ESPACIOS HOMOGÉNEOS EN SUPERGRAVEDAD

JOSÉ FIGUEROA-O'FARRILL

RESUMEN. Se define la noción de «fondo de supergravedad», tomando como ejemplo fundamental la supergravedad en once dimensiones, y en particular la noción de «fondo supersimétrico» y de espinores de Killing asociados. Se define el «superálgebra de Killing» de un fondo supersimétrico y se enuncia la conjetura (ahora teorema) de homogeneidad, por la cual un fondo supersimétrico de supergravedad cuyo superálgebra de Killing tenga suficiente dimensión es necesariamente (localmente) homogéneo.
(Versión escrita del seminario Rey Pastor del 9 de enero de 2013 en el departamento de Geometría de la Universidad de Murcia.)

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

En la concepción Newtoniana del universo, nuestras vidas (y las de los planetas, las manzanas,...) transcurren en un espacio y un tiempo absolutos e imperturbables. De una manera más precisa, el universo Newtoniano es un fibrado con base una línea afín que corresponde al tiempo y una fibra isomorfa a un espacio afín tridimensional que corresponde a eventos simultáneos. La electrodinámica de Maxwell es incompatible con este universo y da lugar a la propuesta radical que Minkowski describió en su famosa conferencia de 1908: el espacio-tiempo que ahora lleva su nombre y que con más precisión es un espacio afín cuatridimensional con una métrica lorentziana plana. Aún así, el espacio-tiempo de Minkowski sigue jugando un papel impasible ante las vicisitudes de sus habitantes y nos hizo falta la perspicacia de Einstein para llegar a la concepción moderna de un universo descrito geométricamente por una variedad lorentziana cuya geometría no está fija, sino que está parcialmente determinada por la materia y energía en el universo. Dicho de otro modo, la geometría reacciona ante la materia y la energía y a su vez influye en la dinámica de éstas.

Según Einstein, el universo (M^4, g) es una variedad lorentziana de dimensión 4 y su geometría se rige por la ecuación de Einstein :

$$\operatorname{Ric} - \tfrac{1}{2} g S = 8\pi G T \;, \tag{1}$$

donde Ric es el tensor de Ricci, S es el escalar de Ricci, G la constante de Newton y T el tensor de energía–impulso de la materia y energía del universo. A esta ecuación hay que añadir las ecuaciones pertinentes a la materia y la energía.

Desempaquemos un poco la ecuación de Einstein. Para todo $p \in M$, la restricción g_p de la métrica al espacio tangente T_pM define un producto escalar simétrico con signatura $(3,1)$. Es decir, existen referencias para T_pM con respecto a las cuales g_p tiene

matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} . \tag{2}$$
El teorema fundamental de la geometría riemanniana (es decir, la existencia y unicidad de la conexión de Levi-Civita) es válido también en la geometría lorentziana y es pues que existe una única conexión ∇ sin torsión y que preserva la métrica : $\nabla g = 0$. La conexión ∇ tiene curvatura
$$R(X,Y)Z := \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z , \tag{3}$$
para todos los campos vectoriales X, Y, Z. Su traza es el tensor de Ricci
$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \mathrm{Tr}\,(Z \mapsto R(X,Z)Y) \tag{4}$$
que es simétrico y cuya traza con respecto a g es el escalar de Ricci S. La combinación que aparece en la ecuación (1) es el tensor de Einstein
$$\mathrm{Ein} := \mathrm{Ric} - \tfrac{1}{2}gS \tag{5}$$
que tiene la virtud de tener divergencia cero, virtud que comparte con cualquier tensor de energía-impulso T razonable.

La ecuación de Einstein tiene casi un siglo de historia y aún no ha dejado de sorprendernos. Aun así, en las últimas cuatro décadas y por razones cada vez más difíciles de justificar empíricamente, se han venido estudiando extensiones a esa teoría. Muchas de estas extensiones deben su origen a intentos de unificar la gravedad con la teoría cuántica, tal como son las teorías de supergravedad, verdaderas joyas de la física matemática, desarrolladas en la segunda mitad de los años 70 y principios de los 80. Las cuatro dimensiones de Minkowski ya no son sagradas, pero aún así el número de dimensiones no sobrepasa a 11.

