ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 246, с. 328–351

УДК 512.7

Письма о бирациональном. V М.л.д. и обрыв логфлипов[1]

©2004 г. В. В. Шокуров[2]

Поступило в феврале 2004 г.

Обрыв логфлипов и, общее, логквазифлипов при выполнении обрыва убывающих цепей (о.у.ц.) для кратностей границы следует из двух ожидаемых свойств функции минимальных логдискрепант (м.л.д.) алгебраических логмногообразий: 1) полунепрерывность м.л.д.-функции на любом фиксированном логмногообразии и 2) обрыв возрастающих цепей (о.в.ц.) для м.л.д. всех логмногообразий заданной размерности с кратностями границы в множестве, удовлетворяющем о.у.ц. Это сводит глобальное утверждение об обрыве логфлипов к двум локальным. Все известные случаи обрыва следуют из данной редукции. В частности, это устанавливает обрыв логфлипов в размерности 3, а также специальных и канонических до размерности 4. Для доказательства обрыва логфлипов в размерности 4 остается проверить о.в.ц. в размерности 4 значений м.л.д. в интервале $[0, 1]$.

Цель данного письма — вывести обрыв логквазифлипов (lq-флипов; см. [21, Definition]), предполагая выполнение приведенного ниже условия (DCC), из гипотезы об обрыве возрастающих цепей (ACC) для минимальных логдискрепант (м.л.д.), дополненной гипотезой Ф. Амбро об их полунепрерывности [2, Conjecture 2.4] (см. гипотезы ниже). В частности, эти гипотезы дают обрыв логфлипов. Более того, все известные случаи логобрывов следуют из этого результата (см. примеры 3, 6, 8, 9 и следствия 4, 5). Поскольку обе гипотезы об м.л.д. локальны (на самом деле даже формальны), полученный результат сводит глобальную задачу логобрыва к двум локальным (и даже формальным) проблемам.

Пусть (X, D) — логпара, т.е. D является $\mathbb{R}$-дивизором Вейля, $K + D$ — $\mathbb{R}$-Картье дивизор. Тогда м.л.д. схемных (по Гротендику) точек x многообразия X задает *м.л.д.-функцию*

$$\mathrm{mld}\colon X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \qquad x \mapsto a(X, D, x),$$

а именно если мы отождествим такую точку x с соответствующим неприводимым подмногообразием (замыканием $\overline{x}$) в X, то

$$\mathrm{mld}(x) = a(X, D, x) = \inf_{\mathrm{center}_X E = x} a(X, D, E),$$

где инфимум берется по всем простым b-дивизорам E многообразия X с центром x на многообразии X, а $a(X, D, E)$ — логдискрепанта логпары (X, D) в E. Отметим, что инфимум можно заменить минимумом в том случае, когда $\mathrm{mld}(x) \geq 0$ (см. замечание 3 ниже); в противном случае $\mathrm{mld}(x) = -\infty$. Будем говорить, что x является d-точкой, или точкой размерности d, если таково соответствующее подмногообразие.

Сформулируем основные

Гипотезы (об м.л.д.). Пусть (X, B) — *логмногообразие*, т.е. X — нормальное неприводимое алгебраическое многообразие с эффективным $\mathbb{R}$-дивизором Вейля B таким, что дивизор $K + B$ $\mathbb{R}$-Картье. Тогда ожидается, что м.л.д.-функция действительно измеряет особенности:

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке NSF (проекты DMS-9800807 и DMS-0100991).

[2]Department of Mathematics, Johns Hopkins University, Baltimore, MD-21218, USA.
E-mail: shokurov@math.jhu.edu

(LSC) для любого натурального числа d м.л.д.-функция *полунепрерывна снизу* на множестве d-точек многообразия X, т.е. каждая d-точка x обладает окрестностью $x \in U \subseteq X$ такой, что

$$\mathrm{mld}(x) = \inf_{x' \in U \,-\, d\text{-точка}} \mathrm{mld}(x').$$

В следующей гипотезе (ACC) требуется дополнительное предположение: B является границей, однако многообразие X в этом случае может быть произвольным. Пусть $\Gamma \subset [0,1]$ — подмножество, удовлетворяющее условию обрыва убывающих цепей (о.у.ц.). Тогда множество значений м.л.д. (*м.л.д.-спектр*)

$$A(\Gamma, c) = \big\{a(X, B, x) \in \mathbb{R} \mid x \in X \text{ — точка коразмерности } c \text{ и все } b_i \in \Gamma\big\}$$

удовлетворяет

(ACC) условию обрыва возрастающих цепей (о.в.ц.) [19, Conjecture 4.2].

Замечание 1. 1. Достаточно доказать (LSC) для $d = 0$, т.е. для замкнутых точек (Амбро [2, Conjecture 2.4]).

2. Аналогично о.в.ц. множества $A(\Gamma, c)$ эквивалентен выполнению о.в.ц. только для замкнутых точек x; тогда $\dim X = c$.

3. Для натурального числа n о.в.ц. множества $A(\Gamma, c)$ для всех $0 \leq c \leq n$ эквивалентен выполнению о.в.ц. для объединения

$$\bigcup_{0 \leq c \leq n} A(\Gamma, c)$$

или для всех точек (в смысле Гротендика) всех логмногообразий (X, B) с $\dim X \leq n$.

Напомним и уточним терминологию, относящуюся к сдутиям, флипам и их обрыву. Пусть $(X/Z, B)$ — полное/Z *логканоническое* многообразие (или пространство) с границей B, что включает также и логканоничность пары (X, B). Сдутие $X \to Y/Z$ называется *слабым логсдутием* по отношению к $(X/Z, B)$, когда

(WLC) $-(K + B)$ численно эффективен/Y (ср. [19, 5.1.1b]).

Мы будем рассматривать логквазифлипы в несколько более общем смысле, чем в [21, Definition], а именно под *лог-q-флипом* или lq-*флипом* $(X^+/Y, B^+)$ пары $(X/Y, B)$ мы будем подразумевать результат *перестройки* $q\colon X \dashrightarrow X^+/Z$ с (новой) *границей* B^+ на многообразии X^+ и саму перестройку в случае, когда

- $f_*^+ B^+ \leq f_* B$ для сдутий $f\colon X \to Y$ и $f^+\colon X^+ \to Y$ и
- $K_{X^+} + B^+$ численно эффективен/Y; ожидается, что последнее эквивалентно полуобильности/Y [19, Conjecture 2.6].

Отметим, что логпара (X^+, B^+) также логканонична по монотонности ниже. Кроме того, мы всегда будем предполагать границы (а точнее, их кратности) *принадлежащими* множеству Γ и, в частности, удовлетворяющими о.у.ц.:

(DCC) для границ $B = \sum b_i D_i$ и $B^+ = \sum b_i^+ D_i$ каждая кратность b_i и $b_i^+ \in \Gamma$ соответственно, где множество $\Gamma \subset [0,1]$ фиксировано и удовлетворяет о.у.ц., как в гипотезах выше.

Отметим, что для каждого данного lq-флипа можно добавить кратности его границ к множеству Γ, что не изменит о.у.ц. Однако для бесконечной последовательности lq-флипов (нефлипов; ср. пример 2) свойство (DCC) существенно.

Назовем lq-флип $X \dashrightarrow X^+/Z$ *проективным*, если X/Z и X^+/Z таковы (см. замечание 6).

Чтобы объяснить еще одно ограничение на lq-флипы, необходим следующий вариант хорошо известного результата о монотонности логдискрепант [16, (2.13.3)].

Монотонность. *Пусть* $(X/Y, B)$ — *слабое логсдутие логпары* $(X/Z, B)$, *а* $(X^+/Y, B^+)$ — *его* lq-*флип. Тогда* $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}(X^+, B^+) \le \mathcal{B} = \mathcal{B}(X, B)$ *и равенство выполнено в том и только том случае, когда* lq-*флип является логфлопом,* т.е. lq-флипом в обоих направлениях.

Добавление. *Более того, существует* наименьшее *замкнутое по Зарискому* подмножество нефлопированности $E_{\mathrm{nflo}} = E_{\mathrm{nflo}}\,q$ (зависящее также от B и B^+) *в* Y *такое, что* $q\colon X \dashrightarrow X^+$ *над* $Y \setminus E_{\mathrm{nflo}}$ — *логфлоп. Эквивалентно, выполнено* строгое *неравенство* $\mathcal{B} < \mathcal{B}^+$ *в каждом простом* b-*дивизоре*$/E_{\mathrm{nflo}}$. *Также выполнено следующее включение*:

$$E_{\mathrm{nflo}} \subseteq E_{\mathrm{nli}},$$

где E_{nli} — наименьшее *замкнутое по Зарискому* подмножество нелогизоморфности $E_{\mathrm{nli}} = E_{\mathrm{nli}}\,q$ (зависящее также от B и B^+) *в* Y *такое, что* $X \dashrightarrow X^+$ *над* $Y \setminus E_{\mathrm{nli}}$ — *логизоморфизм,* т.е. изоморфизм с $B = B^+$ над $Y \setminus E_{\mathrm{nli}}$.

Доказательство. Как в доказательстве [16, (2.13.3)].

Недивизориальная часть E_{nflo} является объединением (двух) *наибольших* замкнутых по Зарискому подмножеств в Y, над которыми соответственно X и X^+ численно $\not\equiv 0$ (соответственно численно отрицательны и численно положительны). Дивизориально $E_{\mathrm{nflo}} = E_{\mathrm{nli}}$.

E_{nli} является *наибольшим* замкнутым по Зарискому подмножеством Y, над которым X и X^+ нелогизоморфны. $\square$

Определение. Назовем lq-флип *строгим*, если

(SQF) $E_{\mathrm{nflo}} = E_{\mathrm{nli}} \neq \varnothing$.

Теперь все готово для формулировки основного результата данной работы.

Теорема. *Из гипотез об м.л.д. вытекает обрыв строгих проективных* lq-*флипов в предположении* (DCC), т.е. любая последовательность таких lq-флипов конечна. *Точнее, для обрыва в размерности* $n = \dim X$ *достаточно выполнение гипотез* (LSC) *и* (ACC) *при* $0 \le d \le n-1$ *и* $1 \le c \le n$ *соответственно.*

Прежде чем приступить к доказательству основного результата, мы несколько уточним формулировку теоремы, введем необходимые обозначения и терминологию и установим предварительные результаты. Для lq-флипа $q\colon X \dashrightarrow X^+$ со сдутием $f\colon X \to Y/Z$ положим

$$E = E(q) = f^{-1}E_{\mathrm{nli}}\,q \qquad \text{и} \qquad a(q) = \mathrm{mld}(X, B, E),$$

где $E(q)$ и $a(q)$ также зависят от B и B^+; таким образом, $E = f^{-1}E_{\mathrm{nflo}}$, если lq-флип строгий. Здесь м.л.д. $a(q)$ рассмотрена для *подмногообразия* E и является минимумом всех $\mathrm{mld}(x)$ над не обязательно замкнутыми точками $x \in E$.

Добавление 1. *Пусть для каждого* lq-*флипа* q *данной последовательности в теореме выполнено неравенство* $a(q) \ge \alpha$ *и для бесконечно многих* q *выполнено неравенство* $a(q) \le \beta$, *где* α *и* β — *положительные числа. Тогда достаточно выполнение гипотез об м.л.д. в интервале* $[\alpha, \beta]$, т.е.

- (LSC) выполнена над замыканием d-точек x с $a(X, B, x) \in [\alpha, \beta]$ и
- (ACC) выполнена для спектра в том же интервале.

