

# The many faces of Maslov index

Chrys,

Étienne - Définitions de l'indice de Maslov

o Novikov-Wall

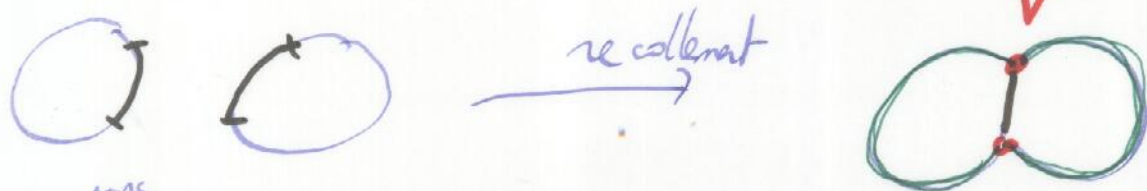
Dans  $M^{4n}$ , on a une forme d'intersection (quadratique) l'indice de Maslov.  
sur  $H^n(M; \mathbb{R}) \times H^n(M; \mathbb{R})$ . Novikov démontre que si on recolle deux variétés le long d'une  $c \partial$ ,  $\text{sign}(M_1 \cup M_2) = \text{sign} M_1 + \text{sign} M_2$ .

Ajouté: Andrew voudrait créer un catalogue raisonné (in French in the text!) en ligne des articles sur l'indice de Maslov.

Wall démontre que ce n'est plus vrai si on recolle le long d'une sous-variété à bord de leur bord; on a une formule du type  $\sigma(M_1 \cup M_2) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2) + \text{un indice de Wall}$ . C'est la première apparition de l'indice de Maslov en topologie.

Par ailleurs, si  $V^{4n-2} = \partial W^{4n-1}$ ,  $H^{n-1}V$  est un ev symplectique et  $\ker(H^{n-1}V \rightarrow H^{n-1}W)$  est un sous-espace lagrangien

Dans notre situation,  $V$  est le bord de la zone de recollement: c'est le bord de trois choses: la zone de recollement, et les deux  $\partial M_i$  zone de recollement.



On a <sup>donc</sup> 3 lagrangiens dans  $H^{n-1}(V)$ : Wall a défini un entier  $\text{maslov}(L_1, L_2, L_3) \in \mathbb{Z}$  et

$$\boxed{\text{sign} M = \text{sign} M_1 + \text{sign} M_2 + \text{maslov}(L_1, L_2, L_3)}$$

Définition de cet indice: si  $L_1, L_2, L_3 \in (R^2 \text{ symplectique})$ , on définit  $\mathcal{E} = \{(X_1, X_2, X_3) \in L_1 \times L_2 \times L_3 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 0\}$ .

Sur  $\mathcal{E}$ , on a une forme quadratique

$$Q(X_1, X_2, X_3) = \text{symplectique}(X_1, X_2) - \text{symplectique}(X_2, X_3) - \text{symplectique}(X_3, X_1)$$

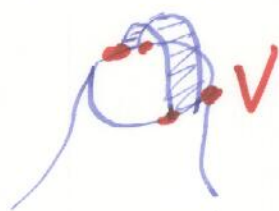
$\text{mod}_v(L_1, L_2, L_3)$  est la signature de  $Q$ .

Chrys

Application: Soit  $f: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse. Alors

$$\text{sign } M = \sum_{\substack{x \in \text{crit}(f) \\ \text{ind}(x) = 2n}} \epsilon(x), \quad \text{ou } \epsilon(x) \in \{-1, 0, 1\} \text{ va \u00eatre d\u00e9fini dans un moment.}$$

Premi\u00e8rement, on tranche en tranches qui ne contiennent qu'un point critique. On applique alors \u00e0 chaque tranche le th\u00e9or\u00e8me de Wall.



$$V = S^{2n-1} \times S^{2n-1} \quad \text{On } H_{n-1}(S^{2n-1} \times S^{2n-1})$$

$\text{mod}_v(-1, \dots)$

Signature des fibr\u00e9s en surfaces: en d\u00e9coupant la base, on se ram\u00e8ne \u00e0 des fibr\u00e9s sur des pentagons: un tel fibr\u00e9 est d\u00e9crit par des applications  $A, B \in M(S)$  (mapping class group de la sph\u00e8re): on peut calculer par le th\u00e9or\u00e8me de Wall la signature de ce fibr\u00e9. En fait, on peut voir que cette signature ne d\u00e9pend que de  $\bar{A}, \bar{B} \in \text{Sp}(H, S)$ : on a un cocycle sur le groupe symplectique

$\text{Sp}_{2n} \mathbb{R}$  est le groupe des isom\u00e9tries du domaine de Siegel;  $\mathcal{H}$  de m\u00eame que  $\text{PSL}_2 \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} a^2 + b^2 \\ c^2 + d^2 \end{matrix} \right\}$  est le groupe des isom\u00e9tries de  $\mathcal{H} = [\text{Im } z > 0]$ ,

on a une action de  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}_{2n} \mathbb{R}$  sur  $\left[ \begin{matrix} tz = z \\ \text{Im } z \text{ d\u00e9f. pos.} \end{matrix} \right] \subseteq M_n \mathbb{C}$

$$\text{pu } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot z = (Az + B)(Cz + D)^{-1}.$$

$\mathcal{H}$  est une vari\u00e9t\u00e9 riemannienne \u00e0 courbure  $\leq 0$ .

$H$  a une compactification en ajoutant une sphère. Comme  $H$  n'est pas simply connexe, cette sphère n'est pas homogène. Le bord contient la grassmannienne lagrangienne in  $\mathbb{R}^{2n}$ , qui est fixée par l'action de  $PSpin$  sur ce bord à l'infini.

M Trois points dans  $H$  ont une aire  $aire(a, b, c) = \int \omega = \int d\omega$ .

Cette aire s'étend à l'infini, et, restreint aux grassmanniennes lagrangiennes, donne l'indice de Maslov.

Par ailleurs  $|aire(a, b, c)|$  est bornée.

On a vu une classe  $maslov \in H^2(Sp(2n, \mathbb{R}))$ .

\*We don't see anything.  
- Too bad for you.\*  
- le public  $\Delta$  Emmanuel.

Periodicit  de Bott et réduction symplectique

Définition: une fibration de Serre est une application  $p: T \rightarrow B$  qui a la propriété de relèvement des homotopies pour les boules (ou les cubes).

En particulier, on a un morphisme connexant  $\pi_k B \rightarrow \pi_{k-1} F$  et la suite exacte longue  $\rightarrow \pi_k F \rightarrow \pi_k T \rightarrow \pi_k B \rightarrow \pi_{k-1} F \rightarrow \dots$

en particulier, si  $F$  est contractile,  $p: T \rightarrow B$  est une éq. h. (faible)  
si  $T$  est contractile, le morphisme connexant est un iso et  $F \simeq \Omega B$ .

On travaille ds  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ , avec std.

On note  $\Lambda_n$  la grassmannienne lagrangienne

$\Lambda_n^* \subseteq \Lambda_n$  l'es des agr.  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

$\Lambda_n'' \subseteq \Lambda_n' \Rightarrow \Delta \mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)^*$

$\text{Sym}(\mathbb{R}^n)$  s'identifie à  $\Lambda_n'$

$\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \mapsto \mathbb{R}^n + \mu = \text{gr}(\mu)$

et  $\Lambda_n''$  s'identifie aux formes symétriques non dégénérées.  $\text{Sym}^m(\mathbb{R}^n)$ .

$\text{Sym}^0(\mathbb{R}^n)$  a  $m+1$  c.c.  $(O_k)_{k \leq 0}^m$ , où  $O_k$  est l'ensemble des fg de sig.  $n-2k$ . Il a le type d'hom de  $O(n)/O(n-2k) \times O(k)$ .  
(on trouve q sur un espace propre négatif)

Soit  $\text{Sym}^0(\mathbb{R}^{n+2\infty}) = \varinjlim_{q \rightarrow \infty} \text{Sym}^0(\mathbb{R}^{n+2q})$

$q \mapsto q \oplus \mathbb{H}$

Corollaire:  $\text{Sym}^0(\mathbb{R}^{n+2\infty}) \simeq \mathbb{Z} \times O / O \times O$ .

(au niveau homotopique,

Théorème: il y a une fibration de Seifert de

- base  $\Lambda_n$
  - espace total  $(n-1)$ -ans
  - la fibre a type d'at  $\text{Sym}^0(\mathbb{R}^{n+2\infty}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{O} \times \mathbb{O}$
- le morphisme connectant associé

$\mathbb{Z} = \pi_1 \Lambda_n \rightarrow \pi_0 \text{Sym}^0(\mathbb{R}^{n+2\infty})$   
est la classe de Maslov des  $H^1(\Lambda_n; \mathbb{Z})$ .

C'est de la réduction sous-lagrangienne!

si  $F \subseteq F^\perp$  est un espace de dim  $k$  dans  $\mathbb{R}^{n+2k}$ , on a

$$\begin{array}{c} L \cap F^\perp \\ \setminus \setminus \setminus \setminus \end{array} \longrightarrow \frac{L \cap F^\perp}{F} \subseteq \frac{F^\perp}{F} \text{ lagrangien.}$$

c'est une application

Dans notre cas,  $F = \mathbb{R}^k$ ,  $F^\perp = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  et  $F^\perp/F = \mathbb{R}^n$ .

Soit  $\Lambda_{n,k} \subseteq \Lambda_{n+2k}$  l'ens. des lagr. transverses à  $(\mathbb{R}^k)^\perp$ .

Lemme: la réduction symplectique

$p_{n,k}: \Lambda_{n,k} \rightarrow \Lambda_n$  est une fibration à fibres contractiles

Que se passe-t-il en restriction à  $\Lambda_{n,k} \cap \Lambda'_{n+2k}$ ?

Le complémentaire  $\Lambda'_{n+2k} \setminus \Lambda_{n,k}$  est stratifié par des sous-variétés de

$$\Lambda'_{n,k} = \Lambda_{n,k} \cap \Lambda'_{n+2k} \subseteq \Lambda'_{n+2k}$$

est  $(n-1)$ -connexe

Preuve: regardez.

Lemme: La fibre de  $p_{n,k}$  (la restriction) est l'ens. de tout lagr. de  $\Lambda'_n$  a le type d'at de  $\Lambda'_k$ .

Théorème: La réduction symplectique p<sub>n,∞</sub>: Λ<sub>n,∞</sub> = lim<sub>j→∞</sub> Λ<sub>n,2j</sub> → Λ<sub>n</sub> est une fib. de base d'espace total (n-1)-cx et dont les fibres sont éq. té à Λ<sub>n,∞</sub> = lim<sub>j→∞</sub> Λ<sub>n,2j</sub> ~ Z × O(0,0).

Lemme de relèvement Γ ⊆ Sp(R<sup>2n</sup>) = {f ∈ Sp(R<sup>2n</sup>) | f<sup>-1</sup>R<sup>n</sup> = Λ(R<sup>n</sup>)<sup>\*</sup>} (voir de id)

On a une app. T<sub>n,k</sub>: Γ × Λ<sub>n,k</sub> → Λ<sub>n,k+2n</sub>  
 et p<sub>n,k+2n</sub> ∘ T<sub>n,k}(f, L) = f<sup>-1</sup>(p<sub>n,k}(L)) pour tout (f, L) ∈ Γ × Λ<sub>n,k</sub>.</sub></sub>

Stabilisation: on utilise plus T<sub>n,k}(id, -) pour relever.</sub>

Tout marche dans un anneau à involution (avec ±BN).

Les lagrangiens de He(A<sup>n</sup>) transverses à (A<sup>n</sup>)<sup>\*</sup> sont les graphes de formes (-ε) symétriques, ceux transverses à A<sup>n</sup> et (A<sup>n</sup>)<sup>\*</sup> correspondent aux formes non dégénérées.

Exemple: A ∈ {R, C, H}

(R, id)	→	<del>correspond</del> déterminé par ε: sym., symp, tout un	(3)
(H, -)	→	hermitien + antiher., rien	(3)
(C, id)	→	symétrique, antisymétrique, rien	(3)
(C, -)	→	hermitien = antihermitien, rien	(2)
			<hr/>
			10

Théorème (périodicité de Bott) { π<sub>k+2</sub>U = π<sub>k</sub>U, π<sub>k+8</sub>Sp = π<sub>k</sub>Sp  
 π<sub>k+8</sub>O = π<sub>k</sub>O.

Une p<sub>n</sub> est de nature ~~de~~ éq. té: r<sub>i</sub>, on a non 0 éq. té avec les bases non stabilisées.

Question: qu'est-ce que cela donne pour A quelconque?

Andrew fait projeter à Emmanuel son "lifting lemma"...

