

# Die unsterbliche Zahl

Der kürzlich verstorbene Bonner Mathematiker Friedrich Hirzebruch hatte bahnbrechende Entdeckungen gemacht

Von Cem Akalin

Friedrich Hirzebruch „hat verschiedene Bereiche aus der Geometrie miteinander verbunden. Was er für die moderne Mathematik getan hat, das war praktisch eine Revolution.“ Sir Michael Atiyah hat selbst Bahnbrechendes für die Analysis geleistet. Der 83-Jährige kannte Hirzebruch seit mehr als 50 Jahren. Er war in den 1960er Jahren zusammen mit Hirzebruch einer der Begründer der sogenannten *K*-Theorie, die sich mit „Vektorbündeln auf topologischen Räumen“ befasst.

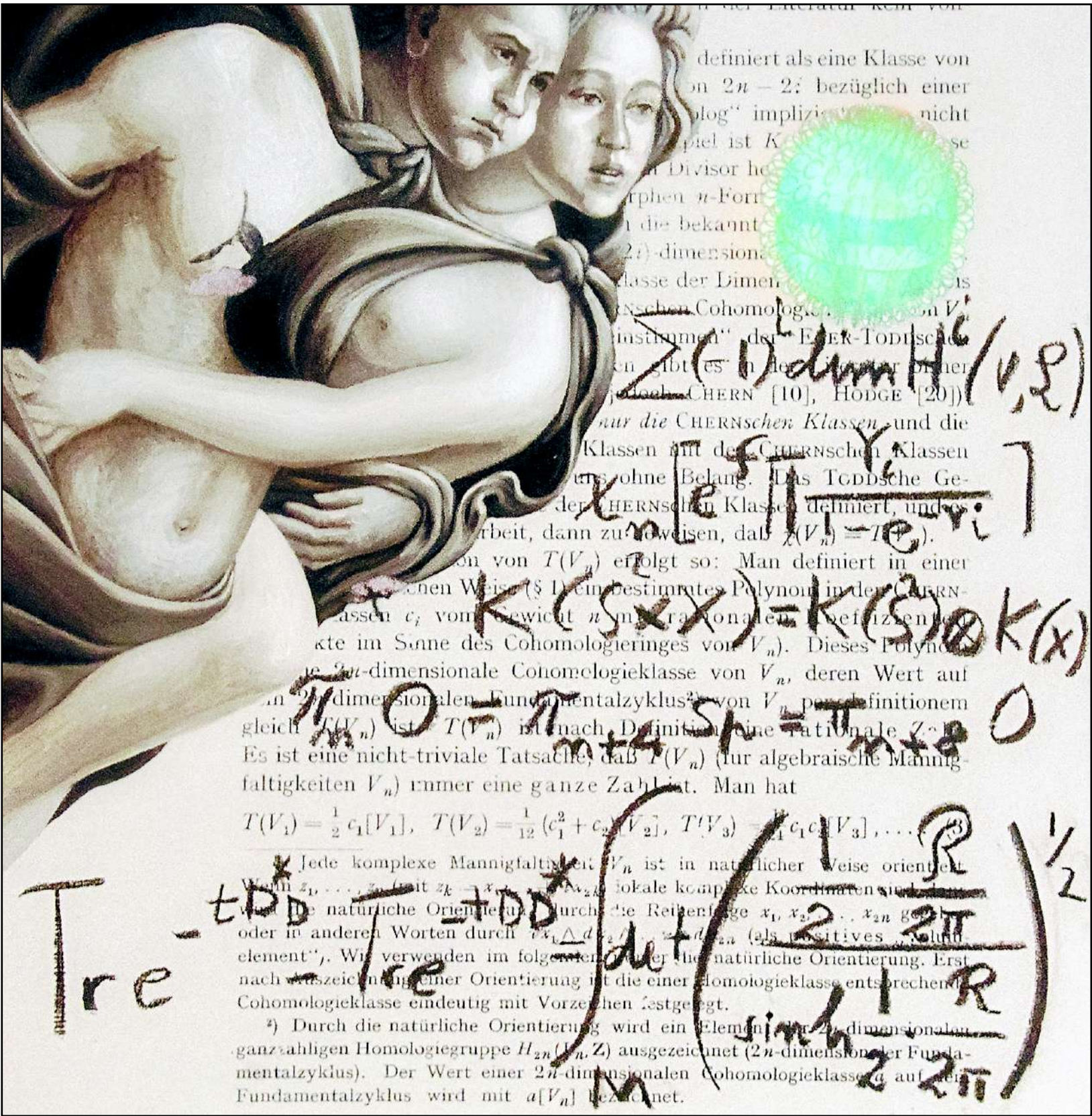
Friedrich Hirzebruch, einer der bedeutendsten Gestalten der Mathematik in Deutschland nach dem Zweiten Weltkrieg, starb am Pfingstsonntag und wurde in dieser Woche unter großer Anteilnahme von Wissenschaftlern aus dem In- und Ausland beigesetzt. Sein Werk hatte richtungsweisenden Einfluss auf die Entwicklung der modernen Mathematik. „Was aber vor allem sein Verdienst war, Friedrich Hirzebruch hat nach den Jahren von Krieg und Verfolgung viel für den Ruf Deutschlands, auch als international anerkanntes Zentrum der Mathematik, gemacht“, sagte Professor Don B. Zagier, Direktor des von Hirzebruch gegründeten Max-Planck-Instituts für Mathematik in Bonn.

