

Esferas fibradas y álgebras excepcionales

José Miguel Figueroa O'Farrill

Maxwell Institute & School of Mathematics

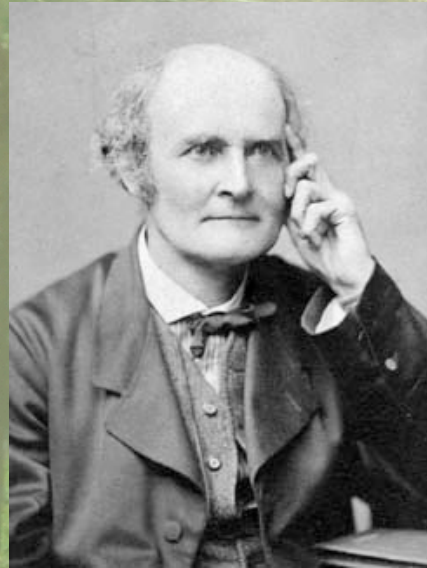


Alicante, 7 de junio del 2007

Introducción



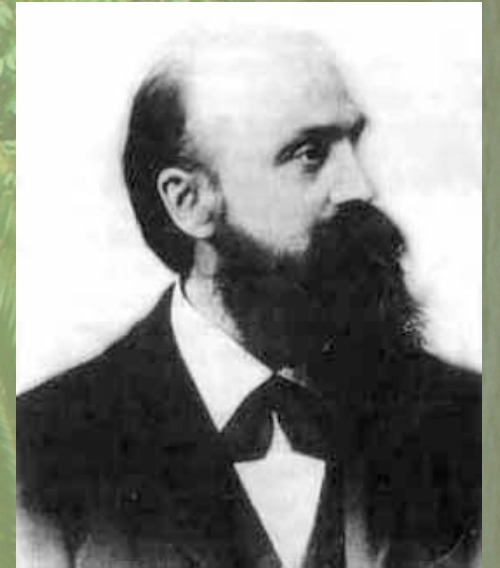
Hamilton



Cayley



Lie



Killing



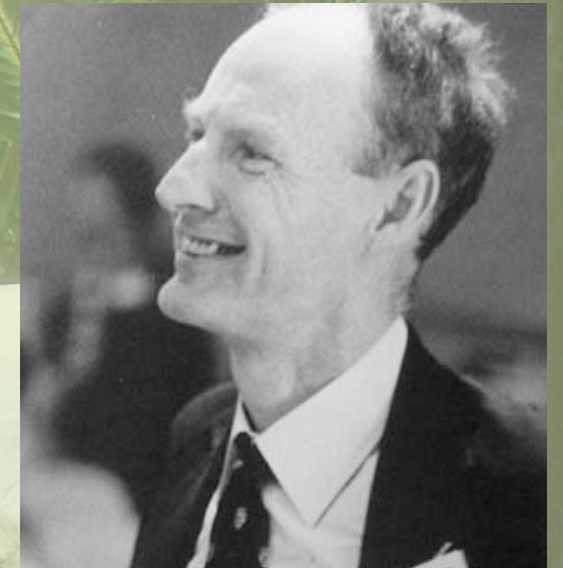
É. Cartan



Hurwitz



Hopf



J.F. Adams

Una relación entre objetos **excepcionales** :

- **fibraciones** de **esferas** sobre esferas
- **álgebras de Lie** excepcionales

mediante una construcción **geométrica** con su origen en la **teoría de supergravedad**, que es un límite de la **teoría de cuerdas**.