Jean explique ce qu'il a compris de l'argument d'Emmanuel. On a

$$\Gamma \subseteq \text{Sp}(2n; \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2n) \mid a \in \text{GL}_n \right\}$$

$$\Gamma \simeq \text{Sp}_n \times \text{Sp}_n \times \text{GL}_n : \text{tout tel élément s'écrit}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^{-1})^T \end{pmatrix}$$

symétrique

Si on prend un chemin  $\Lambda(t)$  de lagrangiens, on peut l'écrire

$$\Lambda(t) = \alpha(t) \cdot \mathbb{R}^n, \quad \text{avec } \begin{cases} \alpha: [0,1] \rightarrow \text{Sp}(n; \mathbb{R}) \\ \alpha(0) = \text{id} \end{cases}$$

( $\alpha$  n'est pas bien défini mais l'ambiguïté est facile à comprendre. Pour  $t$  petit,  $\alpha(t) \in \Gamma$  donc

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_1(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q_2^*(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2m-1}(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q_m(t) \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & a(t)^{-1} \end{pmatrix}$$

En général, pour  $\mathbb{R}$  arbitraire, on prend  ~~$\mathbb{R}^n$~~  ~~(ou  $\mathbb{F}^n$ )~~

un module sympl.  $P$ , un lagr.  $\mathbb{K}$   $L$  (somme directe  $L \oplus L^\perp = L$ )

(Cela implique qu'il y a un bon. entre  $H(L)$  et  $P$ )

Alors, on a  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ & 1 \end{pmatrix} \dots$

On stabilise: on se met dans  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2m} & 1 \end{pmatrix} \dots = L$ , dans

$L \oplus L^* \oplus L \oplus \dots \oplus L \oplus L^*$  et on définit la forme de Sylvester

par blocs





on cherche au-dessus et en-dessous de la diagonale des applications naturelles  $\Lambda_2^* \rightarrow \Lambda_1$ . C'est simplement l'adjoint de l'accouplement parfait  $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2^* \xrightarrow{\omega} R$ .

Maintenant, si  $\Lambda_0 \pitchfork \Lambda_1 \pitchfork \dots \pitchfork \Lambda_n$ , on a

- 1)  $\ker S(\underline{\Lambda}) \simeq \Lambda_0 \cap \Lambda_n$
- 2)  $\text{coker } S(\underline{\Lambda}) \simeq P / \Lambda_0 + \Lambda_n$
- 3)  $S(\underline{\Lambda}) \text{ n.d.} \iff \Lambda_0 \pitchfork \Lambda_n$

On a une propriété d'additivité : si  $\Lambda_0 \pitchfork \Lambda_m$ ,

$\underline{S}(\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$  n'est pas dégénérée et

$$\underline{S}(\Lambda_0, \dots, \Lambda_n) \simeq \underline{S}(\Lambda_0, \dots, \Lambda_m) \oplus \underline{S}(\Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_n).$$

Deux lagrangiens  $L, M \subseteq P$  sont homotopes s'il existe une suite  $\Lambda_0 \pitchfork \Lambda_1 \pitchfork \dots \pitchfork \Lambda_m = L$ .

À une telle homotopie, on associe une forme quadratique  $S(h)$ , S-ou en a une autre

Proposition (Ranicki):  $S(h) \oplus F \simeq S(h') \oplus F$  où  $F, F'$  n.d.

Définition:  $\mathcal{S}(L, M) \in \frac{Sym}{Sym_0} = \Delta(R)$ , « défaut de transversalité ».

Si  $R$  est un corps,  $\Delta(R) = \mathbb{N}$   
et  $\mathcal{S}(L, M) = \dim(L, M)$ .

(et deux lagrangiens sont toujours  $\pi$  : - l'g. symm agit trivialement et les  $\pi$  dérivés engendrent le groupe)

Le fait que deux lagrangiens soient homotopes ~~reste~~ reste vrai pour  $\mathbb{Z}$ .

Ainsi  $\Delta(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{N} \times \text{Fil}(\mathbb{Z})$ .

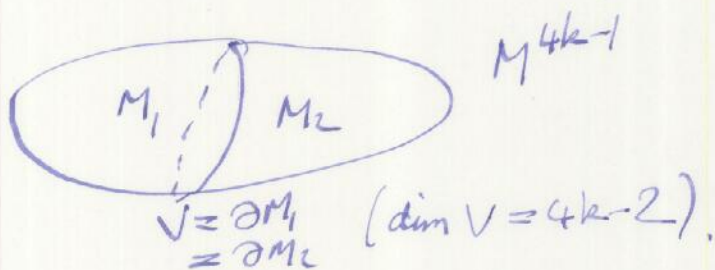
une f. ent. sur  $\mathbb{Z}$  est. un g. fini abélien

• une forme  $C \times C \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  non dégénérée  
(elle induit une bijection  $C \rightarrow C^\vee = \text{Hom}(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ).

La partie N vient de l'intersection  $L \cap M$ . c'est un facteur direct et a un rang.

Si  $L \cap M = 0$ , on a une forme d'enlacement sur  $P/L+M$ .  
c'est la partie  $\in \text{Eul}(\mathbb{Z})$ .

E.g.  $P = H(\mathbb{Z})$ ,  $\mathbb{Z}(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix})$  et  $\mathbb{Z}(\begin{smallmatrix} 1 \\ a \end{smallmatrix})$  ( $a \neq 0$ ) sont deux  
ligr. mais  $P/L+M \cong \mathbb{Z}/a$ .



On regarde  $TH_{2k-1}(M)$ : il porte la forme ~~de l'enlacement~~ d'enlacement.

Dans  $TH_{2k-1}V$ , il y a 2 ligr.  $(ker \rightarrow M_1), (ker \rightarrow M_2)$ : il joue  
le rôle de l'indice de Wall.

$L_1 \xrightarrow{h} L_2 \xrightarrow{h'} L_3$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{h \cdot h'}$

$S(h) \oplus S(h') \oplus S(-hh')$  est  
 - bien défini (ne dépend pas des choix de  $h, h'$ ),  
 - à ~~équiv~~ mod. formes hyperboliques  
 définie par une forme sur  $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ . (on peut même

donner une formule explicite qui ne demande même pas que les  
lagrangiens soient homotopes): c'est l'indice ternaire.

Soit  $L \cong \mathbb{R}^n$  et  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre.

Lammez 4

On définit  $Sp_L(A) = Sp(A \otimes_{\mathbb{R}} H(L))$

$GL_L$  agit sur  $S_L * S_L^*$  (produit libre). On a une ~~aff~~

On a un morphisme

$$(S_L * S_L^*) \rtimes GL_L \longrightarrow ESp_L$$

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} a & \\ & (a^{-1})^*$$

$$0 \rightarrow \ker \rho \rightarrow (S_L * S_L^*) \rtimes GL_L \rightarrow ESp_L \xrightarrow{GL_L} 0$$

$\cong$   
 $\tilde{\Gamma}_L$

Soit  $\tilde{\Gamma}_L = \frac{\tilde{\Gamma}_L}{[\tilde{\Gamma}_L, \ker \rho]}$ . C'est une extension centrale

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\Gamma}_L \rightarrow ESp_L \cdot GL_L \rightarrow 0$$

$\swarrow$   $\uparrow$   
 $GL_L$

( $R=L=\mathbb{Z}$ : on obtient  $SL_2 \mathbb{Z}$ ).

Théorème: c'est l'ext. centrale universelle relative à l'existence d'une section  $GL_L \rightarrow \tilde{\Gamma}_L$ .

Le noyau  $V(R)$  est identifié à un ~~groupe~~ groupe défini par Keroubi.

1. Indice de Maslov en topologie lagrangienne

Soit  $\Lambda$  la grassmannienne lagrangienne.  $H^1(\Lambda; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , engendré par la classe de Maslov

$$\mu \left( \begin{array}{c} \uparrow q_1 \\ \circlearrowleft \\ \rightarrow p_1 \end{array} \right) = 1$$

La classe de Maslov est l'un des deux invariants basiques des s.v. lagrangiennes: si  $L \subseteq (M, \omega)$  est fermée, on a une classe de

Liouville  $\lambda_L: \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $[D] \mapsto \int_D \omega$

et une classe de Maslov  $\mu_L: \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $[D] \mapsto \text{Maslov} (T_x L \text{ pour } x \in D, \text{ par rapport à la trivialisation de } TM \text{ donnée par } D).$

Quelques questions basiques de topologie lagrangienne

Soit  $L \subseteq (M, \omega)$ . — trouver des restrictions sur  $\lambda_L, \mu_L$  en fonction de la topologie de  $(M, L)$

— Fixons  $\lambda_L, \mu_L$ . Décrire la topologie de l'espace des lagr. avec ces invariants. (nœuds lagrangiens).

Notation pratique: soit  $m_L$  le générateur  $\geq 0$  de  $\text{im}(\mu_L) \subseteq \mathbb{Z}$ .

Exemples de résultats.

$S^2$  n'a pas de plongement lagrangien dans  $\mathbb{R}^4$ . Dans  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ , la condition  $T_x L$  lagr. est équivalente à  $i \cdot T_x L \perp T_x L$ .

La multiplication par  $i$  fournit alors un isomorphisme  $TS^2 \cong \nu S^2$

Or, l'auto-intersection de  $S^2$  dans  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 / \{0\}$  = l'auto-intersection de  $S^2$  dans  $\mathbb{R}^4 / \{0\}$   
= 0

donc que l'auto-intersection de  $S^2$  dans  $TS^2 = \chi(S^2) = 2$

Quid de  $S^3$ ?

Théorème (Gromov): Pour une lagrangienne fermée dans  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $\lambda_L \neq 0$ .

Cela implique  $\pi_2(\mathbb{R}^{2n}, L) \neq 0$  donc  $H_1 L \neq 0$ . En particulier, pas de sphère lagrangienne!

Théorème des courbes pseudoholomorphes de Gromov: Soit  $(M, \omega)$

une variété symplectique et  $J: TM \rightarrow TM$  une structure presque complexe.

Alors, si  $u: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (M, L)$  n'est pas constante, on voit que

$$\int_{D^2} u^* \omega > 0.$$

Gromov a alors démontré qu'il existait un tel disque, ce qui démontre  $\lambda_L \neq 0$ .

Restrictions sur  $m_L$ ? jeu entre la rigidité et la flexibilité

Exercés de rigidité: Soit  $L = T^2 \subseteq \mathbb{R}^4$ .

Théorème (Viterbo '90, Polterovich '91):  $m_L = 2$ .

Théorème de l'indice:  $\dim \mathcal{M} = \mu_L([u]) + \frac{1}{2} \dim M$ .

Exercés de flexibilité: Pour  $L = S^2 \times T^2 \subseteq \mathbb{R}^8$ ,  $m_L$  peut être un entier ( $> 0$ ) pair quelconque.

↳ correspond au fait que  $L$  est orientable et que la classe de Maslov sur  $\tilde{\pi}$  prend des valeurs paires.

(Ekholm - Eliashberg - Murphy - Smith, 2013)

## 2. Groupe de symplectomorphismes

Polkovich

$Sp_{2n} \mathbb{R}$  agit sur  $\Lambda$ . Si  $a, b \in \Lambda$ , on peut regarder

$$\begin{aligned} a &: Sp_{2n} \mathbb{R} \rightarrow \Lambda \\ f &\mapsto f(b) \end{aligned}$$

Pour  $\gamma \in \pi_1 Sp_{2n} \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ , on définit  $v(\gamma) = \mu(f_* \gamma) \in \mathbb{Z}$

$v: \pi_1 Sp_{2n} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  est un morphisme

$$v \left( \begin{array}{c} \uparrow q_1 \\ \circlearrowright \\ \rightarrow p_1 \end{array} \right) = 2.$$

Deux descriptions alternatives :

(a) via les quasimorphismes

Théorème (Barge-Ghys, 1992):  $QM(\widehat{Sp_{2n} \mathbb{R}})$  est une droite. Sa restriction d'un tel qm à  $\pi_1(Sp_{2n} \mathbb{R})$  est, à une constante multiplicative près, l'indice de Maslov.

(b) (Entov-Polterovich, 2009)

Soit  $\mathfrak{g}$  une  $\mathfrak{al}$ -nœud. On appelle quasi-état de Lie une fonction  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire sur les  $\mathfrak{al}$ .

Théorème (Gleason, 1957): Sur  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), n \geq 3$ , tout quasi-état de Lie localement borné (borné au  $v$ -id) est linéaire

Théorème (Entov-Polterovich): Pour  $Sp_{2n} \mathbb{R}, n \geq 3$ ,  
 $\dim: \frac{\text{quasi-états de Lie continus}}{\text{états } (= \mathfrak{g}^*)} = 1.$

Le générateur est  $f(A) = \int (\exp A)$   
qm de Maslov

Pour  $n=1$ , le résultat est faux  
 $n=2$ , le résultat est ouvert.

Poltciovich

Philosophons un peu:  $\text{Ham}(M, \omega)$  a des propriétés importantes des gl.  
Il y a des quasimorphismes sur  $\widehat{\text{Ham}}(M, \omega)$  (pensez  $\pi_1 M = 0$ ,  
alors  $\text{Ham} = \text{Symp}$ ), qui est une généralisation non linéaire  
de  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ : [Givental, Gambaudo - Ahys. Entor - Poltciovich, Ostrover,  
McDuff, Usher, Fukaya - oh - oh - oh...].

Un quasi-état symplectique est un quasi-état  $\zeta: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$   
tq  $\zeta(1) = 1$  et  $F \geq G \Rightarrow \zeta(F) \geq \zeta(G)$ .

En dim  $2n \geq 4$ , les quasi-états viennent de quasimorphismes, ce qui  
implique leur invariance:

$$\forall F \in C^\infty(M), \forall \varphi \in \text{Ham}(M), \zeta(\varphi^* F) = \zeta(F).$$

Cela donne des invariants symplectiques:  $\tau(X) = \zeta(1_X)$ .

(ok,  $1_X \notin C^\infty(M)$ , mais bon...)

Retournons à la topologie lagrangienne:  $L \subseteq (M, \omega)$  est monotone si  
 $\exists \alpha > 0$  tq  $\mu_L = \alpha \cdot \mu_L$ . (Entor - Poltciovich)

Soit  $L = \text{équateur} \times \text{équateur} \subseteq S^1 \times S^2$ . C'est une torse monotone

Considérons le flot géodésique (par la métrique ronde) sur  $U^* S^2$

Pour  $s \in \text{Int}(L)$ , soit  $\Gamma_s = \{(p, q) \mid q=N, |p|=s\} \dots ?$

$\rightarrow$  torse exotique  $K \subseteq S^1 \times S^2$  machine

Théorème: il existe un quasi-état symplectique sur  $S^1 \times S^2$  tel que  
 $\tau(L) = 1$  et  $\tau(K) = 0$ .