В частности, достаточно выполнение обеих гипотез при $\ge \alpha$, *когда для исходной модели* $(X/Z, B)$ *выполнено неравенство* $a(X, B, X) \ge \alpha$ *для общей м.л.д.*

На самом деле для доказательства обрыва необходимо выполнение гипотезы (ACC) для гораздо меньших подмножеств в $A(\Gamma, c)$. А именно для данного логканонического многообразия (или пространства) $(X/Z, B)$ с границей B положим

$$A_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma, c) = \bigcup_q \bigl\{a(X, B, x) \mid x \in E(q) \text{ — точка коразмерности } c\bigr\},$$

где $q\colon X \dashrightarrow X^+/Z$ пробегает все lq-флипы для логпары $(X/Z, B)$ при условии (DCC),

$$A^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma, c) = \bigcup_g A_{\mathrm{lq}}(Y/Z, B_Y, \Gamma, c),$$

где $g\colon X \dashrightarrow Y/Z$ пробегает все композиции lq-флипов, начинающихся с исходной модели $(X/Z, B)$, и соответственно

$$A_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma) = \bigcup_c A_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma, c), \qquad A^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma) = \bigcup_c A^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma, c).$$

По определению оба последних объединения берутся по $1 \le c \le \dim X$.

Добавление 2. *Для обрыва* lq-*флипов в теореме с исходной моделью* $(X/Z, B)$ *достаточно*

- *выполнение гипотезы* (LSC) *над замыканием* d-*точек* $y \in Y$ *с* $d = \dim Y - c = \dim X - c$ *и* $a(Y, B_Y, y) \in A_{\mathrm{lq}}(Y/Z, B_Y, \Gamma, c)$ *в данном выше определении* $A^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma, c)$ *и*
- *выполнение гипотезы* (ACC) *для части спектра* $A^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma)$.

Добавление 3. *Более того, для добавлений* 1 *и* 2 *в гипотезах* (LSC) *и* (ACC) *и соответствующих им множествах можно рассматривать только точки коразмерности* $c \ge \alpha$, *когда все* lq-*флипы* q *в последовательности имеют* $a(q) \ge \alpha$; *в частности, когда для общей м.л.д. выполнено неравенство* $a(X, B, X) \ge \alpha$.

Точнее, вместо $a(X, B, X)$ *можно взять*

$$a^\bullet_{\mathrm{lq}} = a^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma) = \inf A^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma).$$

Снова рассмотрим логпару (X, D) с произвольным $\mathbb{R}$-дивизором D, для которого $K + D$ является дивизором $\mathbb{R}$-Картье. Хорошо известно, что множества уровней м.л.д.-функции

$$\mathrm{mld}\colon X_0 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \qquad x \mapsto a(X, D, x)$$

на замкнутых точках X_0 многообразия X разбивают X_0 на конечное число конструктивных подмножеств, что дает так называемую *м.л.д.-стратификацию* [2, Theorem 2.3]. А точнее, имеется конечное разбиение многообразия X на конструктивные подмногообразия $X(a, 0)$ такое, что каждое непустое множество уровня $\mathrm{mld}^{-1}(a)$ состоит в точности из замкнутых точек $X(a)_0$ многообразия $X(a)$. Аналогичное утверждение выполнено и для d-точек X_d многообразия X, т.е. для неприводимых подмногообразий многообразия X размерности d.

Пример 1 (логнеособый случай)**.** Предположим, что (X, D) логнеособо. Тогда требуемое разбиение

$$D^0_{i_1,\dots,i_s} = D_{i_1,\dots,i_s} \setminus \bigcup_{t \ge s+1} D_{j_1,\dots,j_t}$$

задается фильтрацией дивизора D

$$D_{i_1,\dots,i_s} = D_{i_1} \cap \ldots \cap D_{i_s},$$

где дивизоры D_{i_j} — различные неприводимые компоненты носителя $\operatorname{Supp} D$, а $0 \le s \le \dim X$. Таким образом, точки множества $D^0_{i_1,\dots,i_s}$ суть точки, через которые проходят только дивизоры $D_{i_1},\dots,D_{i_s}$. Используя индукцию по размерности и раздувая подмногообразия в стратах $D_{i_1,\dots,i_s}$, можно показать, что для каждой d-точки x в $D^0_{i_1,\dots,i_s}$, $d \le \dim X - s$,

$$a(X,D,x) = \begin{cases} \dim X - d - \operatorname{mult}_x D, & \text{если } a(X,D,x) \ge 0,\\ -\infty & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и данное значение не зависит от такой точки. Точнее, неравенство ≥ 0 выполнено тогда и только тогда, когда все $d_{i_j} = \operatorname{mult}_{D_{i_j}} D \le 1$, $1 \le j \le s$, и в этом случае м.л.д. достигается на первом раздутии в точке x. Действительно, можно считать, что $d = 0$, $s = n = \dim X$ и $i_j = j$. Пусть (Y, D_Y) — крепантное раздутие в x, так что $D_Y = D + (d_1 + \ldots + d_n - n + 1)E$ в бирациональном смысле, где E — раздутие точки x. Тогда для каждой точки $y \in E \cap D^0_{1,\dots,s}$ размерности d с точностью до перестановки индексов $1,\dots,n$ выполнено неравенство $n-1-d \ge s$ и по индукции на количество раздутий

$$\begin{aligned} a(Y,D_Y,y) &= \dim Y - d - (d_1 + \ldots + d_n) + (n-1) - (d_1 + \ldots + d_s) = \\ &= n - (d_1 + \ldots + d_n) + (n-1-d) - (d_1 + \ldots + d_s) \ge \\ &\ge n - (d_1 + \ldots + d_n) + s - (d_1 + \ldots + d_s) \ge n - (d_1 + \ldots + d_n) = a(X,D,E). \end{aligned}$$

Разбиение тривиально в случае неособого X с $D = 0$.

Предложение 1. *Существует такое конечное разбиение многообразия X на конструктивные подмногообразия X_i, что м.л.д.-функция постоянна на d-точках $(X_i)_d$ каждого многообразия X_i.*

Таким образом, каждое множество уровня

$$X(a,d) = \{x \in X_d \mid \operatorname{mld}(X,D,x) = a\}$$

d-точек есть конечное объединение подмножеств $(X_i)_d$ и состоит из d-точек конструктивного подмногообразия, отвечающего этому объединению.

Замечание 2. Для фиксированного d фильтрация

$$X(\le a, d) = \bigcup_{\alpha \le a} X(\alpha, d)$$

конечна и согласно с гипотезой (LSC), возможно, *замкнута*, т.е. каждое множество $X(\le a, d)$ замкнуто в X_d в топологии Зариского.

Доказательство предложения 1. Рассмотрим логразрешение $f\colon Y \to X$ логпары (X,D) с соответствующим крепантным дивизором D_Y. В этом случае требуемое разбиение многообразия X на X_i задается разбиением пары (Y, D_Y), которое *плоско* над каждым X_i. Последнее означает одновременную непустоту относительных$/X$ d-точек в каждом $(D_Y)^0_{i_1,\dots,i_s}$, что является одновременным существованием неприводимых подмногообразий одинаковой размерности d в $(D_Y)^0_{i_1,\dots,i_s}$, которые отображаются в замкнутые точки в X_i. Например, это выполнено, когда каждое $(D_Y)^0_{i_1,\dots,i_s}$ равноразмерно$/X_i$. Такое разбиение существует ввиду полунепрерывности размерности.

Тогда согласно примеру 1 для d-мерной точки x многообразия X_i

$$\operatorname{mld}(x) = \min\bigl\{\dim X - \dim y - \operatorname{mult}_y D_Y \mid f(y) \text{ имеет размерность } d\bigr\}$$

либо равна $-\infty$ и не зависит от такой точки в X_i. Отметим, что $\operatorname{mult}_y D_Y = d_{i_1} + \ldots + d_{i_s}$ для $y \in (D_Y)^0_{i_1,\dots,i_s}$.

Итак, в характеристике 0 такое разбиение существует вследствие теоремы Хиронаки. В произвольной характеристике требуемое разбиение можно построить как эквивариантную стратификацию особенностей. □

Замечание 3. В положительной характеристике необходим лишь факт, что м.л.д. достигается, т.е. существует. Это очевидно для $\mathbb{Q}$-дивизора D. В общем случае последнее можно получить из полулинейности дискрепант по отношению к дивизору D.

Нам также понадобится один общий результат о топологии бирациональных перестроек. Пусть $f\colon V \dashrightarrow W/Z$ — рациональное стягивание, возможно, приводимых и ненормальных алгебраических многообразий. В характеристике 0 последнее означает, что нормализация отображения f является доминантным рациональным отображением со связанными слоями (см. [20, Definition 3.1]), или равносильно в общем случае тому, что нормализация отображения f является композицией бирациональной перестройки и стягивания. Для натурального числа d будем говорить, что f является рациональным *d-стягиванием*, если нормализация отображения f определена в коразмерности $\le d$ и не раздувает подмногообразий коразмерности $\le d$ на W. Другими словами, полный образ при нормализации каждого подмногообразия размерности $\ge n-d$, $n=\dim V$, корректно определен и имеет ту же размерность либо имеет размерность $\le n-d-1$ (отображается на подмногообразие меньшей размерности). Например, обычное (бирациональное) сдутие неприводимого нормального многообразия V является 1-стягиванием (см. также [20, Definition 3.1]); то же самое выполнено и для композиции сдутия с *малым* бирациональным преобразованием (изоморфизмом в коразмерности ≥ 2), например с флипом. Для $d=n=\dim V$ это лишь рациональные сдутия с регулярной нормализацией.

Рациональное сдутие f является *сдутием*$/Z$ в случае, когда существует обратное к нему рациональное отображение f^{-1}; последнее также является рациональным сдутием. Соответственно f является b-*d-рациональным*, когда обратное отображение f^{-1} является d-сдутием. Равносильно нормализация отображения f бирациональна и отображает бирационально циклы коразмерности $\le d$ или нормализация является d-изоморфизмом, т.е. изоморфизмом с точностью до коразмерности $\ge d+1$. Например, это выполнено, когда отображение f само является d-изоморфизмом (ср. шаг 6 в доказательстве теоремы ниже). Отметим, что d-сдутие, которое не является b-d-рациональным, стягивает цикл коразмерности $d'\le d$ в бо́льшую коразмерность; в частности, из равенства $d'=d=\dim V$ следует, что 0-цикл должен отображаться в $\varnothing$, что невозможно для собственных$/Z$ многообразий.

Лемма 1. *Любая последовательность d-сдутий $X_i \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ проективных многообразий X_i/Z бирационально* d-стабилизируется, т.е. для всех $i\gg 0$ они b-d-рациональны. *В случае $d=1$ условие проективности может быть опущено.*

Доказательство. После нормализации можно считать, что все многообразия X_i нормальны.

В силу индукции по размерности и по числу компонент многообразия X_i можно считать, что отображение $X_i \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ *бирационально стабилизируется* — после конечного числа сдутий все оставшиеся суть сдутия на всех компонентах многообразия X_i. Более того, лемму можно доказывать покомпонентно так, что можно считать X_i неприводимым. Требуется показать, что после конечного числа сдутий все последующие сдутия не стягивают и не раздувают подмногообразия коразмерности $\le d$. В алгебраической категории последнее достаточно показать локально$/Z$.

Ввиду индукции по $\dim X$ и затем по абсолютным и относительным$/Z$ коразмерностям d' и d'_Z соответственно стягиваемых подмногообразий коразмерности $\le d$ можно считать, что утверждение леммы выполнено в меньших размерностях и коразмерностях. Итак, после конечного числа d-сдутий можно предполагать, что обе коразмерности стабилизируются и, более того, что последующие сдутия являются $(d-1)$-изоморфизмами и $d'=d'_Z=d$. Последнее означает также, что стягиваемое подмногообразие доминирует замкнутую (центральную) точку многообразия Z, поскольку мы рассматриваем локальный случай$/Z$. Снова по индукции по размерности мы можем считать, что $Z = \mathrm{pt}$. является замкнутой точкой, а все многообразия X_i проективны.

