¿Qué es la supersimetría?

José Figueroa-O'Farrill

School of Mathematics

IMAFF, CSIC, Madrid, 14 febrero 2005

Un precedente jurídico

Un precedente jurídico

I can't define it, but I know it when I see it.

Juez Stewart en Jacobellis *versus* Ohio

Orígenes

Orígenes

- Física de partículas

Orígenes

- Física de partículas
- Unificación de simetrías de carácter geométrico y simetrías internas

Orígenes

- Física de partículas
- Unificación de simetrías de carácter geométrico y simetrías internas
- Partículas elementales son representaciones unitarias e irreducibles del grupo de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski

$$P = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4$$

- Se construyen por el método de representaciones inducidas de Mackey

- Se construyen por el método de representaciones inducidas de Mackey
- En un lenguaje más geométrico: secciones L^2 de un fibrado homogéneo, que además satisfacen ecuaciones diferenciales

- Se construyen por el método de representaciones inducidas de Mackey

- En un lenguaje más geométrico: secciones L^2 de un fibrado homogéneo, que además satisfacen ecuaciones diferenciales:

  ⋆ «bosones»

- Se construyen por el método de representaciones inducidas de Mackey

- En un lenguaje más geométrico: secciones L^2 de un fibrado homogéneo, que además satisfacen ecuaciones diferenciales:

  ⋆ «bosones»: ecuaciones de segundo orden, como la de Klein-Gordon,

$$\Delta\phi = m^2\phi$$

- Se construyen por el método de representaciones inducidas de Mackey
- En un lenguaje más geométrico: secciones L^2 de un fibrado homogéneo, que además satisfacen ecuaciones diferenciales:
  - ⋆ «bosones»: ecuaciones de segundo orden, como la de Klein-Gordon,

$$\triangle\phi = m^2\phi$$

  - ⋆ «fermiones»

- Se construyen por el método de representaciones inducidas de Mackey
- En un lenguaje más geométrico: secciones L^2 de un fibrado homogéneo, que además satisfacen ecuaciones diferenciales:
  - ⋆ «bosones»: ecuaciones de segundo orden, como la de Klein-Gordon,

$$\triangle\phi = m^2\phi$$

  - ⋆ «fermiones»: ecuaciones de primer orden, como la de Dirac,

$$i\not{\partial}\,\psi = m\psi$$

- Cualquier grupo $G \supset P$ se podría llamar una *super* simetría

- Cualquier grupo $G \supset P$ se podría llamar una *super* simetría: varias partículas elementales se agrupan en una *super* representación de G (Wigner)

- Cualquier grupo $G \supset P$ se podría llamar una *super* simetría: varias partículas elementales se agrupan en una *super* representación de G (Wigner)

- Teorema de Coleman y Mandula (1967)

- Cualquier grupo $G \supset P$ se podría llamar una *super* simetría: varias partículas elementales se agrupan en una *super* representación de G (Wigner)

- Teorema de Coleman y Mandula (1967):

$$G = P \times K$$

donde K es un grupo de Lie compacto

- Cualquier grupo $G \supset P$ se podría llamar una *super* simetría: varias partículas elementales se agrupan en una *super* representación de G (Wigner)

- Teorema de Coleman y Mandula (1967):

$$G = P \times K$$

donde K es un grupo de Lie compacto $\Longrightarrow$ irreducibles de G son $\otimes$ de irreducibles de P y K

- Cualquier grupo $G \supset P$ se podría llamar una *super* simetría: varias partículas elementales se agrupan en una *super* representación de G (Wigner)

- Teorema de Coleman y Mandula (1967):

$$G = P \times K$$

donde K es un grupo de Lie compacto $\Longrightarrow$ irreducibles de G son $\otimes$ de irreducibles de P y K: no muy interesante...

- Cualquier grupo $G \supset P$ se podría llamar una *super* simetría: varias partículas elementales se agrupan en una *super* representación de G (Wigner)

- Teorema de Coleman y Mandula (1967):

$$G = P \times K$$

donde K es un grupo de Lie compacto $\Longrightarrow$ irreducibles de G son $\otimes$ de irreducibles de P y K: no muy interesante...

- Teorema de Haag, Łopuszański y Sohnius (1975)

- Cualquier grupo $G \supset P$ se podría llamar una *super* simetría: varias partículas elementales se agrupan en una *super* representación de G (Wigner)

- Teorema de Coleman y Mandula (1967):

$$G = P \times K$$

donde K es un grupo de Lie compacto $\Longrightarrow$ irreducibles de G son $\otimes$ de irreducibles de P y K: no muy interesante...