Cette  $\tau$  est  $\text{Ham}$ -invariant,  $K$  et  $L$  ne sont pas hamiltonniennement  
isotopes: il ya des nœuds lagrangiens dans  $S^1 \times S^2$ .

On regarde des s.v.  $L \subseteq (M, \omega)$ . On a alors un indice de Maslov  
 $\mu: \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}$  est 2 fois  $c_2(TM)$  évalué sur la  
 $(D^1, D^0) \xrightarrow{\mathbb{Z}(ML)} \text{Maslov}(u_{100}^* TL$  classe de disque  
 dans un trivialisé symplectique ou complexe  
 de  $u^* TL \rightarrow D^2$ )

On va se restreindre au cas monotone, i.e. celui où  
 $\mu$  et  $\omega \cdot \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}$  sont proportionnels, positivement.

Cela implique que  $[\omega]$  et  $c_1(TM) \in H^2_{\mathbb{R}} M$  doivent être pos.-proportionnels  
 sur  $\pi_2 M$  (on dit que  $M$  est monotone).

Exemples de variétés monotones:  $\mathbb{C}^n, P^n(\mathbb{C})$ , variétés de Fano (var. alg  
 pour lesquelles il existe une ~~de~~ forme de Kähler dans la classe  
 $c_1(TM)$ ), dont les hypersurfaces de  $P^n(\mathbb{C})$  de degré  $\leq n$ )

Pourquoi s'intéresser au cas monotone?

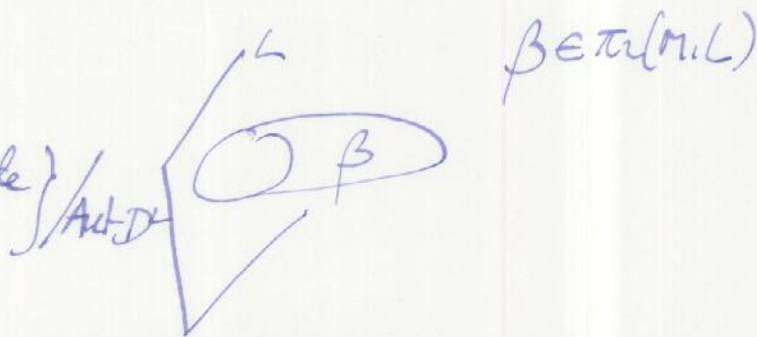
→ il y a de la rigidité: ~~les~~ isotopies lagrangiennes  
 des lagrangiennes monotones (tg  $\partial: \pi_2(M, L) \rightarrow H_1 L$  &  $\pi_2 M \neq 0$ )  
 sont hamiltoniennes

→ l'homologie de Floer se comporte bien (voilà très bien  
 si le maslov minimal est  $\geq 3$ ): ~~dans le cas monotone~~, le  
 bubbling coûte de l'énergie (= de l'aire), donc, dans le cas monotone,  
 de l'indice de Maslov, i.e. de la dimension.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(L, \beta, J)$

$\{u: (D^1, \partial D^1) \rightarrow (M, L) \text{ J-hol, de classe } u$

$= n - 3 + \mu(\beta)$





# Exemples de tores monotones lagrangiens

Auroux 2

Exemple:  $\mathbb{C}$



$\mu=2$ : 2 et l'axe sont proportionnels.

$S^2 \simeq P^1$ : un cercle borde maintenant deux disques à  $\mu=2$ .  
la monotonie entraîne qu'ils doivent avoir les mêmes aires.  
Ce sont exactement les courbes ham.<sup>t</sup> isotopes à l'équateur

$S^1(r_1) \times S^1(r_2) \times \dots \times S^1(r_n) \subseteq \mathbb{C}^n$  est monotone si  $r_1 = r_2 = \dots = r_n$   
(parce qu'il y a des disques méridiens d'indice de Maslov = 2).

Dans  $P^n$ , on a le tore de Clifford  $T_{\text{Cliff}} = \{(z_0, \dots, z_n) \mid |z_0| = \dots = |z_n|\}$   
(qui n'est pas déplaçable:  $\forall \varphi \in \text{Ham}, \varphi(T_{\text{Cliff}}) \cap T_{\text{Cliff}} \neq \emptyset$ )

Pour l'action naturelle de  $T^n$ , c'est la seule orbite qui soit monotone (et la seule non déplaçable).

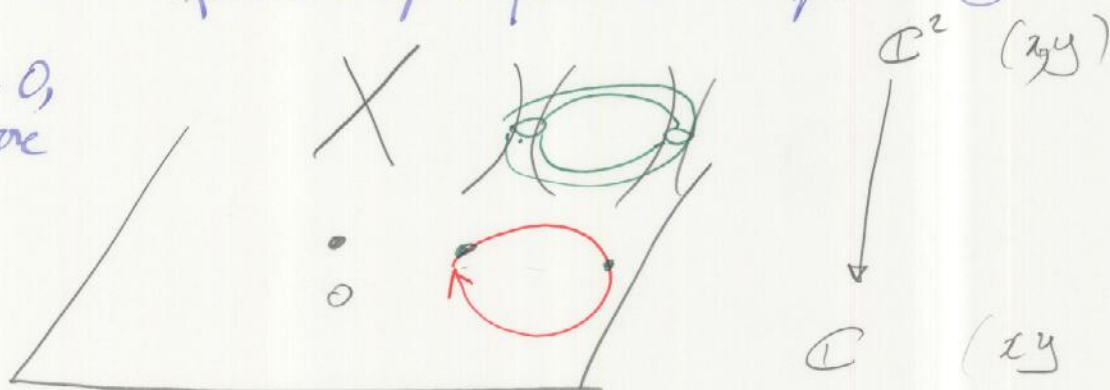
Jusqu'à dans les années 1990, c'était essentiellement les seuls exemples.

Exemple: Tore de Chekanov dans  $\mathbb{C}^2$  et  $P^2$  (1995).

(Il y a aussi des exemples de "monotone twist tori" de Chekanov et Chekanov-Schleicher)

Celui-ci est défini comme  $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy \in \gamma \text{ et } |x| = |y|\}$  où  
 $\gamma \subseteq \mathbb{C}$  est une courbe fermée simple qui n'entoure pas l'origine

(Si  $\gamma$  entourait 0, ce serait un tore de Clifford)



Dans  $P^2$ , il y a d'autres conditions.

Théorème (Chekanov): ~~ces tores ne sont pas symplectomorphes~~

$$\exists \varphi \in \text{Symp}(\mathbb{C}^2) \text{ tq } \varphi(T_{\text{cliff}}) = T_{\text{chek}}$$

L'invariant pour les distinguer est le nombre de familles de disques holomorphes à  $\mu=2$  bornés par  $L$  et leurs classes d'homotopie, i.e. la fonction

$$\left\{ \beta \in \pi_2(M, L) \mid \mu_L(\beta) = 2 \right\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\beta \longmapsto \deg(\text{év: } \mathcal{M}_\beta(L, \beta, J) \rightarrow L) = n_\beta(L).$$

un point marqué sur  $\partial D^2$

Par monotonie et comme  $\mu=2$ , ce sont des disques d'aire minimale: il n'y a pas de bubbling, de revêtements et on aura de la transversalité pour  $J$  générique.

On a un superpotentiel  $W = \sum_{\beta/\mu(\beta)=2} n_\beta(L) z^\beta$  (dans l'anneau du groupe  $\mathbb{Z}[\text{H}_2(M, L)]$ )

Exemple: équatm  $\subset S^2$ : il y a deux classes  $\beta_1, \beta_2$  d'indice de Maslov 2. Donc  $W = z^{\beta_1} + z^{\beta_2}$

Comme  $\beta_1 + \beta_2 = [P^2]$  on doit avoir  $z^{\beta_1} \cdot z^{\beta_2} = z^{\beta_1 + \beta_2} = q^2$

Donc  $W = z + \frac{q}{z}$

Ce genre de choses est un invariant:  
 - cela ne dépend pas de la structure presque complexe ou des arguments classiques de régularité  
 - idem pour une isotopie

Dans  $\mathbb{C}^2$ : pour  $T_{\text{cliff}}$ , on a les 2 disques méridiens  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}^2 \times \text{pt} \\ \text{pt} \times \mathbb{D}^2 \end{array} \right.$ .  $W = z_1 + z_2$

$T_{\text{chek}}$ ,  $W = z$

Dans  $\mathbb{P}^2$ , pour  $T_{\text{cliff}}$ ,  $W = z_1 + z_2 + \frac{q^3}{z}$

$T_{\text{chek}}$ ,  $W = z + \frac{q^3}{z^2} + \frac{2q^3}{z} + \frac{q^3}{z^2}$

Théorème (Vianna). Il existe un tre monotone  $T_{\text{Vianna}} \subseteq \mathbb{P}^2$  Auroux

$$\text{tg } W = u + 2 \frac{q^3}{u^2} (1+w)^2 + \frac{q^6}{u^5 w} (1+w)^5.$$

Une manière d'y penser est qu'il ya des dégénérescences de  $\mathbb{P}^2$   
en des espaces projectifs pondérés (orbifolds toriques)  $\mathbb{C}^3 / \mathbb{Z}$   
 $\mathbb{P}^2(a^1, b^1, c^2)$  pour tous  $a, b, c$  tg  $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ .  $(\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^3, \mathbb{P}^3)$

$X_t \subseteq \mathbb{P}^3(a^2, b^1, c^1)$  Dans  $\mathbb{P}^3(1,1,1,2)$ , il y a une famille  
(tes)  $\cong \mathbb{P}^2(a^2, b^1, c^1)$  de  $\mathbb{P}$  qui dégénère en un  $\mathbb{P}^2(1,1,4)$

Le tre monotone de la variété torique  $\mathbb{P}^2(1,1,4)$  plongé dans les  $\mathbb{P}^2$   
proches donne  $T_{\text{Chek}}$ .

Pour  $(1,4,25)$ , on obtient  $T_{\text{Vianna}}$ .

Le problème est que ~~pour les autres exemples~~ les idées  
(not. tropicales) pour calculer le super-potentiel ne sont pas  
encore rigoureuses. Le vrai calcul se fait par force et, du coup,  
ne se fait encore que pour le premier exemple.

Claude Viterbo -

- A) Keller-Nadon class and positivity
- B)        »        and Fourier transform

Équation de Sturm-Liouville  $\begin{cases} y'' + q(x)y = -\lambda y \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$

Il existe une suite  $\lambda_n$  de  $\mathbb{R}$  tq la solution  $y_n$  a exactement  $n$  zéros sur  $]0,1[$ .

On peut récrire l'équation sous la forme

$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ . On considère  $D_\lambda(t) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} y_\lambda(t) \\ y'_\lambda(t) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2$ .

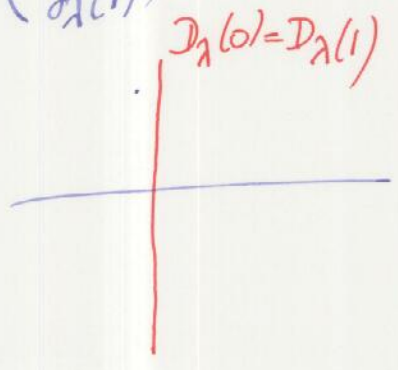
$D_\lambda(0) = D_\lambda(1) = \{0\} \times \mathbb{R}$ .

$t \mapsto D_\lambda(t)$  est une famille de droites dans  $\mathbb{R}^2$ ,

on peut regarder  $\mu_\lambda$ , le nombre de tours de  $D_\lambda(t)$ .

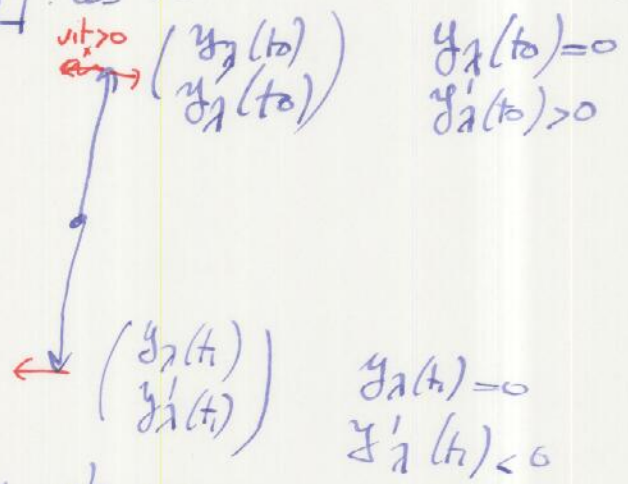
et  $n_\lambda$  le nombre de fois où  $D_\lambda(t) \cap \{0\} \times \mathbb{R} \neq \{0\}$ .

clairement,  $n_\lambda \geq \mu_\lambda$ .



Affirmation: il y a égalité :  $n_\lambda = \mu_\lambda$ . les intersections sont toutes positives.

