

Musterlösung

zur 1. Übung der Funktionentheorie, FU Berlin, SS06

M. Hering, E. Sommer

Aufgabe 4.

In dieser Aufgabe geht es darum, dass auf $\mathbb{R}^3$ (im Gegensatz zu $\mathbb{R}^2$) keine „sinnvolle“ Körperstruktur definierbar ist.

Sei $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ geg.

z.z.: Es existiert keine Multiplikation $*$, so dass $(\mathbb{R}^3, +, *)$ ein Körper ist und die mit der Vektorraumstruktur $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ verträglich ist, d.h.

$$x \cdot v = \sigma(x) * v \quad \text{f. alle } x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3$$

Beweis d. Widerspruch:

Angenommen, es existiert eine Multiplikation $*: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die den Erfordernissen genügt. Betrachte für ein festes $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v_2 \neq 0$ die Abbildung

$$\varphi_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi_v(w) = v * w$$

φ_v ist linear, da $*$ gemäß den Körperaxiomen kommutativ, assoziativ und distributiv ist.

Also existiert bezügl. gegebenen Basen eine darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

A hat vollen Rang, da φ_v injektiv und deshalb bijektiv ist:

Angenommen, es ex. $x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0$ mit $\varphi_v(x) = 0$, dann ist das ein Widerspruch zur Nullteilerfreiheit in Körpern.

$\Rightarrow \chi(A) = \det(A - \epsilon \cdot \text{id})$ ist vom Grad 3

$\Rightarrow$ es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, das Eigenwert ist von A , da stets mind. eine reelle Nullstelle existiert.

$\Rightarrow$ es existiert ein $w \in \mathbb{R}^3, w \neq 0$ mit

$$\varphi_v(w) = \lambda \cdot w$$

$$\Leftrightarrow v * w = \sigma(\lambda) * w$$

$$\Leftrightarrow v = \sigma(\lambda)$$

/ da n. Vor. Körper, also ex. w^{-1}

Es gilt aber $v_2 \neq 0$. $\nexists$ zur Strukturverträglichkeit von $*$

□