- Teorema de Haag, Łopuszański y Sohnius (1975): G es un supergrupo de Lie

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»

- Desde entonces se estudian teorías supersimétricas

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»

- Desde entonces se estudian teorías supersimétricas:

  ⋆ modelo sigma supersimétrico

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»

- Desde entonces se estudian teorías supersimétricas:
  - ⋆ modelo sigma supersimétrico
    - ∗ geometría Kähler y sus generalizaciones

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»

- Desde entonces se estudian teorías supersimétricas:
  - ⋆ modelo sigma supersimétrico
    - ∗ geometría Kähler y sus generalizaciones
    - ∗ teorema del índice

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»

- Desde entonces se estudian teorías supersimétricas:
  - ⋆ modelo sigma supersimétrico
    - ∗ geometría Kähler y sus generalizaciones
    - ∗ teorema del índice
  - ⋆ teoría Yang–Mills supersimétrica

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»

- Desde entonces se estudian teorías supersimétricas:
  - ⋆ modelo sigma supersimétrico
    - ∗ geometría Kähler y sus generalizaciones
    - ∗ teorema del índice
  - ⋆ teoría Yang–Mills supersimétrica
    - ∗ instantones, monopolos y sus generalizaciones

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»
- Desde entonces se estudian teorías supersimétricas:
  - ⋆ modelo sigma supersimétrico
    - ∗ geometría Kähler y sus generalizaciones
    - ∗ teorema del índice
  - ⋆ teoría Yang–Mills supersimétrica
    - ∗ instantones, monopolos y sus generalizaciones
    - ∗ invariantes de Donaldson, Seiberg–Witten,...

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»
- Desde entonces se estudian teorías supersimétricas:
  - ⋆ modelo sigma supersimétrico
    - ∗ geometría Kähler y sus generalizaciones
    - ∗ teorema del índice
  - ⋆ teoría Yang–Mills supersimétrica
    - ∗ instantones, monopolos y sus generalizaciones
    - ∗ invariantes de Donaldson, Seiberg–Witten,...
  - ⋆ supergravedad

- Esto da lugar al estudio de representaciones de superálgebras de Lie en el contexto de teoría cuántica de campos: lo que hoy se denomina «supersimetría»

- Desde entonces se estudian teorías supersimétricas:
  - ⋆ modelo sigma supersimétrico
    - ∗ geometría Kähler y sus generalizaciones
    - ∗ teorema del índice
  - ⋆ teoría Yang–Mills supersimétrica
    - ∗ instantones, monopolos y sus generalizaciones
    - ∗ invariantes de Donaldson, Seiberg–Witten,...
  - ⋆ supergravedad
    - ∗ superficies mínimas y geometría calibrada

- supercuerdas

- supercuerdas
  - incorporación de todo lo anterior (y mucho más)

- supercuerdas
  - incorporación de todo lo anterior (y mucho más)
  - relaciones inesperadas entre estas teorías

- ⋆ supercuerdas
  - ∗ incorporación de todo lo anterior (y mucho más)
  - ∗ relaciones inesperadas entre estas teorías: dualidades, simetría especular,...

- ⋆ supercuerdas
  - ∗ incorporación de todo lo anterior (y mucho más)
  - ∗ relaciones inesperadas entre estas teorías: dualidades, simetría especular,...

- En geometría casi nunca hay tanta simetría (P, G, ...) y mucho menos bosones y fermiones

- ⋆ supercuerdas
  - ∗ incorporación de todo lo anterior (y mucho más)
  - ∗ relaciones inesperadas entre estas teorías: dualidades, simetría especular,...

- En geometría casi nunca hay tanta simetría (P, G, ...) y mucho menos bosones y fermiones; sin embargo aun sin simetría puede haber supersimetría

- ⋆ supercuerdas
  - ∗ incorporación de todo lo anterior (y mucho más)
  - ∗ relaciones inesperadas entre estas teorías: dualidades, simetría especular,...

- En geometría casi nunca hay tanta simetría (P, G, ...) y mucho menos bosones y fermiones; sin embargo aun sin simetría puede haber supersimetría

- Mis ejemplos salen de la geometría pero estoy seguro que esto es un fenómeno mucho más extendido

Una conjetura metamatemática

Una conjetura metamatemática

- Idea principal:

$$\text{fermiones} \quad = \quad \text{ecuaciones de primer orden}$$

Una conjetura metamatemática

- Idea principal:

$$
\begin{tikzcd}
\text{fermiones} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\text{supersimetría}"] & \text{ecuaciones de primer orden} \arrow[d, "\text{supersimetría}"] \\
\text{bosones} \arrow[r, equal] & \text{ecuaciones de segundo orden}
\end{tikzcd}
$$

Una conjetura metamatemática

- Idea principal:

$$\begin{tikzcd}
\text{fermiones} \arrow[d, "\text{supersimetría}"] \arrow[r, phantom, "="] & \text{ecuaciones de primer orden} \arrow[d, "\text{supersimetría}"] \\
\text{bosones} \arrow[r, phantom, "="] & \text{ecuaciones de segundo orden}
\end{tikzcd}$$

- Conjetura

Una conjetura metamatemática

- Idea principal:

$$\begin{tikzcd} \text{fermiones} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\text{supersimetría}"] & \text{ecuaciones de primer orden} \arrow[d, "\text{supersimetría}"] \\ \text{bosones} \arrow[r, equal] & \text{ecuaciones de segundo orden} \end{tikzcd}$$

- Conjetura: La supersimetría subyace cualquier situación donde ecuaciones de primer order impliquen ecuaciones de segundo orden

Una conjetura metamatemática

- Idea principal:

$$\begin{tikzcd}
\text{fermiones} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "\text{supersimetría}"] & \text{ecuaciones de primer orden} \arrow[d, "\text{supersimetría}"] \\
\text{bosones} \arrow[r, phantom, "="] & \text{ecuaciones de segundo orden}
\end{tikzcd}$$