Álgebras con división y norma

$\mathbb{R}$

$\geq$

$$ab = ba$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$\mathbb{C}$

$$ab = ba$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$\mathbb{H}$

$$ab \neq ba$$

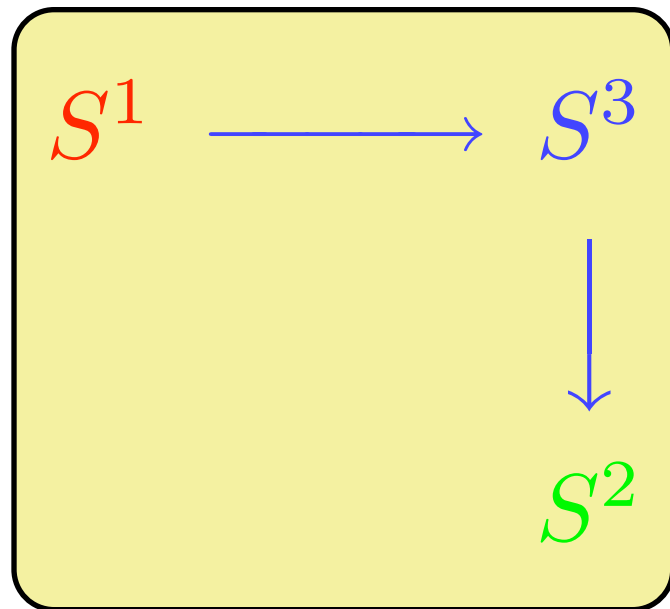
$$(ab)c = a(bc)$$

$\mathbb{O}$

$$(ab)c \neq a(bc)$$

Estas son todas las álgebras normadas (euclídeas)
con división. **[Hurwitz]**

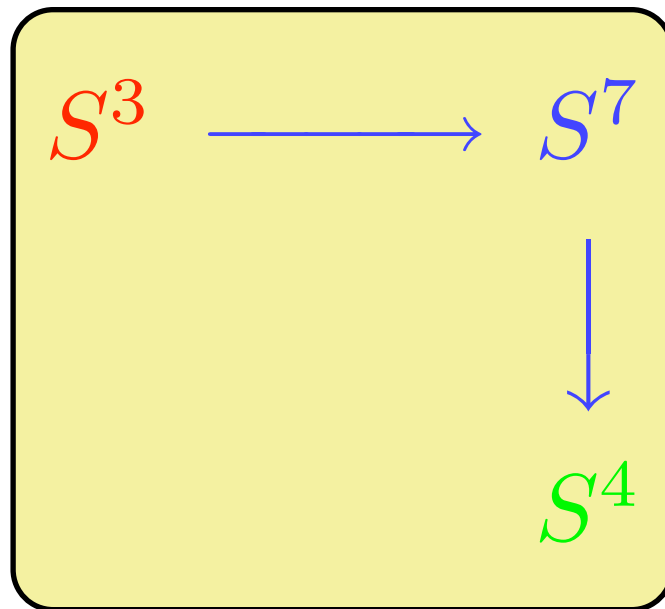
Los fibrados de Hopf



$$S^1 \subset \mathbb{C}$$

$$S^3 \subset \mathbb{C}^2$$

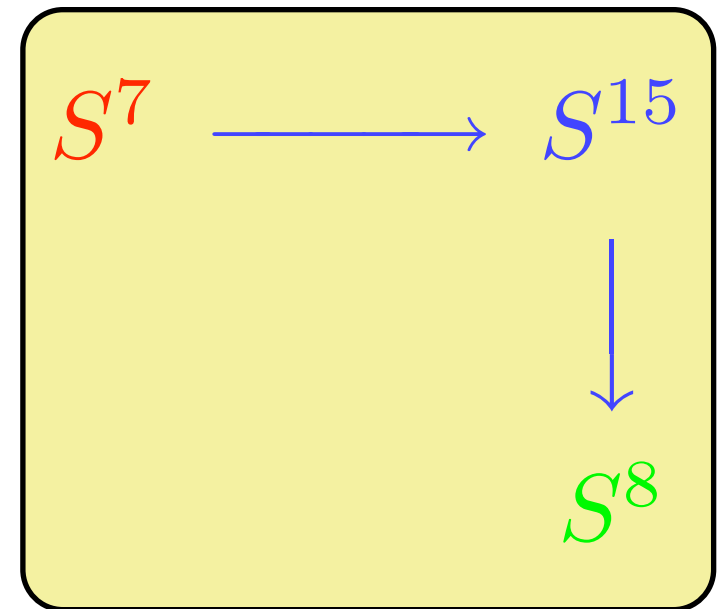
$$S^2 \cong \mathbb{CP}_1$$



$$S^3 \subset \mathbb{H}$$

$$S^7 \subset \mathbb{H}^2$$

$$S^4 \cong \mathbb{HP}_1$$



$$S^7 \subset \mathbb{O}$$

$$S^{15} \subset \mathbb{O}^2$$

$$S^8 \cong \mathbb{OP}_1$$

Son los únicos ejemplos de fibrados donde los tres espacios son esferas. **[Adams]**

Álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

antisimetría

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

Jacobi

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

Clasificadas en dimensión ≤ 7 , pero sin esperanza de clasificación general.

