M. Hering, E. Sommer
Sommersemester 2006

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 8

1. Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

2. Sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 2$ mit n verschiedenen Nullstellen $z_1, ..., z_n$. Dann ist
$$\sum_i \frac{1}{p'(z_i)} = 0.$$

3. Zeigen Sie, dass jede ganze Funktion die an den ganzen Zahlen einfache Nullstellen hat und keine weiteren Nullstellen hat, eine Produktdarstellung
$$f(z) = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$
mit einer geeigneten ganzen Funktion $g(z)$ besitzt.

4. Sei
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
die *Riemannsche Zetafunktion*.

   a) Zeigen Sie, dass $\zeta(z)$ auf dem Gebiet $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 1\}$ eine holomorphe Funktion darstellt.

   b) Sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die aufsteigende Sequenz der Primzahlen. Zeigen Sie, dass für z mit $\mathrm{Re} z > 1$ das unendliche Produkt
   $$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z})$$
   konvergiert und
   $$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z})$$
   gilt.

Abgabe: Freitag, den 16.6.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.