что это же число равно

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = \prod_{i=1}^n \frac{(m+i)(m+i+1)}{i(i+1)}.$$

Замечание

Это напоминает формулу $\mathcal{B}_{1,m,n} = C_{m+n}^n = \prod_{i=1}^n \frac{m+i}{i} = \frac{(m+1) \cdots (m+n)}{1 \cdots n}$.

Формулы Макмагона

Этот результат можно обобщить на случай произвольного k :

Формулы Макмагона

Этот результат можно обобщить на случай произвольного k :

Теорема (П. А. Макмагон)

Число трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $k \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{k,m,n} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \prod_{\ell=1}^k \frac{i+j+\ell-1}{i+j+\ell-2}.$$



Percy MacMahon
(1854–1929)

Формулы Макмагона

Этот результат можно обобщить на случай произвольного k :

Теорема (П. А. Макмагон)

Число трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $k \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{k,m,n} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \prod_{\ell=1}^k \frac{i+j+\ell-1}{i+j+\ell-2}.$$



Percy MacMahon
(1854–1929)

Теорема (П. А. Макмагон)

Производящая функция для числа трёхмерных диаграмм Юнга равна

$$P_{3D}(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k}.$$

Формулы Макмагона

Этот результат можно обобщить на случай произвольного k :

Теорема (П. А. Макмагон)

Число трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $k \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{k,m,n} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \prod_{\ell=1}^k \frac{i+j+\ell-1}{i+j+\ell-2}.$$



Percy MacMahon
(1854–1929)

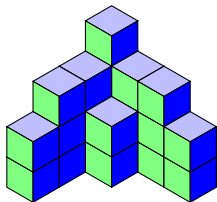
Теорема (П. А. Макмагон)

Производящая функция для числа трёхмерных диаграмм Юнга равна

$$P_{3D}(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k}.$$

Симметрии трёхмерных диаграмм Юнга

- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:

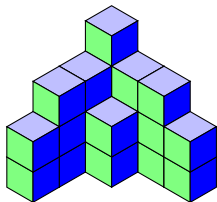


зеркальная:

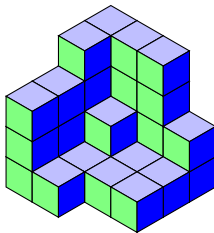
относительно $x = y$

Симметрии трёхмерных диаграмм Юнга

- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:



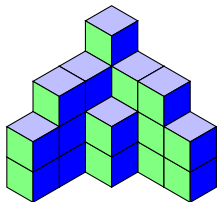
зеркальная:
относительно $x = y$



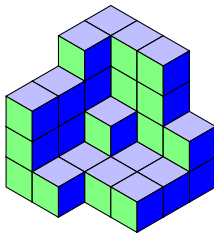
осевая:
относительно
 $x = y = z$

Симметрии трёхмерных диаграмм Юнга

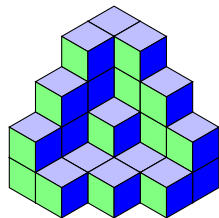
- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:



зеркальная:
относительно $x = y$



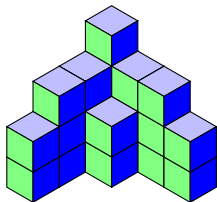
осевая:
относительно
 $x = y = z$



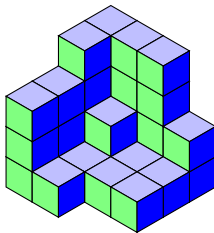
полная:
зеркальная и осевая

Симметрии трёхмерных диаграмм Юнга

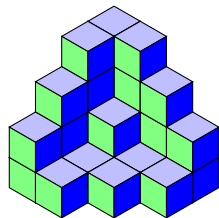
- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:



зеркальная:
относительно $x = y$



осевая:
относительно
 $x = y = z$

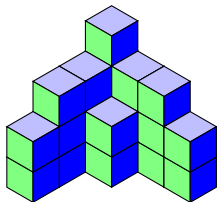


полная:
зеркальная и осевая

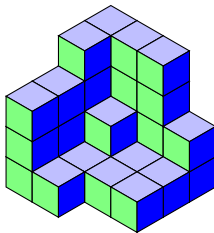
- Для них тоже можно выписывать производящие функции.