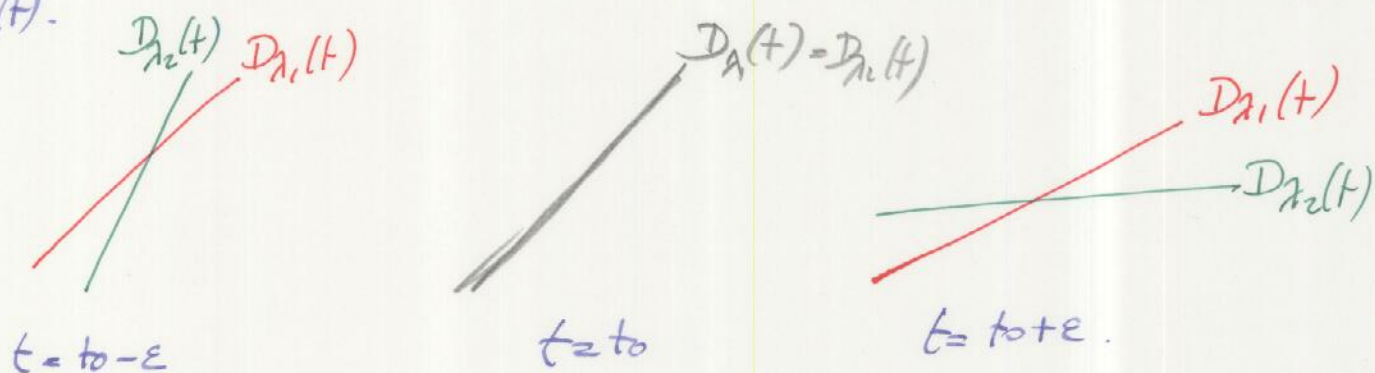
On voit en effet simplement que tous les franchissements de l'axe vertical sont dans le sens des aiguilles d'une montre (considéré comme positif, pour une fois).



Conclusion: Si  $\lambda$  est une v.p et  $y_\lambda$  est une solution, on a  $n_\lambda = \mu_\lambda$

Question: montrer que pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $y_n, \lambda_n$  tq  $\mu_{\lambda_n} = 4$  Viterbo 2

Fait: si  $\lambda_1 < \lambda_2$  et  $D_{\lambda_1}(t_0) = D_{\lambda_2}(t_0)$ , alors  $D_{\lambda_2}(t)$  va plus vite que  $D_{\lambda_1}(t)$ .

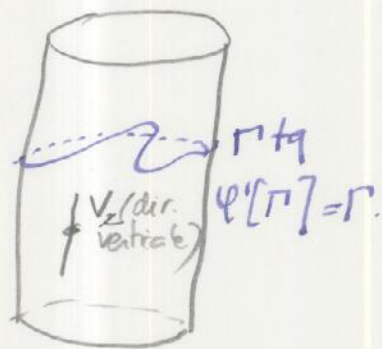


Quand  $\lambda \rightarrow -\infty$ ,  $D_\lambda(t)$  ne tourne plus ( $\mu_\lambda = 0$ )  
 $\lambda \rightarrow +\infty$   $D_\lambda(t)$  tourne beaucoup ( $\mu_\lambda \rightarrow +\infty$ ).

Cela répond à la question (TVI).

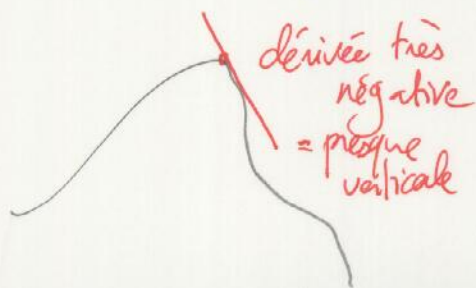
De quoi parle-t-on? Ce genre de systèmes avec de la positivité sur un cotangent  $T^*N$  est un hamiltonien  $H(q, p)$  avec  $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \gg 0$  (def. pos.)  
 (cas  $n=1$ ) Soit  $L$  une sous-variété lagrangienne invariante par le flot.

La positivité des intersections dit que l'image de  $\varphi^t V_x$  tourne dans le sens positif.

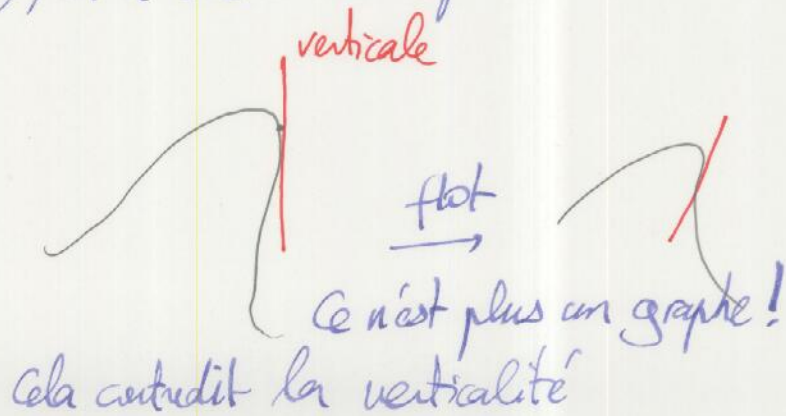


(Birkhoff <sup>n=1</sup>, Herman, Bialy-Polterovich)

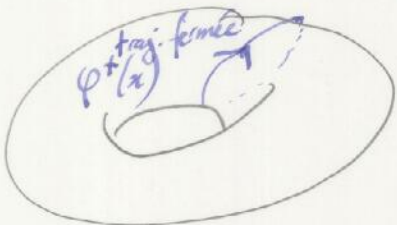
Conclusion 1: si on a  $\Gamma = \text{graphe}(g)$ , on a une borne a priori sur la dérivée des fonctions.



flot  $\rightarrow$



Conclusion 2: en dimension plus grande



L lagr. invariant

Soit  $t \mapsto T_{\varphi^+(x)} L \in \Lambda_n$  forme toujours positivement par rapport au cycle de Maslov  $\Sigma_V = \{T \in \Lambda(n) \mid T \cap V \neq \{0\}\}$ . Ainsi,

$\langle \mu_L, [\varphi^+(x)] \rangle > 0$  si on est vertical au moment.

La conclusion reste vraie pour une trajectoire récurrente au lieu d'une trajectoire périodique.

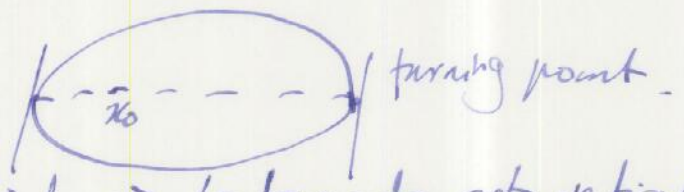
Si l'on a une prop. globale de récurrence pour le flot restreint à L, alors soit la projection  $L \rightarrow N$  est étale, soit la classe de Maslov de L est  $\neq 0$ . On utilise donc le théorème :

Théorème (Vitabo 90, Polterovich 91): Si  $L \subseteq T^*T^n$  et que  $L \rightarrow T^n$  a une projection de degré  $> 0$ , alors  $\mu_L = 0$ . (théorie de KAM faible, Fathi, Bernard, Arnold) et cela entraîne L-invariante avec dynamique assez récurrente  $\Rightarrow$  L-graphique.

B) Regardons le potentiel  $H(x,p) = \frac{1}{2} p^2 + V(x)$  et l'équation de Schrödinger associée  $\hbar^2 \psi'' + V(x) \psi = E \psi$ .

Regardons  $H(x,p) = E$

$\psi_H(x) = a_H(x) e^{\frac{i}{\hbar} S(x)}$



en dehors des points où la tangente est verticale

$S = \int p dq$ .

La transformée de Fourier échange p et q et permet de résoudre l'éq en dehors des points horizontaux.

Pour recoller les solutions, on doit appliquer la transformée deux fois [Vitorbo, et il y a un décalage de phase de  $\frac{\pi}{4}$ . (Rapport avec Porcane, Théorie mathématique de la lumière) 1892

Transformées de Fourier et représentations des groupes :

Soit  $\mathfrak{h}(E)$  l'algèbre de Lie de Heisenberg associée à un e.v.s.  $(E, \omega)$ .

$$\mathfrak{h}(E) = E \oplus \mathbb{R}\xi_0, \text{ avec } [u+t\xi_0, v+t'\xi_0] = \omega(v, u)\xi_0$$

$$\text{Soit } N(E) = \exp \mathfrak{h}(E) = \{ \exp(u) \exp(t\xi_0) \} \\ \exp(t\xi_0) \in Z N(E) \text{ et } \exp(u) \exp(v) = \exp(u+v) \cdot \exp(\omega(u, v)\xi_0)$$

Si  $l \subseteq E$  est un lagrangien <sup>en phase</sup>,  $L = l \oplus \mathbb{R}\xi_0$  et  $\mathcal{H}(L)$  l'espace de Hilbert des fonctions  $\varphi$   $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(nh) = \chi(h)^{-1} \varphi(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in L \\ \int_{\mathbb{N}/L} \|\varphi(n)\|^2 dh < +\infty, \end{array} \right.$

$$\text{où } \chi(\exp(u+t\xi_0)) = e^{i\omega(u, \xi_0)t}$$

Il y a une rep.  $\pi$  de  $N$  sur  $\mathcal{H}(L)$ , et un tel  $\pi$  est essentiellement unique (Stone-von Neumann):

si  $l, l'$  sont deux lagrangiens,  $\mathcal{F}_{l, l'}$  entrelace  $\mathcal{H}(l)$  et  $\mathcal{H}(l')$  ces opérateurs vérifient  $\mathcal{F}_{l_1, l_2} \mathcal{F}_{l_2, l_3} = c(l_1, l_2, l_3) \mathcal{F}_{l_1, l_3}$ .

Théorème:  $c(l_1, l_2, l_3) = \exp\left(-\frac{i\pi}{4} \mu(l_1, l_2, l_3)\right)$   
 $\rightarrow$  <sup>indice de</sup> Kashiwara-Leray

Si l'on a  $\left\{ \begin{array}{l} \text{un réseau auto-dual } \Gamma \subseteq (E, \omega), \text{ on peut lui associer} \\ \text{un caractère } \chi \end{array} \right.$

des représentations, et on a d'autres opérateurs d'entrelacement

$$\mathcal{Q}_{\Gamma_1, \chi_1, \dots}^{\Gamma_2, \chi_2}$$

Les coefficients sont toujours  $\mathbb{R}$  (sauf quand...) Soit  $G$  un groupe

$$C^q(G) = \{f: G^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

On définit l'opérateur cobord

$$C^q(G) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(G)$$

$$f \mapsto \delta f \quad \text{et} \quad \delta f(g_0, \dots, g_{q+1}) = \sum (-1)^i f(g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_{q+1})$$

On peut vérifier que  $\delta^2 = 0$  et définir  $H^q(G) = \frac{\ker \delta}{\text{im } \delta}$ .

Si  $C_*^q \subseteq C^q$  et  $\delta[C_*^q] \subseteq C_*^{q+1}$ , on peut définir

$$H_*^q(G) = \frac{\ker \delta|_{C_*^q}}{\text{im } \delta|_{C_*^{q+1}}}$$

Exemples de  $*$  qui marchent: bornées, continues, mesurables,  $L^\infty$ ...

Il y a une version inhomogène:

$$C^q(G) \hookrightarrow \bar{C}^q(G) = \{h: G^q \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$f \mapsto \left[ (g_1, \dots, g_q) \mapsto f(\text{id}, g_1, g_2, \dots, g_{q-1}, g_q) \right]$$

$$(g_1, \dots, g_q) \mapsto$$

$$\longleftarrow h$$

$$h(g_1, g_2, \dots, g_{q-1}, g_q)$$

Le cobord dans cette version inhomogène est

$$dh(g_1, \dots, g_{q+1}) = h(g_2, \dots, g_{q+1}) + \sum_{i=1}^q (-1)^i h(g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_{q+1}) + (-1)^{q+1} h(g_1, \dots, g_q)$$

$$\text{On a } \bar{C}^0(G) = \mathbb{R} \xrightarrow{d=0} \bar{C}^1(G) \xrightarrow{d} \bar{C}^2(G)$$

$$\text{donc } H^0(G) = H_b^0(G) = 0$$

$$dh(g_1, g_2) = h(g_2) - h(g_1 g_2) + h(g_1)$$

$$\begin{cases} H^1(G) = \text{Hom}(G, \mathbb{R}) \\ H_b^1(G) = \text{Hom}_b(G, \mathbb{R}) = \{0\} \end{cases}$$



On a toujours une application  $H_b^q(G) \rightarrow H^q(G)$ .

Böcher

Que vaut  $\ker(H_b^2(G) \rightarrow H^2(G))$  ?

Si  $h \in C_b^1(G)$  est cobord de  $f \in C^1(G)$ , on a

$$df = |f(g_1) + f(g_2) - f(g_1 g_2)| \text{ borné.}$$

Le cobord n'est pas unique,  $\ker(H_b^2(G) \rightarrow H^2(G)) = \frac{QM(G)}{L^\infty(G) \oplus \text{Hom}(G, \mathbb{R})}$

Quasimorphismes de Rolli: Soit  $\mathbb{Z}_2 = \langle a, b \rangle$  et

$\sigma_A, \sigma_B \in l^\infty(\mathbb{Z})$  tq  $\sigma_A(n) = -\sigma_A(-n)$  et

$$f(a^{k_1} b^{l_1} \dots a^{k_r} b^{l_r}) = \sum_{i=1}^r (\sigma_A(k_i) + \sigma_B(l_i)).$$

Ce n'est pas borné à moins que  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  soient nuls. Le fait que  $a$  ne soit pas un quasimorphisme vient de ce qu'il a pour quotient le premier mot se termine par la même lettre que la première lettre du deuxième mot.

