

Übungen zur Funktionentheorie  
Blatt 10

1. Berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx$$

für  $a > 0$ .

2. Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet  $D$ , die an einer Stelle  $z_0 \in D$  konvergiert und deren Ableitungsfolge  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kompakt konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge selbst kompakt konvergiert. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4 auf dem letzten Blatt.)

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

$A$  definiert eine Transformation der Riemannschen Zahlenkugel  $\bar{\mathbb{C}}$  auf sich selbst durch

$$A.z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

Eine solche Transformation heisst *Möbiustransformation*.

- a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$GL(2, \mathbb{C}) \times \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}: (A, z) \mapsto A.z$$

eine Gruppenwirkung von  $GL(2, \mathbb{C})$  auf  $\bar{\mathbb{C}}$  ist, d.h.  $(AB).z = A.(B.z)$ .

- b) Zeigen Sie, dass das Inverse einer meromorphen, bijektiven Abbildung der Zahlenkugel  $\bar{\mathbb{C}}$  auf sich selbst wieder meromorph ist.  
c) Zeigen Sie, dass jede meromorphe, bijektive Abbildung der Zahlenkugel  $\bar{\mathbb{C}}$  auf sich selbst eine Möbiustransformation ist.

4. Sei  $f$  eine elliptische Funktion.

- a) Zeigen Sie, dass für die Ableitung  $f'$  gilt

$$\deg(f) + 1 \leq \deg(f') \leq 2 \deg(f).$$

b) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine elliptische Funktion  $f$  an, so dass  $\deg(f') = \deg(f) + 1$  bzw.  $\deg(f') = 2 \deg(f)$ .

**Abgabe:** Freitag, den 30.6.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.