В этой ситуации мы используем тот факт, что *каждое d-сдутие, являющееся $(d-1)$-изоморфизмом, понижает ранг группы алгебраических циклов коразмерности d по модулю сильной эквивалентности* (*например, топологической, алгебраической или численной*) *и понижает строго, если не является d-изоморфизмом.* Сильная эквивалентность в данном случае необходима для конечности ранга. В самом деле, любое такое отображение

- сохраняет выбранную эквивалентность;
- сюръективно на алгебраических циклах коразмерности d и на их классах по модулю сильной эквивалентности;
- если не является d-изоморфизмом, то стягивает подмногообразие коразмерности d, что дает ненулевой класс по модулю эквивалентности (в силу проективности, которая используется исключительно на этом шаге доказательства), который отображается в нулевой класс данным отображением.

При $d = 1$ проективность можно опустить по теореме Ходжа об индексе. $\square$

Доказательство теоремы. Предположим, что существует бесконечная последовательность $q_i\colon X_i \dashrightarrow X_{i+1}$, $i \geq 1$, lq-флипов для сдутий $c_i\colon X_i \to Y_i/Z$ с границей B_i на многообразии X_i и $(X_1/Z, B_1) = (X/Z, B)$ — *исходная* модель. Как и выше, каждому lq-флипу q_i отвечает его м.л.д. $a_i = a(q_i) = a(X_i, B_i, E_i)$, где $E_i = E(q_i) \subset X_i$.

Шаг 1. *Минимум м.л.д. a_i стабилизируется*, т.е. существует такое вещественное число $a \geq 0$, что после конечного числа lq-флипов каждый из последующих имеет $a_i \geq a$ и для бесконечно многих из них $a_i = a$. Действительно, положим

$$\alpha_i = \inf\{a_j \mid j \geq i\}.$$

Согласно гипотезе (ACC) достаточно проверить, что

- $\alpha_i^l = \min\{a_j \mid l \geq j \geq i\}$ достигается на (X_i, B_i), т.е. α_i^l равно м.л.д. логпары (X_i, B_i) в некотором из центров многообразия X_i;
- инфимум чисел α_i также достигается, т.е. $\alpha_i = a_j$ для некоторого $j \geq i$, и, даже более того, он достигается также на (X_i, B_i);
- $\alpha_{i+1} \geq \alpha_i$.

Отметим, что минимум чисел α_i^l достигается на (X_i, B_i) согласно монотонности. По (SQF) для (X_i, B_i) новое значение м.л.д. на (X_j, B_j), $l \geq j > i$, может быть получено, только если lq-флип q_h, $j > h \geq i$, был сделан с меньшей м.л.д. a_h, чем это значение. Последнее невозможно, когда это значение равно α_i^l.

Таким образом, по предложению 1 $\alpha_i = \min\{\alpha_i^l \mid l \geq i\}$ тоже достигается на логпаре (X_i, B_i). Неравенство $\alpha_{i+1} \geq \alpha_i$ следует из вложения $\{a_j \mid j \geq i+1\} \subseteq \{a_j \mid j \geq i\}$. Теперь гипотеза (ACC) влечет стабилизацию α_i, т.е. после конечного числа lq-флипов $\alpha_i = a$ для некоторого $a \geq 0$, что и означает требуемую стабилизацию минимума м.л.д.

Итак, можно считать, что все $a_i \geq a$ и равенство выполнено для бесконечно многих i.

Шаг 2. *Максимальная размерность центра с м.л.д. $a_i = a$ достигается и стабилизируется*, т.е. существует натуральное число $d \geq 0$ такое, что после конечного числа lq-флипов для всех последующих lq-флипов с $a_i = a$ и каждой точки x на E_i с $a(X_i, B_i, x) = a$ выполнено неравенство

$$\dim x \leq d$$

и для бесконечного числа таких lq-флипов существует такая точка с $\dim x = d$.

Необходимое утверждение следует непосредственно из неравенства $\dim x \le \dim X$. Итак, можно считать в дальнейшем, что для всех lq-флипов с $a_i = a$ и для каждой точки x на E_i с $a(X_i, B_i, x) = a$ выполнено неравенство $\dim x \le d$ и для бесконечного числа таких lq-флипов существует такая точка с $\dim x = d$.

Шаг 3. *Каждая логпара* (X_i, B_i) *имеет замкнутое подмногообразие* $W_i \subseteq X_i$ *такое, что*

- *каждая* d*-точка* x *с* $a(X_i, B_i, x) = a$ *принадлежит* W_i,
- $a(X_i, B_i, x) \le a$ *для каждой* d*-точки* $x \in W_i$ *и*
- $a(X_i, B_i, x) = a$ *для каждой общей* d*-точки* $x \in W_i$.

Требуемое утверждение следует непосредственно из предложения 1 и гипотезы (LSC). Подмногообразие W_i есть замыкание объединения подмногообразий X_j в предложении 1, которые отвечают данным числам a и d.

Шаг 4. *Для любого* $i \ge 1$ *подмногообразие* W_{i+1} *является собственным рациональным образом подмногообразия* W_i *на многообразии* X_{i+1}, т.е. замыканием образа $q_i(W_i)$ в точках, где q_i — логизоморфизм.

Это следует непосредственно из монотонности. Новые компоненты не появляются ввиду сделанного после шага 1 предположения и (SQF). Однако некоторые компоненты подмногообразия W_i могут исчезнуть в W_{i+1}; оставшиеся преобразуются бирационально.

Шаг 5. *Отображение* $W_i \dashrightarrow W_{i+1}$ *бирационально стабилизируется.* В частности, каждое из последующих подмногообразий W_i имеет одинаковое количество неприводимых компонент и одинаковую размерность $m = \dim W_i$.

Это следует непосредственно из шага 4, поскольку количество таких компонент не увеличивается. Таким образом, можно считать в дальнейшем, что каждое отображение $W_i \dashrightarrow W_{i+1}$ бирационально на каждой компоненте подмногообразия W_i.

Шаг 6. *Отображения* $W_i \dashrightarrow W_{i+1}$ *являются* $(m-d)$*-сдутиями, которые стягивают по крайней мере одну* d*-точку подмногообразия* W_i, *когда* $a_i = a$ *и при этом существует точка* x *на* E_i *с* $\dim x = d$ *и* $a(X_i, B_i, x) = a$.

Из шага 3, монотонности и (SQF) следует, что для каждого отображения $W_i \dashrightarrow W_{i+1}$ выполнено неравенство $\dim E_i^+ \cap W_{i+1} \le d-1$, где E_i^+ — полный бирациональный образ дивизора E_i. Значит, отображение $W_i \dashrightarrow W_{i+1}$ является $(m-d)$-сдутием.

Из шага 3 и сделанного предположения следует, что неравенство $\dim E_i \cap W_i \ge d$ возможно только в случае, когда $a_i = a$ и существует точка x на E_i с $\dim x = d$ и $a(X_i, B_i, x) = a$. Такая d-точка как подмногообразие должна сдуваться на W_{i+1} вследствие монотонности, (SQF) и определения E_i.

Шаг 7. Таким образом, по лемме 1 мы получили противоречие с шагом 2.

Отметим, что по ходу доказательства было также установлено добавление 1, поскольку в нем встречались м.л.д., удовлетворяющие неравенству $\beta \ge a_i = a(q_i) \ge \alpha$.

Легко видеть, что добавление 2 следует непосредственно из аргументов шагов 2 и 3.

Наконец, добавление 3 получаем из неравенства (ср. [21, Conjecture 2])

$$a(X, B, x) \le c = \operatorname{codim} x.$$

В свою очередь последнее неравенство следует из гипотезы (LSC) для данного c, поскольку оно (на самом деле равенство) выполнено для общей точки x коразмерности $c \ge \alpha$. Из последнего следует то же неравенство для $c < \alpha$ по [2, Proposition 2.1]. $\square$

В частности, мы получили условный логобрыв. Действительно, это уточняет

Пример 2. *Любой логфлип является строгим* lq-*флипом.* Более того, *любая последовательность логфлипов удовлетворяет* (DCC), если к любому множеству Γ, удовлетворяющему

(DCC), добавить кратности границы исходной модели. Точнее, можно рассмотреть сделанное расширение с $\Gamma = \{0\}$ в качестве всего Γ, поскольку отображение $X \dashrightarrow X^+$ не раздувает дивизоров и по определению [19, Section 5] B^+ имеет те же кратности в простых дивизорах, которые остаются дивизорами на многообразии X^+. (В частности, $\Gamma = \{0\}$ в программе минимальных моделей (ПММ) с $B = 0$.) При логфлипе дивизор $-(K+B)$ обилен$/Y$ в (WLC) и по монотонности логфлип является строгим — удовлетворяет (SQF).

Более того, каждый *слабый* логфлип (строгий lq-флип с двумя малыми сдутиями X и X^+/Y) обладает следующими численными свойствами (ср. [19, 2.4.5]):

- $-(K+B)$ численно эффективен$/Y$ и $\not\equiv 0$ на каждом нетривиальном слое;
- $K_{X^+} + B_{X^+}$ численно эффективен$/Y$ и $\not\equiv 0$ на каждом нетривиальном слое.

Следствие 1 (ср. [19, 5.1.3]). *Из гипотез об м.л.д. следует обрыв проективных* (*слабых*) *логфлипов,* т.е. любая последовательность таких флипов конечна. *Более того, для обрыва в размерности* $n = \dim X$ *достаточно выполнение гипотез при* $0 \le d \le n-1$ *и* $1 \le c \le n$ *соответственно.*

Все добавления 1–3 *выполнены при следующих изменениях*:

- $a(q)$ *— м.л.д. в исключительном множестве сдутия* $f\colon X \to Y/Z$;
- *каждое множество* $A^*_{\mathrm{lq}}(\cdot)$ *и значение* $a^\bullet_{\mathrm{lq}}(\cdot)$ *заменяются подмножеством* $A^*_{\mathrm{lf}}(\cdot)$ *и соответственно значением* $a^\bullet_{\mathrm{lf}}(\cdot)$, *отвечающим логфлипам.*

Отметим, что *проективность* означает проективность каждого многообразия X/Z при флипах. По определению и монотонности в случае логфлипов можно опустить Γ (ср. пример 2) и $a(X,B,X) \le a^\bullet_{\mathrm{lq}} \le a^\bullet_{\mathrm{lf}}$, поскольку $A^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z,B,\Gamma) \supseteq A^\bullet_{\mathrm{lf}}(X/Z,B)$ соответственно.

Доказательство непосредственно следует из теоремы, добавлений и примера 2. □

Теперь проиллюстрируем, объясним и прокомментируем полученные результаты и наши гипотезы. Начиная с примера 5 поле определения имеет характеристику 0 в большинстве применений в размерности ≥ 3, где требуется выполнение логпрограммы минимальных моделей (ЛПММ) либо отдельных ее утверждений.

Пример 3 (логторический). ЛПММ [19, Section 5] (ср. [7, Section 3]) и, более того, обрыв строгих проективных lq-флипов при условии (DCC) имеют место в логторической категории; это верно над любым полем. Под *логторической категорией* здесь подразумевается категория с торическими логмногообразиями в качестве объектов и торическими морфизмами в качестве категорных морфизмов, а именно логпары $(X/Z,B)$, где X/Z — полный торический морфизм, B — инвариантная относительно действия тора граница (равносильно ее носитель $\operatorname{Supp} B$ инвариантен), а дивизор $K+B$ $\mathbb{R}$-Картье. В самом деле,

- теорема о конусе и существование стягиваний, включая полуобильность численно эффективных$/Z$ дивизоров (ср. [19, Conjecture 2.6]), хорошо известны; конус полиэдрален;
- обрыв lq-флипов следует из теоремы, поскольку гипотезы выполнены для логторических многообразий: (LSC) следует из [2, Theorem 4.1], а (ACC) следует из аргументов в [5]; и наконец,
- логфлипы существуют по [20, Example 3.54] (обращение в нуль соответствующих групп когомологий в данном случае не нужно, даже если оно и имеет место).