Si  $G$  agit sur  $X$ , on peut regarder  $C^q(X/G) = \overline{\{f: X^q \rightarrow \mathbb{R}\}}^G$ .

Par  $x_0 \in X$ , on peut regarder

$$\text{év}_{x_0}: C^q(X/G) \rightarrow C^q(G)$$

$$f \mapsto (g_1, \dots, g_q) \mapsto f(g_1 x_0, \dots, g_q x_0)$$

On obtient une application  $H^q(X/G) \rightarrow H^q(G)$  (qui ne dépend pas de  $x_0$  si l'action est transitive ?)

Soit élem:  $H^*(g \cdot \text{fini}) = 0$ . (En effet, si  $f \in C^{q+1}$ , la moyenne des translations de  $f(1, g_1, \dots, g_q)$  fournit une primitive à  $f$ ).

De même,  $H_{\text{cont}}^*(g \cdot \text{compact}) = 0$ .

(elle s'écrit par mq si  $X = G/K$ ,  $H_{\text{cont}}^*(X/G) = H_{\text{cont}}^*(G)$ )

mais ça va trop vite

Si  $G = \text{Spin } \mathbb{R}$ ,  $H_{\text{cont}}^2(G) = \mathbb{R}$ . Cela permet de voir que toute appl. antisymétrique  $X^3 \rightarrow \mathbb{R}$   $G$ -inv. subsiste en intégrant un multiple de la classe de Kähler (qui n'est pas le cobord d'une classe invariante).

Si  $\Gamma$  est moyennable, la preuve par moyennes montre que  $H_b^+(\Gamma) = 0$ .

Si  $[f] \in H_b^2(G)$ , on peut définir  $\|[f]\|_{\infty} = \inf_{[f']=[f]} \|f'\|_{\infty}$ .

et une norme «duale» sur l'homologie de  $M$ . Sa valeur sur  $[M] \in H_{\text{dim } M}(M)$  est le volume simplicial de  $M$ .

Si  $p: \pi_1 M \rightarrow G$  est une rep.  $n$ , on a un morphisme  $H_{\text{cont}}^n(G) \xrightarrow{\beta} H^n(\pi_1 M) \xrightarrow{\text{cl. de Kähler}} H^n(M) \xrightarrow{p^*} P^*(B)$ .

Par dualité,  $|\langle p^* \beta, [M] \rangle| \leq \|p^*(\beta)\|_{\infty} \cdot \|M\|$ .

Si  $M = \Sigma_g$ ,  $\|\Sigma_g\| = 2 |\chi(\Sigma_g)|$ .

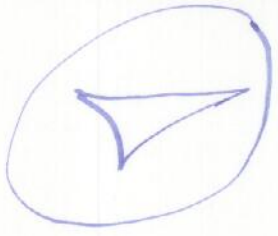
Plaçons nous dans  $\text{Spin}(2n, \mathbb{R})$ .  $K(x_0, x_1, x_2) = \int_{\Delta(x_0, x_1, x_2)} \omega$ .

But:  $\|K\|_{\infty} \leq n \cdot \pi$ .

$D_n = \{z \in M_n \mathbb{C} \mid \bar{z} = z, \text{ id} - z^* z > 0\}$  (même modèle de la boule du domaine de Siegel) (dim  $\mathbb{R} = n(n+1)$ ).

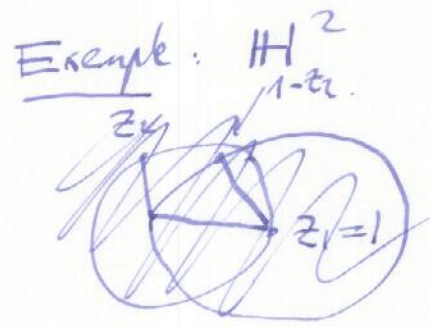
On peut mettre  $\underbrace{H^1 \times \dots \times H^2}_n \rightarrow D^n$   
 $(z_1, \dots, z_n) \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix}$

et  $\omega_{(H^2)^n} = \omega_{H^1} + \dots + \omega_{H^2}$

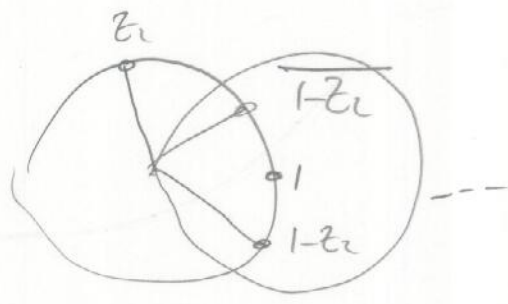


aire  $\left[ \overset{\Delta}{\triangle} \right] = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$   
 (posih)

Proposition (Domici Toledo):  $\int_{\Delta(0, z_1, z_2)} \omega = \arg \frac{\det(1 - z_1^* z_2)}{\det(1 - z_1^* z_1)}$



$$\frac{\overline{1-z_2}}{1-z_2}$$



Des le bord de  $D_n$ , on a  
 $\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}, 1 - z^* z = 0 \}$   
 $= U(n) \cap \text{Sym}_n \mathbb{C}$ .

~~(U(n) agit sur  $\Lambda(n)$  transitivement) et~~

Affirmation: Si  $z_1, z_2, z_3 \rightarrow U(n) \cap \text{Sym}_n = \Lambda_n$   
 $\int_{\Delta(z_1, z_2, z_3)} \omega \rightarrow$  un entier.

Il ne peut être que l'indice de Maslov.

Capell -  $U(n)$   $SU(2)$ : invariant de Casson

Capell

Casson a introduit un invariant des vtes de dim. 3, qui compte avec signes et multiplicités le nombre de représentations de  $\pi_1 M$  dans  $SU(2)$ . Les variétés sont orientées.

Scindement de Heegaard:  $M = \Sigma \cup_{\partial \Sigma} H_1 \cup_{\partial \Sigma} H_2$  point-base.  $\Sigma \simeq \Sigma_g$ , unique à stabilisation près.

On a alors  $\pi_1 M \simeq \pi_1 H_1 *_{\pi_1 \Sigma} \pi_1 H_2$ .

Soit  $R^{(M)} = \text{Hom}(\pi_1 M, SU(2))$ . C'est l'intersection ensembliste de  $R^\#(H_1)$  et  $R^\#(H_2)$ , vues comme parties de  $R^\#(\Sigma)$ .

Comme les  $H_i$  sont  $\sim V \cup \mathbb{S}^1$ ,  $R^\#(H_i) \simeq SU(2)^3$ .

En fait, on travaille avec  $R(M) = R^\#(M) / \text{action par conjugaison}$ , et

$$R(M) = R(H_1) \cap R(H_2) \text{ dans } R(\Sigma).$$

On voudrait compter un nombre d'intersection, mais  $R(\Sigma)$  n'est pas une variété. En général,  $R_G(\Sigma) = \text{Hom}(\pi_1 \Sigma, G) / G$  est une variété singulière dont les strates correspondent aux rep. réductibles. C'est l'intérêt de  $SU(2)$ : les représentations réductibles sont abéliennes donc c'est plus facile.

En fait,  $R(H_i)$  et  $R(H_2)$  sont bien de dim. complémentaire et on peut les mettre transverses, compter le nombre d'intersections  $\lambda_{SU(2)}(M) \in \mathbb{Z}$ .

En vérité,  $R_G(\Sigma)$  est symplectique et  $R_G(H_i) \subseteq R_G(\Sigma)$  sont des sous-variétés (singulières) lagrangiennes.

(Dans la version originale,  $H_*(M) = H_*(S^3)$ , ce qui simplifie: les représentations réductibles sont triviales - ce qui reste un point très singulier). Généralisations par Walker (sphères d'homologie rationnelle) et les copeaux (vtes générales)

1) Modul 2,  $\lambda_{SU(2)}$  redonne l'invariant de Rohlin, obtenu par défaut de signature: Cappell & Licknerow

$M_{(2,10)}^3$  borde  $W^4$ , spin. on a  $\sigma(W^4) \in 8\mathbb{Z}$  (ffq sur  $\mathbb{Z}$ )

Comme une variété spin fermée a une signature multiple de 16,  
 $\sigma(W) \text{ mod. } 16 \in \frac{8\mathbb{Z}}{16\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/2$  est un invariant de  $M$ .

2)  $\lambda_{SU(2)}(M) = -\lambda_{SU(2)}(-M)$ .

3) formule de chirurgie en termes des pol. d'Alexander, l'écrit en les coefficients de chirurgie.

On savait que Rohlin (Poincaré)  $\neq 0$ .

Taubes en a fait un invariant d'une théorie de jauge, en identifiant les représentations à des espèces de connexions (il y a encore des perturbations à faire)...

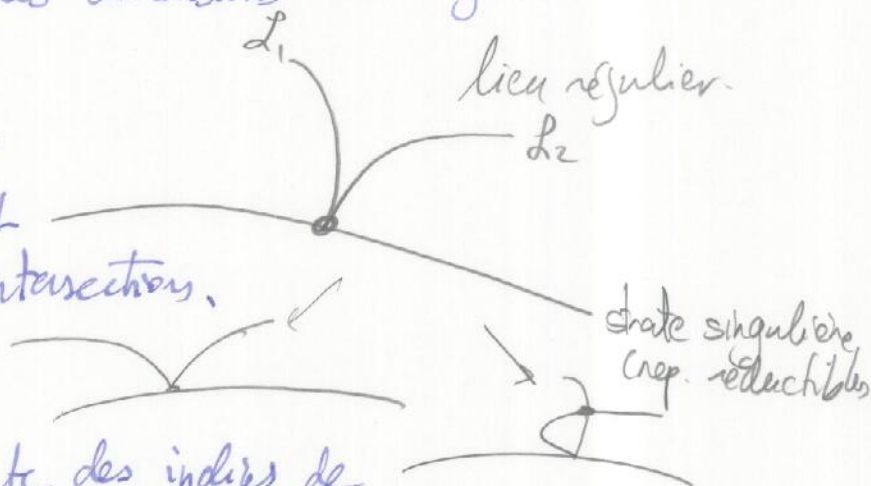
Floer a construit des groupes d'homologie dont l'invariant de Casson est la caractéristique d'Euler. ( $\mathbb{Z}/8$ -gradés)

Ici, les formules de chirurgie deviennent des suites exactes longues.

$SU(n)$ : il faut définir ce nombre d'intersection. Première idée: l'homologie d'intersection. Mais il y a besoin de contrôle sur les singularités. cela échoue car les dimensions des singularités ne sont pas les bonnes (de 1!).

Imaginons la figure suivante:

les perturbations n'ont pas forcément les mêmes nombres de points d'intersection.



On peut espérer prendre en compte des indices de Maslov des lagrangiens pour être ce problème de non-unicité du nombre d'intersection.

Le programme n'a marché que partiellement: il y a des invariants de type carsonien pour  $SU(3)$ , avec des corrections pour les réductibles. (Borden, Herald; Kirk, ... Cappell, Lee, Miller)

$$\chi_{SU(3)}(M) = \sum_{[A] \in \mathcal{M}_{SU(3),h}^*} (-1)^{SF(\mathcal{A}, h, SU(3))} + \underbrace{\chi_{SU(3)}''(M)}_{(-1)^{SF} \dots - 2CS(A) + 1}$$

perturbation de l'espace des modules  
 comme dans Carson: vient de la strate régulière.  
 correction plate proche

On voudrait un invariant perturbatif, celui-là n'en est pas.

Une définition implique le complexe de Floer instanton. la définition est compliquée, (C.L.M) on a un aspect perturbatif et des formules de chirurgie, mais c'est pas top.

Dans  $SU(N)$ , on voudrait quelque chose de plus profond: les différences entre deux  $\chi_{SU(N)}(M)$  et  $\chi_{SU(N)}(M')$  ne devraient impliquer que des invariants concernant une strate de moins.

Par exemple, l'inv. de Carson ignore presque tout (en termes de la suite centrale) du mapping dans group, et on imagine que  $SU(N)$  devrait aller  $N-2$  fois plus profond.

(Cappell, Miller): Soit  $M$  tq  $\partial M = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{connex.}}}{S_1 \cup S_2}$ . On considère un pb.

relatif: étant donné une rep  $\ell: \pi_1(S_1) \rightarrow U(n)$ , on veut « compter » le nb. de rep. de  $\pi_1 M$  étendant  $\ell: \chi(M^3; S_1, \text{orientation})$ . (le résultat est indépendant de la représentation  $\ell$  pourvu que celle-ci soit irréductible.)

À condition que  $\chi(M) = \chi(S_1)$ .

Si  $\lambda \neq 0$ , il existe une telle extension:

Propriétés:

Capelli

$$\lambda(-M) = (-1)^{\dim U(n)} \lambda(M),$$

On peut alors le calculer complètement:

$$\lambda_{\text{SO}(n)}(M, S_{\pm, \text{or}}) = K^n, \quad \text{où } K = \begin{cases} |H^2(M; S_i; \mathbb{Z})| & \text{si ce g. est fini} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Application géométrique: aux cobordismes d'homologie

Soit



; c'est un cob. d'homologie si c'est homologiquement un cylindre.

Théorème: Toute représentation matricielle de  $\pi_1 \Sigma_g$  s'étend à  $M$  si  $(M, \Sigma_1, \Sigma_2)$  est un cobordisme d'homologie.