Sin embargo...

Las álgebras de Lie simples

(sobre $\mathbb{C}$)

4 series clásicas :

$A_{n \geq 1}$	$SU(n + 1)$
$B_{n \geq 2}$	$SO(2n + 1)$
$C_{n \geq 3}$	$Sp(n)$
$D_{n \geq 4}$	$SO(2n)$

[Lie]

5 excepcionales :

G_2	14
F_4	52
E_6	78
E_7	133
E_8	248

[Killing, Cartan]

¿Un ejemplo de hipérbole matemática?

bbc.co.uk Home TV Radio Talk Where I Live A-Z Index

UK version International version About the versions Low graphics

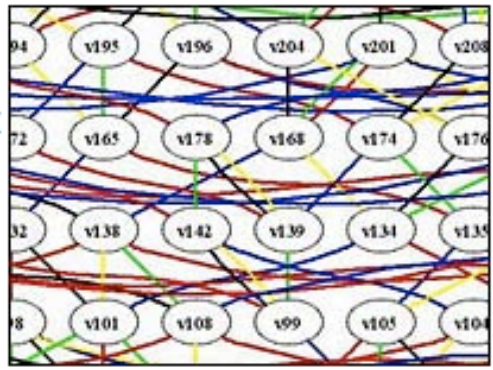
BBC NEWS **BBC News 24** News section Your news want it

Last Updated: Monday, 19 March 2007, 12:28 GMT

[E-mail this to a friend](#) [Printable version](#)

248-dimension maths puzzle solved

An international team of mathematicians has detailed a vast complex numerical "structure" which was described more than a century ago.



The structure is described in the form of a vast matrix

Mapping the 248-dimensional structure, called E8, took four years of work and produced more data than the Human Genome Project, researchers said.

E8 is a "Lie group", a means of describing symmetrical objects.

The team said their findings may assist fields of physics which use more than four dimensions, such as string theory.

SEE ALSO

- Maths solution class 21 Dec 06
- Maths prize Indian 19 Dec 06
- Maths general prize 22 Aug 06
- Film to celebrate genius 16 Mar 06

RELATED ITEMS

- MIT
- Albert Einstein

The BBC is the content internet site

TOP SCIENCE STORIES

- Japan threat

Navigation:

- News Front Page
- World
- UK
- England
- Northern Ireland
- Scotland
- Wales
- Business
- Politics
- Health
- Education
- Science/Nature**
- Technology
- Entertainment
- Also in the news
- Video and Audio
- Have Your Say
- Magazine
- In Pictures
- Country Profiles

<http://news.bbc.co.uk/1/hi/sci/tech/6466129.stm>

Existe una construcción geométrica, llamada la **(super)álgebra de Killing**, que tiene su origen en la **teoría de supergravedad**.

Aplicada al fibrado de Hopf excepcional produce un triple de álgebras de Lie excepcionales :



plane of numbers.

Rules of Multiplication in an Algebra of n units.

In general, if we consider an algebra of n units, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, such that $\epsilon_r^2 = -1$, $\epsilon_r \epsilon_s = -\epsilon_s \epsilon_r$, a product of m linear factors will contain terms which are all of even order if m is even, and all of odd order if m is odd; for the

plane of numbers.

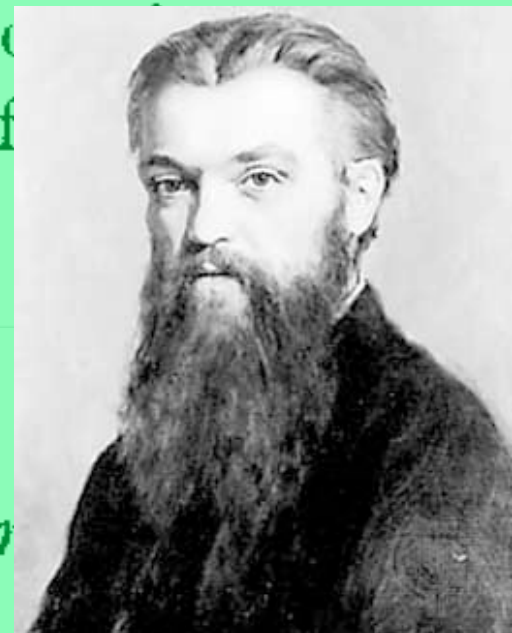
Rules of Multiplication in an Algebra of n units.

