M. Hering, E. Sommer
Sommersemester 2006

Übungen zur Funktionentheorie

Letztes Blatt

1. Berechnen Sie
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx.$$

2. Seien a, b, c verschiedene Punkte auf $\bar{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass es genau eine Möbiustransformation A gibt mit der Eigenschaft
$$Ma = 0, \quad Mb = 1 \quad Mc = \infty.$$
Hinweis: Betrachten Sie das Doppelverhältnis
$$\mathrm{DV}(z, a, b, c) = \frac{z-a}{z-c} : \frac{b-a}{b-c}.$$

3. a) Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung für die $\mathfrak{p}$-Funktion in der folgenden Form schreiben lässt:
$$(\mathfrak{p}')^2 = 4(\mathfrak{p} - e_1)(\mathfrak{p} - e_2)(\mathfrak{p} - e_3),$$
wobei e_1, e_2, e_3 die Halbwerte der $\mathfrak{p}$-Funktion sind. (Siehe 11.7).

   b) Zeigen Sie:
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad \text{und} \quad e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -6G_4.$$

   c) Zeigen Sie, dass
$$\mathfrak{p}''\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$$
und leiten Sie die entsprechenden Formeln für $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ ab.

4. Beweisen Sie die analytische Form des Additionstheorems: Seien $z, w \in \mathbb{C}$, so dass $z + w, z - w, z, w$ nicht in L enthalten sind. Dann gilt
$$\mathfrak{p}(z + w) = \frac{1}{4}\left[\frac{\mathfrak{p}'(z) - \mathfrak{p}'(w)}{\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(w)}\right]^2 - \mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(w).$$
(Hinweis: Für festes w vergleichen Sie die Pole und die jeweiligen Hauptteile der Funktionen auf beiden Seiten.)

5. Zeigen Sie, dass die Eisensteinreihen G_{2k} für $k \geq 4$ folgende Rekursionsformel erfüllen:

$$(2k+1)(k-3)(2k-1)G_{2k} = 3\sum_{j=2}^{k-2}(2j-1)(2k-2j-1)G_{2j}G_{2k-2j}.$$

Also ist jede Eisensteinreihe als Polynom in G_4 und G_6 mit nichtnegativen Koeffizienten darstellbar.

Abgabe: Freitag, den 7.7.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.