- Conjetura: La supersimetría subyace cualquier situación donde ecuaciones de primer order impliquen ecuaciones de segundo orden, y donde además las soluciones a las ecuaciones de primer orden sean «mínimas»

Varios ejemplos

Varios ejemplos

- Teoría de Hodge

Varios ejemplos

- Teoría de Hodge
- Instantones y sus generalizaciones

Varios ejemplos

- Teoría de Hodge
- Instantones y sus generalizaciones
- Geometría calibrada

Teoría de Hodge

Teoría de Hodge

- (M^n, g): variedad diferenciable riemanniana compacta y orientable

Teoría de Hodge

- (M^n, g): variedad diferenciable riemanniana compacta y orientable

- el complejo de formas diferenciales (de Rham)

$$C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

Teoría de Hodge

- (M^n, g): variedad diferenciable riemanniana compacta y orientable
- el complejo de formas diferenciales (de Rham)

$$C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

$\star$ un álgebra graduada $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M)$

Teoría de Hodge

- (M^n, g): variedad diferenciable riemanniana compacta y orientable

- el complejo de formas diferenciales (de Rham)

$$C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

⋆ un álgebra graduada $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M)$

⋆ una derivación $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$, $d^2 = 0$

- (orientabilidad $\implies$) un operador de Hodge $\star : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$

- (orientabilidad $\implies$) un operador de Hodge $\star : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ que permite definir un producto escalar

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M \alpha \wedge \star\beta$$

y un adjunto formal del diferencial d

$$\delta = \star d \star$$

- (orientabilidad $\implies$) un operador de Hodge $\star : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ que permite definir un producto escalar

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M \alpha \wedge \star\beta$$

y un adjunto formal del diferencial d

$$\delta = \star d \star$$

- el laplaciano de Hodge $\triangle = d\delta + \delta d$

- (orientabilidad $\Longrightarrow$) un operador de Hodge $\star : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ que permite definir un producto escalar

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M \alpha \wedge \star\beta$$

y un adjunto formal del diferencial d

$$\delta = \star d \star$$

- el laplaciano de Hodge $\triangle = d\delta + \delta d$ y

$$\langle \alpha, \triangle\alpha \rangle = \|d\alpha\|^2 + \|\delta\alpha\|^2 \geq 0$$

- Igualdad

- Igualdad $\iff \triangle\alpha = 0$

- Igualdad $\iff \triangle\alpha = 0 \iff d\alpha = \delta\alpha = 0$

- Igualdad $\iff \triangle\alpha = 0 \iff d\alpha = \delta\alpha = 0 \iff D\alpha = 0$

- Igualdad $\iff \triangle\alpha = 0 \iff d\alpha = \delta\alpha = 0 \iff D\alpha = 0$ donde

$$D := d + \delta : \Omega^{\text{par}}(M) \to \Omega^{\text{impar}}(M) \qquad \text{y viceversa}$$

- Igualdad $\iff \triangle\alpha = 0 \iff d\alpha = \delta\alpha = 0 \iff D\alpha = 0$ donde

$$D := d + \delta : \Omega^{\mathsf{par}}(M) \to \Omega^{\mathsf{impar}}(M) \qquad \text{y viceversa}$$

- Las formas armónicas minimizan la «energía»

$$E(\alpha) := \langle \alpha, \triangle\alpha \rangle$$

- Igualdad $\iff \triangle\alpha = 0 \iff d\alpha = \delta\alpha = 0 \iff D\alpha = 0$ donde

$$D := d + \delta : \Omega^{\mathsf{par}}(M) \to \Omega^{\mathsf{impar}}(M) \qquad \text{y viceversa}$$

- Las formas armónicas minimizan la «energía»

$$E(\alpha) := \langle \alpha, \triangle\alpha \rangle$$

- el teorema de Hodge: $\mathcal{H}^p \cong H^p(M, \mathbb{R})$

Supersimetría

Supersimetría

- La teoría subyacente es el modelo sigma supersimétrico unidimensional

Supersimetría

- La teoría subyacente es el modelo sigma supersimétrico unidimensional
  - $\star$ $\Delta \leftrightarrow$ «hamiltoniano»

Supersimetría

- La teoría subyacente es el modelo sigma supersimétrico unidimensional
  - ⋆ $\Delta \leftrightarrow$ «hamiltoniano»
  - ⋆ $D \leftrightarrow$ «operador de supersimetría»

Supersimetría

- La teoría subyacente es el modelo sigma supersimétrico unidimensional
  - $\star$ $\Delta \leftrightarrow$ «hamiltoniano»
  - $\star$ $D \leftrightarrow$ «operador de supersimetría»
  - $\star$ $\Omega \leftrightarrow$ «espacio de Hilbert»

Supersimetría

- La teoría subyacente es el modelo sigma supersimétrico unidimensional
  - ⋆ $\Delta \leftrightarrow$ «hamiltoniano»
  - ⋆ $D \leftrightarrow$ «operador de supersimetría»
  - ⋆ $\Omega \leftrightarrow$ «espacio de Hilbert»
  - ⋆ $\mathcal{H} \subset \Omega \leftrightarrow$ «vacíos»