In general, if we consider an algebra of n units, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, such that $\epsilon_r^2 = -1$, $\epsilon_r \epsilon_s = -\epsilon_s \epsilon_r$, a product of m linear factors will contain terms which are all of even order if m is even, and all of odd order if m is odd; for the

plane of numbers.

Rules of Multiplication in an Algebra of n units.

In general, if we consider an algebra of n units, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, such that $\epsilon_r^2 = -1$, $\epsilon_r \epsilon_s = -\epsilon_s \epsilon_r$, a product of m linear factors will contain terms which are all of even order if m is even, and all of odd order if m is odd; for the

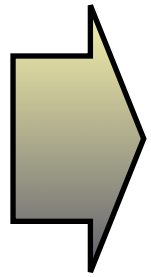


Clifford

Álgebras de Clifford

V^n $\langle -, - \rangle$ espacio euclídeo real

$$Cl(V) = \frac{\bigotimes V}{\langle v \otimes v + |v|^2 \mathbf{1} \rangle} \quad \text{álgebra asociativa filtrada}$$



$$Cl(V) \cong \Lambda V \quad (\text{como espacios vectoriales})$$

$$Cl(V) = Cl(V)_0 \oplus Cl(V)_1$$

$$Cl(V)_0 \cong \Lambda^{\text{par}} V \qquad Cl(V)_1 \cong \Lambda^{\text{impar}} V$$

marco ortonormal

$$e_1, \dots, e_n$$

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij} \mathbf{1}$$

$$Cl(\mathbb{R}^n) =: Cl_n$$

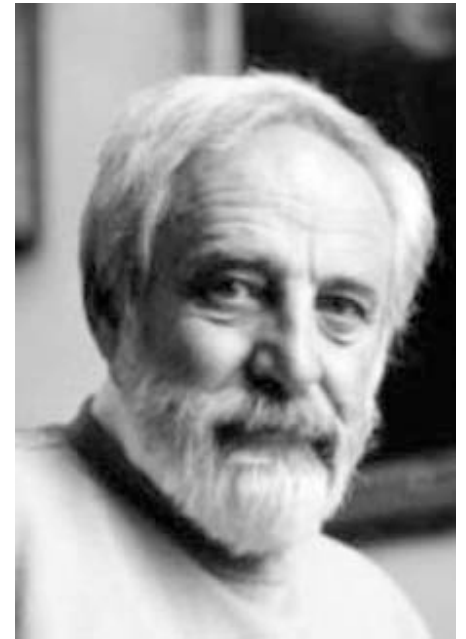
Ejemplos :

$$Cl_0 = \langle \mathbf{1} \rangle \cong \mathbb{R}$$

$$Cl_1 = \langle \mathbf{1}, e_1 \mid e_1^2 = -\mathbf{1} \rangle \cong \mathbb{C}$$

$$Cl_2 = \langle \mathbf{1}, e_1, e_2 \mid e_1^2 = e_2^2 = -\mathbf{1}, e_1 e_2 = -e_2 e_1 \rangle \cong \mathbb{H}$$

Clasificación



n	Cl_n
0	$\mathbb{R}$
1	$\mathbb{C}$
2	$\mathbb{H}$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H}(2)$
5	$\mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{R}(8)$
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$

periodicidad de *Bott* :

$$Cl_{n+8} \cong Cl_n \otimes \mathbb{R}(16)$$

por ejemplo,

$$Cl_9 \cong \mathbb{C}(16)$$

$$Cl_{16} \cong \mathbb{R}(256)$$

De aquí se desprenden el tipo y dimensión de las representaciones irreducibles.

Cl_n tiene una **única** representación irreducible si n es par y **dos** si n es impar.

Están distinguidas por la acción del elemento

$$e_1 e_2 \cdots e_n$$

que es **central** para n impar.

