M. Hering, E. Sommer
Sommersemester 2006

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 5

1. Sei $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ und $\sqrt{z} : D \to \mathbb{C}$ der Zweig der Quadratwurzel, der zum Hauptweig des Logarithmus gehört. Geben Sie Elemente $z, w \in D$ an, so dass $\sqrt{zw} \neq \sqrt{z}\sqrt{w}$.

2. Sei D ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $f(D) \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

3. Sei $(a, b) \in \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass es genau dann eine analytische Fortsetzung $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ für ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ mit $(a, b) \subset D$ und $\tilde{f}|_{(a,b)} = f$ gibt, falls f reell-analytisch ist.

4. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $O(D)$ der Ring der holomorphen Funktionen auf D. Zeigen Sie, dass $O(D)$ ein Integritätsbereich (also nullteilerfrei) ist.

5. Sei $a \in B_1(0)$ und
$$\phi_a(z) := \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$
   a) Zeigen Sie dass ϕ_a eine biholomorphe Abbildung des Einheitskreises auf sich definiert, so dass $\phi_a(a) = 0$, $\phi_a(0) = a$ und $\phi_a^{-1} = \phi_a$ gilt.
   b) Bestimmen Sie alle biholomorphen Abbildungen des Einheitskreises auf sich.

6. Zeigen Sie, dass das Bild einer nicht-konstanten, ganzen Funktion f stets dicht in $\mathbb{C}$ liegt. (Hinweis: Untersuchen Sie $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto f(\frac{1}{z})$.)

Abgabe: Freitag, den 26.5.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.