Supersimetría

- La teoría subyacente es el modelo sigma supersimétrico unidimensional
  - $\star$ $\Delta \leftrightarrow$ «hamiltoniano»
  - $\star$ $D \leftrightarrow$ «operador de supersimetría»
  - $\star$ $\Omega \leftrightarrow$ «espacio de Hilbert»
  - $\star$ $\mathcal{H} \subset \Omega \leftrightarrow$ «vacíos»
- En toda teoría supersimétrica se puede definir el «índice de Witten»

Supersimetría

- La teoría subyacente es el modelo sigma supersimétrico unidimensional
  - ⋆ $\Delta \leftrightarrow$ «hamiltoniano»
  - ⋆ $D \leftrightarrow$ «operador de supersimetría»
  - ⋆ $\Omega \leftrightarrow$ «espacio de Hilbert»
  - ⋆ $\mathcal{H} \subset \Omega \leftrightarrow$ «vacíos»
- En toda teoría supersimétrica se puede definir el «índice de Witten»

$$\mathrm{Tr}(-1)^F := \#\text{estados bosónicos} - \#\text{estados fermiónicos}$$

- Se puede demostrar que sólo contribuyen los vacíos

- Se puede demostrar que sólo contribuyen los vacíos:

$$\mathrm{Tr}(-1)^F = \dim \mathcal{H}^{\mathsf{par}} - \dim \mathcal{H}^{\mathsf{impar}}$$

- Se puede demostrar que sólo contribuyen los vacíos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(-1)^F &= \dim \mathcal{H}^{\text{par}} - \dim \mathcal{H}^{\text{impar}} \\ &= \chi(M)\end{aligned}$$

- Se puede demostrar que sólo contribuyen los vacíos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(-1)^F &= \dim \mathcal{H}^{\textsf{par}} - \dim \mathcal{H}^{\textsf{impar}} \\ &= \chi(M) \\ &= \operatorname{ind} D \end{aligned}$$

- Se puede demostrar que sólo contribuyen los vacíos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(-1)^F &= \dim \mathcal{H}^{\mathsf{par}} - \dim \mathcal{H}^{\mathsf{impar}} \\ &= \chi(M) \\ &= \mathrm{ind}\, D\end{aligned}$$

- Este resultado es paradigmático y sugiere una demostración supersimétrica del teorema del índice de Atiyah–Singer a partir de teorías supersimétricas que generalizan y extienden el modelo sigma (Álvarez-Gaumé, Getzler,...)

Teoría de Hodge–Lefschetz

Teoría de Hodge–Lefschetz

- La noción de variedad (hiper)Kähler se puede definir supersimétricamente

Teoría de Hodge–Lefschetz

- La noción de variedad (hiper)Kähler se puede definir supersimétricamente

- Los teoremas básicos de la teoría de Hodge–Lefschetz son consecuencias directas de la supersimetría de un modelo sigma cuatridimensional

Teoría de Hodge–Lefschetz

- La noción de variedad (hiper)Kähler se puede definir supersimétricamente
- Los teoremas básicos de la teoría de Hodge–Lefschetz son consecuencias directas de la supersimetría de un modelo sigma cuatridimensional:
  - ⋆ identidades de Hodge

Teoría de Hodge–Lefschetz

- La noción de variedad (hiper)Kähler se puede definir supersimétricamente

- Los teoremas básicos de la teoría de Hodge–Lefschetz son consecuencias directas de la supersimetría de un modelo sigma cuatridimensional:
  - ⋆ identidades de Hodge
  - ⋆ identidades ∂

Teoría de Hodge–Lefschetz

- La noción de variedad (hiper)Kähler se puede definir supersimétricamente

- Los teoremas básicos de la teoría de Hodge–Lefschetz son consecuencias directas de la supersimetría de un modelo sigma cuatridimensional:

  ⋆ identidades de Hodge
  ⋆ identidades ∂
  ⋆ acción de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ en cohomología

Teoría de Hodge–Lefschetz

- La noción de variedad (hiper)Kähler se puede definir supersimétricamente

- Los teoremas básicos de la teoría de Hodge–Lefschetz son consecuencias directas de la supersimetría de un modelo sigma cuatridimensional:
  - ⋆ identidades de Hodge
  - ⋆ identidades ∂
  - ⋆ acción de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ en cohomología

- También se extiende a variedades hiperkähler (Verbitsky) a partir de la supersimetría de un modelo sigma seis-dimensional

Teoría de Hodge–Lefschetz

- La noción de variedad (hiper)Kähler se puede definir supersimétricamente
- Los teoremas básicos de la teoría de Hodge–Lefschetz son consecuencias directas de la supersimetría de un modelo sigma cuatridimensional:
  - ⋆ identidades de Hodge
  - ⋆ identidades ∂
  - ⋆ acción de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ en cohomología
- También se extiende a variedades hiperkähler (Verbitsky) a partir de la supersimetría de un modelo sigma seis-dimensional

[FO–Köhl–Spence, hep-th/9705161]

Teoría gauge

Teoría gauge

- Una versión no lineal de la teoría de Hodge

Teoría gauge

- Una versión no lineal de la teoría de Hodge:
  - ⋆ $P \longrightarrow M$ un fibrado principal con grupo G, compacto