1988 erhielt Hirzebruch in Israel den Wolf-Preis für „Verdienste zum Wohle der Menschheit und freundschaftliche Beziehungen unter den Völkern“ und sprach vor der Knesset, wo er an das Schicksal vieler von den Nazis verfolgter Wissenschaftler erinnerte. Für seine Leistungen wurde Hirzebruch unter anderem auch mit dem großen Verdienstkreuz des Verdienstordens der Bundesrepublik Deutschland mit Stern, dem japanischen Seki-Takakazu-Preis, der russischen Lomonossow-Goldmedaille, der Albert-Einstein-Medaille und der Georg-Cantor-Medaille der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ausgezeichnet. 14 Universitäten und eine Akademie trugen ihm ihre Ehrendoktorwürde an. Er war außerdem Mitglied zahlreicher Akademien der Wissenschaft sowie des Ordens Pour le mérite.

Hirzebruch, am 17. Oktober 1927 in Hamm/Westfalen geboren, studierte von 1945 bis 1950 Mathematik in Münster und Zürich. Mit 22 Jahren promovierte er bei Heinrich Behnke und Heinz Hopf über vierdimensionale Riemannsche Flächen. Ab 1952 verbrachte er zwei Jahre in Princeton. In diese Zeit fällt sein Beweis des sogenannten Riemann-Roch-Theorems. 1969 rief er den Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik ins Leben. 1980 entstand das Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn, das Hirzebruch initiiert hatte und bis 1995 leitete.

Erst kürzlich wurde er gefragt, wie er darauf kam, den Signaturatz zu beweisen. Seine Antwort: „Ich war auf der Suche nach einer guten Formel für Riemann-Roch – der Beschreibung der Dimensionen linearer Systeme auf algebraischen Mannigfaltigkeiten in beliebiger Dimension. Der Signaturatz war eine Vorbereitung für das Riemann-Roch-Theorem. Ich wusste, wie man die Signatur durch charakteristische Zahlen, Pontrjagin Zahlen, das sind spezielle Chernsche Zahlen, beschreibt. Aber ich konnte das nicht beweisen.“ Dann erschien eines Tages eine Note eines anderen Mathematikers. René Thom hatte über den sogenannten Kobordismus-Ring, eine Art Algebraisierung der Topologie, geschrieben. „Mit Thoms Arbeit war klar, dass man den Signaturatz nur für die komplexen projektiven Räume kontrollieren braucht. Als ich das las, war der Signaturatz sofort bewiesen. Das dauerte sozusagen nur wenige Sekunden.“

Fotos: Andrea Künstle / Dirk Ferus/Bildarchiv Oberwolfach



Ein Geschenk im Arbeitszimmer des Professors: die legendäre Formel von Friedrich Hirzebruch in einer kunstvollen Darstellung

Alles klar? Um auch nur etwas nachvollziehen zu können, womit sich Hirzebruch beschäftigte, muss man viele Schritte zurückgehen. Die Grundlage für unser Verständnis von Zahlen und Körpern legten Mathematiker wie Euklid vor mehr als 2.000 Jahren. Was ein Dreieck ist, welchen Gesetzen Rechtecke und Kreise, Räume und Flächen unterworfen sind, das schrieb der geniale Grieche als erster nieder. Seine Grundlagen galten für Generationen von Denkern als Standardwerk. Dass die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks immer 180 Grad ergibt, ist ein längst bewiesenes Gesetz. Doch was geschieht, wenn die Formen nicht mehr konstant sind? Was passiert bei Dreiecken mit gekrümmten Oberflächen? Die Gesetze scheinen außer Kraft gesetzt. Denn die Winkelsumme variiert ganz plötzlich.

