COURS D'ANALYSE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME TROISIÈME.

CALCUL INTÉGRAL.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

Extraits des pages XI et XII du troisième volume par C. Jordan, 1887.

TABLE DES MATIÈRES.

Numéros | Pages

NOTE SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Remplaçant $\frac{\partial u}{\partial v}$, $\frac{\partial u}{\partial w}$, ... par leurs valeurs

$$-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial v}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial w}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad \ldots,$$

cette expression deviendra égale à $\frac{J}{\frac{\partial F_1}{\partial u}}$; et, comme $\frac{\partial F_1}{\partial u}$ a au point $(x_0, y_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots)$ une valeur finie et différente de zéro, J_1 sera lui-même fini et différent de zéro.

On pourra donc, par hypothèse, déterminer des fonctions v, w, ... des variables indépendantes x, y, ..., qui satisfassent identiquement aux équations $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, ..., qui se réduisent à v_0, w_0, ... pour $x = x_0$, $y = y_0$, ... et qui admettent des dérivées partielles aux environs de ce point. Substituant ces valeurs de v, w, ... dans l'expression de u, on obtiendra pour u, v, w, ... des fonctions de x, y, ... satisfaisant aux conditions requises.

39. Courbes continues. — Nous appellerons *courbe* la suite des points représentés par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

où f, φ sont des fonctions de la variable indépendante t. Si ces fonctions sont continues, la courbe sera dite *continue*.

Si ces fonctions ont une période commune ω, la courbe sera fermée. Elle aura d'ailleurs des points multiples si x et y reprennent simultanément les mêmes valeurs pour des valeurs différentes de t (pour des valeurs qui ne soient pas égales aux multiples près de la période, s'il s'agit d'une courbe fermée).

La distance d'un point fixe ξ, η à un point t, x, y d'une courbe continue est une fonction continue de t; si le point (ξ, η) n'est pas sur la courbe, cette fonction ne s'annulera pas; elle admettra donc un minimum différent de zéro, qu'elle atteindra pour une certaine valeur de t, et qu'on pourra appeler la *distance* du point (ξ, η) à la courbe.

Soient de même (t, x, y) et (u, ξ, η) deux points pris sur deux courbes

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad \xi = F(u), \qquad \eta = \Phi(u).$$

Leur distance est une fonction continue de t et de u. Si les courbes ne se rencontrent pas, cette fonction ne s'annulera pas. Elle atteindra donc, pour un certain système de valeurs de t, u, une valeur minimum, différente de zéro, qui sera la *plus courte distance* des deux courbes.

Soient, enfin,

(t, x, y) et (t', x', y') deux points variables quelconques pris sur une même courbe;

$\Delta = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$ leur distance;

$t'-t = h$ la différence de leurs arguments. Si la courbe est fermée, cette différence n'étant déterminée qu'aux multiples près de ω, nous adopterons celle de ses valeurs qui est comprise dans l'intervalle de $-\frac{\omega}{2}$ à $\frac{\omega}{2}$.

D'après les propriétés des fonctions continues, on pourra, quelle que soit la quantité α, déterminer une autre quantité β, telle que, pour toutes les valeurs de h dont le module est $< \beta$, on ait

$$\operatorname{mod}(x'-x) < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \qquad \operatorname{mod}(y'-y) < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta < \alpha.$$

Réciproquement, lorsque la courbe n'a pas de points multiples, si Δ tend vers zéro, il en sera de même de h. En effet, Δ est une fonction continue de t et de h, qui ne s'annule que pour $h = 0$. Si donc on considère tous les systèmes de points t, $t+h$, où le module de h surpasse une quantité fixe quelconque β', il existera dans cette suite un système pour lequel Δ prendra une valeur minimum α', différente de zéro. Si donc $\Delta < \alpha'$, on aura nécessairement $h < \beta'$.

Supposons maintenant $h < \beta$, et considérons un point quelconque de l'arc de courbe compris entre t et t'. Son argument $t'' = t + \theta h (\theta > 0 < 1)$ différera de t et de t' d'une quantité dont le module est $< \beta$. La distance de t'' à chacun des points t et t' sera donc $< \alpha$.

Nous obtenons donc ce résultat :

Si la distance de deux points t, t' d'une courbe sans points multiples est infiniment petite, la distance de ces mêmes points à un point quelconque t'' de l'arc qui les joint le sera également.

