M. Hering, E. Sommer
Sommersemester 2006

Übungen zur Funktionentheorie
Blatt 1

1. a) Sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Machen Sie eine Skizze von allen komplexen Zahlen, die der Gleichung $|z-a| = r$ genügen.

   b) Machen Sie ein Skizze vom Bild des Gebietes $\{z = re^{i\phi} \mid 0 < \phi < \frac{\pi}{4},\ r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ unter der Abbildung $z \mapsto z^2$.

2. a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{C}$ gibt, d.h. Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.

   b) Sei $a \in C \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es genau n verschiedene n-te Wurzeln aus a in $\mathbb{C}$ gibt. Zeigen Sie weiter: ist $z \in \mathbb{C}$ eine n-te Wurzel, so werden die n-ten Wurzeln aus a durch $\omega_1 z, \ldots, \omega_n z$ gegeben. Machen Sie eine Skizze von den 6-ten Wurzeln von $1+i$.

3. Zeigen Sie, dass die Menge der reellen 2×2 - Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

   bezüglich der komponentenweisen Addition und der Matrixmultiplikation einen Körper bilden, der isomorph zu dem Körper der komplexen Zahlen ist.

4. Sei $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $x \mapsto (x, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass es keine Multiplikation $*$ auf $\mathbb{R}^3$ geben kann, die $(\mathbb{R}^3, +, *)$ zu einem Körper macht und mit der Vektorraum-Struktur $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ verträglich ist, d.h.: $x \cdot v = \sigma(x) * v$, für alle $x \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^3$. (Hinweis: Beachten Sie für jedes $v \in \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die durch Multiplikation mit v gegeben ist und benutzen Sie, dass ein reelles Polynom dritten Grades eine reelle Nullstelle besitzt.)

5. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$. Bestimmen Sie eine Formel (in a und b) für die beiden Punkte z_1 und z_2 in $\mathbb{C}$, die jeweils zusammen mit a und b ein gleichseitiges Dreieck bilden. (Hinweis: Nehmen Sie zunächst $a = -b = 1$ an.)

Abgabe: Freitag, den 28.4.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.