Отметим, что любая торическая логпара (X,B) логканонична и любое ее стягивание и строгий lq-флип, в том числе логфлип, являются торическими автоматически. Первое следует из линейной эквивалентности $K + \Delta \sim 0$ и логканоничности логпары (X,Δ) для *максимального* инвариантного приведенного дивизора Δ. Торическое свойство строгих проективных lq-флипов вытекает a posteriori из D-ПММ (см. ниже) по существу как следствие единственности экстремальных флипов. Действительно, из строгости и монотонности следует, что lq-флипы раздувают только инвариантные подторы и только в инвариантные дивизоры. Аналогичные утверждения ожидаются также и для непроективных lq-флипов (ср. следствие 2 и пример 4 ниже).

Однако комбинаторика дает больше. ЛПММ для инвариантной границы B эквивалентна D-ПММ (см. [19, Section 5]) для антиграницы $D = B - \Delta \sim K + B$ (т.е. $-D$ является границей). На самом деле, D-ПММ выполнена для любого (возможно, неинвариантного) $\mathbb{R}$-Картье дивизора D. Более того,

- D-флип существует для любого торического (возможно, и непроективного) сдутия по отношению к любому (возможно, неинвариантному и не $\mathbb{R}$-Картье) $\mathbb{R}$-дивизору D; последнее не удивительно, поскольку в этом случае существует разложение Зариского (ср. [20, Remark 3.30]);
- обрыв D-флипов имеет место без условия проективности флипируемых многообразий X/Z и с универсальной границей на число флипов, зависящей только от многообразия X/Z (см. обсуждения около вопроса ниже). Для логфлипов последнее следует из конечности инвариантных d-точек, (LSC) и конечности флипируемых моделей, включая конечность $A^\bullet_{\mathrm{lf}}(X/Z, B)$ (все границы не зависят от B).

Случай $B = 0$ или $D = -\Delta$ и терминального X был рассмотрен Ридом [15].

Отметим, что по локальной природе гипотез теорема влечет обрыв строгих проективных lq-флипов при условии (DCC), если все lq-флипируемые пары локально или даже формально торичны, например для неособых многообразий с $B = 0$. Последнее применимо к тороидальной компактификации пространств модулей.

Следствие 2 (ср. [21, Corollary 1]). *Гипотеза* 1 *в* [21] *верна для торических сдутий с любым* $B \geq 0$ *и даже для непроективных сдутий.*

Доказательство. В проективном и логканоническом случае требуемое утверждение следует из [21, Theorem, Example 4] и примера 3. В нелогканоническом случае $a = -\infty$ и требуемое утверждение очевидно. После возможной модификации сдутия X/Z можно считать, что $K + B \equiv 0$ на исключительной компоненте E/Z наименьшей размерности и даже $\equiv 0/Z$ всюду (по полуобильности). В непроективном случае можно использовать доказательство [21, Theorem] с шевелением границы после флопа, являющегося частичной $\mathbb{Q}$-факториализацией и модификацией вне общей точки подмногообразия E. В самом деле, данная $\mathbb{Q}$-факториализация$/X$ и последующая модификация$/Z$ отвечают построению D-модели, где D — такой инвариантный приведенный дивизор Вейля, что $E \not\subseteq \operatorname{Supp} D$, а (приведенное) пересечение $E \cap D$ объемно. $\square$

Пример 4 (минимальный торический; ср. [21, Example 6]). Для любого торического сдутия (возможно, непроективного) неособого торического многообразия X, полуотрицательного относительно $K + B$, исключительное множество имеет минимальную размерность $\geq d = (\dim X - 1)/2$ с чистой размерностью d только в случае сдутия из [21, Example 6]. Соответствующий флоп связан с двумя проекциями декартова квадрата d-мерного симплекса (А. Борисов).

Пример 5 (канонические трехмерия). Предположим, что $B = 0$, $\dim X \leq 3$, а X имеет канонические особенности. Как следует из монотонности, любой строгий lq-флип приводит к малому сдутию с $B = 0$. Значит, можно считать, что $\Gamma = \{0\}$. Следовательно, по добавлению 1 с $\alpha = 1$ такие lq-флипы (почти флипы) обрываются. Действительно, согласно Кавамате [9] и Маркушевичу [13] соответствующие м.л.д. для $c \leq 3$ принадлежат

$$A(\Gamma, 3) \cap [1, +\infty) = \left\{1 + \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots, +\infty\right\} \cup \{3\}$$

и удовлетворяют (ACC). Из [9] и [13] также следует (LSC), поскольку особые d-точки дискретны, кроме кривых из замкнутых и терминальных в коразмерности 3 точек x, которые являются кривыми канонических особенностей; для них $\mathrm{mld}(x) = 2$, и они вырождаются в диссидентные канонические особенности [14, Corollary 1.14].

Обрыв имеет место в непроективном случае (и даже для пространств), потому что лемма 1 выполняется в этих случаях в размерности ≤ 2 и имеет универсальную границу, зависящую только от X (ср. следствие 4 и примеры 8, 11). Последнее выполнено по существу ввиду того, что индексы и число исключительных дивизоров с логдискрепантами в интервале $[1, 2)$ могут быть ограничены посредством этого же числа для многообразия X и рангом относительной группы Пикара для X/Z по [19, Theorem 3.2].

Пример 6 (более общие трехмерия)**.** Предположим, что $(X/Z, B)$ — логканоническое трехмерие, а Γ — произвольное множество, удовлетворяющее (DCC). Тогда обрыв трехмерных строгих lq-флипов при условии (DCC) следует из добавления 2, поскольку

- (LSC) выполнено по [2, Proposition 2.5, Theorem 3.1]; отметим, что для проверки этого не требуется полного логобрыва (см. замечание 4 ниже);
- (ACC) пока известно лишь для $A^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma) \cap [0, 1]$ в случае неспециальных lq-флипов по [19, Proposition 4.4]; тогда для завершения доказательства обрыва можно использовать
- специальный обрыв lq-флипов (см. пример 8 и следствие 4 ниже) и
- обрыв строгих lq-флипов q с $a(q) \ge 1$ (см. пример 9 ниже).

Действительно, как и в случае трехмерных логфлипов, с точностью до конечного числа lq-флипов все последующие строгие lq-флипы при условии (DCC) не затрагивают множество логканонических особенностей $\mathrm{LCS} = \mathrm{LCS}(X, B)$ логпары (X, B), т.е. их $E_{\mathrm{nli}} \cap \mathrm{LCS} = \varnothing$, они *неспециальны* и по монотонности существует $\varepsilon > 0$ такое, что следующие пары (U, B_U) с $U = X \setminus \mathrm{LCS}$ и $B_U = B|_U$ являются ε-логканоническими [19, Singularities 1.3.3]. В дальнейшем мы считаем, что "последующие" суть все lq-флипы. Более того, предположения (i)–(iii) в [19, Proposition 4.4] выполнены для каждой логпары (U, B_U):

(i) по (DCC);

(ii) по сделанному предположению на логмногообразия;

(iii) по монотонности, некоторым топологическим соображениям и [19, Corollary 1.7], где N может быть выбрано равным сумме числа всех исключительных простых дивизоров с логдискрепантами $< 1+\varepsilon$ на исходной модели (X, B) (ср. число кривых в доказательстве теоремы 4.1 из [17, с. 135]) и числа Пикара–Вейля (дивизоры Вейля с точностью до алгебраической или топологической эквивалентности); число N не возрастает при lq-флипах.

Это доказывает (ACC) выше (ср. замечание 4 ниже). Таким образом, из добавлений 1 и 3 с $\alpha = \varepsilon$ и $\beta = 1$ следует, что достаточно доказать обрыв в случае, когда все $a(q) \ge \beta = 1$. Последнее получается с использованием канонического случая примера 9.

Отметим, что доказательство остается верным и в непроективном случае, но все еще в характеристике 0.

Существует универсальная граница для ε-логканонических трехмерных многообразий с $\varepsilon > 0$ и конечным Γ (см. вопрос ниже), в частности для логфлипов и $a(q) \le 1$. Первые два условия необходимы, как показывает пример 11.

Замечание 4. Основная теорема имеет смысл, только если гипотеза (LSC) может быть доказана без использования полной ЛПММ или ее основных компонент. Например, в доказательстве Амбро для трехмерных многообразий [2, p. 577] для построения крепантного раздутия $\mu\colon (\widetilde{X}, \widetilde{B}) \to (X, B)$ можно использовать (допредельные) логфлипы и специальный обрыв (см. [19, Theorem 3.1, Remark 3.1.1]). Идеальное доказательство (LSC) вообще не должно бы использовать ЛПММ, как, например, в [6]. К сожалению, последнее работает пока только в таких тривиальных ситуациях, как локально полные пересечения. Отметим, что (LSC) очевидна, когда множества уровней $X(a,d)$ дискретны:

(DSC) для данного вещественного числа a если множество $X(a,d)$ конечно в определенных размерностях d, то (LSC) выполнена на (X,B) для вещественного числа a и в этих размерностях, так что $a(X,B,x)$ является полунепрерывной функцией снизу на замыкании их множества уровня. В частности, это верно для любого $a \le \alpha$ и $d \le \dim X - 2$, когда множество простых исключительных дивизоров D с $a(X,B,D) \le \alpha$ конечно, например для любого $0 < \varepsilon \le a < \alpha = 1+\varepsilon$, когда логпара (X,B) имеет ε-логканонические особенности (см. [19, Lemma 1.7]). Дивизориальный случай с $d = \dim X - 1$ выполнен всегда.

По лемме 2 ниже выполнение (LSC) очень вероятно на интервале $[0,2]$. А именно:

(DDC) для любого $a \in [0,2]$ либо множество уровня $\mathrm{mld}^{-1}a$ является

(i) конечным и для логтерминальных по Кавамате точек (т.е. вне LCS) с конечным числом b-дивизоров многообразия X, имеющих м.л.д. в $(1,2]$ и центром такую точку,

либо каждая его неконечная неприводимая компонента является

(ii) открытым множеством дивизоров на замыкании точки x с $\mathrm{mld}(x) < 1$; множество таких точек x конечно; или

(iii) открытым множеством точек коразмерности ≥ 2, лежащих на центрах логканонических особенностей, включая все X.

С другой стороны, (ACC) выполнена

(1) без каких-либо предположений в случае $c \le 2$, т.е. для $A(\Gamma,c)$ (см. [1] и [18]);

(2) для нелогтерминальных по Кавамате точек с $c \le 3$; однако $a(q)$ может достигать свое значение не в такой точке; точнее, для подмножества $A^{\mathrm{lc}}(\Gamma,c) \subset A(\Gamma,c)$ всех м.л.д. нелогтерминальных по Кавамате особенностей:

$$A^{\mathrm{lc}}(\Gamma,c) \subset A(\Gamma',c-1),$$

где Γ' получена из Γ в соответствии с преобразованием

$$\frac{m-1}{m} + \sum \frac{l_i}{m} b_i \in [0,1]$$

с натуральными числами m, l_i и $b_i \in \Gamma$ (см. формулу для дивизориальных кратностей в [20, (2.5.1)] и ср. [17, Corollary 3.10]);

(3) в $A(\Gamma,c) \cap [c-1,+\infty)$ для $c \le 3$ [19, Example 4.2.1]; также для $c \ge 4$, если [21, Conjecture 2] выполнена для c. В общем случае

(4) включения, аналогичные включениям в (2), имеют место для любого c такого, что ЛПММ и точная формула для дивизориального присоединения [12, Conjecture 17.3.1] выполнены для c; таким образом (ACC) выполнена в том случае, если последняя выполнена для $c-1$.