40. Cela posé, soit C une courbe fermée sans points multiples. Donnons à l'argument t une série de valeurs infiniment voisines $t_0, \ldots, t_i, \ldots$, embrassant une période. Sur les points ainsi déterminés, construisons un polygone inscrit P. La distance d'un quelconque de ses sommets, tel que t_i, aux divers points de l'arc de courbe $t_i t_{i+1}$, et notamment à son autre extrémité t_{i+1}, pourra être supposée $< \delta$, δ étant une quantité infiniment petite, indépendante de la position du point t_i. La distance d'un point quelconque t, pris sur l'arc $t_i t_{i+1}$, à un autre

point t' pris sur la corde $t_i t_{i+1}$ sera $\gtrless tt_i + t_i t' \gtrless tt_i + t_i t_{i+1} < 2\delta$.

Le polygone P peut avoir des points multiples; mais on en déduit aisément un polygone réduit P′ sans points multiples, et tel que la distance de deux points quelconques t, t', pris sur une partie de la courbe et sur la partie correspondante de ce polygone, soit infiniment petite, et cela uniformément.

Suivons, en effet, le contour du polygone P jusqu'à ce que nous arrivions à un point multiple a; soit $t_i t_{i+1}$ le côté sur lequel il est situé. Continuons à suivre le polygone jusqu'à ce qu'on arrive à un second côté $t_k t_{k+1}$, passant également par le point multiple a. Les droites $t_i t_{i+1}$ et $t_k t_{k+1}$ ayant une longueur $< \delta$ et se coupant au point a, la distance des points t_i et t_{k+1} sera $< 2\delta$, quantité infiniment petite. La différence $t_{k+1} - t_i$ de leurs arguments sera donc $< \varepsilon$ en valeur absolue, ε étant une quantité infiniment petite.

Si cette différence est positive, la distance au point t_i d'un point quelconque de l'arc $t_i t_{i+1} \dots t_{k+1}$ sera $< \eta$, η étant un infiniment petit. La distance d'un point quelconque t, pris sur la partie $t_i \dots t_k$ de cet arc, à un point quelconque t' pris sur la droite $t_i a$, sera donc $< \eta + \delta$. D'autre part, la distance de deux points quelconques, pris sur l'arc $t_k t_{k+1}$ et sur la droite at_k, est $< 2\delta$. Si donc, en décrivant le contour du polygone P, nous nous abstenons de décrire la boucle $at_{i+1} \dots t_k a$, de manière à substituer à la ligne polygonale $t_i t_{i+1} \dots t_k$ la droite $t_i a$ et, au côté $t_k t_{k+1}$, la partie at_{k+1} de cette droite, nous obtiendrons un polygone réduit P_1, ayant moins de points multiples que P, et tel qu'en prenant arbitrairement deux points t, t' sur une partie de la courbe et sur la partie correspondante du polygone, leur distance soit constamment $< \alpha$, α désignant un infiniment petit, égal à la plus grande des quantités $\eta + \delta$, 2δ.

Si la différence $t_{k+1} - t_i$ était négative, au lieu de supprimer dans le polygone P la boucle $at_{i+1} \dots t_k a$, on supprimerait l'autre boucle $at_{k+1} \dots t_i a$, et l'on arriverait évidemment au même résultat.

Si ce polygone P_1 présente encore des points multiples, on y supprimera une nouvelle boucle, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un polygone réduit P′, sans point multiple, et jouissant des mêmes propriétés.

41. Ce nouveau polygone P′ divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure.

Nous allons établir qu'il existe toujours un point p, situé dans la région intérieure, et dont la plus courte distance à P′ surpasse une quantité fixe, différente de zéro.

Soient, en effet, $A = (t_0, x_0, y_0)$ et $B = (t_1, x_1, y_1)$ les deux points de la courbe C pour lesquels x atteint sa plus petite valeur x_0 et sa plus grande valeur x_1. La courbe sera formée de deux arcs, l'un allant de A en B, l'autre revenant de B en A.

Considérons sur ces deux arcs deux points (t, x, y) et (t', x', y'), dont les abscisses soient comprises entre $x_0 + \beta$ et $x_1 - \beta$, β étant une quantité fixe arbitraire, moindre que $\frac{x_1 - x_0}{2}$. La distance de chacun de ces points à l'un quelconque des points A, B étant $\overline{\gtreqless} \beta$, les différences des arguments, $t - t_0$, $t_1 - t$, $t' - t_1$, $t_0 - t'$, surpasseront une quantité fixe γ; et, comme l'argument varie de ω quand on décrit la courbe entière, on en conclut que $t' - t$ est compris entre 2γ et $\omega - 2\gamma$. La distance des points t et t' ne pourra donc s'abaisser au-dessous d'une quantité fixe d.