# SOME NUMERICAL FUNCTIONS ASSOCIATED TO THE MASLOV INDEX

Andrew Ranicki (Edinburgh)

<http://www.maths.ed.ac.uk/~aar>

The Many Facets of the Maslov Index  
American Institute of Mathematics, Palo Alto  
11th April, 2014



## Introduction

- ▶ Want to describe some numerical functions associated to the Maslov index (= nonadditivity invariant) of three lagrangians  $L_1, L_2, L_3$  in a symplectic form  $(K, \phi)$ , particularly in the case

$$(K, \phi) = H_-(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

- ▶ There is a whole zoo of such functions in the literature:

$$\tau(x_1, x_2, x_3), [x], \{x\}, ((x)), \mu(x), \eta(x), E(x), \log z \dots$$

related to Dedekind sums, Rademacher functions, ...

## The space $\Lambda(1)$ of lagrangians in $H_-(\mathbb{R})$ .

- ▶ The lagrangians of the symplectic form

$$(K, \phi) = H_-(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$$

are just the 1-dimensional subspaces

$$L(\theta) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid r \in \mathbb{R}\} \subset K = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

for  $\theta \in \mathbb{R}$ , with

$$L(\theta) = L(\theta') \text{ if and only if } \theta' - \theta \in \pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} .$$

- ▶ The function

$$S^1 \rightarrow \Lambda(1) ; z = e^{i\psi} \mapsto \sqrt{z} = L(\psi/2)$$

is a homeomorphism.

- ▶  $\Lambda(1)$  may seem a very trivial example, but ...

From **Auguries of innocence**

To see a world in a grain of sand  
And a heaven in a wild flower,  
Hold infinity in the palm of your hand,  
And eternity in an hour.

William Blake

## Nonadditivity, jumps, and signs

- ▶ The **nonadditivity** of a function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is the function

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \mapsto f(x) + f(y) - f(x + y) .$$

- ▶ The **jump** of a function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  at  $x \in \mathbb{R}$  is

$$j(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f(x + \epsilon) - f(x - \epsilon)) \in \mathbb{R} .$$

- ▶ The **sign** of  $x \in \mathbb{R}$  is

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 . \end{cases}$$

## The whole and the part

- ▶ Given a real number  $x \in \mathbb{R}$  let  $[x] \in \mathbb{Z}$  be the **integer** part and let  $\{x\} \in [0, 1)$  be the **fractional** part, so that

$$x = [x] + \{x\} \in \mathbb{R} .$$

- ▶ Many interesting algebraic and number theoretic properties of the Maslov index can be traced to the jumps and nonadditivity of the functions

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} ; x \mapsto [x] , \quad \mathbb{R} \rightarrow [0, 1) \subset \mathbb{R} ; x \mapsto \{x\} .$$

- ▶ First appeared in the context of algebraic topology of manifolds in the 1960's calculations by Hirzebruch of the signatures of manifolds bounding exotic spheres in general (Brieskorn varieties), torus knots in particular,

## The nonadditivity of $[x]$ and $\{x\}$

► **Proposition** The functions

$$[ ] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} ; x \mapsto [x] ,$$

$$\{ \} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1) ; x \mapsto \{x\} = x - [x]$$

have the following jump and nonadditive properties:

- $\{ \}$  is continuous on  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , with a jump  $-1$  at each  $x \in \mathbb{Z}$ .
- $\{x\} + \{y\} - \{x+y\} = [x+y] - [x] - [y] = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq \{x\} + \{y\} < 1 \\ 1 & \text{if } 1 \leq \{x\} + \{y\} < 2. \end{cases}$
- $\{x+1\} = \{x\}$ .
- $\{x\} + \{-x\} = \{x\} + \{1-x\} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$
- $\{x+1/2\} - \{x\} = \begin{cases} 1/2 & \text{if } 0 \leq \{x\} < 1/2 \\ -1/2 & \text{if } 1/2 \leq \{x\} < 1. \end{cases}$

## The triple signature in general

- Write the signature of a symmetric form  $(L, \Phi)$  as

$$\sigma(L, \Phi) \in \mathbb{Z} .$$

- Definition** (Wall, Leray, Kashiwara, ... 1970's)

The **Maslov index** (aka **the triple signature**) of an ordered triple of lagrangians  $L_1, L_2, L_3$  in a nonsingular symplectic form  $(K, \phi)$  over  $\mathbb{R}$  is the signature

$$\tau(L_1, L_2, L_3) = \sigma(L_1 \oplus L_2 \oplus L_3, \Phi_{123}) \in \mathbb{Z}$$

of the symmetric form

$$\Phi_{123} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & 0 & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

with

$$\phi_{ij} : L_i \times L_j \rightarrow \mathbb{R} ; (x_i, x_j) \mapsto \phi(x_i, x_j) .$$

## The Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ I.

- **Definition** The **Maslov index** of  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$  is

$$\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \tau(L(\theta_1), L(\theta_2), L(\theta_3)) \in \mathbb{Z},$$

the triple signature of the lagrangians  $L(\theta_1), L(\theta_2), L(\theta_3)$  in  $H_-(\mathbb{R})$ .

- From the definition

$$\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sigma(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \Phi_{123})$$

with

$$\Phi_{123} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta_1 - \theta_2) & \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 & \sin(\theta_3 - \theta_1) \\ \sin(\theta_2 - \theta_3) & \sin(\theta_3 - \theta_1) & 0 \end{pmatrix}$$



## The Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ II.

- ▶ The signature of a symmetric matrix is the number of changes of sign in the minors.
- ▶ The matrix  $\Phi_{123}$  has minors

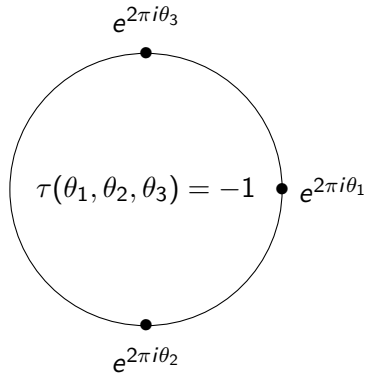
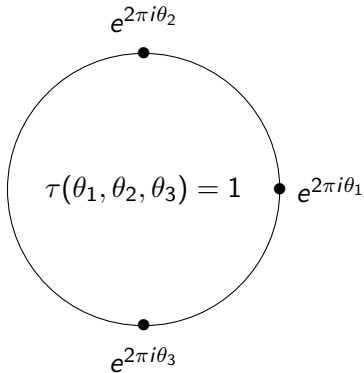
$$0, \quad -\sin^2(\theta_1 - \theta_2), \quad \sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_2 - \theta_3)\sin(\theta_3 - \theta_1)$$

so that

$$\begin{aligned} \tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \operatorname{sgn}(\sin(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_3 - \theta_2)\sin(\theta_3 - \theta_1)) \\ &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma) & \text{if } \{\theta_1/2\pi\}, \{\theta_2/2\pi\}, \{\theta_3/2\pi\} \in [0, 1) \text{ are distinct} \\ & \text{with } \sigma \in \Sigma_3 \text{ the permutation such that} \\ & \{\theta_{\sigma(1)}/2\pi\} < \{\theta_{\sigma(2)}/2\pi\} < \{\theta_{\sigma(3)}/2\pi\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &\in \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

### The Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ III.

- ▶ Geometrically: 1 (resp. -1) if  $e^{2\pi i\theta_1}, e^{2\pi i\theta_2}, e^{2\pi i\theta_3} \in S^1$  arranged clockwise (resp. counterclockwise) around  $S^1$ , and 0 if any coincidence.



**The Maslov index  $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  IV.**

- In view of the identity

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_3 - \theta_2)\sin(\theta_3 - \theta_1) \\ &= (\sin 2(\theta_2 - \theta_1) + \sin 2(\theta_3 - \theta_2) + \sin 2(\theta_1 - \theta_3))/4 \end{aligned}$$

can also write

$$\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \operatorname{sgn}(\sin 2(\theta_2 - \theta_1) + \sin 2(\theta_3 - \theta_2) + \sin 2(\theta_1 - \theta_3)) .$$

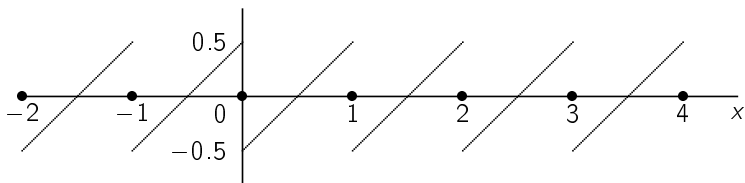
## The sawtooth function $((x))$ I.

- The **sawtooth function**  $((x)) : \mathbb{R} \rightarrow [-1/2, 0)$  is defined by

$$((x)) = \begin{cases} \{x\} - 1/2 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

with  $\{x\} \in [0, 1)$  the fractional part of  $x \in \mathbb{R}$ . Nonadditive:

$$((x)) + ((y)) - ((x+y)) = \begin{cases} -1/2 & \text{if } 0 < \{x\} + \{y\} < 1 \\ 1/2 & \text{if } 1 < \{x\} + \{y\} < 2 \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{Z} \text{ or } y \in \mathbb{Z} \text{ or } x+y \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$



## The origin of the sawtooth function $((x))$

- ▶ Used by Dedekind (1876) in his commentary on the Riemann Nachlass to count  $\pm 2\pi i = \pm 4(\pi/2)i$  jumps in the imaginary part of the complex logarithm

$$\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i(\theta + 2n\pi) \in \mathbb{C} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

- ▶ From Dedekind's commentary:

durchläuft, und der imaginäre Theil der Logarithmen zwischen  $\pm \frac{\pi i}{2}$ , also

$$= \pi i \left( \left( \frac{m t}{n} - \frac{1}{2} \right) \right)$$

zu nehmen ist, wenn der Deutlichkeit halber der von  $x$  um eine ganze Zahl abstehende, zwischen  $\pm \frac{1}{2}$  liegende Werth nicht mit  $(x)$ , sondern mit  $((x))$  bezeichnet wird. Durch Anwendung der Transformation

## Dedekind sums and signatures

- ▶ Eisenstein's formula for  $x = p/q \in \mathbb{Q}$

$$((x)) = \frac{i}{2q} \sum_{j=1}^{q-1} \cot \frac{\pi j}{q} e^{2\pi i j x} .$$

- ▶ The **Dedekind sum** for  $a, c \in \mathbb{Z}$  with  $c \neq 0$  is

$$s(a, c) = \sum_{k=1}^{|c|-1} \left( \left( \frac{k}{c} \right) \right) \left( \left( \frac{ka}{c} \right) \right) = \frac{1}{4|c|} \sum_{k=1}^{|c|-1} \cot \left( \frac{k\pi}{c} \right) \cot \left( \frac{ka\pi}{c} \right) \in \mathbb{Q} .$$

- ▶ Feature prominently in work of Hirzebruch and Zagier.
- ▶ Barge and Ghys, *Cocycles d'Euler et de Maslov* (1992) use  $E(x)$  and Dedekind sums in the hyperbolic geometry interpretation of the Maslov index, related to the action of  $SL_2(\mathbb{Z})$  on the upper half plane.
- ▶ Also Kirby and Melvin, *Dedekind sums,  $\mu$ -invariants and the signature cocycle* (1994)

## The sawtooth function $((x))$ II.

► **Proposition** The sawtooth function has the following jumping and nonadditivity properties:

1.  $((x))$  is continuous on  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , with a jump  $-1$  at each  $x \in \mathbb{Z}$ .

2.  $((0)) = ((1/2)) = 0$ .

3.  $((x+1)) = ((x))$ ,  $((-x)) = -((x))$ .

4.  $((x)) = x + ([-x] - [x])/2 = (\{x\} - \{-x\})/2$ .

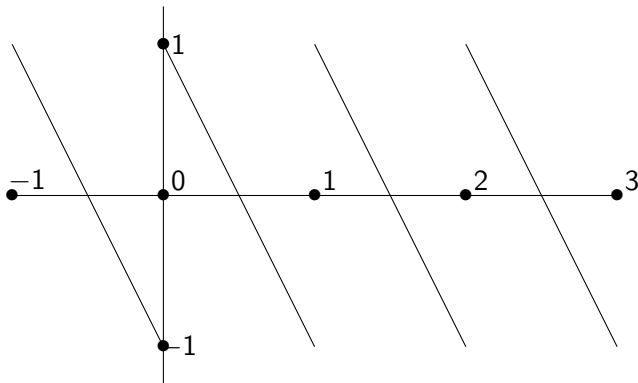
5.  $((x)) + ((y)) - ((x+y)) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathbb{Z} \text{ or } y \in \mathbb{Z} \text{ or } x+y \in \mathbb{Z} \\ -1/2 & \text{if } 0 < \{x\} + \{y\} < 1 \\ 1/2 & \text{if } 1 < \{x\} + \{y\} < 2. \end{cases}$

6.  $((x+1/2)) = \begin{cases} \{x\} & \text{if } 0 \leq \{x\} < 1/2 \\ 0 & \text{if } \{x\} = 1/2 \\ \{x\} - 1 & \text{if } 1/2 < \{x\} < 1. \end{cases}$

## The reverse sawtooth function $\mu(x)$ I.

- ▶ **Definition** The reverse sawtooth function is

$$\mu : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1] ; x \mapsto \mu(x) = 1 - 2\{x\}$$





## The reverse sawtooth function $\mu(x)$ II.

- **Proposition** The reverse sawtooth function has the following jumping and nonadditivity properties:

$$1. \mu(x) = \begin{cases} -2\{x\} & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 1 & \text{if } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2.  $\mu$  is continuous at  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , with a jump 2 at each  $x \in \mathbb{Z}$ .