Notación : $\mathfrak{M}_n$ ó $\mathfrak{M}_n^\pm$ **módulos de Clifford**

$$\dim \mathfrak{M}_n = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Representaciones espinoriales

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{so}_n \rightarrow \mathcal{Cl}_n & & \\ e_i \wedge e_j \mapsto -\frac{1}{2}e_i e_j & \xrightarrow{\text{exp}} & \text{Spin}_n \subset \mathcal{Cl}_n \end{array}$$

$$s \in \text{Spin}_n, \quad v \in \mathbb{R}^n \quad \implies \quad s v s^{-1} \in \mathbb{R}^n$$

lo que define $\text{Spin}_n \rightarrow \text{SO}_n$

cuyo ejemplo arquetípico es

$$\text{Spin}_3 \cong \text{SU}_2 \subset \mathbb{H}$$

$$\downarrow \mathbf{2-1}$$

$$\text{SO}_3 \cong \text{SO}(\text{Im}\mathbb{H})$$

Por restricción, toda representación de Cl_n define una representación de $Spin_n$:

$$Cl_n \supset Spin_n$$

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{M} = \Delta = \Delta_+ \oplus \Delta_- & \Delta_{\pm} \quad \textbf{espinores quirales} \\ \mathfrak{M}^{\pm} = \Delta & \Delta \quad \textbf{espinores} \end{array}$$

El tipo de representación se desprende de

$$Spin_n \subset (Cl_n)_0 \cong Cl_{n-1}$$

$$\dim \Delta = 2^{(n-1)/2} \qquad \dim \Delta_{\pm} = 2^{(n-2)/2}$$

Producto escalar espinorial

$(-, -)$ forma bilineal en Δ

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \overline{(\varepsilon_2, \varepsilon_1)}$$

$$(\varepsilon_1, \mathbf{e}_i \cdot \varepsilon_2) = -(\mathbf{e}_i \cdot \varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \forall \varepsilon_i \in \Delta$$

$$\implies (\varepsilon_1, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \varepsilon_2) = -(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

que nos permite definir $[-, -] : \Lambda^2 \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\langle [\varepsilon_1, \varepsilon_2], \mathbf{e}_i \rangle = (\varepsilon_1, \mathbf{e}_i \cdot \varepsilon_2)$$

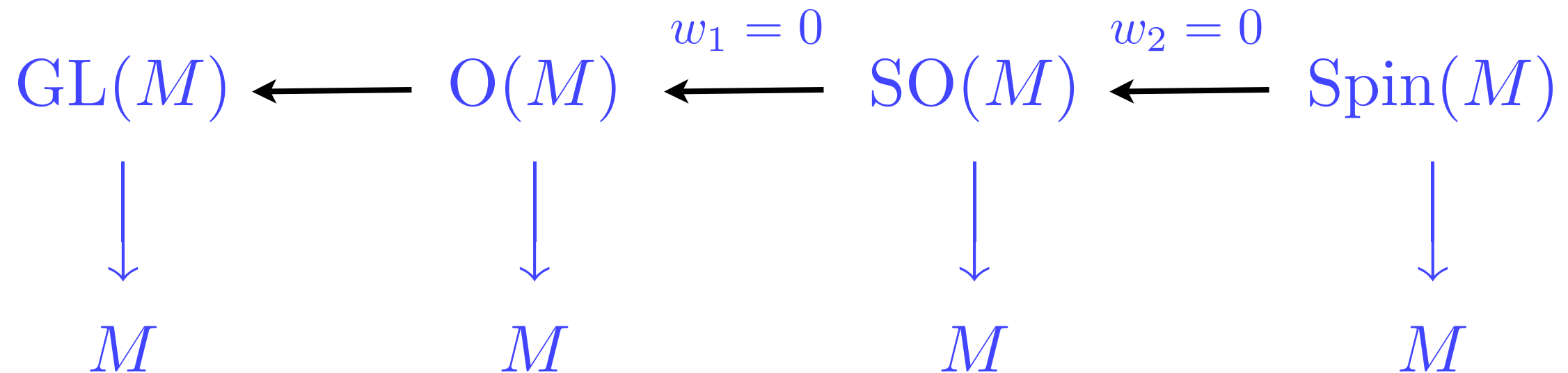
Geometría espinorial



Variedades espinoriales

M^n variedad diferenciable, orientable, espinorial

g métrica riemanniana



$$\text{GL}_n \quad \longleftarrow \quad \text{O}_n \quad \longleftarrow \quad \text{SO}_n \quad \ll \quad \text{Spin}_n$$

Posibles $\text{Spin}(M)$ están clasificadas por $H^1(M; \mathbb{Z}/2)$.

