M. Hering, E. Sommer
Sommersemester 2006

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 6

1. Sei
$$f(z) = \frac{3}{(z-1)(z+2)}.$$
Dann ist $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -2\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Bestimmen Sie die Laurentzerlegung von f auf den Kreisringen $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$ und $2 < |z|$. (Hinweis: Benutzen Sie die Partialbruchzerlegung.)

2. Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist der Tangens $\tan : D \to C$ definiert durch $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

   a) Zeigen Sie, dass $\tan(z) = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$ gilt.
   b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = e^{2iz}$. Zeigen Sie, dass f $D_0 := \{z \mid -\frac{\pi}{2} < \Re z < \frac{pi}{2}\}$ biholomorph auf $D_1 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ abbildet.
   c) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C} : \zeta \mapsto \frac{1}{i} \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$ D_1 biholomorph auf $D_2 := \mathbb{C} \setminus \{z = ti \mid |t| \geq 1\}$ abbildet.
   d) Zeigen sie, dass $\tan|_{D_0} : D_0 \to D_2$ biholomorph ist und die Umkehrfunktion, der *Hauptzweig des Arcustangens* gegeben ist durch
   $$\operatorname{Arctan} : D_2 \to D_0 \colon w \mapsto \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right).$$
   e) Für $w \in D_2$ sei $[0, w]$ der geradlinige Weg von 0 nach w. Zeigen Sie, dass
   $$\operatorname{Arctan}(w) = \int_{[} 0, w] \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}.$$

3. Bestimmen Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und dort ihre Residuen:
$$f(z) = \frac{1}{z(z-\pi)^2}, \quad g(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

4. Welche der folgenden Gebiete sind einfach zusammenhängend?
$$\mathbb{C}^*, \quad \mathbb{C} \setminus [0, 1], \quad \mathbb{C} \setminus \{x \mid x \leq 0\}.$$

Abgabe: Freitag, den 2.6.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.