Die Topologie ist praktisch eine „Geometrie des Ortes“. Hier verhält es sich fast so, als würden die Umriss der Fläche aus Gummi-

bändern bestehen, Körper wie Ballons elastisch sein. Die Topologie untersucht, wie man verschiedene Formen erzeugen, ändern, vergleichen und organisieren kann. In der Topologie gibt es keinen gravierenden Unterschied zwischen einem Kreis und einem Quadrat, weil die eine Form leicht in die andere gedehnt werden kann.

Die Voraussetzung ist stets, dass man kein Loch und keinen Riss hineinschneidet. Solange man eine Figur durch elastische Dehnungen in eine andere umwandeln kann, ohne ein Loch hineinzuschneiden oder es zu füllen, sind beide Formen topologisch äquivalent. Wenn man eine Figur dehnt, verändert man lediglich ihre Abmessungen. Aus der Form einer 8 beispielsweise lässt sich keine 6 machen, weil die 8 aus zwei Schleifen besteht, die 6 über einen Henkel verfügt. Mit Hilfe der Riemannschen Geometrie, einem Teilgebiet der Differentialgeometrie, die nach Bernhard Riemann (1826-1866) benannt

wurde, kann man Winkel, Längen, Abstände und Volumen von Räumen beliebiger Dimensionen und gekrümmte Flächen messen.

Ohne die Riemannsche Geometrie hätte Einstein niemals seine allgemeine Relativitätstheorie beschreiben können. Riemann zeigte, dass sich durch eine sorgfältige Analyse der Abstände zwischen allen Orten auf oder in einem Objekt das Ausmaß seiner Krümmung ermitteln lässt. Diese mathematische Entdeckung ermöglichte Einstein zu zeigen, dass die Krümmung der Raumzeit die Gravitationskraft verkörpert. Ein simples Beispiel kann zeigen, wie sich die Mathematiker dies vorstellen: Stellt man sich auf ein Trampolin, dann wird die gespannte elastische Fläche aufgrund des Gewichts gedehnt. Die Dehnung ist dort am größten, wo das meiste Gewicht lagert und lässt zu den Rändern immer mehr nach. Grob dargestellt, war das das For-

schungsgebiet Hirzebruchs, wobei es auch darum ging festzustellen, ob es in dieser komplexen Welt der Mehrdimensionalität Konstanten gibt.

Dass es die gibt, hat Hirzebruch nachgewiesen. Im Prinzip eine komplizierte, vielschichtige geometrische Frage, die großen Einfluss auf die mathematische Physik hatte. Es ging darum eine Signatur zu finden, die sich nicht ändert. Denn eines der großen Geheimnisse der Mathematik ist die Forschung nach der endlichen Unendlichkeit, die Frage nach dem, was hinter dem Universum ist. Nicht viele Dinge, lassen sich auf eine einzige Zahl feststellen.

So merkwürdig das klingt: Der Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) entdeckte eine ganz augenscheinliche Konstante, die fast schon lächerlich klingt, aber genial ist. Er entdeckte eine sehr einfache Beziehung zwischen der jeweiligen Kanten, Ecken und Flächen von Körpern: egal aus wie viel

Seiten Polyeder bestehen, die Anzahl der Ecken (E) plus die Anzahl der Flächen (F) minus die Anzahl der Kanten (K) ergibt immer 2:

$$E + F - K = 2$$

Das passt auf einen Würfel wie auf eine Pyramide. Die Pyramide hat fünf Ecken, 5 Flächen und acht Kanten:  $5 + 5 - 8 = 2$ . Beim Würfel:  $8 + 6 - 12 = 2$ . Eine ähnliche Formel, indes auf höherer mehrdimensionaler Ebene, hat Hirzebruch mit seinem Signaturatz entdeckt. Mathematiker sprechen „Invarianten“, wenn eine Zahl herauskommt, die sich nicht ändert, Zagier etwas poetisch von einer „unsterblichen Zahl“.

„Versuchen Sie einem Außerirdischen nur mit Worten zu erklären, was Musik ist. Sie können ihm erklären, dass das Schwingungen sind, die etwa durch Saiten verursacht werden, die über Resonanzkörper verstärkt werden, und dass diese Schwingungen über die Sinnesorgane wahrgenommen werden können. Doch was sagt das über die Musik aus? Genauso schwierig ist es, darzustellen, was Hirzebruch für die Mathematik geleistet hat“, sagt Zagier.