$$3. \mu(x) + \mu(y) - \mu(x+y) = \begin{cases} +1 & \text{if } 0 \leq \{x\} + \{y\} < 1 \\ -1 & \text{if } 1 \leq \{x\} + \{y\} < 2. \end{cases}$$

$$4. \mu(0) = 1, \mu(1/2) = 0.$$

$$5. \mu(x+1) = \mu(x) \text{ for } x \in \mathbb{R}.$$

$$6. \mu(x) + \mu(-x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 2 & \text{if } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$7. \mu(x) - \mu(x+1/2) = 2\mu(x) - \mu(2x) = \begin{cases} +1 & \text{if } 0 \leq \{x\} < 1/2 \\ -1 & \text{if } 1/2 \leq \{x\} < 1. \end{cases}$$

## The function $E(x)$

- **Definition** (Barge and Ghys, Cocycles d'Euler et de Maslov, 1992)

The  $E$ -function is

$$E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x - ((x)) = ([x] - [-x]) / 2 = \begin{cases} [x] + 1/2 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ x & \text{if } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- **Proposition** For any  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E(x+y) - E(x) - E(y) &= ((x)) + ((y)) - ((x+y)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathbb{Z} \text{ or } y \in \mathbb{Z} \text{ or } x+y \in \mathbb{Z} \\ -1/2 & \text{if } 0 < \{x\} + \{y\} < 1 \\ 1/2 & \text{if } 1 < \{x\} + \{y\} < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

## The Rademacher functions $\phi_n(x)$

### ► The Rademacher functions

$$\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\} ; x \mapsto \operatorname{sgn}(\sin 2^{n+1}\pi x) \quad (n \geq 0)$$

are such that

$$(i) \quad \phi_0(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2\pi x) = \begin{cases} +1 & \text{if } 0 < \{x\} < 1/2 \\ -1 & \text{if } 1/2 < \{x\} < 1 \\ 0 & \text{if } \{x\} = 0 \text{ or } 1/2 . \end{cases}$$

$$(ii) \quad \phi_n(x) = \phi_0(2^n x) = 2((2^{n+1}x)) - 2^{n+2}((x)).$$

$$(iii) \quad \phi_n(x+1) = \phi_n(x), \quad \phi_n(x+1/2) = \phi_n(-x) = -\phi_n(x).$$

$$(iv) \quad \phi_n(0) = \phi_n(1/2) = 0.$$

$$(v) \quad \mu(x) - \mu(x+1/2) = 2\mu(x) - \mu(2x) = \phi_0(x) \text{ for } 2x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

## The Walsh functions

- ▶ The **Walsh functions**  $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  ( $n \geq 0$ ) are defined by

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_n(x) = \phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(x)\dots\phi_{n_k}(x) \\ (n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}).$$

In particular

$$\psi_{2^n}(x) = \phi_n(x) = \phi_0(2^n x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^{n+1} \pi x).$$

- ▶ The Walsh functions constitute a complete orthonormal set, behaving like trigonometric series on  $[0, 2\pi]$ :

$$\int_0^1 \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n \\ 0 & \text{if } m \neq n. \end{cases}$$

- ▶ Every Lebesgue integrable function  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  has a Walsh-Fourier expansion

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \text{ with } c_n = \int_0^1 f(x)\psi_n(x)dx \in \mathbb{R}$$

## The Fourier-Walsh expansion of $\mu(x)$

- **Proposition** The Fourier-Walsh expansion of the reverse sawtooth function  $\mu(x)$  is

$$\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2^k}(x)/2^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_0(2^k x)/2^{k+1},$$

with

$$\int_0^1 \mu(x) \psi_n(x) dx = \begin{cases} 1/2^{k+1} & \text{if } n = 2^k \\ 0 & \text{if } n \neq 2^k. \end{cases}$$

## The function $\eta(x)$ I.

- ▶ **Definition** The  $\eta$ -invariant function is

$$\eta : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1] ;$$

$$\theta \mapsto \eta(\theta) = -2((\theta/\pi)) = \begin{cases} \mu(\theta/\pi) = 1 - 2\{\theta/\pi\} & \text{if } \theta/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{if } \theta/\pi \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

- ▶ First appeared in Atiyah, Patodi and Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry* (1974) as a spectral invariant  $\eta$ -invariant.
- ▶ Key ingredient in *On the Maslov index* Cappell, Lee and Miller (1994)

## The function $\eta(x)$ II.

► The  $\eta$ -invariant function  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1]$  has the following properties:

(i)  $\eta$  is continuous at  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , jumping by 2 at  $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ .

(ii)  $\eta(\pi n/2) = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

(iii)  $\eta(\theta + \pi) = \eta(\theta)$ ,  $\eta(-\theta) = -\eta(\theta)$ ,

(iv)  $2\eta(\theta) - \eta(2\theta) = \eta(\theta) + \eta(\pi/2 - \theta) = \operatorname{sgn}(\sin 2\theta)$ .

(v)

$$\eta(\theta) + \eta(\phi) - \eta(\theta + \phi) = \operatorname{sgn}(\sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta + \phi))$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{if } \theta/\pi, \phi/\pi, (\theta + \phi)/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \text{ and } 0 \leq \{\theta/\pi\} + \{\phi/\pi\} < 1, \\ -1 & \text{if } \theta/\pi, \phi/\pi, (\theta + \phi)/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \text{ and } 1 \leq \{\theta/\pi\} + \{\phi/\pi\} < 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

### The function $\eta(x)$ III.

(vi) In view of the identity

$$\sin(2\theta) + \sin(2\phi) - \sin(2(\theta + \phi)) = 4 \sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\theta + \phi)$$

also have

$$\eta(\theta) + \eta(\phi) - \eta(\theta + \phi) = \operatorname{sgn}(\sin(2\theta) + \sin(2\phi) - \sin(2(\theta + \phi))) \in \{-1, 0, 1\}.$$

(vii)

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= -2((\theta/\pi)) = -2\theta/\pi + ([\theta/\pi] - [-\theta/\pi]) \\ &= 2E(\theta/\pi) - 2\theta/\pi = \begin{cases} 1 - 2\{\theta/\pi\} & \text{if } \theta/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{if } \theta/\pi \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$



## The multiplicativity of the exponential and nonadditivity of the logarithm I.

- ▶ The **exponential** function

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} ; z \mapsto e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

is such that

- (i)  $z \mapsto e^z$  is continuous
  - (ii)  $e^0 = 1, e^{z+w} = e^z e^w \in \mathbb{C}$
  - (iii)  $e^z = e^w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  if and only if  $z - w = 2\pi ik$  for some  $k \in \mathbb{Z}$ .
- ▶ The **principal logarithm** function

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} + i(-\pi, \pi] \subset \mathbb{C}$$

is defined as usual by

$$\log(z) = \log(|z|) + i\arg(z) \quad (\arg(z) \in (-\pi, \pi]) .$$

## The multiplicativity of the exponential and nonadditivity of the logarithm II.

- The principal logarithm is such that
- (i)  $z \mapsto \log(z)$  is continuous on  $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$ .
  - (ii)  $\log(1) = 0$ ,  $\log(-1) = \pi i$ ,  $\log(\pm i) = \pm \pi i/2$ .
  - (iii) If  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  for  $r > 0$   $\theta \in \mathbb{R}$  then

$$\begin{aligned}
 \log(z) &= \log(r) + \pi i \mu\left(\frac{\pi - \theta}{2\pi}\right) \\
 &= \log(r) + \pi i \left(1 - 2\left\{\frac{\pi - \theta}{2\pi}\right\}\right) \\
 &= \begin{cases} \log(r) + 2\pi i \left(\left(\frac{\theta + \pi}{2\pi}\right)\right) & \text{for } \theta/\pi \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1), \\ & \text{with } 2\pi \left(\left(\frac{\theta + \pi}{2\pi}\right)\right) \in (-\pi, \pi) \\ \log(r) + \pi i & \text{for } \theta/\pi \in 2\mathbb{Z} + 1, \text{ with } z = -r \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \log(r) - \pi i \eta\left(\frac{\theta + \pi}{2}\right) & \text{for } \theta/\pi \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1), \\ \log(r) + \pi i & \text{for } \theta/\pi \in 2\mathbb{Z} + 1, \text{ with } z = -r. \end{cases}
 \end{aligned}$$

## The multiplicativity of the exponential and nonadditivity of the logarithm III.

► **Proposition** The exponential and principal logarithm functions have the following properties:

- (i)  $e^{\log(z)} = z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  for all  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- (ii) For  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\log(e^z) = z - 2\pi ik \in \mathbb{C} \text{ for } (2k - 1)\pi < y \leq (2k + 1)\pi ,$$

that is

$$\log(e^{x+iy}) = x + \pi i \left(1 - 2\left\{\frac{\pi - y}{2\pi}\right\}\right) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} .$$

- (iii) If  $z \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$  then

$$\log(z) = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{x - z} - \frac{1}{x - 1}\right) dx \in \mathbb{C} .$$

### The multiplicativity of the exponential and nonadditivity of the logarithm IV.

(iv) For  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) - \log(z_1) - \log(z_2) &= i(\arg(z_1 z_2) - \arg(z_1) - \arg(z_2)) \\ &= \begin{cases} 2\pi i & \text{if } -2\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq -\pi \\ 0 & \text{if } -\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq \pi \\ -2\pi i & \text{if } \pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq 2\pi . \end{cases} \end{aligned}$$

(v) For  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \log(e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) - \log(e^{i\theta_1}) - \log(e^{i\theta_2}) \\ &= \begin{cases} -2\pi i & \text{if } 0 \leq \left\{ \frac{\pi - \theta_1}{2\pi} \right\} + \left\{ \frac{\pi - \theta_2}{2\pi} \right\} < 1/2 \\ 0 & \text{if } 1/2 \leq \left\{ \frac{\pi - \theta_1}{2\pi} \right\} + \left\{ \frac{\pi - \theta_2}{2\pi} \right\} < 3/2 \\ 2\pi i & \text{if } 3/2 \leq \left\{ \frac{\pi - \theta_1}{2\pi} \right\} + \left\{ \frac{\pi - \theta_2}{2\pi} \right\} < 2 . \end{cases} \end{aligned}$$

## The expressions of $\eta(\theta)$ in terms of $((\ ))$ , $\log$ and $\{ \}$

► For any  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= -2((\theta/\pi)) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi i} \log(-e^{-2i\theta}) = 1 - 2\{\frac{\theta}{\pi}\} & \text{if } e^{i\theta} \neq \pm 1 \\ 0 & \text{if } e^{i\theta} = \pm 1 . \end{cases} \end{aligned}$$

## Properties of the Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ I.

- The triple signature function

$$\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\} ; (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mapsto \\ \tau(L(\theta_1), L(\theta_2), L(\theta_3)) = \operatorname{sgn}(\sin(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_3 - \theta_2)\sin(\theta_3 - \theta_1))$$

has the following properties.

- (i)  $\tau(0, \theta, \pi/2) = \operatorname{sgn}(\sin \theta \cos \theta) = \operatorname{sgn}(\sin 2\theta)$ .  
 (ii) The  $\eta$ -function is the average triple signature

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= \int_{\ell \in \Lambda(1)} \tau(\ell, L(0), L(\theta)) d\ell \\ &= \int_{z \in S^1} \tau(\sqrt{z}, L(0), L(\theta)) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\psi/2, 0, \theta) d\psi \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

## Properties of the Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ II.

(iii)

$$\begin{aligned}
 \tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \tau(\theta_1 + \psi, \theta_2 + \psi, \theta_3 + \psi) \\
 &= \eta(\theta_2 - \theta_1) + \eta(\theta_3 - \theta_2) + \eta(\theta_1 - \theta_3) \\
 &= 2(E((\theta_1 - \theta_2)/\pi) + E((\theta_2 - \theta_3)/\pi) + E((\theta_3 - \theta_1)/\pi)) \\
 &= -2(\{(\theta_1 - \theta_2)/\pi\} + \{(\theta_2 - \theta_3)/\pi\} + \{(\theta_3 - \theta_1)/\pi\}) \\
 &\in \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{R} .
 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 \eta(\theta_1) + \eta(\theta_2) - \eta(\theta_1 + \theta_2) &= \tau(0, \theta_1, -\theta_2) = \tau(0, \theta_2, -\theta_1) \\
 &= \begin{cases} +1 & \text{if } 0 < \{\theta_1/\pi\} + \{\theta_2/\pi\} < 1, \theta_1/\pi, \theta_2/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ -1 & \text{if } 1 < \{\theta_1/\pi\} + \{\theta_2/\pi\} < 2, \theta_1/\pi, \theta_2/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \in \{-1, 0, 1\}
 \end{aligned}$$

### Properties of the Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ III.

(v) For  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

$$\begin{aligned}
 2\eta(\theta) - \eta(2\theta) &= \tau(0, \theta, -\theta) = \phi_0(\theta/\pi) \\
 &= \text{sign}(\sin 2\theta) = \begin{cases} +1 & \text{if } 0 < \{\theta/\pi\} < 1/2 \\ -1 & \text{if } 1/2 < \{\theta/\pi\} < 1 \in \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{R} . \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}
 \tau(\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \theta_2) &= \eta(\theta_1) - \eta(\theta_2) + \eta(\theta_2 - \theta_1) = \tau(0, \theta_2 - \theta_1, \theta_2) \\
 &= \begin{cases} +1 & \text{if } 0 < \{(\theta_2 - \theta_1)/\pi\} + \{-\theta_2/\pi\} < 1, (\theta_2 - \theta_1)/\pi, \theta_2/\pi \in \mathbb{R} \setminus \\ -1 & \text{if } 1 < \{(\theta_2 - \theta_1)/\pi\} + \{-\theta_2/\pi\} < 2, (\theta_2 - \theta_1)/\pi, \theta_2/\pi \in \mathbb{R} \setminus \\ 0 & \text{otherwise} . \end{cases}
 \end{aligned}$$



**Properties of the Maslov index  $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  IV.**

- (vii)  $\tau(\theta_{\sigma(1)}, \theta_{\sigma(2)}, \theta_{\sigma(3)}) = \text{sgn}(\sigma)\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  for any  $\sigma \in \Sigma_3$ .
- viii)  $\tau(-\theta_1, -\theta_2, -\theta_3) = -\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ .
- (ix)  $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$  if  $\theta_1 = \theta_2$ .
- (x)  $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \tau(0, \theta_2 - \theta_1, \theta_3 - \theta_1)$ .