Teoría gauge

- Una versión no lineal de la teoría de Hodge:
  - ⋆ $P \longrightarrow M$ un fibrado principal con grupo G, compacto
  - ⋆ una conexión A en P

Teoría gauge

- Una versión no lineal de la teoría de Hodge:
  - ⋆ $P \longrightarrow M$ un fibrado principal con grupo G, compacto
  - ⋆ una conexión A en P
  - ⋆ con curvatura $F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$

Teoría gauge

- Una versión no lineal de la teoría de Hodge:
  - ⋆ $P \longrightarrow M$ un fibrado principal con grupo G, compacto
  - ⋆ una conexión A en P
  - ⋆ con curvatura $F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$
  - ⋆ para todo fibrado asociado E,

$$C^\infty(E) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(E) \xrightarrow{d_A} \Omega^2(E) \xrightarrow{d_A} \cdots$$

donde $d_A = d + A$

Teoría gauge

- Una versión no lineal de la teoría de Hodge:
  - ⋆ $P \longrightarrow M$ un fibrado principal con grupo G, compacto
  - ⋆ una conexión A en P
  - ⋆ con curvatura $F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$
  - ⋆ para todo fibrado asociado E,

$$C^\infty(E) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(E) \xrightarrow{d_A} \Omega^2(E) \xrightarrow{d_A} \cdots$$

donde $d_A = d + A$: no es un complejo $d_A^2 = F_A$

Teoría gauge

- Una versión no lineal de la teoría de Hodge:
  - ⋆ $P \to M$ un fibrado principal con grupo G, compacto
  - ⋆ una conexión A en P
  - ⋆ con curvatura $F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$
  - ⋆ para todo fibrado asociado E,

$$C^\infty(E) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(E) \xrightarrow{d_A} \Omega^2(E) \xrightarrow{d_A} \cdots$$

    donde $d_A = d + A$: no es un complejo $d_A^2 = F_A$
  - ⋆ en particular, $F_A \in \Omega^2(\mathrm{ad}\, P)$

Teoría gauge

- Una versión no lineal de la teoría de Hodge:
  - ⋆ $P \rightarrow M$ un fibrado principal con grupo G, compacto
  - ⋆ una conexión A en P
  - ⋆ con curvatura $F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$
  - ⋆ para todo fibrado asociado E,

$$C^\infty(E) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(E) \xrightarrow{d_A} \Omega^2(E) \xrightarrow{d_A} \cdots$$

  donde $d_A = d + A$: no es un complejo $d_A^2 = F_A$
  - ⋆ en particular, $F_A \in \Omega^2(\mathrm{ad}\, P)$ y $d_A F_A = 0$ («identidad de Bianchi»)

- la ecuación de Yang–Mills

$$d_A \star F_A = 0$$

- la ecuación de Yang–Mills

$$d_A \star F_A = 0$$

extremiza el funcional

$$\mathrm{YM}[A] = \|F_A\|^2$$

- la ecuación de Yang–Mills

$$d_A \star F_A = 0$$

extremiza el funcional

$$\mathrm{YM}[A] = \|F_A\|^2$$

- En el caso abeliano $G = S^1$, $F_A \in \Omega^2(M)$ y $d_A = d$

- la ecuación de Yang–Mills

$$d_A \star F_A = 0$$

extremiza el funcional

$$\mathrm{YM}[A] = \|F_A\|^2$$

- En el caso abeliano $G = S^1$, $F_A \in \Omega^2(M)$ y $d_A = d$, así que

$$dF_A = 0 \qquad \text{y} \qquad d \star F_A = 0$$

Instantones

Instantones

- $\dim M = 4$

Instantones

- $\dim M = 4 \implies \star : \Omega^2(E) \to \Omega^2(E)$ obedece $\star^2 = 1$

Instantones

- $\dim M = 4 \implies \star : \Omega^2(E) \to \Omega^2(E)$ obedece $\star^2 = 1$, así que

$$\Omega^2(E) = \Omega^2_+(E) \oplus \Omega^2_-(E)$$

Instantones

- $\dim M = 4 \implies \star : \Omega^2(E) \to \Omega^2(E)$ obedece $\star^2 = 1$, así que

$$\Omega^2(E) = \Omega^2_+(E) \oplus \Omega^2_-(E)$$

- A es un «instantón» $\iff F_A \in \Omega^2_\pm(\mathrm{ad}\, P)$

Instantones

- $\dim M = 4 \implies \star : \Omega^2(E) \to \Omega^2(E)$ obedece $\star^2 = 1$, así que

$$\Omega^2(E) = \Omega^2_+(E) \oplus \Omega^2_-(E)$$

- A es un «instantón» $\iff F_A \in \Omega^2_\pm(\mathrm{ad}\, P)$

- A satisface automáticamente $d_A \star F_A = 0$

- Además el funcional de Yang–Mills está acotado por debajo

$$\mathrm{YM}[A] \geq |\,\langle c_2(P), [M]\rangle\,|$$

- Además el funcional de Yang–Mills está acotado por debajo

$$\mathrm{YM}[A] \geq |\,\langle c_2(P), [M]\rangle\,|$$

con igualdad $\iff$ A es un instantón

Instantones en dimensión > 4

Instantones en dimensión > 4

- $\varphi \in \Omega^4(M)$ define una aplicación

$$\widehat{\varphi} : \Omega^2(E) \longrightarrow \Omega^2(E)$$

Instantones en dimensión > 4

- $\varphi \in \Omega^4(M)$ define una aplicación

$$\widehat{\varphi} : \Omega^2(E) \to \Omega^2(E)$$
$$F \mapsto \star(\star\varphi \wedge F)$$