Симметрии трёхмерных диаграмм Юнга

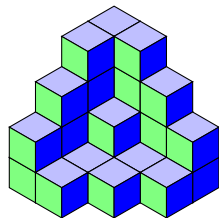
- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:



зеркальная:
относительно $x = y$



осевая:
относительно
 $x = y = z$



полная:
зеркальная и осевая

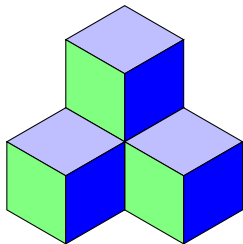
- Для них тоже можно выписывать производящие функции.
- А какие диаграммы Юнга «самые симметричные»?

Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.

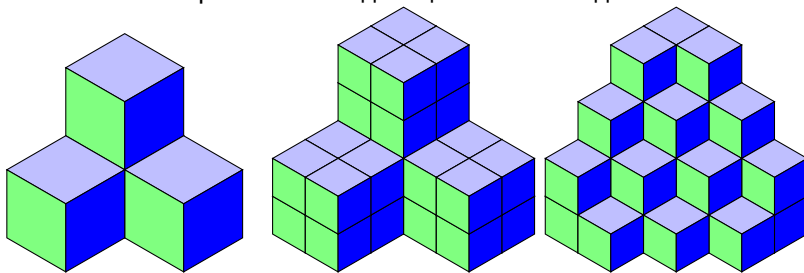
Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.



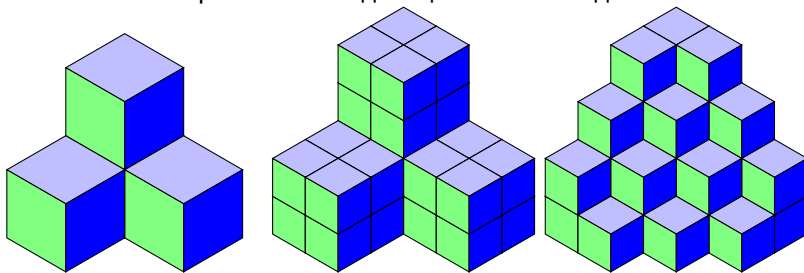
Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.



Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

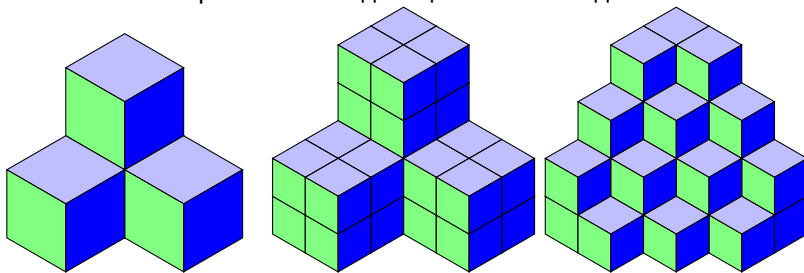
- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.



- При $n = 1$ такая диаграмма одна.

Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

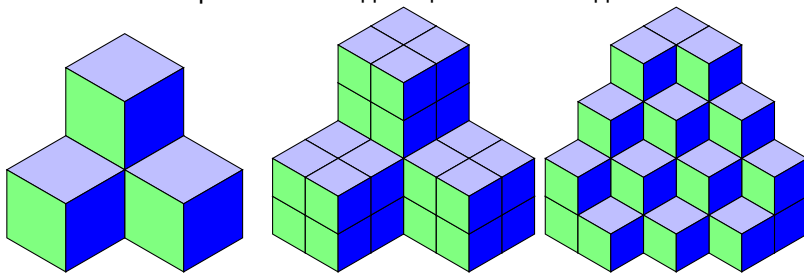
- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.



- При $n = 1$ такая диаграмма одна.
- При $n = 2$ — две.

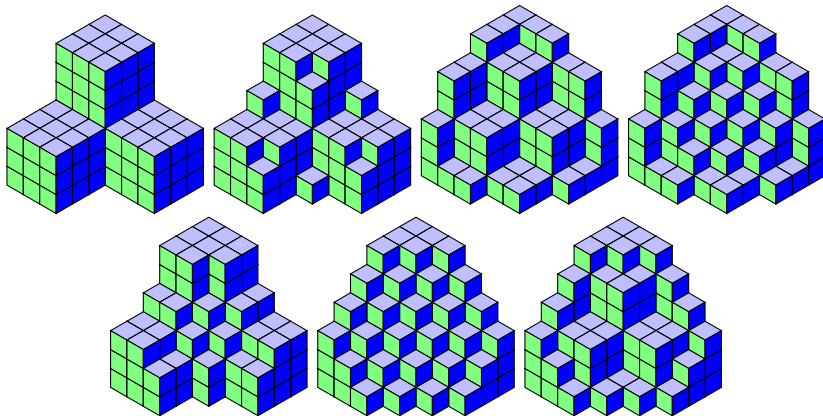
Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.