„Durch das, was Hirzebruch entdeckt hat, haben wir ein besseres Verständnis der Beziehungen zwischen der reinen Mathematik und der theoretischen Physik“, sagt auch Professor Andrew Ranicki von der School of Mathematics der University of Edinburgh. „Viele spektakuläre Erkenntnisse der modernen Physik, wären ohne Hirzebruchs Entdeckungen nicht möglich gewesen.“

Im Max-Planck-Institut für Mathematik über der Hauptpost in der Bonner Innenstadt hatte Hirzebruch bis zuletzt sein Büro. Im obersten Stock unter der Glaskuppel versammeln sich jeden Tag punkt 16 Uhr die Forscher zum Tee, ein Ritual, auf das der Professor großen Wert legte. Wissenschaftler sollen nicht für sich im stillen Kämmerlein vor sich hin forschen, war sein Credo. Ihm lag viel am Dialog.

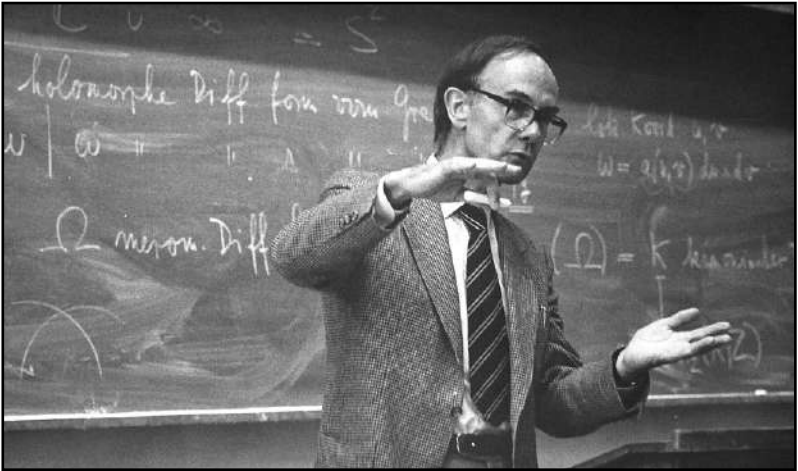
Nicht zuletzt war es sein Verdienst, jedes Jahr die führenden Mathematiker der Welt einmal im Jahr zur sogenannten „Arbeitstagsung Bonn“ einzuladen. Heute geschieht das mittlerweile nur noch alle zwei Jahre. Aber die Treffen, zu dem auch immer eine Schiffsfahrt über den Rhein mit kurzer Wanderung und anschließendem Erdbeerkuchenessen gehörte, waren so etwas wie Familientreffen. Serre, Atiyah, Bott, Grothendieck, Deligne – sie alle kamen. Hirzebruch schaffte in Bonn ein einmaliges Arbeitsumfeld und förderte junge Leute. Die Szene kennt sich. So war es auch am vergangenen Dienstag bei der Trauerfeier im Uni-Club.

„Hirzebruch war ein geselliger Mensch mit ungeheuer viel Humor und einem enorm menschlichen Gefühl“, sagte Zagier, der Hirzebruch als 18-Jähriger Doktorand kennenlernte. „Ich studierte damals in Oxford. Als meine Forschung stockte, schrieb ich Hirzebruch, ob ich bei ihm promovieren könnte. Er lud mich nach Bonn ein und wir unterhielten uns Stunden lang über Mathematik. Obwohl ich so jung war, behandelte er mich als echten Mathematiker.“ Zagier kam zu Hirzebruch und blieb.

Bis zuletzt forschte und reiste Hirzebruch und hielt Vorträge. Am 23. April hielt er seinen letzten Vortrag. Er lautete: „The shape of planar algebraic curves defined over the reals“.

## Weitere Infos

Wer einen Eindruck von Hirzebruch gewinnen möchte, kann dies auf der Webseite des Bonner Max-Planck-Instituts für Mathematik tun. Dort sind auch Videos des Bonner Professors zu sehen: [www.mpim-bonn.mpg.de](http://www.mpim-bonn.mpg.de)



Berlin 1981: Friedrich Hirzebruch reiste viel und hielt Vorträge über seine Forschungen



Mathematisches Abendmahl: Ida Thompson (Mitte) backt 2010 die Formel für Hirzebruch (links) und Michael Atiyah (rechts)

The lady in the middle is not Ida Thompson, but Anne H., the daughter-in-law of F.H.. Photo taken in Edinburgh, in the house of I.T. and Andrew Ranicki