### Properties of the Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ **V.**

(xi) For any  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$  define a loop in  $\Lambda(1)$  from  $L(0) = \mathbb{R} \oplus 0$  through  $L(\pi\eta(\theta_2 - \theta_1))$  and  $L(\pi\eta(\theta_2 - \theta_1) + \pi\eta(\theta_3 - \theta_2))$  and then back to  $L(0)$

$$\omega(\theta_1, \theta_2, \theta_3) : S^1 \rightarrow \Lambda(1) ;$$

$$e^{2\pi it} \mapsto \begin{cases} L(3\pi t\eta(\theta_2 - \theta_1)) & \text{if } 0 \leq t \leq 1/3 \\ L(\pi\eta(\theta_2 - \theta_1) + (3t - 1)\pi\eta(\theta_3 - \theta_2)) & \text{if } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ L(\pi\eta(\theta_2 - \theta_1) + \pi\eta(\theta_3 - \theta_2) + (3t - 2)\pi\eta(\theta_1 - \theta_3)) & \text{if } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

with lift

$$\tilde{\omega}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) : I = [0, 1] \rightarrow \widetilde{\Lambda}(1) = \mathbb{R} ;$$

$$e^{2\pi it} \mapsto \begin{cases} 3t\eta(\theta_2 - \theta_1) & \text{if } 0 \leq t \leq 1/3 \\ \eta(\theta_2 - \theta_1) + (3t - 1)\eta(\theta_3 - \theta_2) & \text{if } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ \eta(\theta_2 - \theta_1) + \eta(\theta_3 - \theta_2) + (3t - 2)\eta(\theta_1 - \theta_3) & \text{if } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

### Properties of the Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ VI.

(xii) The degree of  $\omega(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  is the triple signature Maslov index

$$\begin{aligned} \deg(\omega(\theta_1, \theta_2, \theta_3)) &= \eta(\theta_2 - \theta_1) + \eta(\theta_3 - \theta_2) + \eta(\theta_1 - \theta_3) \\ &= \tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(xiii)  $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \tau(L(\theta_1), L(\theta_2), L(\theta_3))$ .

(xiv) (Bunke, *On the glueing problem for the  $\eta$ -invariant*, 1997)

$$\frac{1}{\pi} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \tau(L(\theta_1), L(\theta_2), L(\theta_3)) d\theta_1 = \mu\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi}\right) \text{ if } 0 < \theta_2, \theta_3 < \pi .$$

## Properties of the Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ VII.

- (xv) (W.Meyer *Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln* 1972, Atiyah *The logarithm of the Dedekind  $\eta$ -function*, 1987)  
The surface with 3 boundary components

$$(X, \partial X) = (\text{cl.}(S^2 \setminus \bigcup_3 D^2), \bigcup_3 S^1)$$

has  $\pi_1(X) = F_2 = \{g_1, g_2\}$  the free group on 2 generators  $g_1, g_2$ . Let  $E$  be the local coefficient system over  $X$  of flat hermitian vector spaces classified by the group morphism

$$\pi_1(X) = F_2 \rightarrow U(1) = S^1 ; g_j \mapsto e^{i\theta_j} \quad (j = 1, 2) .$$

The index of a first-order elliptic operator  $\bar{\partial}$  coupled to  $E$  is the signature of  $(\mathbb{C}, i\phi)$ , with  $(H^1(X, \partial X; E) = \mathbb{C}, \phi)$  the skew-hermitian form over  $\mathbb{C}$  defined by the cup-product and the hermitian form on  $E$ , and

### Properties of the Maslov index $\tau(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ VIII.

xvi)

$$\begin{aligned}
 \sigma(\mathbb{C}, i\phi) &= 2(((\theta_1/2\pi)) + ((\theta_2/2\pi)) - (((\theta_1 + \theta_2)/2\pi))) \\
 &= \eta((\theta_1 + \theta_2)/2) - \eta(\theta_1/2) - \eta(\theta_2/2) \\
 &= -\tau(0, \theta_1/2, -\theta_2/2) \\
 &= \begin{cases} -1 & \text{if } 0 < \{\theta_1/2\pi\} + \{\theta_2/2\pi\} < 1 \\ +1 & \text{if } 1 < \{\theta_1/2\pi\} + \{\theta_2/2\pi\} < 2 \\ 0 & \text{otherwise .} \end{cases}
 \end{aligned}$$

The discontinuous measurable function

$$U(1) \times U(1) \rightarrow \mathbb{R} ;$$

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \mapsto \sigma(\mathbb{C}, i\phi)/2 = ((\theta_1/2\pi)) + ((\theta_2/2\pi)) - (((\theta_1 + \theta_2)/2\pi)))$$

is a bounded cocycle representing a generator of  $H^2(U(1)) = \mathbb{Z}$ , corresponding to the universal cover regarded as a central group extension

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow U(1) = S^1 .$$

MPS

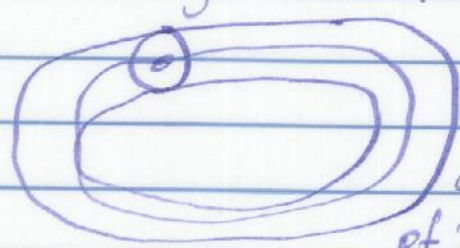
Moderated problem session: moderator → C. Viterbo.

not true →  
Def: if  
we conjugate  
by  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
we get sth.  
attractive, so  
they are always  
conjugate  
↳ example  
on vol. pres.  
in dim 73.

Étienne: [Ann.] symplectic f.g.  $\in \text{SDiff}(\mathbb{R}^2, 0)$ , dof =  $\mathbb{R}_x$ , do  $g = \mathbb{R}_y$   
topologically conjugate by  $\text{Diff}^+(\mathbb{R}^2)$  (asymp. taking #, case proof by Gambardo-Allys)  
→ equivalent about  $f, g \in \text{Sym}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ ; dof, do  $g \in \mathcal{U}_n$   
top. conj.

(if we can apply KAM theory, it's true, so it's reasonable to look for other symplectomorphisms).

→ topological interpretation of the Maslov index... ??  
explaining the Conley-Zehnder index of a first return



map of a Hamiltonian flow as a top invariant of the germ of the first return map.

(1. to be formalised) topological definit- of the Maslov index for flows.  
{G.G., Entenants asymptotiques}

(Linnarsson-Brage) Linnarsson discussed the transversality defect, linking in  $\Delta(\mathbb{R})$ , as a kind of non-additivity for linking form. For knot theory, it would be nice to define know what  $\Delta(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$  is.

2. compute  $\Delta(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ ? Link with Ranicki's theory of transverse defect

Ranicki

Exact seq. in the alg. theory of surgery

forms & formalities.

3

Inequalities for between  $\chi(w)$  and  $\chi(M)$  non  $2d$  fibre on surfaces. Bore optimal: 1 (Taub-Kotschick), ~~just~~ worst examples:  $\frac{2g}{9}$ .

~~Are the same bound~~ Is the holomorphic bound the same as the smooth case? Direct

~~What do we know~~ about higher inequality (giving an explicit cocycle  $\gamma$  on the mapping class group  $\mathcal{M}_g$  and cohomologous to the pull-back of Maslov's class  $\mathcal{M}$  with a norm  $\leq \frac{g}{2}$ ?) ~~Direct proof of the Kotschick's~~

$p: M_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{R})$   
Meyerstein  
#

Find a cocycle  $c \in C_b^2(M_g)$  cohomologous to  $p^* \text{Maslov}$  such that  $|c| \leq \frac{g}{2}$  (or even better). Application:

Taubes-Kotschick's theorem (or even better).

Are the bounds the same for hol. and sm. bundles?

The question makes also sense for groups intermediate between  $M_g$  and  $Sp(2g, \mathbb{R})$ .

[Kotschick, Monopole signatures ...]  
[Fub, Problems on  $\text{Map}(\mathbb{Z})$ ]

[4.] (Maslov). The Maslov class gives you a central extension of  $\text{Sp}_{\text{prop}} \mathbb{Z}$ . The class (but not the cocycle) is divisible by 4. We can find a symplectic cocycle which is divisible by 4.

Maslov's cocycle gives a  $\mathbb{Z}$ -central extension  $G_4$   
 $(f, n) \cdot (f', n') = (ff', n+n' + c_L(f, f'))$   
 $\text{maslov}(L, f, f')$

Because of the mult. by 4, the universal central extension  $G_1$  of  $\text{Sp}_{\text{prop}} \mathbb{Z}$  satisfies  $G_1 \cong^4 G_4$ . This describes  $G_1$  as the elements  $(f, n) \in G_4$  where  $n \equiv \alpha(f, L) \pmod{4}$  where  $\alpha(f, L)$  is given by a specific formula. (which satisfies  $8\alpha(f, L) + \text{maslov}(L, f, f') \equiv 0 \pmod{4}$ ).

In the 2+1-cob. category,  $M_g$  acts as a subgroup of  $\text{Aut}(M_g)$ . The mapping cylinders are suitable cob., and the cob. determines the mapping class.

Extended act. An extended surface is a pair  $(\Sigma, L)$  where  $L \subset H^1 \Sigma$  is a Lagrangian.

extended cobordism is a 2+1-cob and an integer.

where the comp. is

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\tau'} & \Sigma'' \\ \downarrow (M, n) & & \downarrow (M', n') \\ \Sigma & \xrightarrow{\tau''} & \Sigma'' \\ \uparrow & & \downarrow \end{array} = \begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\tau''} & \Sigma'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{\tau''} & \Sigma'' \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$

$n+n' + \text{maslov}(L, \tau', \tau'') = \text{maslov}(L, \tau'', \tau')$

This extends  $G_4$  exactly like this Cob extends to  $M_g$



Gilmer defined the analog of  $G_2$ . Is there an equivalent of  $G_1$ ? Or more precisely: why isn't there an analog of  $G_1$ ? Why does [Maslov] only appear to be divisible by 2 in the <sup>class</sup> category setting?

Gilmer, Masbaum - Maslov index (symplectic...)  
Rk: 7.5.

Existence of quasimorphisms

Compare the relative growth w/ the Maslov index.

Find  $\rightarrow$  biinvariant metrics  
- quasimorphisms on  $\text{Cont}(M, \omega)$ .  
-  $C^0$ -continuity of quasimorphisms (like ~~the~~ Gromov's nonlinearity of Maslov invariant)  
- Topological invariant of Gromov's invariant  
Calabi's map  
(is Entov & Polterovich's Calabi gm. the same as Ben Simon's one?) on  $\text{Diff}(S^2)$

(Nelson) a) Criteria for automatic transversality in higher dim?

Roger b) There is a map  
 $H_k = \pi_{k-1} \text{Sym}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{Z}$  if  $c_k(M, \omega) = 0$ .  
 $\Leftrightarrow H^{k-1}(\Lambda(n))$  higher dim!  
 $\uparrow$   
equivalents

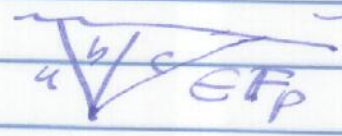
Do they play any role as obstructions in sympl. topology?  
Do these classes vanish for  $L \subset T^*N$  exactly embedded?  
Are they in general determined by the (first) Maslov class?

[Subsequ. of the top. def. is there a possibility to do more info on Reel dynamics?

Is the Maslov # of a monotone  $L \in P^2(\mathbb{C})$  always 2

c) what does the Maslov index become in  $\partial \text{Siegel}_n \setminus \Lambda(n)$ ?

(Anys) Analogy in  $\mathbb{Q}_p$ . ex:  $SL_2 \mathbb{Q}_p$  acts on the Sierre tree. 3 paths at  $\infty$  in the Sierre tree are connected by a tripod, that defines an element (the sign being an element of  $\mathbb{F}_p^* / (\mathbb{F}_p^*)^2$ .



$\text{Hom}_+ (\partial \text{Tree}, \text{this action}) = SL_2 \mathbb{Q}_p$

Similar picture for  $\text{Spin}$ ?

$K \rightarrow K_i$   
 increasing of  
 $(b_i - f_i)$  came.  
 $n \rightarrow y$   
 in  $\mathbb{F}_p$ :  $\text{Aut } \mathbb{F}_p$   
 $\mathbb{Q}$ ?

say sth nontrivial about  $\begin{cases} H^*(\text{Diff}(D^2)) \\ H^*(\text{Diff}(D^2)) \end{cases}$

we have in  $H^*(SL_2 \mathbb{R})$  the Maslov class. In  $SL_2 \mathbb{Z}$  it becomes exact: it is  $\mathcal{E}$  Rademacher.

What happens in  $\text{Spin } \mathbb{Z}$ ?  $H^2(\text{Spin } \mathbb{Z})$  isn't trivial. However, it becomes exact in  $\text{Spin } \mathbb{Z} \mathcal{E} \mathbb{R}, \text{REC}'(\text{Spin } \mathbb{Z} / \text{link w/ Jacobi modular forms})$ ?