2. Supergravedad en once dimensiones

Un *fondo de supergravedad* en once dimensiones es un triple (M, g, F), donde (M, g) es una variedad lorentzian de dimensión 11 y $F \in \Omega^4(M)$ es una 4-form diferencial cerrada ($dF = 0$), sujeto a las ecuaciones no lineales en derivadas parciales
$$\mathrm{Ein} = \mathcal{T}(F, g) \qquad \text{y} \qquad d \star F = -\tfrac{1}{2} F \wedge F , \tag{6}$$
donde $\mathcal{T}$ es un tensor simétrico cuadrático en F y dependiendo también de g :
$$\mathcal{T}(X,Y) := \tfrac{1}{2}\langle \iota_X F, \iota_Y F\rangle - \tfrac{1}{4} g(X,Y)\langle F, F\rangle , \tag{7}$$
donde $\langle -, - \rangle$ es el producto escalar de formas diferenciales inducido por la métrica g.

A pesar de la dificultad inherente en encontrar soluciones a ecuaciones no lineales en derivadas parciales, existe ya un catálogo muy extenso de soluciones a las ecuaciones (6). Muchas de las soluciones que se conocen tienen un alto grado de simetría, ya que una estrategia típica para encontrar soluciones a ecuaciones del tipo (6) es exigir que (M, g, F) admita un grupo de automorfismos
$$\mathrm{Aut}(M, g, F) = \{\varphi : M \to M | \varphi^* g = g, \ \varphi^* F = F\} \tag{8}$$
de alta dimensión.

El caso más sencillo es cuando $G := \mathrm{Aut}(M, g, F)$ actúa transitivamente en M. En ese caso decimos que (M, g, F) es un *fondo homogéneo de supergravedad*. En ese caso se puede trabajar en un punto cualquiera $p \in M$ con estabilizador $H < G$. El subgrupo H actúa en T_pM bajo la representación lineal de isotropía. Tensores en $\bigotimes T_pM$ invariantes bajo H están en correspondencia biyectiva con campos tensoriales en M invariantes bajo G. Es pues que para los efectos de encontrar soluciones a (6), (M, g, F) se puede substituir por (T_pM, g_p, F_p) donde $g_p \in (S^2T_p^*M)^H$ y $F_p \in (\Lambda^4T_p^*M)^H$ y las ecuaciones (6) son algebraicas en (los parámetros que determinan) g_p y F_p, ya que actuando en tensores invariantes en un espacio homogéneo los operadores ∇ y d son algebraicos.

También se conocen fondos de supergravedad donde el grupo de automorfismos actúa con cohomogeneidad baja, es decir con órbitas de bajo codimensión. Las branas elementales, por ejemplo, son soluciones con cohomogeneidad 1.

Los fondos con mucha simetría pueden parecer muy especiales y de hecho lo son, pero hay circunstancias en las cuales la homogeneidad está garantizada (al menos localmente). Para describirlos es necesario introducir la noción de fondo supersimétrico de supergravedad.

3. Fondos supersimétricos de supergravedad

Para definir la noción de fondo supersimétrico, es necesario hablar de espinores. Empecemos con algo de álgebra. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y $\langle -,- \rangle$ un producto escalar simétrico de cualquier signatura. Asociado con $(V, \langle -,- \rangle)$ hay un álgebra $C\ell(V, \langle -,- \rangle)$, el álgebra de Clifford de $(V, \langle -,- \rangle)$, definida como el álgebra asociativa y con unidad $\mathbf{1}$ generada por V bajo las relaciones

$$x^2 = -\langle x, x \rangle \mathbf{1} \qquad \forall x \in V . \tag{9}$$

En el caso de interés, $(V, \langle -,- \rangle)$ es isomorfo al espacio semi-euclídeo $\mathbb{R}^{10,1}$ y el álgebra de Clifford es isomorfa a dos copias del álgebra de matrices reales 32×32 :

$$C\ell(10,1) \cong \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(32) \oplus \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(32) . \tag{10}$$

De este isomorfismo se desprende que $C\ell(10,1)$ tiene dos representaciones irreducibles no equivalentes $\mathfrak{M}_\pm$: reales y de dimensión 32. Estas representaciones admiten formas simplécticas $\Omega_\pm$ invariantes bajo la acción del álgebra de Clifford :

$$\Omega_\pm(x \cdot \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\Omega_\pm(\varepsilon_1, x \cdot \varepsilon_2) , \tag{11}$$

para todo $\varepsilon_{1,2} \in \mathfrak{M}_\pm$ y $x \in \mathbb{R}^{10,1}$.