Таким образом, (LSC) легче проверяется для малых м.л.д., а (ACC) для больших. Успех в обоих случаях приводит к важным результатам (см. следствие 4 и пример 9), но этого пока еще недостаточно для четырехмерного логобрыва (см. следствие 5).

Следствие 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ и последовательности* lq-*флипов, как в добавлении* 1, *с бесконечным числом q_i таких, что $a(q_i) \le \beta < 1 + \varepsilon$, если особенности исходной модели* $(X/Z, B)$ *являются ε-логканоническими или же особенности каждой модели* (X_i, B_i) *таковы в окрестности флипированного E_i, то обрыв* lq-*флипов* (*возможно, непроективных*) *в данной последовательности следует из* (ACC) *в* $A(\Gamma, c) \cap [0, \beta]$ *или даже в* $A^\bullet_{\mathrm{lq}}(X/Z, B, \Gamma) \cap [0, \beta]$.

Доказательство следует непосредственно из добавлений 1 и 2, (DSC) в замечании 4, монотонности и конечности в [19, Lemma 1.7] $\square$

Замечание 5. В шаге 2 доказательства нашей теоремы совершенно неважно, какую размерность центров м.л.д. рассматривать — максимальную, минимальную или промежуточную. Важна стабилизация — эти центры появляются бесконечное число раз в последовательности lq-флипов. Тем не менее гипотезы об м.л.д. выглядят проще для центров на X, имеющих большую размерность, эквивалентно меньшую коразмерность в X.

В частности, можно избежать (ACC) в полном объеме, используя (неявно это использовалось в качестве сложности) следующую улучшенную версию доказательства теоремы. Заменим обычную м.л.д. на *контролируемую*, а именно рассмотрим м.л.д. только для *контролируемых* простых b-дивизоров. Контролируемые b-дивизоры с исходной моделью $(X/Z, B)$ составляют конечное множество простых b-дивизоров E, удовлетворяющее следующим аксиомам: для любой (или данной) последовательности lq-флипов q_i с данной исходной моделью, удовлетворяющих (DCC),

(CNT) монотонная (возрастающая) последовательность $a(X_i, B_i, E)$ удовлетворяет (ACC), или, что эквивалентно, стабилизируется;

(EXT) бесконечно много X_i обладают центром $\mathrm{center}_{X_i} E \subseteq E(q_i)$; положим $a_i = a(q_i) = +\infty$, если каждый $\mathrm{center}_{X_i} E \not\subseteq E(q_i)$.

Действительно, (LSC) для таких м.л.д. следует из (DSC) и (ACC) для последовательности следует из (CNT). По (EXT) число a в шаге 1 будет $< +\infty$, и по (CNT) оно достигается на контролируемой м.л.д. В приложениях (EXT), или существование бесконечной последовательности lq-флипов, противоречит обрыву.

(CNT), например, выполнена, когда существует множество A, удовлетворяющее (ACC), такое, что для каждого контролируемого E бесконечно много $a(X_i, B_i, E) \in A$.

Пример 7 (настоящие lq-флипы)**.** Предположим, что исходная модель $(X/Z, B)$ имеет ε-логканонические особенности либо каждое преобразование q_i в последовательности строгих lq-флипов (возможно, непроективных) не задевает $\mathrm{LCS}(X_i, B_i)$. Тогда после конечного числа lq-флипов последовательности все следующие lq-флипы являются слабыми логфлипами (см. пример 2 выше). В конце концов, это будет установленно в более общей ситуации (см. следствие 4 ниже) по модулю ЛПММ в меньших размерностях. Строгие lq-флипы могут быть заменены произвольными lq-флипами, в то время как обрыв означает, что после конечного числа lq-флипов все последующие являются флопами в коразмерности 1 (ср. замечание 7), или, что эквивалентно, композициями слабого логфлипа и флопа, т.е. $E_{\mathrm{nflo}} = \varnothing$.

Действительно, пусть q_i — такая последовательность lq-флипов. Рассмотрим контролируемые b-дивизоры E такие, что для бесконечно многих i

- $x = \mathrm{center}_{X_i} E$ является простым дивизором в $q_{i-1}(E_{i-1}) \cup E_i \subset X_i$; тогда $a(x) = a(X_i, B_i, E) \le 1$.

Поскольку каждое такое $a(x) \le 1$, то из монотонности, строгости lq-флипов q_i и [19, Corollary 1.7] следует, что множество таких b-дивизоров E конечно. Точнее, E может быть только простым дивизором на исходной модели $X_1 = X$ с ненулевой кратностью границы в $B_1 = B$ или быть исключительным дивизором многообразия X_1 с $a(X_1, B_1, E) < 1$ и $\mathrm{center}_{X_1} E \notin \mathrm{LCS}(X_1, B_1)$. Значит, можно применить [19, Corollary 1.7] к $X_1 \setminus \mathrm{LCS}(X_1, B_1)$, где особенности логпары (X_1, B_1) являются ε-логканоническими для некоторого $\varepsilon > 0$. По построению бесконечно много $a(X_i, B_i, E) \in 1 - \Gamma = \{1 - \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ удовлетворяют (ACC).

Однако (EXT) выполнена только в том случае, если бесконечно много lq-флипов q_i имеют дивизориальное сдутие по крайней мере с одной стороны lq-флипа q_i. К тому же из контролируемого обрыва в замечании 5 выше следует, что последнее возможно только для дивизориальных сдутий $c_i \colon X_i \to Y_i/Z$ с

- только 0-компонентами в B_i, стягиваемыми отображением c_i, и
- малым lq-отфлипированным сдутием X_{i+1}/Y_i.

Такое сдутие может быть *максимальным* в следующем смысле:

- (*максимальная*) *размерность его исключительного множества равна максимально "возможному" значению* $\dim X - a(E_i)$ *с заданным интервалом м.л.д.* ≤ 1, т.е. коразмерность минимальна: $c = a(E_i) = 1$. (Ср. [21, Conjecture 2].)

Наконец, эти "максимальные" lq-флипы обрываются ввиду убывания относительного числа Пикара–Вейля многообразия X/Z (ср. лемму 1 и замечание 6). Таким образом, для q_i с $i \gg 0$ оба сдутия X_i и X_{i+1}/Y_i являются малыми, а q_i — слабый логфлип (см. пример 2).

В частности, для 1-мерного X это дает полный обрыв.

Используем пример 7 для специальных обрывов lq-флипов; теперь индукция по размерности выглядит лучше, чем только для специальных флипов, и даже более общо в последнем случае. Под специальными lq-флипами здесь подразумеваются lq-флипы q с $E(q) \cap \mathrm{LCS}(X, B) \neq \varnothing$.

Следствие 4. *Из логприсоединения в размерности* $\leq n$ (*см. доказательство*) *и ЛПММ в размерности* $\leq n - 1$ *вытекает специальный обрыв строгих проективных* lq-*флипов в размерности* n *при условии* (DCC), т.е. после конечного числа все последующие lq-флипы неспециальны. *Более того, они являются слабыми логфлипами. В частности, для последующего обрыва в добавлении* 3 *нам необходимы* (LSC) *и* (ACC) *с* $c \geq 2$.

Добавление 4. *Формула присоединения может быть заменена существованием допредельного флипа и специальным обрывом в логтерминальном случае в размерности* $\leq n$; *в свою очередь последнее следует из ЛПММ в размерности* $\leq n - 1$.

Добавление 5. *Проективность может быть опущена при* $\dim X \leq 4$ *и, возможно, при* $\dim X = 5$ (*ср. пример* 9 *ниже*).

Добавление 6. *Более того, для последовательности* lq-*флипов в добавлении* 1 *существует такое* $\varepsilon > 0$, *что после конечного числа флипов каждая последующая модель* (X_i, B_i) *имеет* ε-*логканонические особенности в окрестности флипируемого* E_i, *а в добавлении* 3 *с* $\beta < 1 + \varepsilon$ *требуется только* (ACC) *с* $c = 3$ *в* $[1, \beta]$ *и* $c \geq 4$ *в* $[0, \beta]$. *Точнее, в этих предположениях после конечного числа флипируемых моделей всякая следующая модель имеет* $a(X_i, B_i, x)$ *и* $a(X_{i+1}, B_{i+1}, x) \geq \beta$ *для всех точек* x *коразмерности* ≤ 3 *в* E_i *и в отфлипированном* E_i *соответственно.*

Итак, для обрыва с $\beta \leq 1$ *в добавлении* 3 *достаточно использовать* (ACC) *в* $[0, 1]$ *для* $c \geq 4$.

Доказательство (ср. [20, Section 2]). Пусть $S \subset \mathrm{LCS}(X, B)$ — логканонический центр исходной логпары (X, B) с $\dim X = n$. Тогда каждый lq-флип q/Z

(1) устраняет S, если $S \subset E(q)$, или

(2) из присоединения следует, что ограничение q на нормализацию S/Z дает lq-флип; ограничение сохраняет проективность, строгость и (DCC) для некоторого нового Γ'.

Поскольку множество логканонических центров конечно, а их объединение есть LCS, то специальный обрыв выполнен в случае (1). В случае (2) он следует из индукции по размерности и ЛПММ (на самом деле требуется обрыв слабых логфлипов, который следует из логобрыва по ЛПММ; см. замечание 7) на нормализации S, имеющей размерность $\le n-1$. Итак, после конечного числа lq-флипов все последующие будут неспециальными. Более того, они будут слабыми логфлипами согласно примеру 7.

К сожалению, привести доказательство без использования формулы присоединения не позволяет ряд технических трудностей. Во-первых, тогда лучше использовать центр S наименьшей размерности. В этом случае S нормально и обладает индуцированной логтерминальной по Кавамате границей. Во-вторых, в этом случае требуется обойтись без применения ожидаемой формулы присоединения, а именно:

(3) в общем случае формула присоединения пока не доказана, но предыдущие аргументы можно использовать для ограничений на некоторое logрасслоение Иитаки $(W/S, B_W)$ с $\dim W = n-1$ по ЛПММ на W (ср. [20, с. 89–90]);

(4) ожидается, что формула присоединения будет иметь дивизориальную часть, как в [20, (2.5.1)]; это выполнено для дивизориального присоединения B_W и влечет (DCC) для нового множества Γ' после присоединения (ср. (2) в замечании 4).

В частности, обрыв использует 1-мерный случай с, возможно, бесконечным множеством Γ' в (4) (см. конец примера 7).

Добавление 4 следует из хорошо известной дивизориальной формулы присоединения в логтерминальной категории [17, Section 3] и вложенной конструкции для W_S (см. (3), (4)) в логтерминальном раздутии логпары (X, B) в S. Последнее требует только существования допредельных флипов и наличия специального обрыва в логтерминальном случае, когда формула присоединения известна и специальный обрыв следует из ЛПММ [19, Theorem 3.1, Remark 3.1.1; 20, Reduction Theorem 1.2, Theorem 2.3].

Если $n \le 4$, то нам необходим известный логобрыв в размерности ≤ 3 (см. пример 6). Для $n = 5$ требуется логобрыв в размерности ≤ 4 (см. пример 9 ниже). Это дает добавление 5.