Por ejemplo, $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\text{O}(M) = \text{O}_{n+1}$$

$$\text{SO}(M) = \text{SO}_{n+1}$$

$$\text{Spin}(M) = \text{Spin}_{n+1}$$

$$S^n \cong \text{O}_{n+1}/\text{O}_n \cong \text{SO}_{n+1}/\text{SO}_n \cong \text{Spin}_{n+1}/\text{Spin}_n$$

Fibrados espinoriales

$Cl(TM)$

fibrado de Clifford



M

$$Cl(TM) \cong \Lambda TM$$

$$S(M) := \text{Spin}(M) \times_{\text{Spin}_n} \Delta$$

**fibrado de
espinores**

$$S(M)_{\pm} := \text{Spin}(M) \times_{\text{Spin}_n} \Delta_{\pm}$$

(quirales)

$Cl(TM)$ actúa sobre $S(M)$

La conexión de Levi-Civita nos permite derivar espinores :

$$\nabla : S(M) \rightarrow T^*M \otimes S(M)$$

que a su vez nos permite definir :

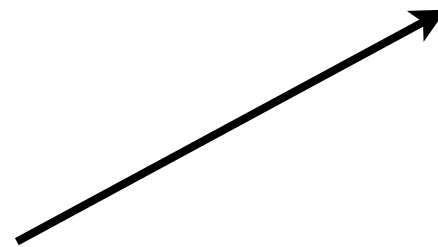
espinor paralelo

$$\nabla \varepsilon = 0$$

espinor de Killing

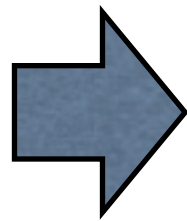
$$\nabla_X \varepsilon = \lambda X \cdot \varepsilon$$

constante de Killing



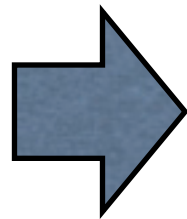
Si (M, g) admite espinores ...

paralelos



(M, g) es **Ricci-plana**

Killing



(M, g) es **Einstein**

$$R = 4\lambda^2 n(n - 1)$$

$$\implies \lambda \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$$

Hoy consideramos sólo λ **real**.

Los espinores de Killing tienen su origen en la teoría de supergravedad.

El nombre proviene de que son «**raíces cuadradas**» de vectores de Killing.

$$\left(V \in \Gamma(TM) \text{ es Killing si } \mathcal{L}_V g = 0 \right)$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ Killing} \quad \Rightarrow \quad [\varepsilon_1, \varepsilon_2] \text{ Killing}$$

¿Qué variedades admiten espinores de Killing?



Ch. Bär

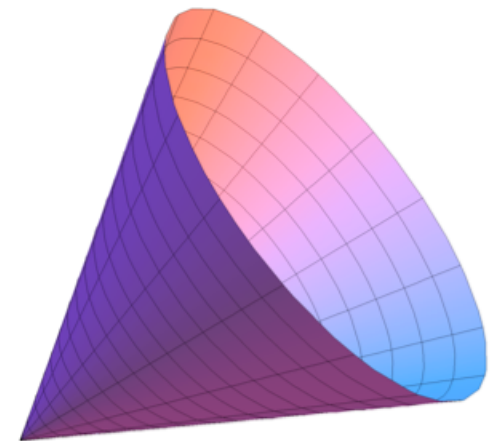
$$(M, g)$$

$$(\overline{M}, \overline{g})$$

cono métrico

$$\overline{M} = \mathbb{R}^+ \times M$$

$$\overline{g} = dr^2 + r^2 g$$



espinores de
Killing en (M, g)

$$(\lambda = \pm \frac{1}{2})$$



espinores paralelos
en el cono

En más detalle...

Si n es **impar**, los espinores de Killing están en correspondencia biyectiva con los espinores paralelos **quirales** del cono : la quiralidad es el **signo** de λ .

Si n es **par**, los espinores de Killing con **ambos** signos de λ están en correspondencia biyectiva con los espinores paralelos del cono, y el signo de λ entra en la relación entre los fibrados de Clifford.

Esto reduce el problema a uno (ya resuelto)
sobre el grupo de holonomía del cono.



M. Berger

n	Holonomía
n	SO_n
$2m$	U_m
$2m$	SU_m
$4m$	$Sp_m \cdot Sp_1$
$4m$	Sp_m
7	G_2
8	$Spin_7$



M. Wang

O bien el cono es plano y M es una esfera.

(Super)álgebra de Killing



Construcción del álgebra

(M, g) variedad riemanniana espinorial

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_1$$

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \text{vectores de Killing} \right\}$$

$$\mathfrak{k}_1 = \left\{ \text{espinores de Killing} \right\}$$

$\left(\text{con } \lambda = \frac{1}{2} \right)$

¿ $[-, -] : \Lambda^2 \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}$?