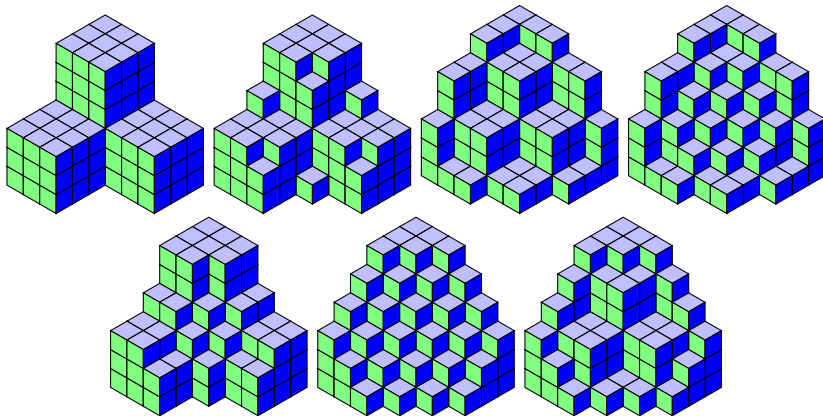


- При $n = 1$ такая диаграмма одна.
- При $n = 2$ — две.
- При $n = 3$ их уже будет семь.

TSSCPP внутри куба $6 \times 6 \times 6$



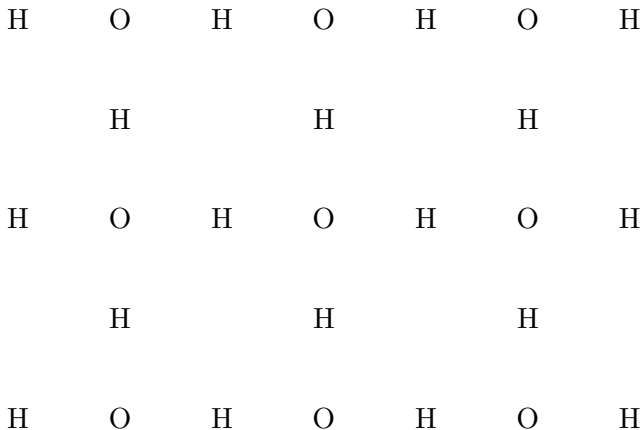
TSSCPP внутри куба $6 \times 6 \times 6$



Последовательность $TSSCPP(n)$ имеет вид: 1, 2, 7, 42, 429...

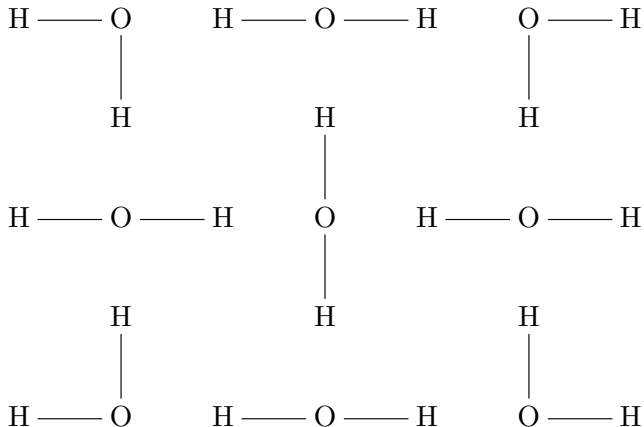
Квадратный лёд

Рассмотрим квадратную решётку, в вершинах которой стоят атомы кислорода, а на каждом ребре находится по атому водорода.