Существование ε в добавлении 6 следует из монотонности и специального lq-обрыва. Причем (LSC) выполнено в $[0, \beta]$ для $d \le \dim X - 2$ по (iii) примера 6; в случае $d = \dim X - 1$ проходят те же аргументы с единственным и простым исключением относительно уровня 1: коэффициенты границы ≤ 1. Оставшийся случай в (ACC) следует из условия (1) замечания 4 для $c \le 2$ и [19, Proposition 4.4] (ср. пример 6) для $c = 3$ в $[0, 1]$. $\square$

Пример 8 (специальные четырехмерные lq-флипы). Специальные четырехмерные строгие флипы обрываются. Если вдобавок (ACC) выполнено в интервале $[0, 1]$ для $c = 4$ (замкнутые точки), то после их конечного числа все следующие lq-флипы (на самом деле слабые логфлипы) будут иметь $a(q) \ge 1$. Это непосредственно следует из добавления 6 в размерности 4 с $\beta = 1$, логприсоединения в размерности ≤ 4 [10; 20, с. 132] и ЛПММ в размерности ≤ 3 [19].

Отметим также, что (ACC) в $[0, 1]$ для замкнутых точек на четырехмерных многообразиях является не только достаточным условием, но, возможно, и необходимым условием, как следует из дальнейшего (ср. следствие 5, вопрос и пример 12), и осмысление этого факта является ключевым для понимания природы логфлипов в высших размерностях. Какая из следующих альтернатив имеет место (ср. [19, Proposition 4.4] для конечного множества Γ):

- $A^{\bullet}_{\mathrm{lf}}(X/Z, B, \Gamma, 4) \cap [0, 1]$ всегда конечно в нашей ситуации или
- $A^{\bullet}_{\mathrm{lf}}(X/Z, B, \Gamma, 4) \cap [0, 1]$ иногда может быть бесконечным.

Выбор не очевиден даже в интервале $[0, \beta]$ с произвольным $\varepsilon < \beta \le 1$.

Пример 9 (канонический в коразмерности ≥ 2). Рассмотрим последовательность строгих lq-флипов q_i такую, что

- каждый q_i неспециален;

- (LSC) выполнена в интервале $[0,2]$ (ср. (DDC) в замечании 4);
- (ACC) выполнена в $[0,1]$ с коразмерностью $\dim X \geq c \geq 4$ или
- каждый q_i каноничен, т.е. $a_i = a(q_i) \geq 1$.

Тогда после конечного числа строгих lq-флипов каждый следующий lq-флип является 2-сдутием и даже b-2-рационален в случае проективности всех X_i/Z. В частности, отсюда и из примера 2 и [21, Lemma] вытекает обрыв четырехмерных lq-флипов по модулю (ACC) (см. следствие 5), а по монотонности — обрыв четырехмерных логфлипов в случае, когда исходная модель (X,B) имеет канонические особенности в коразмерности ≥ 2 (ср. Фуджино [8]).

К сожалению, добавление 1 неприменимо в интервале $[1,2]$, поскольку на нем гипотеза (ACC) не проверена. Однако она верна на интервале $[1,1]$. Значит, можно считать, что все $a_i > 1$, а q_i — слабый логфлип (см. пример 7). Отметим, что выполнение требуемого (ACC) в коразмерности ≤ 3 известно (см. пример 6 и (1) в замечании 4).

Теперь, чтобы не использовать (ACC) полностью, воспользуемся замечанием 5 (ср. доказательство примера 7). В качестве контролируемых b-дивизоров E возьмем исключительные E на исходной модели X_1 такие, что для бесконечно многих i

- $x = \mathrm{center}_{X_{i+1}} E \in q_i(E_i) \cup E_{i+1}$ имеет коразмерность 2 на X_{i+1} и $a(x) = a(X_{i+1}, B_{i+1}, E)$; тогда $1 < a(x) = a(X_{i+1}, B_{i+1}, E) \leq 2$.

(EXT) выполнена, если *бесконечно много* флипов q_i не являются b-2-рациональными и множество контролируемых E конечно, и (CNT) следует из (ACC) в коразмерности 2 на интервале $[1,2]$ по [19, Example 4.2.1] (ср. (1) в замечании 4). Однако, как следует из (i) в (DDC), конечность выполнена, только когда мы избегаем уровней случаев (ii), (iii) в (DDC). Эти уровни равны 2 и $b_j = 1 + \mathrm{mld}(x_j)$ для неканонических точек x_j, $1 \leq j \leq N$, т.е. с $0 < \mathrm{mld}(x) < 1$ вне LCS; множество таких точек конечно. В соответствии с предположением $a_i > 1$ эти точки и их уровни не меняются (по крайней мере бирационально). Значит, по монотонности можно использовать контролируемый обрыв на каждом интервале $(1 + b_j, 1 + b_{j+1})$, т.е. беря $a(x) = a(X_{i+1}, B_{i+1}, E) \in (1 + b_j, 1 + b_{j+1})$ и считая $0 = b_0 < b_1 \leq \ldots \leq b_N < b_{N+1} = 1$. Итак, после конечного числа флипов мы можем считать, что все $a_i = 1 + b_j$ для некоторого $j \geq 1$. Из монотонности следует, что каждое флипируемое множество E_i пересекает замыкание точек x_l с $b_l \leq b_j$ недивизориально в E_i. Теперь верна (ACC) и имеет место обрыв так же, как в случае $b_0 = 0$ (по существу как следствие дивизориального случая леммы 1 на x_l с $b_l = b_j < 1$). Значит, по добавлению 1 после конечного числа флипов все $a_i \geq 1 + b_{N+1} = 2$. Таким образом, из монотонности, строгости и [19, Example 4.2.1] следует, что каждый из этих флипов является 2-сдутием (максимальным в обозначениях примера 7, когда он не-b-2-рационален). По лемме 1 если каждая последующая модель X_i/Z проективна, то после конечного числа флипов все следующие q_i b-2-рациональны.

Проективность в случае $\dim X \leq 4$ несущественна, поскольку из [21, Corollary 4] (лог-фано-случай выполнен для сдутия X_i/Y_i относительно дивизора $-(K_{X_i} + B_i)$) следует, что дивизор $-(K_{X_i} + B_i)$ численно эффективен и объемен на E_i/Y_i, отображение X_i/Y_i стягивает E_i в точку (ср. [21, Example 7] и см. замечание 6 ниже); это дает размерность 5 в добавлении 5. Например, флипы Каваматы в размерности 4 обрываются даже для непроективного X/Z.

Наконец, те же аргументы применимы для специального обрыва lq-флипов в условиях (ACC) и (LSC) в размерности $\leq \dim X - 1$. В этом случае необходимо рассмотреть м.л.д. над $E_i \cap \mathrm{LCS}(X_i, B_i)$ вместо всего E_i (ср. доказательство следствия 4). По сути это равносильно присоединению.

Лемма 2. *Специальный обрыв логфлипов* [20, Section 2] *и существование логфлипов влекут* (LSC) *в интервале* $[0,2]$ *с* (DDC) *из замечания* 4.

В частности, это выполнено без предположения об обрыве и о существовании флипов в размерности ≤ 4.

Доказательство. Утверждение локально. Следовательно, после локального терминального разрешения особенностей [19, Theorem 3.1, Remark 3.1.1] можно считать логпару (X, B) логтерминальной и терминальной в коразмерности ≥ 2 вне LCS. В этом случае утверждения (ii), (iii) в (DDC) выполнены на центрах логканонических особенностей для общих (неособых) дивизоров и общих (неособых) точек коразмерности 2 соответственно. Вне LCS утверждение (ii) в (DDC) выполняется для общих (неособых) точек компонент границы. Оставшиеся точки с $\mathrm{mld}(x) \le 2$ образуют конечное множество: компоненты границы и центры исключительных дивизоров на логразрешении (ср. [8, Lemma 5]). Тогда (LSC) требует проверки лишь в случаях (ii), (iii), которые соответствуют коразмерности $c \le 2$, возможно, после (последовательного дивизориального и точного) присоединения в коразмерности 2. Но это известно (см. замечание 4).

Требуемые предположения доказаны в размерности ≤ 4 [20, Corollaries 2.5, 1.8]. □

Пример 9 улучшает случай специальных lq-флипов до следующего.

Следствие 5. *В предположениях следствия* 4 *из существования логфлипов в размерности* n *и выполнения* (ACC) *в интервале* $[0, 1]$ *для* $c \ge 4$ *следует обрыв в коразмерности* 2 *строгих проективных* lq-*флипов в размерности* n *при условии* (DCC), т.е. после конечного числа строгих проективных lq-флипов все последующие lq-флипы являются слабыми логфлипами и b-2-рациональны с $a(q_i) > 2$.

Таким образом, обрыв (*возможно, непроективных*) *четырехмерных строгих* lq-*флипов при условии* (DCC) *и, в частности, обрыв логфлипов следуют из* (ACC) *в интервале* $[0, 1]$ *для замкнутых точек,* т.е. с $c = 4$.

Доказательство вытекает непосредственно из следствия 4, примера 9, леммы 2 и [20, Corollary 1.8]. □

Следующий интервал $[2, 3]$ намного более деликатный даже в размерности 5, особенно в его середине; но в высших размерностях проблема несопоставимо сложнее в интервале $[2, (n+1)/2]$ (просто страх и ужас).

В заключение обсудим кратко условие проективности, универсальную ограниченность для обрыва, возможные и невозможные обобщения.

Замечание 6 (проективность)**.** Проективность — краеугольный камень программы Мори, и от нее трудно отказаться даже там, где это возможно. В доказательстве теоремы проективность использовалась для стабилизации $(m-d)$-сдутий подмногообразия W_i в шагах 6, 7; за требуемую стабилизацию отвечает лемма 1. На самом деле условие проективности X_i/Z в лемме 1 может быть ослаблено до следующей относительной версии:

- конечность не-b-d-рациональных d-сдутий, каждое из которых имеет $\mathbb{R}$-Картье дивизор, который численно эффективен и объемен столь же на стягиваемом отображением $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ множестве E_i над некоторым Y_i/Z (например, обильный$/Y_i$, а E_i стягивается в точку), что и его раздутие *над* Z.

Действительно, стягиваемый цикл неэквивалентен нулю. В доказательстве теоремы если $\mathbb{R}$-дивизор является ограничением дивизора $-(K + B)$ на W_i, то все аргументы сохраняют силу в том случае, когда он достаточно объемен на E_i. Например, относительная версия применима в случае, когда дивизор $-(K + B)$ обилен на X_i/Y_i, а E_i/Y_i имеет такую же размерность, как и $/Z$, либо численно эффективен и объемен на стягиваемых x в шаге 6 с той же размерностью x/Y_i, как и $/Z$; условие на размерность выполнено автоматически, когда E_i стягивается в точку (ср. случай четырехмерных многообразий в примере 9). Аналогично для $\mathbb{Q}$-факториальных *алгебраических* многообразий (но не пространств) достаточно локально найти в окрестности стягиваемого множества или в окрестности замыкания точки x подобный численно эффективный и объемный дивизор на X_i/Y_i.

Известно также, что в дивизориальном случае, т.е. при $d = 1$, стабилизация, как в лемме 1, выполнена без условия проективности (теорема Ходжа об индексе). Возможно, это утверждение можно обобщить также и на случай $d \geq \dim X_i/2$, но полностью устранить условие проективности в теореме для высших размерностей выглядит безнадежным даже для специальных флипов.

Как и обычно, в данном письме (*логобрыв*) *обрыв* означает конечность любой последовательности логфлипов или немного более общих lq-флипов при выполнении определенных условий. Первая модель $(X/Z, B)$ в такой последовательности называется *исходной*. Иногда обрыв происходит из-за такой тривиальной причины, как конечность логмоделей с точностью до (логизоморфизма) изоморфизма, которые получаются применением (lq-флипов) флипов к исходной модели $(X/Z, B)$; соответствующий *изоморфизм* индуцируется бирациональным изоморфизмом моделей. В самом деле, из монотонности и (SQF) следует, что с точностью до изоморфизма каждая логмодель возникает не более одного раза в последовательности строгих (даже нефлопирующих) lq-флипов (см. замечание 7), откуда и следует обрыв. Более того, из самого обрыва следует, что аналогичное утверждение выполнено при произвольных (возможно, и неиндуцированных) изоморфизмах (в противном случае мы можем начать флипирующую последовательность с изоморфной модели); последнее не выглядит очевидным без использования обрыва. Выполнение двух типов конечности для lq-флипов даже при конечном множестве Γ (также и для логфлипов) ожидается только в очень специальных ситуациях, например когда

- $\dim X \leq 2$, особенности логпары (X, B) логтерминальны по Кавамате, логкодаирова размерность ≥ 0 (использовать число Пикара после терминального разрешения особенностей);
- логпара $(X/Z, B)$ является слабым логмногообразием Фано [20, Example 5.27] (известно только в размерностях, не превышающих 3; см. также работу Батырева [4]); или
- логфлипы слабые, если число Пикара $\rho(X/Z) \leq 2$.