$[-, -] : \Lambda^2 \mathfrak{k}_0 \rightarrow \mathfrak{k}_0$ ✓ $[-, -]$ de campos vectoriales

$[-, -] : \Lambda^2 \mathfrak{k}_1 \rightarrow \mathfrak{k}_0$ ✓ $g([\varepsilon_1, \varepsilon_2], X) = (\varepsilon_1, X \cdot \varepsilon_2)$

$[-, -] : \mathfrak{k}_0 \otimes \mathfrak{k}_1 \rightarrow \mathfrak{k}_1$? ¿derivada de Lie espinorial!



Kosmann



Lichnerowicz

$$X \in \Gamma(TM) \quad \text{Killing} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_X g = 0$$

$$\begin{aligned} A_X &:= Y \mapsto -\nabla_Y X \\ &\in \mathfrak{so}(TM) \end{aligned}$$

$$\varrho : \mathfrak{so}(TM) \rightarrow \text{End} S(M) \quad \text{representación espinorial}$$

$$\mathcal{L}_X := \nabla_X + \varrho(A_X)$$

derivada de Lie espinorial

$$\text{cf.} \quad \mathcal{L}_X Y = \nabla_X Y + A_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \checkmark$$

Propiedades

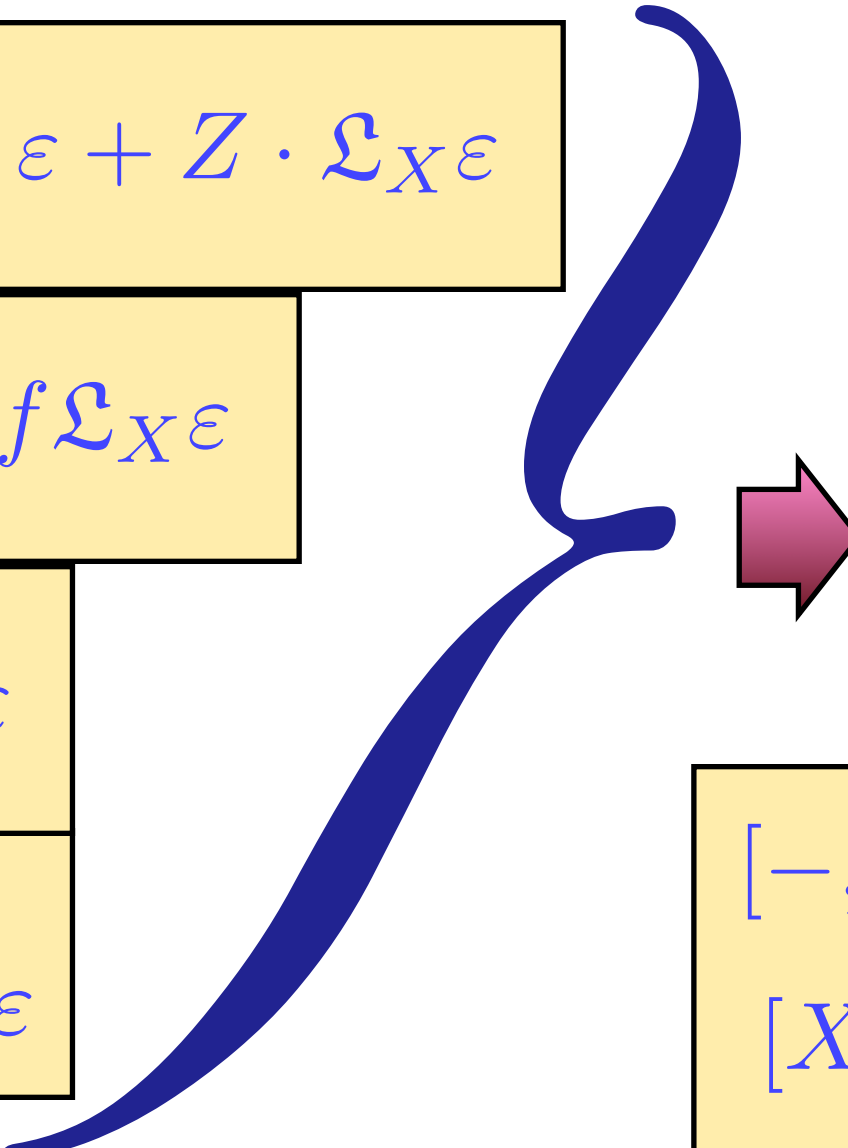
$$\forall X, Y \in \mathfrak{k}_0, \quad Z \in \Gamma(TM), \quad \varepsilon \in \Gamma(S(M))$$