Квадратный лёд

Соединим каждый атом кислорода с двумя атомами водорода:

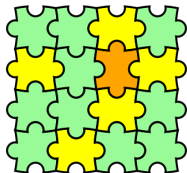


Знакочередующиеся матрицы (alternating sign matrices)

Заменяем «горизонтальные» молекулы на 1, «вертикальные» на -1 , а «уголки» на 0. Получим матрицу размера $n \times n$:

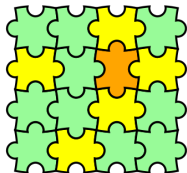
Знакочередующиеся матрицы (alternating sign matrices)

Заменим «горизонтальные» молекулы на 1, «вертикальные» на -1 , а «уголки» на 0. Получим матрицу размера $n \times n$:



Знакочередующиеся матрицы (alternating sign matrices)

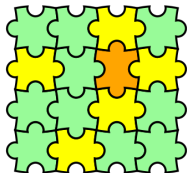
Заменим «горизонтальные» молекулы на 1, «вертикальные» на -1 , а «уголки» на 0. Получим матрицу размера $n \times n$:



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знакопередающиеся матрицы (alternating sign matrices)

Заменим «горизонтальные» молекулы на 1, «вертикальные» на -1 , а «уголки» на 0. Получим матрицу размера $n \times n$:



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства знакопередающихся матриц

- в каждой строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждой строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \dots$

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \dots$

Возникают в связи с методом подсчёта определителей — *конденсацией Доджсона* (Миллс, Роббинс, Рамси, 1980-е гг.)

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \dots$

Возникают в связи с методом подсчёта определителей — *конденсацией Доджсона* (Миллс, Роббинс, Рамси, 1980-е гг.)



Charles Lutwidge Dodgson
(1832–1898)

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \dots$

Возникают в связи с методом подсчёта определителей — *конденсацией Доджсона* (Миллс, Роббинс, Рамси, 1980-е гг.)



Charles Lutwidge Dodgson
(1832–1898)

a.k.a. Lewis Carroll

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \dots$

Возникают в связи с методом подсчёта определителей — *конденсацией Доджсона* (Миллс, Роббинс, Рамси, 1980-е гг.)

Это те же самые числа, которые возникали при подсчёте вполне симметричных самодополнительных плоских разбиений!



Charles Lutwidge Dodgson
(1832–1898)

a.k.a. Lewis Carroll

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждой строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждой строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждой строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждой строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакочередующихся матриц порядка n .

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждой строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждой строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакочередующихся матриц порядка n .
- Заметим, что в первой строке всегда стоит ровно одна единица.

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждой строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждой строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакочередующихся матриц порядка n .
- Заметим, что в первой строке всегда стоит ровно одна единица.
- Пусть число матриц, где она стоит на k -м месте, равно $A_{n,k}$.

Знакопередающие матрицы

Напомним свойства знакопередающих матриц:

- в каждой строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждой строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакопередающих матриц порядка n .
- Заметим, что в первой строке всегда стоит ровно одна единица.
- Пусть число матриц, где она стоит на k -м месте, равно $A_{n,k}$.
- Тогда $A_n = A_{n,1} + A_{n,2} + \dots + A_{n,n}$.

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждой строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждой строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакочередующихся матриц порядка n .
- Заметим, что в первой строке всегда стоит ровно одна единица.
- Пусть число матриц, где она стоит на k -м месте, равно $A_{n,k}$.
- Тогда $A_n = A_{n,1} + A_{n,2} + \dots + A_{n,n}$.
- Кроме того, $A_{n+1,1} = A_n$.

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

1

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

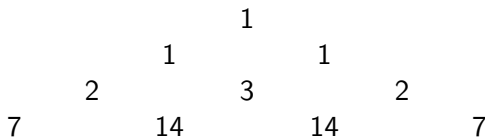
Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ 2 & & & 3 & & & 2 \end{array}$$

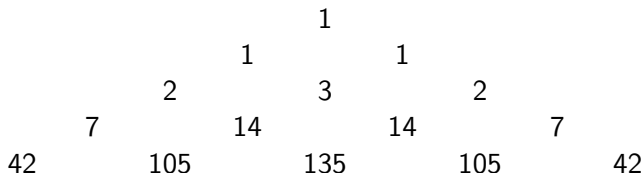
Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:



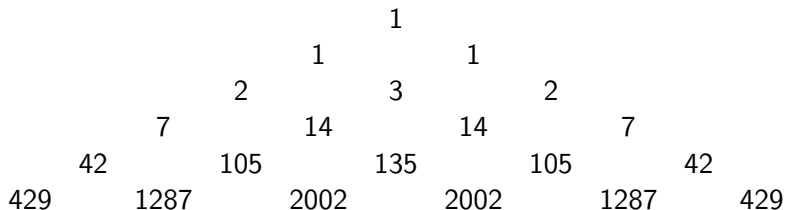
Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:



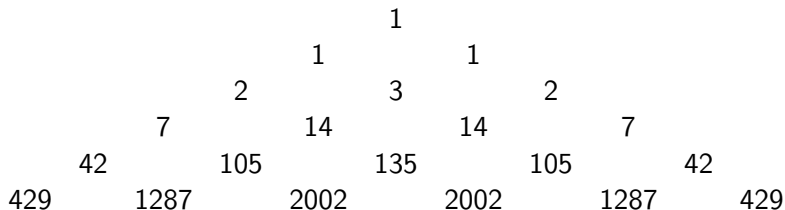
Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:



Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:



Никакой закономерности пока что не видно...

Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

1

Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & \frac{2}{2} & 1 \end{array}$$

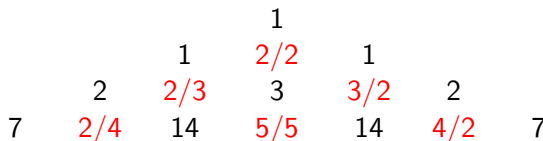
Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & \frac{2}{2} & 1 & & \\ 2 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{3}{2} & 2 & & \end{array}$$

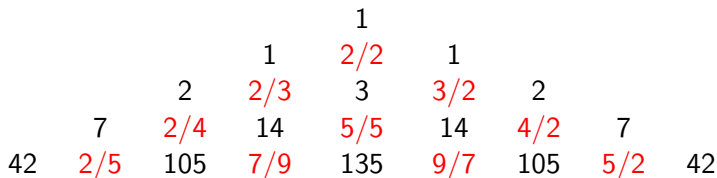
Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:



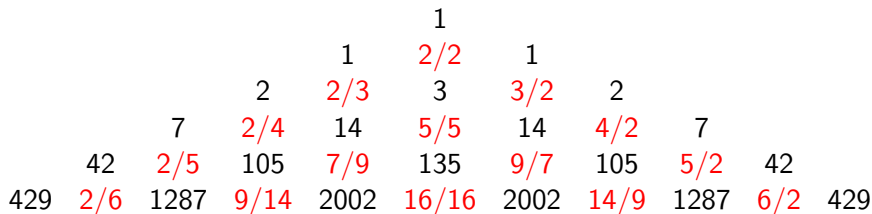
Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:



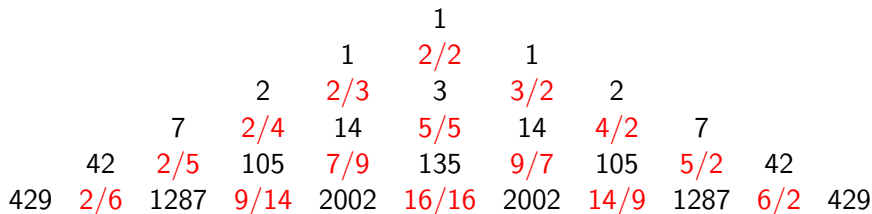
Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

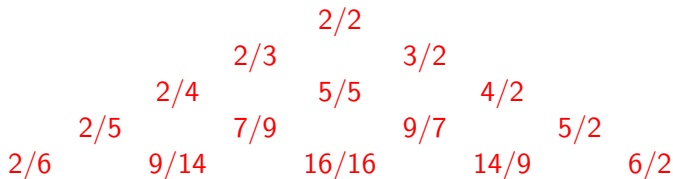


Треугольник Паскаля на новый лад

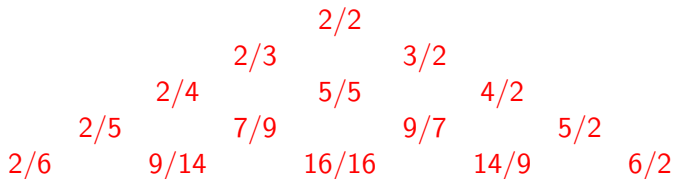
Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:



Треугольник Паскаля на новый лад

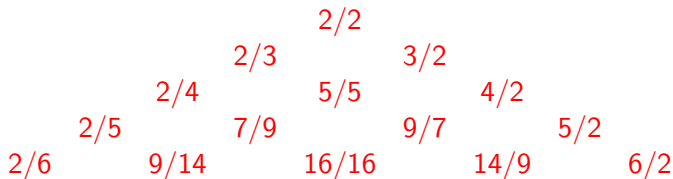


Треугольник Паскаля на новый лад



Теперь закономерность налицо!

