M. Hering, E. Sommer
Sommersemester 2006

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 9

1. Zeigen Sie, dass
$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$
gilt und dass die Reihe auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ kompakt konvergiert.

2. Zeigen Sie, dass
$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}).$$
(Hinweis: Benützen Sie Aufgabe 3 von Blatt 8. Um g zu bestimmen, bilden Sie auf beiden Seiten die logarithmische Ableitung und benützen Sie Aufgabe 1.)

3. Berechnen Sie
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$$

4. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet D. Angenommen, es existiert ein Punkt $z_0 \in D$ so dass für alle $k \geq 0$ $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt konvergiert.

5. Zeigen Sie: Zwei Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ und $L' = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$ stimmen genau dann überein, wenn eine Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$
existiert (also A ist eine ganzzahlige 2×2-Matrix mit Determinante 1), so dass
$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$
gilt.

Abgabe: Freitag, den 23.6.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.