M. Hering, E. Sommer
Sommersemester 2006

Übungen zur Funktionentheorie
Blatt 3

1. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine Differentialform $pdx + qdy$ auf U heisst *lokal exakt*, falls für alle $p \in U$ eine Umgebung V von p existiert, so dass die Einschränkung von $pdx + qdy$ auf V exakt ist. Zeigen Sie, dass $pdx + qdy$ lokal exakt ist genau dann wenn
$$\int_{\partial R} pdx + qdy = 0$$
für alle achsenparallelen Rechtecke $R \subset U$.

2. a) Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x + iy \mapsto x$$
keine Stammfunktion besitzt.

   b) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto te^{2\pi it}$. Skizzieren Sie die Spur von γ und berechnen Sie
$$\int_\gamma ze^z dz.$$
(Hinweis: Suchen Sie eine Stammfunktion).

3. a) Sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Dreieck. Beweisen sie mit Hilfe der Methode von Goursat (durch halbieren der Dreiecksseiten): Ist f in einer Umgebung von Δ holomorph, so gilt
$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

   b) Ein Gebiet $S \subset \mathbb{C}$ heisst *sternförmig*, wenn ein $a \in S$ existiert, so dass für alle $z \in S$ die gerade Verbindungsstrecke von a nach z in S enthalten ist. Sei nun S sternförmig und $f : S \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossen Weg γ in S
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

4. a) Sei $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sei $\gamma_z \colon [0,1] \to D$ der geradlinige Weg von 1 nach z für jedes $z \in D$. Sei $f(z) : D \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta.$$

Zeigen Sie, dass $f(z)$ mit dem Hauptzweig des Logarithmus, $\mathrm{Log}(z)$, übereinstimmt. (Hinweis: Sei γ der Kreisweg von $|z|$ nach z in D und benutzen Sie Aufgabe 3 b) um zu zeigen dass $f(z) = \int_{\gamma_{|z|}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}$.)

b) Zeigen Sie, dass für $z_1 = z_2 = -1 + i$,

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2).$$

5. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n.$$

Welche Funktion stellt diese Potenzreihe in ihrem Konvergenzkreis dar?

Abgabe: Freitag, den 12.5.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.