Instantones en dimensión > 4

- $\varphi \in \Omega^4(M)$ define una aplicación

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} : \Omega^2(E) &\to \Omega^2(E) \\ F &\mapsto \star(\star\varphi \wedge F) \end{aligned}$$

- $\widehat{\varphi}$ es simétrica y se puede diagonalizar

$$\Omega^2(E) = \bigoplus_{\lambda} \Omega^2_{\lambda}(E)$$

- Si $d \star \varphi = 0$, esto da lugar a una generalización de la noción de instantón

- Si $d \star \varphi = 0$, esto da lugar a una generalización de la noción de instantón: A es un «instantón»

- Si $d \star \varphi = 0$, esto da lugar a una generalización de la noción de instantón: A es un «instantón» $\iff F_A \in \Omega^2_\lambda(\operatorname{ad} P) \quad \exists \lambda \neq 0$

- Si $d \star \varphi = 0$, esto da lugar a una generalización de la noción de instantón: A es un «instantón» $\iff F_A \in \Omega^2_\lambda(\mathrm{ad}\, P) \quad \exists \lambda \neq 0$

- En efecto, si $\widehat{\varphi} F_A = \lambda F_A$, $\lambda \neq 0$

- Si $d \star \varphi = 0$, esto da lugar a una generalización de la noción de instantón: A es un «instantón» $\iff$ $F_A \in \Omega^2_\lambda(\mathrm{ad}\, P) \quad \exists \lambda \neq 0$

- En efecto, si $\widehat{\varphi} F_A = \lambda F_A$, $\lambda \neq 0$,

$$d_A \star F_A = \lambda^{-1} d_A(\star\varphi \wedge F_A)$$

- Si $d \star \varphi = 0$, esto da lugar a una generalización de la noción de instantón: A es un «instantón» $\iff F_A \in \Omega^2_\lambda(\mathrm{ad}\, P) \quad \exists \lambda \neq 0$

- En efecto, si $\widehat{\varphi} F_A = \lambda F_A$, $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} d_A \star F_A &= \lambda^{-1} d_A(\star\varphi \wedge F_A) \\ &= \lambda^{-1} \left(d \star \varphi \wedge F_A \pm \star\varphi \wedge d_A F_A \right) \end{aligned}$$

- Si $d \star \varphi = 0$, esto da lugar a una generalización de la noción de instantón: A es un «instantón» $\iff F_A \in \Omega^2_\lambda(\mathrm{ad}\, P) \quad \exists\lambda \neq 0$

- En efecto, si $\widehat{\varphi} F_A = \lambda F_A$, $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} d_A \star F_A &= \lambda^{-1} d_A(\star\varphi \wedge F_A) \\ &= \lambda^{-1} \left(d \star \varphi \wedge F_A \pm \star\varphi \wedge d_A F_A \right) \end{aligned}$$

- El funcional de Yang–Mills está acotado por debajo

$$\mathrm{YM}[A] \geq |\, \langle c_2(P) \cup [\star\varphi], [M] \rangle \,|$$

- Si $d \star \varphi = 0$, esto da lugar a una generalización de la noción de instantón: A es un «instantón» $\iff F_A \in \Omega^2_\lambda(\mathrm{ad}\, P) \quad \exists \lambda \neq 0$

- En efecto, si $\widehat{\varphi} F_A = \lambda F_A$, $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} d_A \star F_A &= \lambda^{-1} d_A (\star\varphi \wedge F_A) \\ &= \lambda^{-1} \left(d \star \varphi \wedge F_A \pm \star\varphi \wedge d_A F_A \right) \end{aligned}$$

- El funcional de Yang–Mills está acotado por debajo

$$\mathrm{YM}[A] \geq |\, \langle c_2(P) \cup [\star\varphi], [M] \rangle \,|$$

con igualdad $\iff A$ es un instantón con el menor $|\lambda|$ posible

Supersimetría

Supersimetría

- Existe una única teoría Yang–Mills supersimétrica en el espacio-tiempo de Minkowski

Supersimetría

- Existe una única teoría Yang–Mills supersimétrica en el espacio-tiempo de Minkowski en 10 dimensiones

Supersimetría

- Existe una única teoría Yang–Mills supersimétrica en el espacio-tiempo de Minkowski en 10 dimensiones

- La teoría se puede definir en una variedad lorentziana espín (M, g) de dimensión 10

Supersimetría

- Existe una única teoría Yang–Mills supersimétrica en el espacio-tiempo de Minkowski en 10 dimensiones

- La teoría se puede definir en una variedad lorentziana espín (M, g) de dimensión 10, pero no es supersimétrica a no ser que M admita espinores paralelos

Supersimetría

- Existe una única teoría Yang–Mills supersimétrica en el espacio-tiempo de Minkowski en 10 dimensiones

- La teoría se puede definir en una variedad lorentziana espín (M, g) de dimensión 10, pero no es supersimétrica a no ser que M admita espinores paralelos