В общем случае оба типа конечности не всегда выполняются даже в размерности 2.

Пример 10. Пусть $X/Z = \mathrm{pt.}$ — эллиптическая поверхность с бесконечной группой сечений, которые являются (-1)-кривыми [11, Example 4.15.3, p. 129]. Стягивание одной из таких кривых дает бесконечное число неизоморфных в индуцированном смысле моделей, которые, как правило, также неизоморфны в абстрактном смысле. (Изоморфизм, заданный сдвигом сечений, не всегда может быть продолжен с группы до изоморфизма многообразий.) Стягивания двух сечений, имеющих разную степень относительно некоторой (обильного дивизора) поляризации, неизоморфны в обоих смыслах.

Итак, обрыв означает конечность любого подмножества, отвечающего последовательности моделей в множестве моделей, которые, как и выше, появляются в результате флипов с фиксированной исходной моделью. Последнее множество можно превратить в частично упорядоченное множество с отношением $(X/Z, B) < (X^+/Z, B^+)$ в случае, когда логпара $(X^+/Z, B^+)$ получена из логпары $(X/Z, B)$ с помощью композиции (строгих проективных) lq-флипов. Тогда обрыв есть не что иное, как условие о.в.ц. для такого множества моделей.

Полученное (упорядоченное) множество в общем случае не является конечным. Поэтому следующий вопрос об эффективности обрыва нетривиален и не лишен смысла. Примеры и контрпримеры могут помочь прояснить наш подход к обрыву флипов.

Вопрос. Верно ли, что логобрыв *универсально ограничен* с границей, зависящей только от $(X/Z, B)$ или даже только от X/Z? То есть верно ли, что для данной исходной модели

$(X/Z, B)$ существует натуральное число, ограничивающее длину любой последовательности (lq-флипов) флипов, начинающуюся с логпары $(X/Z, B)$?

В соответствии с нашим доказательством теоремы можно ожидать два препятствия к положительному ответу на поставленный вопрос: накопление м.л.д. и контроль d-сдутий.

Пример 11 (логканонический случай)**.** В одномерном случае (X, B) — неособая кривая X с дивизором $B = \sum b_i p_i$, $b_i \in \Gamma$. В этом случае lq-флип меняет границу B на новую границу $B' = \sum b'_i p_i < B$, $b'_i \in \Gamma$, т.е. все $b'_i \le b_i$ и для некоторого i выполнено строгое неравенство $b'_i < b_i$. Следовательно, универсальная граница для обрыва таких lq-флипов существует тогда и только тогда, когда каждое множество $\Gamma \cap [0, b_i]$ не имеет точек накопления, в частности если Γ конечно. Например, универсальной границы не существует, если один из коэффициентов границы $b_i = 1$ и

$$\Gamma = \left\{1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, \dots, +\infty\right\}$$

— множество *стандартных* коэффициентов границы [19, Example 4.1.4]. Оно удовлетворяет (DCC), бесконечно и его единственная точка накопления есть 1.

В размерности 2, т.е. для нормальной алгебраической поверхности X, нетрудно построить пример $(X/Z, B)$ с (*классическими*) коэффициентами границы 0 и 1, но без универсальной ограничивающей константы для обрыва lq-флипов. Пусть $X = \mathbb{P}^2$, $Z = \mathrm{pt.}$ и $B = L_1 + L_2$, где L_1 и L_2 — две прямые. Для каждого натурального числа n и тривиального сдутия $c\colon X \to X/\mathrm{pt.}$ существует строгий проективный lq-флип $(\mathbb{P}^2, L_1 + L_2) \dashrightarrow (X_n, L_1 + L_2)$, где L_i — собственный обратный образ прямой L_i на X_n, обратное преобразование стягивает единственную (-1)-кривую E на минимальном разрешении особенностей поверхности X_n, а X_n имеет только одну особую точку $p \in L_1$, минимальное разрешение которой имеет граф типа $\mathbb{A}_n$ из (-2)-кривых. После каждого такого lq-флипа можно сделать еще n lq-флипов, а именно: $(X_n, L_1 + L_2) \dashrightarrow (X_{n-1}, L_1 + L_2) \dashrightarrow \dots \dashrightarrow (X_0, L_1 + L_2)$, где $X_{n-1} \to X_n$ — раздутие крайней (-2)-кривой графа минимального разрешения особой точки p, и т.д.

Хорошо известный обрыв логфлипов для поверхностей обладает универсальной границей в терминах числа Пикара $\rho(X/Z)$ (и не зависящей от B). Более того, индуцированные lq-флипы на кривых в $\mathrm{LCS}(X, B)$ обладают лишь конечным числом возможностей для значений коэффициентов b_i. В частности, не каждая обрывающаяся последовательность lq-флипов в размерности 1, например со стандартными коэффициентами, индуцирована последовательностью логфлипов в размерности 2 (ср. [17, лемма 4.2, теорема 4.1 (о специальном обрыве)] в трехмерном случае). Однако приведенная двумерная последовательность lq-флипов индуцирует на L_1 следующее преобразование коэффициентов границы:

$$(n-1)/n \to (n-2)/(n-1) \to \dots \to 1/2 \to 0$$

в точке p.

Можно ли индуцировать последовательность lq-флипов с логтрехмерного случая? Более того, для произвольно большого натурального n с фиксированной трехмерной моделью? Если можно, то универсальная ограничивающая константа не существует для трехмерных логфлипов по существу в силу того, что м.л.д. накапливаются к 0.

По-видимому, в логканоническом случае существование универсальной ограничивающей константы ожидать не следует.

Однако в логтерминальном по Кавамате случае с конечным множеством Γ это возможно.

Пример 12 (рациональная эсхатология)**.** В случае, когда логпара (X, B) имеет ε-логканонические особенности с $\varepsilon > 0$, универсальная граница для обрыва трехмерных логфлипов (и даже для обрыва строгих lq-флипов с конечным множеством Γ) существует (ср. доказательство [19, 5.1.3] для трехмерных многообразий). Универсальная граница для флипов с $a(q) \le 1$ зависит от числа Пикара и количества исключительных дивизоров, дискрепанты которых на исходной модели $< 1+\varepsilon$ (см. пример 6). Однако такая оценка уже не будет верна в комбинации с флипами, имеющими $a(q) > 1$. Для того чтобы оценить число последних, можно воспользоваться следующим инвариантом (терминатором; струнно-топологическим рангом *сингулярных* циклов коразмерности 2; ср. замечание 7): если логпара (X, B) терминальна в коразмерности ≥ 2, положим

$$\rho^2(X/Z, B) = \rho(X/Z) + \sum b_i \rho_i + \sum \delta_j,$$

где ρ — число Пикара–Вейля, первая сумма пробегает все простые дивизоры D_i на многообразии X, $b_i = 1 - a(D_i)$ — кратность границы в D_i, ρ_i — число Пикара$/Z$ нормализации замыкания D_i, а вторая сумма пробегает все точки p_j коразмерности ≥ 2, где δ_j — *дефект* в точке p_j. А именно: дефект в точке p_j есть $\delta_j = \sum b_k - \sum b_l$, где первая сумма пробегает простые исключительные дивизоры E_k с центром p_j, дискрепанта $a_k = a(X, B, E_k) \le 2$ и $0 \le b_k = 2 - a_k < 1$, а вторая сумма пробегает все доминантные дивизориальные точки p_l/p_j на нормализации подмногообразия $\operatorname{Supp} B$ с $b_l = b_i$, когда p_l принадлежит нормализации замыкания дивизора D_i. В общем логтерминальном по Кавамате (даже чисто логтерминальном) случае рассмотрим терминальную (соответственно каноническую) в коразмерности ≥ 2 модификацию $(Y/Z, B_Y)$ с крепантной границей B_Y и положим $\rho^2(X/Z, B) = \rho^2(Y/Z, B_Y)$. Итак, терминатор $\rho^2(X/Z, B)$ пока определен при размерности многообразия X, не превышающей 4. Терминатор обладает следующими свойствами:

- $\rho^2(X/Z, B)$ веществен и ≥ 0 по определению и формуле (c) для м.л.д. в [19, Example 4.2.1]; из этой же формулы, (DDC) и замечания 4 следует конечность сумм;
- $\rho^2(X/Z, B)$ рационален, если B является $\mathbb{Q}$-границей;
- для каждого lq-флипа q выполнено неравенство

$$\rho^2(X^+/Z, B^+) \le \rho^2(X/Z, B),$$

  причем неравенство строгое для строгих lq-флипов (даже для нефлопирующих; воспользоваться строгой терминальной в коразмерности ≥ 2 модификацией [17, строгое условие на с. 108]; индукция по числу логдискрепант ≤ 1, экстремальных флипов и флопов; дивизориальное сдутие дивизора D_i в терминальную точку может быть разложено в композицию строгого lq-флипа с тождественным сдутием, а b_i, заменяемым $\max\{0, b_i^+\}$, где $b_i^+ = 1 - a(X^+, B^+, D_i)$ (кратность стягиваемой границы или стягиваемая *ко*-м.л.д. в D_i), и последующим дивизориальным сдутием); таким образом, терминатор $\rho^2(X/Z, B)$ корректно определен.

Для трехмерной логтерминальной по Кавамате исходной модели $(X/Z, B)$ с $\mathbb{Q}$-границей B рациональные числа $\rho^2(X/Z, B)$ в последовательности lq-флипов имеют ограниченные знаменатели (зависящие от конечного множества Γ рациональных кратностей и от числа N в (iii) примера 6). Таким образом, логобрыв (даже для строгих или нефлопирующих lq-флипов; см. замечание 7) имеет универсальную границу, зависящую от исходного значения $\rho^2(X/Z, B)$ и оценки знаменателей. (Ср. последнее условие для универсальной границы обрыва в конце примера 6.) Для вещественной границы B последнее может быть доказано при определенных ограничениях (как в [19, Proposition 4.4]), а в высших размерностях ожидается, что числа $\rho^2(X/Z, B)$ при условии (DCC) удовлетворяют условию *о.у.ц.* То же самое можно применить к контролируемой версии (ср. пример 9). В высших размерностях мы получим таким способом универсально ограниченный обрыв канонических (lq-флипов) флипов q в коразмерности 2 с контролируемым $a(q) < 2$, даже с конечным множеством значений чисел $\rho^2(X/Z, B)$ для флипирующих моделей при фиксированной исходной модели (соответственно с конечным Γ). Последнее также дает оценку на последующие флипы с $a(q) = 2$ (максимальные) в коразмерности 2. Оставшиеся флипы будут иметь коразмерность ≥ 3 (b-2-рациональные). В высших размерностях это означает контролируемость 2-сдутий, а в размерности ≤ 4 обрыв канонических (lq-флипов) флипов с универсальной границей (см. пример 9). Более того, в размерности 4 контролируемая версия работает, если мы можем контролировать дискрепанты ≤ 1. В размерности 4 в общем логтерминальном по Кавамате случае существование универсальной границы связано с альтернативой примера 8, а именно: обрыв с универсальной границей-константой имеет место, когда выполнена первая альтернатива — конечность. (В этом случае число $\rho^2(X/Z, B)$ может быть легко переведено в целочисленный инвариант рациональных границ.)

