M. Hering, E. Sommer
Sommersemester 2006

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 2

1. Die hyperbolischen Funktionen auf $\mathbb{C}$ werden definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh(z) := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

   a) Zeigen Sie: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$.
   b) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$: $\sinh(z) = -i\sin(iz), \cosh(z) = \cos(iz)$.
   c) Formulieren und beweisen Sie die Additionstheoreme für $\sin, \cos$ und $\sinh, \cosh$.
   d) Zeigen Sie, dass für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).$$

2. Zeigen Sie:

   a) (i) $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist surjektiv.
      (ii) Für $z, w \in C$ ist $e^z = e^w$ genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $z - w = 2\pi ik$ ist.
   b) Sei $D \subset \mathbb{C}^*$ offen und zusammenhängend. Eine holomorphe Funktion $\log : D \to \mathbb{C}$ heisst ein *Zweig des Logarithmus*, wenn für alle $z \in D$ gilt: $\exp \circ \log(z) = z$. Zeigen Sie:
      (i) Ist $\log : D \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus, so gilt für alle $z \in D$: $\log(z)' = \frac{1}{z}$.
      (ii) Sei $\mathrm{Log}(z)$ der Hauptzweig des Logarithmus und $\mathrm{Arg}(z)$ der Haupwert des Arguments. Dann gilt $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$.
      (iii) Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}_{<0}$

$$\lim_{\substack{z\to a \\ \mathrm{Im} z>0}} \mathrm{Log}(z) = \log|a| + \pi i,$$

$$\lim_{\substack{z\to a \\ \mathrm{Im} z<0}} \mathrm{Log}(z) = \log|a| - \pi i.$$

      Insebesondere ist der Hauptzweig des Logarithmus auf der negativen reellen Achse nicht stetig.

(iv) Zeigen Sie, dass $\log(z)$ genau dann ein Zweig des Logarithmus ist, falls ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $\log(z) = \mathrm{Log}(z) + 2\pi i k$. (Hinweis: Eine stetige Funktion $D \to \mathbb{Z}$ ist konstant für $D \in C$ offen.)

3. Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen der folgenden Funktionen auf $\mathbb{C}$ und bestimmen Sie, wo diese komplex differenzierbar sind.

$$f_1(z) = \bar{z}, \quad f_2(z) = |z|^2, \quad f_3(z) = \mathrm{Re}(z), \quad f_4(z) = 2z^2\bar{z} - z\bar{z}^2.$$

4. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f in $z = 0$ die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen, dass f in $z = 0$ aber nicht komplex differenzierbar ist.

5. Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass A winkel- und orientierungstreu ist genau dann wenn A eine Drehstreckung ist, also Multiplikation mit einer komplexen Zahl.

Abgabe: Freitag, den 5.5.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.