- Equivalentemente, el grupo de holonomía

$$\mathrm{Hol}(g) \subseteq \mathrm{Spin}(7) \ltimes \mathbb{R}^8 \subset \mathrm{SO}(1,9)$$

- Nos concentramos en variedades $M = \mathbb{R}^{1,9-d} \times K^d$

- Nos concentramos en variedades $M = \mathbb{R}^{1,9-d} \times K^d$, donde K es una variedad compacta con holonomía en la tabla de Wang

d	$\mathrm{Hol}(g) \subset \mathrm{SO}(d)$	Geometría
4	$\mathrm{Sp}(1)$	hiperkähler
6	$\mathrm{SU}(3)$	Calabi–Yau
7	G_2	
8	$\mathrm{Spin}(7)$	
8	$\mathrm{SU}(4)$	Calabi–Yau
8	$\mathrm{Sp}(2)$	hiperkähler
8	$\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$	hiperkähler

- Curiosamente todas estas geometrías tienen 4-formas paralelas

- Curiosamente todas estas geometrías tienen 4-formas paralelas, que se construyen a partir de los espinores paralelos

- Curiosamente todas estas geometrías tienen 4-formas paralelas, que se construyen a partir de los espinores paralelos

- Teorema: Dada una conexión gauge A en K, su «pull-back» a $\mathbb{R}^{1,9-d} \times K$ es «supersimétrica» $\iff$ A es un instantón

[Acharya–FO–O'Loughlin–Spence, hep-th/9707118]

- Curiosamente todas estas geometrías tienen 4-formas paralelas, que se construyen a partir de los espinores paralelos

- Teorema: Dada una conexión gauge A en K, su «pull-back» a $\mathbb{R}^{1,9-d} \times K$ es «supersimétrica» $\iff$ A es un instantón

  [Acharya–FO–O'Loughlin–Spence, hep-th/9707118]

- La supersimetría escoge un valor de λ

- Curiosamente todas estas geometrías tienen 4-formas paralelas, que se construyen a partir de los espinores paralelos

- Teorema: Dada una conexión gauge A en K, su «pull-back» a $\mathbb{R}^{1,9-d} \times K$ es «supersimétrica» $\iff$ A es un instantón

  [Acharya–FO–O'Loughlin–Spence, hep-th/9707118]

- La supersimetría escoge un valor de λ

- En particular, se podría haber descubierto la noción de instantón generalizado a partir de supersimetría

- Esta construcción sugiere un resultado (aun no demostrado) análogo a la correspondencia de Dostoglou–Salamon

- Esta construcción sugiere un resultado (aun no demostrado) análogo a la correspondencia de Dostoglou–Salamon:

instantones en $\Sigma_1 \times \varepsilon\Sigma_2$ en
el límite adiabático $\varepsilon \longrightarrow 0$

- Esta construcción sugiere un resultado (aun no demostrado) análogo a la correspondencia de Dostoglou–Salamon:

instantones en $\Sigma_1 \times \varepsilon\Sigma_2$ en el límite adiabático $\varepsilon \to 0$	$\leftrightarrow$	curvas holomorfas $\Sigma_1 \to \mathcal{M}_{\Sigma_2}$ en el espacio de móduli de fibrados vectoriales planos en Σ_2

Curvas cuaterniónicas

Curvas cuaterniónicas

- (M, g, I, J, K) una variedad hiperkähler

Curvas cuaterniónicas

- (M, g, I, J, K) una variedad hiperkähler:
  - ⋆ (M, g) variedad riemanniana de dimensión $4n$

Curvas cuaterniónicas

- (M, g, I, J, K) una variedad hiperkähler:
  - ⋆ (M, g) variedad riemanniana de dimensión $4n$
  - ⋆ I, J, K endomorfismos ortogonales de TM obedeciendo el álgebra cuaterniónica

Curvas cuaterniónicas

- (M, g, I, J, K) una variedad hiperkähler:
  - ⋆ (M, g) variedad riemanniana de dimensión $4n$
  - ⋆ I, J, K endomorfismos ortogonales de TM obedeciendo el álgebra cuaterniónica y paralelos con respecto a ∇

Curvas cuaterniónicas

- (M, g, I, J, K) una variedad hiperkähler:
  - ⋆ (M, g) variedad riemanniana de dimensión $4n$
  - ⋆ I, J, K endomorfismos ortogonales de TM obedeciendo el álgebra cuaterniónica y paralelos con respecto a ∇
- (M', g', I', J', K') otra variedad hiperkähler

Curvas cuaterniónicas

- (M, g, I, J, K) una variedad hiperkähler:
  - ⋆ (M, g) variedad riemanniana de dimensión $4n$
  - ⋆ I, J, K endomorfismos ortogonales de TM obedeciendo el álgebra cuaterniónica y paralelos con respecto a ∇

- (M', g', I', J', K') otra variedad hiperkähler: una aplicación $\phi : M \longrightarrow M'$ es «cuaterniónica»

Curvas cuaterniónicas

- (M, g, I, J, K) una variedad hiperkähler:
  - ⋆ (M, g) variedad riemanniana de dimensión $4n$
  - ⋆ I, J, K endomorfismos ortogonales de TM obedeciendo el álgebra cuaterniónica y paralelos con respecto a ∇