El álgebra de Clifford contiene el grupo de espín :

$$\mathrm{Spin}(10,1) := \left\{ x_1 \cdots x_{2k} \middle| k \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{R}^{10,1},\ \langle x_i, x_i \rangle = \pm 1 \right\} . \tag{12}$$

Si $u \in \mathrm{Spin}(10,1)$ y $x \in \mathbb{R}^{10,1}$, entonces el producto $u \cdot x \cdot u^{-1}$ en el álgebra de Clifford pertenece a $\mathbb{R}^{10,1}$. Esto define un homomorfismo recubridor doble $\mathrm{Spin}(10,1) \to \mathrm{SO}(10,1)$. Bajo el grupo de espín, $\mathfrak{M}_+ \equiv \mathfrak{M}_-$ y $\mathrm{Spin}(10,1)$ actúa preservando la forma simpléctica. Fijemos uno de $\mathfrak{M}_\pm$, llamémosle $\mathfrak{M}$ y llamemos Ω a su forma simpléctica.

Sea (M, g) es una variedad lorentzian de dimensión 11. Entonces para todo $p \in M$, el espacio tangente T_pM es un espacio vectorial real de dimensión 11 y la restricción de la métrica g_p a T_pM define un producto escalar con signatura $(10,1)$. Es pues que $(T_pM, g_p) \cong \mathbb{R}^{10,1}$ y $C\ell(T_pM, g_p) \cong C\ell(10,1)$. Estas álgebras forman un fibrado $C\ell(TM)$ de álgebras de Clifford. Si M salva un par de obstáculos topológicos (las dos primeras clases de Stiefel–Whitney de TM) existe un fibrado vectorial $E \to M$ tal que $E_p \cong \mathfrak{M}$ bajo $C\ell(T_pM, g_p) \cong C\ell(10,1)$. De ahora en adelante asumiremos que existe tal fibrado, llamado aquí un *fibrado de espinores*. La acción del álgebra de Clifford en su representación define una aplicación de fibrados

$$Cl(TM) \times E \to E \tag{13}$$

que nos permite actuar en espinores (es decir, secciones de E) con campos vectoriales, formas diferenciales, et cetera.

La conexión de Levi-Civita da lugar a una conexión de Koszul ∇ en E que nos permite diferenciar espinores. Parte del paquete de supergravedad en once dimensiones es una conexión en E,

$$D_X := \nabla_X + \tfrac{1}{6}\iota_X F + \tfrac{1}{12}X^\flat \wedge F \tag{14}$$

para todo campo vectorial X y donde $X^\flat$ es la uno-forma dual a X. De hecho D tiene (casi) toda la información de la teoría, ya que las ecuaciones (6) son equivalentes a igualar a cero un componente de la curvatura de D.

Un espinor ε paralelo bajo D (es decir, satisfaciendo $D\varepsilon = 0$) se llama un *espinor de Killing*. Los espinores de Killing forman un espacio vectorial real $\mathfrak{k}_1$ de dimensión $\leqslant 32$. Esto se desprende del hecho de que la ecuación $D\varepsilon = 0$ es lineal y de primer orden en derivadas, con lo que un espinor de Killing ε está unívocamente determinado por su valor $\varepsilon(p) \in E_p$ en cualquier punto $p \in M$. Recordemos que la fibra E_p es un espacio vectorial real de dimensión 32.

Los espinores de Killing de un fondo de supergravedad (M, g, F) generan un superálgebra de Lie, llamada el *superálgebra de Killing* de (M, g, F). Está definida de la siguiente manera. La acción del fibrado de Clifford $C\ell(TM)$ en E, restringida a $TM \subset C\ell(TM)$ define una aplicación de fibrados

$$TM \times E \to E \tag{15}$$

cuyo transpuesto relativo a la métrica g en TM y a la estructura simpléctica en E, da lugar a una aplicación de fibrados

$$V : E \times E \to TM \,. \tag{16}$$

Más explícitamente, si $\varepsilon_{1,2}$ son espinores, $V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ es el único campo vectorial tal que para todo campo vectorial X,

$$g(V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}, X) = \Omega(X \cdot \varepsilon_1, \varepsilon_2) \,. \tag{17}$$

La invariancia (11) de la estructura simpléctica Ω implica que V es simétrico : $V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = V_{\varepsilon_2,\varepsilon_1}$ y es pues que está determinado por polarización por $V_\varepsilon := V_{\varepsilon,\varepsilon}$ para todo ε.