$$\mathcal{L}_X(Z \cdot \varepsilon) = [X, Z] \cdot \varepsilon + Z \cdot \mathcal{L}_X \varepsilon$$

$$\mathcal{L}_X(f\varepsilon) = X(f)\varepsilon + f\mathcal{L}_X \varepsilon$$

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\varepsilon = \mathcal{L}_{[X, Y]}\varepsilon$$

$$[\mathcal{L}_X, \nabla_Z]\varepsilon = \nabla_{[X, Z]}\varepsilon$$


$$\forall \varepsilon \in \mathfrak{k}_1, X \in \mathfrak{k}_0$$
$$\mathcal{L}_X \varepsilon \in \mathfrak{k}_1$$

$$[-, -] : \mathfrak{k}_0 \otimes \mathfrak{k}_1 \rightarrow \mathfrak{k}_1$$

$$[X, \varepsilon] := \mathcal{L}_X \varepsilon \quad \checkmark$$

La identidad de Jacobi

Jacobi: $\Lambda^3 \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}$

$$(X, Y, Z) \mapsto [X, [Y, Z]] - [[X, Y], Z] - [Y, [X, Z]]$$

4 componentes :

$$\Lambda^3 \mathfrak{k}_0 \rightarrow \mathfrak{k}_0$$



Jacobi para campos vectoriales

$$\Lambda^2 \mathfrak{k}_0 \otimes \mathfrak{k}_1 \rightarrow \mathfrak{k}_1$$



$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\varepsilon = \mathcal{L}_{[X, Y]}\varepsilon$$

$$\mathfrak{k}_0 \otimes \Lambda^2 \mathfrak{k}_1 \rightarrow \mathfrak{k}_0$$



$$\mathcal{L}_X(Z \cdot \varepsilon) = [X, Z] \cdot \varepsilon + Z \cdot \mathcal{L}_X \varepsilon$$

$$\Lambda^3 \mathfrak{k}_1 \rightarrow \mathfrak{k}_1$$



$$\in (\mathfrak{k}_1 \otimes \Lambda^3 \mathfrak{k}_1^*)^{\mathfrak{k}_0}$$

Algunos ejemplos

$S^7 \subset \mathbb{R}^8$	$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}_8$	$\mathfrak{k}_1 = \Delta_+$	$28 + 8 = 36$	$\mathfrak{so}_9$
$S^8 \subset \mathbb{R}^9$	$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{k}_1 = \Delta$	$36 + 16 = 52$	$\mathfrak{f}_4$
$S^{15} \subset \mathbb{R}^{16}$	$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}_{16}$	$\mathfrak{k}_1 = \Delta_+$	$120 + 128 = 248$	$\mathfrak{e}_8$

En todos los casos, la identidad de Jacobi resulta de

$$(\mathfrak{k}_1 \otimes \Lambda^3 \mathfrak{k}_1^*)^{\mathfrak{k}_0} = 0$$

Un esbozo de demostración

Dos observaciones :

- 1) La biyección entre espinores de Killing y espinores paralelos en el cono es **equivariante** bajo la acción de isometrías.

➡ Se usa el cono para calcular $\mathcal{L}_X \varepsilon$

- 2) En el cono $\mathcal{L}_X \varepsilon = \varrho(A_X) \varepsilon$ y como X es **lineal**, el endomorfismo A_X es constante.

➡ Su acción es la natural sobre espinores.

Epílogo

- En **supergravedad** la geometría es **lorentziana** y hay más estructura. La noción de espinor de Killing es mucho más complicada.
- Se obtienen **superálgebras de Lie**, que juegan un papel importante en la correspondencia «**AdS/CFT**» entre gravedad y teorías «gauge».
- ¿Qué estructura en la 15-esfera tiene a **E8** como **automorfismos**?

A close-up photograph of a raspberry branch with several green, serrated leaves and two ripe, red raspberries. The background is a soft-focus green field. The text "¡Muchas gracias!" is overlaid in a blue, cursive font.

¡Muchas gracias!