В противном случае может появиться точка накопления и обрыв и/или универсальная граница могут не существовать. В общем случае не верится, что универсальная граница существует, но обрыв, скорее всего, имеет место. Тогда обрыв означает только то, что он означает. Например, если логпара $(X/Z, B)$ имеет общий тип, то конечное значение $\rho^2(X/Z, B)$ должно быть единственным и ожидается, что оно достигается за конечное число флипов, но на скольких именно, может зависеть от их выбора (свобода воли).

Обрыв не является формальным фактом: например, монотонность $\mathcal{B}^+ < \mathcal{B}$ недостаточна для выполнения условия о.у.ц. (обрыва) b-дивизоров и моделей для данного упорядочения (ср. с. 345).

Пример 13. Пусть $(X/X, B)$ — двумерная неособая точка $P \in X$ с приведенной границей $B = D + E$ и $P = D \cap E$. Определим индуктивно бесконечную последовательность моделей $(X_i/X, B_i)$, $i \geq 0$, такую, что каждое $\mathcal{B}_{i+1} < \mathcal{B}_i = \mathcal{B}(X_i, B_i)$. Положим $(X_0/X, B_0) = (X/X, B)$ и $P_0 = P \in D_0 = D$, а все другие модели $(X_{i+1}/X, B_{i+1})$ определим как двойное раздутие в $P_i \in D_i$, D_{i+1} — бирациональный прообраз дивизора D_i, P_{i+1} — бирациональный прообраз точки P_i на нем, а B_{i+1} — крепантный прообраз дивизора B_i минус бирациональный прообраз первого раздутия точки P_i.

Отметим, что каждая модель $(X_{i+1}/X, B_{i+1})$ не является минимальной, поскольку $K_{X_i} + B_i$ не численно эффективен$/X$ на последней раздутой кривой.

К тому же B должна быть именно границей и даже не субграницей, поскольку это важно для (LSC).

Пример 14. Пусть $(X/Z, B)$ — проективное сдутие X/Z поверхности E типа K3 на неособом трехмерном многообразии X в точку. Предположим, что существует бесконечная цепочка проективных флопов$/Z$ в (-2)-кривых на E. Тогда их можно превратить в флипы$/Z$ относительно $B = E - \varepsilon H$, где H — общее гиперплоское сечение многообразия X/Z и $\varepsilon > 0$. Для каждого из этих флипов q выполнено $a(q) = 1$, $d = 1$ и $W = E$. Однако (LSC) не имеет места на W.

Замечание 7 (нефлопированность)**.** Возможно, строгость флипов можно везде заменить на нефлопированность; в частности, это применимо к (слабым) логфлипам (например, в экстремальных лучах; см. пример 2). Напомним, что lq-флип является *флопированным*, или флопом, если обратное к нему отображение также является lq-флипом; в противном случае он является *нефлопированным*. При выполнении (WLC) последнее имеет место, только когда

- $f_*^+ B^+ = f_* B$ и
- оба дивизора $K + B$ и $K_{X^+} + B^+ \equiv 0/Y$, т.е. численно тривиальны$/Y$.

В терминах b-дивизоров кодискрепант $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}(X^+, B^+) = \mathcal{B} = \mathcal{B}(X, B)$ (см. монотонность выше). Соответственно нефлопированность означает $\mathcal{B}^+ < \mathcal{B}$ или $E_{\mathrm{nflo}} \neq \varnothing$.

Тогда обрыв lq-флипов означает, что после их конечного числа все последующие lq-флипы являются флопированными. Эквивалентно существует только конечно много строгих lq-флипов в последовательности, состоящей из lq-флипов и флопов (можно использовать разложение lq-флопа на строгий флип и флоп). Интуитивно последнее означает, что любой флоп (*телепортация*) не должен предотвращать обрыв.

Аналогичное утверждение уже неверно для lq-флипов с логканоническими особенностями. Например, рассмотрим логпары $(X/\mathrm{pt.}, E_1 + E_2)$, где X — неособая алгебраическая поверхность, E_1 — (-1)-кривая, E_2 — неособая кривая, пересекающая кривую E_1 трансверсально в одной точке p; тогда последовательность крепантных раздутий точки p (флопов) и последующих сдутий E_1 (флипов) бесконечна. Однако если исходная модель логтерминальна по Кавамате (чисто логтерминальна) либо если мы будем рассматривать только обычные логфлипы, обрыв может быть доказан для трехмерных флипов, канонических четырехмерных (lq-флипов) флипов и следует из (ACC) для общих четырехмерных (lq-флипов) флипов (использовать $\rho^2(X/Z, B)$). В общем случае это связано с преобразованиями многообразий W_i в доказательстве теоремы флопами. Для такого контроля этих преобразований требуется аналог ρ^c введенного выше инварианта ρ^2 в высшей коразмерности c (вполне возможно, что они будут инвариантами ассоциированных производных категорий), при этом терминальную модификацию нужно заменить на $\mathbb{Q}$-факториализацию. В случае $c = 1$ таким инвариантом будет *сингулярное* струнное число Пикара–Вейля $\rho^1 = \sum b_i$. (Быть может, правильнее было бы использовать обозначение ρ^c_{sing}.)

Замечание 8 (аналитическое и обобщенное)**.** Большинство результатов данного письма верны и в аналитической категории, но обрыв должен быть локальным над компактным подмножеством в Z.

То же самое можно сказать и про (lq-флипы) флипы обобщенных и логквазимногообразий вне множества нелогканонических особенностей (ср. добавление 1; [20, Example 5.25; 3]).

СПИСОК ТЕРМИНОВ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

$a(X, D, x)$, минимальная логдискрепанта (м.л.д.) логпары (X, D) в схемной точке (согласно Гротендику) $x \in X$ [19, p. 2681] с переставленными аргументами в обозначениях

$A(\Gamma, c)$, м.л.д.-спектр, с. 329

$A^{\mathrm{lc}}(\Gamma, c)$, то же для нелогтерминальных по Кавамате точек, с. 339

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, B)$, псевдограница, или b-дивизор кодискрепантностей, логпары (X, B) [20, с. 88]

$\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}(X^+, B^+)$, то же для (X^+, B^+)

CNT, (ACC) для контролируемых b-дивизоров, с. 340

DCC, условие о.у.ц. для границ, с. 329

DDC, дискретные и дивизориальные случаи м.л.д., с. 339

DSC, конечность множества уровня м.л.д., с. 339

$E = E(q) = f^{-1}E_{\mathrm{nli}}\,q$, с. 330

$E_i = E(q_i)$, с. 334

E_i^+, полный бирациональный образ дивизора E_i, с. 335

$E_{\mathrm{nflo}} = E_{\mathrm{nflo}}\,q$, множество нефлопированности, с. 330

$E_{\mathrm{nli}} = E_{\mathrm{nli}}\,q$, множество нелогизоморфности, с. 330

EXT, бесконечное появление контролируемых центров, с. 340

$\mathrm{LCS}(X, B)$, множество логканонических особенностей логпары (X, B) [17, определение 3.14]

ЛПММ, логпрограмма минимальных моделей [19, Section 5]

LSC, полунепрерывность снизу м.л.д.-функции и соответствующая гипотеза, с. 329

$\mathrm{mld}(X, B, E)$, м.л.д. логпары (X, B) в подмногообразии E, с. 330

$\mathrm{mld}(x) = a(X, D, x)$, м.л.д.-функция логпары (X, D), с. 328

$q\colon X \dashrightarrow X^+/Z$, lq-флип, с. 329

$q_i\colon X_i \dashrightarrow X_{i+1}/Z$, lq-флип q_i в последовательности lq-флипов, с. 334

SQF, условие строгости lq-флипа, определение на с. 330

WLC, условие слабого логсдутия, с. 329

(X, B), логмногообразие, обычно логканоническое, с. 329

(X, D), логпара, с. 328

$(X/Y, B)$, слабое логсдутие, с. 329

$(X^+/Y, B^+)$, lq-флип логпары $(X/Y, B)$, с. 329

Γ, множество коэффициентов (кратностей) границ, обычно удовлетворяет (DCC), с. 329

Γ', присоединенный образ множества Γ, с. 339

δ_j, дефект в точке коразмерности ≥ 2, с. 347

$\rho(X/Z)$, число Пикара–Вейля многообразия X/Z

ρ_i, то же для нормализации дивизориального подмногообразия D_i, с. 347

$\rho^2(X/Z, B)$, терминатор, струнно-топологический ранг сингулярных циклов коразмерности 2 в $(X/Z, B)$, с. 347

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alexeev V.* Two two-dimensional terminations // Duke Math. J. 1993. V. 69. P. 527–545.
2. *Ambro F.* On minimal log discrepancies // Math. Res. Lett. 1999. V. 6. P. 573–580.
3. *Ambro F.* Quasi-log varieties // Тр. МИАН. 2003. Т. 240. С. 220–239.
4. *Batyrev V.V.* The cone of effective divisors of threefolds // Proc. Intern. Conf. on Algebra, Novosibirsk, 1989. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1992. Pt 3. P. 337–352. (Contemp. Math.; V. 131).
5. *Borisov A.A.* Minimal discrepancies of toric singularities // Manuscr. math. 1997. V. 92. P. 33–45.
6. *Ein L., Mustata M., Yasuda T.* Jet schemes, log discrepancies and inverse of adjunction: E-print, 2002. math.AG/0209392.
7. *Fujino O.* Notes on toric varieties from Mori theoretic viewpoint: E-print, 2001. math.AG/0112090.
8. *Fujino O.* Termination of 4-fold canonical flips: E-print, 2003. math.AG/0301154.
9. *Kawamata Y.* The minimal discrepancy of a 3-fold terminal singularity // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, №1. С. 201–203.
10. *Kawamata Y.* Subadjunction of log canonical divisors for a subvariety of codimension 2. I // Birational algebraic geometry, Baltimore (MD), 1996. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1997. P. 79–88. (Contemp. Math.; V. 207).
11. *Kollár J.* Rational curves on algebraic varieties. Berlin: Springer, 1996. (Ergeb. Math. und ihrer Grenzgeb. 3. Flg.; Bd. 32).
12. Flips and abundance for algebraic threefolds / Ed. by J. Kollár. Paris: Soc. math. France, 1992. (Astérisque; V. 211).
13. *Markushevich D.* Minimal discrepancy for a terminal cDV singularity is 1 // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1996. V. 3. P. 445–456.
14. *Reid M.* Canonical 3-folds // Journeés de géométrie algébrique d'Angers / Ed. by A. Beauville. Alphen: Sijthoff and Noordhoff, 1980. P. 273–310.
15. *Reid M.* Decomposition of toric morphisms // Arithmetic and geometry / Ed. by M. Artin, J. Tate. Boston: Birkhäuser, 1983. V. 2. P. 395–418. (Progr. Math.; V. 36).
16. *Шокуров В.В.* Теорема о необращении в нуль // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, №3. С. 635–651.
17. *Шокуров В.В.* Трехмерные логперестройки // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, №1. С. 105–201.
18. *Shokurov V.V.* A.c.c. of m.l.d.: codimension 2 case: Preprint. Baltimore: J. Hopkins Univ., 1992.
19. *Shokurov V.V.* 3-fold log models // J. Math. Sci. 1996. V. 81. P. 2667–2699.
20. *Shokurov V.V.* Prelimiting flips // Тр. МИАН. 2003. Т. 240. С. 82–219.
21. *Shokurov V.V.* Letters of a bi-rationalist. IV: Geometry of log flips // Algebraic geometry / Ed. by M.C. Beltrametti et al. Berlin; New York: de Gruyter, 2002. P. 313–328.