- (M', g', I', J', K') otra variedad hiperkähler: una aplicación $\phi : M \longrightarrow M'$ es «cuaterniónica» si

$$I' \circ \phi_* \circ I + J' \circ \phi_* \circ J + K' \circ \phi_* \circ K = -\phi_*$$

Curvas cuaterniónicas

- (M, g, I, J, K) una variedad hiperkähler:
  - ⋆ (M, g) variedad riemanniana de dimensión $4n$
  - ⋆ I, J, K endomorfismos ortogonales de TM obedeciendo el álgebra cuaterniónica y paralelos con respecto a ∇

- (M', g', I', J', K') otra variedad hiperkähler: una aplicación $\phi : M \longrightarrow M'$ es «cuaterniónica» si

$$I' \circ \phi_* \circ I + J' \circ \phi_* \circ J + K' \circ \phi_* \circ K = -\phi_*$$

que es una ecuación diferencial elíptica de primer orden

- Si $\dim M = 4$ el funcional

$$S[\phi] := \int_M \|d\phi\|^2_{g'}$$

para aplicaciones $\phi : M \longrightarrow M'$

- Si $\dim M = 4$ el funcional

$$S[\phi] := \int_M \|d\phi\|^2_{g'}$$

para aplicaciones $\phi : M \longrightarrow M'$ está acotado por debajo

$$S[\phi] \geq \int_M (\omega_I \wedge \phi^*\omega_{I'} + \omega_J \wedge \phi^*\omega_{J'} + \omega_K \wedge \phi^*\omega_{K'})$$

- Si $\dim M = 4$ el funcional

$$S[\phi] := \int_M \|d\phi\|^2_{g'}$$

para aplicaciones $\phi : M \to M'$ está acotado por debajo

$$S[\phi] \geq \int_M (\omega_I \wedge \phi^*\omega_{I'} + \omega_J \wedge \phi^*\omega_{J'} + \omega_K \wedge \phi^*\omega_{K'})$$

con igualdad $\iff$ $\phi(M)$ es una curva cuaterniónica

- Si $\dim M = 4$ el funcional

$$S[\phi] := \int_M \|d\phi\|^2_{g'}$$

para aplicaciones $\phi : M \longrightarrow M'$ está acotado por debajo

$$S[\phi] \geq \int_M (\omega_I \wedge \phi^*\omega_{I'} + \omega_J \wedge \phi^*\omega_{J'} + \omega_K \wedge \phi^*\omega_{K'})$$

con igualdad $\iff$ $\phi(M)$ es una curva cuaterniónica, donde $\omega_I(X,Y) = g(IX,Y)$, etc... son las 2-formas asociadas

- Un argumento supersimétrico partiendo de la teoría Yang–Mills supersimétrica en 10 dimensiones sugiere la siguiente correspondencia

- Un argumento supersimétrico partiendo de la teoría Yang–Mills supersimétrica en 10 dimensiones sugiere la siguiente correspondencia:

instantones en $M_1 \times \varepsilon M_2$ en
el límite adiabático $\varepsilon \longrightarrow 0$

- Un argumento supersimétrico partiendo de la teoría Yang–Mills supersimétrica en 10 dimensiones sugiere la siguiente correspondencia:

instantones en $M_1 \times \varepsilon M_2$ en el límite adiabático $\varepsilon \to 0$	$\longleftrightarrow$	curvas cuaterniónicas $M_1 \to \mathcal{M}_{M_2}$ en el espacio de móduli de instantones en M_2

[FO–Köhl–Spence, hep-th/9710082]

- Un argumento supersimétrico partiendo de la teoría Yang–Mills supersimétrica en 10 dimensiones sugiere la siguiente correspondencia:

instantones en $M_1 \times \varepsilon M_2$ en el límite adiabático $\varepsilon \longrightarrow 0$	$\longleftrightarrow$	curvas cuaterniónicas $M_1 \longrightarrow \mathcal{M}_{M_2}$ en el espacio de móduli de instantones en M_2

[FO–Köhl–Spence, hep-th/9710082]

- Ejercicio: ¡Demostrarlo!

Epílogo

- Existen otras ilustraciones de la conjetura

Epílogo

- Existen otras ilustraciones de la conjetura:
  - ⋆ monopolos y sus generalizaciones

Epílogo

- Existen otras ilustraciones de la conjetura:
  - ⋆ monopolos y sus generalizaciones
  - ⋆ vórtices y sus generalizaciones

Epílogo

- Existen otras ilustraciones de la conjetura:
  - ⋆ monopolos y sus generalizaciones
  - ⋆ vórtices y sus generalizaciones
  - ⋆ la geometría calibrada de Harvey y Lawson

Epílogo

- Existen otras ilustraciones de la conjetura:
  - ⋆ monopolos y sus generalizaciones
  - ⋆ vórtices y sus generalizaciones
  - ⋆ la geometría calibrada de Harvey y Lawson
- Ejercicio

Epílogo

- Existen otras ilustraciones de la conjetura:
  - ⋆ monopolos y sus generalizaciones
  - ⋆ vórtices y sus generalizaciones
  - ⋆ la geometría calibrada de Harvey y Lawson
- Ejercicio: ¡Buscar más ejemplos!

Muchas gracias.