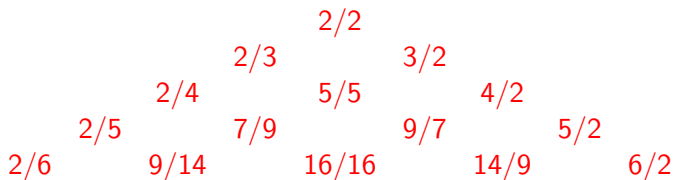
Треугольник Паскаля на новый лад



Теперь закономерность налицо!

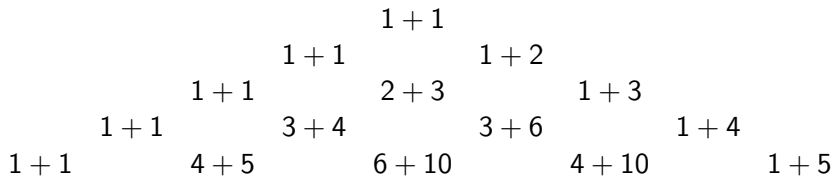
$$\frac{2}{5} + \frac{7}{9} = \frac{9}{14}$$

Треугольник Паскаля на новый лад



Теперь закономерность налицо!

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{9} = \frac{9}{14}$$



ASM-гипотеза (Миллс, Роббинс, Рамси)

Гипотеза

$$\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} = \frac{C_{n-2}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-1}^{n-k-1}}.$$

ASM-гипотеза (Миллс, Роббинс, Рамси)

Гипотеза

$$\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} = \frac{C_{n-2}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-1}^{n-k-1}}.$$

Следствие (ASM-гипотеза)

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \dots \cdot (3n-1)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot \dots \cdot (2n-1)!}.$$

ASM-гипотеза (Миллс, Роббинс, Рамси)

Гипотеза

$$\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} = \frac{C_{n-2}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-1}^{n-k-1}}.$$

Следствие (ASM-гипотеза)

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \dots \cdot (3n-1)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot \dots \cdot (2n-1)!}.$$

Упражнение

Выведите вторую гипотезу из первой.

- в 1994 году Джордж Эндрюс доказал, что
$$TSSCPP(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!};$$

- в 1994 году Джордж Эндрюс доказал, что
$$TSSCPP(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!};$$
- в 1995 году Дорон Зейльбергер опубликовал очень длинное и сложное доказательство ASM-гипотезы;

- в 1994 году Джордж Эндрюс доказал, что
$$TSSCPP(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!};$$
- в 1995 году Дорон Зейльбергер опубликовал очень длинное и сложное доказательство ASM-гипотезы;
- более короткое доказательство было опубликовано Греггом Купербергом в 1996-м году.

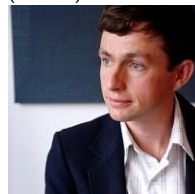
Доказательства ASM-гипотезы

- в 1994 году Джордж Эндрюс доказал, что $TSSCPP(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$;
- в 1995 году Дорон Зейльбергер опубликовал очень длинное и сложное доказательство ASM-гипотезы;
- более короткое доказательство было опубликовано Грегом Купербергом в 1996-м году.



Doron Zeilberger

(b. 1950)



Greg Kuperberg

(b. 1967)

Спасибо за внимание!

Спасибо за внимание!

(но история на этом не заканчивается...)

Что почитать?

- David Bressoud. Proofs and Confirmations: the story of the alternating sign matrix conjecture. MAA, 1999.
- С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс. Математический дивертисмент. М.: МЦНМО, 2011. (*лекция 3 — о диаграммах Юнга*).
- М. А. Берштейн, Г. А. Мерзон. Диаграммы Юнга, пути на решётке и метод отражений. Математическое просвещение, третья серия, вып. 18. М.: МЦНМО, 2014.
- Е. Ю. Смирнов. Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопередающиеся матрицы. М.: МЦНМО, 2014.
- Е. Ю. Смирнов. Три взгляда на ацтекский бриллиант. М.: МЦНМО, 2015.
- Материалы летней школы «Современная математика», Дубна.
<http://www.mathnet.ru>