La aplicación V satisface las siguientes propiedades. Primero, para todo ε, V_ε es causal : $g(V_\varepsilon, V_\varepsilon) \leqslant 0$. Segundo, si $\varepsilon_{1,2}$ son espinores de Killing, $V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ es un automorfismo infinitesimal de (M, g, F) : $\mathcal{L}_{V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} g = 0$ y $\mathcal{L}_{V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} F = 0$. Es pues que el espacio

$$\mathfrak{k}_0 = \{V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} | \varepsilon_{1,2} \in \mathfrak{k}_1\} \tag{18}$$

es un subálgebra de Lie de campos vectoriales. Cualquier vector de Killing X actúa en espinores mediante la derivada de Lie de Lichnerowicz–Kosmann [1] :

$$\mathcal{L}_X \varepsilon = \nabla_X \varepsilon + \tfrac{1}{4}(\nabla X) \cdot \varepsilon \,, \tag{19}$$

pero si además $X \in \mathfrak{k}_0$, $\mathcal{L}_X$ preserva la conexión D :

$$\mathcal{L}_X D_Y = D_Y \mathcal{L}_X + D_{[X,Y]} \tag{20}$$

para todo campo vectorial Y. Eso implica que $\mathcal{L}_X$ preserva el espacio de espinores de Killing. En resumen, $\mathcal{L}_X$ define una aplicación $\mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_1 \to \mathfrak{k}_1$, que junto con el corchete de Lie de $\mathfrak{k}_0$ y la aplicación $\mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_1 \to \mathfrak{k}_0$ define una estructura de superálgebra de Lie en $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_1$.

En 2004, Patrick Meessen enunció la *conjetura de homogeneidad* que dice que todo fondo supersimétrico de supergravedad en once dimensiones tal que $\dim \mathfrak{k}_1 > 16$ es homogéneo. Se obtuvieron resultados parciales sobre esta conjetura [2] y sobre sus generalizaciones para otras teorías de supergravedad en diez dimensiones [3].

El año pasado, en colaboración con mi estudiante Noel Hustler, hemos demostrado el siguiente

Teorema ([4]). *Sea* (M, g, F) *un fondo supersimétrico de supergravedad once-dimensional con* $\dim \mathfrak{k}_1 > 16$. *Entonces para todo* $p \in M$, *la evaluación en* p, $\mathrm{ev}_p : \mathfrak{k}_0 \to T_p M$ *es sobreyectiva. En otras palabras,* (M, g, F) *es (localmente) homogéneo.*

En el mismo artículo se generaliza el resultado a teorías de supergravedad en diez dimensiones y existe otro artículo en preparación donde se demuestra un resultado análogo para otras teorías de supergravedad en dimensión menor de 10.

Estos resultados abren el camino para la eventual clasificación de fondos supersimétricos de supergravedad con $\dim \mathfrak{k}_1$ sobrepasando la mitad del rango del fibrado de espinores relevante.

Agradecimientos

Es un grato placer agradecer la hospitalidad del departamento de Geometría de la Universidad de Murcia y en particular a Ángel Ferrández Izquierdo por la invitación, así como la agradable compañía de las hermanas Elízabeth y Natalia Montoya Martínez durante parte de mi estancia en esa ciudad.

Referencias

[1] Y. Kosmann, “Dérivées de Lie des spineurs,” *Annali di Mat. Pura Appl. (IV)* **91** (1972) 317–395.

[2] J. M. Figueroa-O’Farrill, P. Meessen, and S. Philip, “Supersymmetry and homogeneity of M-theory backgrounds,” *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 207–226, `arXiv:hep-th/0409170`.

[3] J. M. Figueroa-O’Farrill, E. Hackett-Jones, and G. Moutsopoulos, “The Killing superalgebra of ten-dimensional supergravity backgrounds,” *Class. Quant. Grav.* **24** (2007) 3291–3308, `arXiv:hep-th/0703192`.

[4] J. Figueroa-O’Farrill and N. Hustler, “The homogeneity theorem for supergravity backgrounds,” *JHEP* **1210** (2012) 014, `arXiv:1208.0553 [hep-th]`.

Maxwell and Tait Institutes, School of Mathematics, University of Edinburgh