Cela posé, la distance entre deux points choisis à volonté sur deux portions correspondantes de la courbe C et du polygone P' est $< \alpha$, α désignant un infiniment petit. On pourra donc déterminer sur P' deux points A', B', dont les distances à A, B soient respectivement $< \alpha$; et le polygone se composera également de deux arcs polygonaux, l'un allant de A' à B', l'autre revenant de B' à A'. Prenons respectivement sur ces deux arcs deux points (ξ, η) et (ξ', η'), dont les abscisses soient comprises entre $x_0 + \beta + \alpha$ et $x_1 - \beta - \alpha$. Il existe sur la courbe des points t, t' dont les distances à ces deux-là sont $< \alpha$; leurs abscisses seront comprises entre $x_0 + \beta$ et $x_1 - \beta$; leur distance sera donc $> d$, et la distance des points (ξ, η), (ξ', η') sera $> d - 2\alpha$, quantité qui deviendra, lorsque α décroît, plus grande que d_1, d_1 étant une quantité quelconque moindre que d.

Cela posé, coupons le polygone réduit par la droite $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$. Les points A' et B' n'étant pas du même côté de cette droite, elle traversera chacun des deux arcs A'B' et B'A' en un nombre impair de points. En remontant cette droite à partir de l'infini négatif, on sera d'abord en dehors du polygone. Au premier point d'intersection, on entrera dans l'intérieur; on en ressortira au second, et ainsi de suite.

Supposons, pour fixer les idées, que la droite en question traverse d'abord l'arc A'B' en m points consécutifs, puis l'arc B'A' en n points, puis l'arc A'B' en m' points, etc. La série des nombres $m, n, m', \ldots$ contiendra au moins deux nombres impairs. Soit, par exemple, m' le premier nombre de cette nature que contient la série. Le nombre $m + n + m'$ étant impair, le tronçon de droite contenu entre le $m + n + m'^{\text{ième}}$ point d'intersection et le suivant sera intérieur au polygone; d'ailleurs, ses deux extrémités sont l'une sur l'arc A'B', l'autre sur l'arc B'A'.

Considérons un point quelconque de ce tronçon de droite. La somme de ses distances aux portions q et q' des lignes polygonales A'B' et

B'A' comprises entre les abscisses $x_0+\beta+\alpha$ et $x_1-\beta-\alpha$ est au moins égale à la plus courte distance de ces deux lignes, qui est $> d_1$. Or, lorsque le point se déplace sur le tronçon de droite considéré, sa distance à q, d'abord nulle, varie d'une façon continue et devient plus grande que d_1. Il existe donc sur cette ligne un point p, où cette distance devient égale à $\frac{d_1}{2}$. La distance de ce point à q' sera $> \frac{d_1}{2}$.

D'autre part, l'abscisse de ce point étant égale à $\frac{x_0+x_1}{2}$, sa distance à un quelconque des points des lignes A'B' ou B'A', dont l'abscisse est moindre que $x_0+\beta+\alpha$ ou plus grande que $x_1-\beta-\alpha$, sera au moins égale à $\frac{x_1-x_0}{2}-\beta-\alpha$, quantité qui, pour α assez petit, devient plus grande que toute quantité d_2 inférieure à $\frac{x_1-x_0}{2}-\beta$. La plus courte distance du point considéré au polygone P' sera donc $> l$, l désignant la plus petite des quantités $\frac{1}{2}d_1$ et d_2.

42. Cela posé, le lieu des points du plan qui sont à la distance α d'un côté du polygone P' se compose de deux droites égales et parallèles à ce côté et de deux demi-circonférences reliant leurs extrémités. Traçons ces droites et ces cercles pour chacun des côtés de P'. L'ensemble de ces lignes auxiliaires décomposera le plan en un certain nombre de régions. Considérons, en particulier, celle de ces régions qui contient le point p. Elle est intérieure à P', et tous les points de son intérieur seront à une distance de P' plus grande que α. Elle sera limitée par un contour fermé R sans point multiple, dont chaque point sera à la distance α de P'. Le cercle de rayon $l-\alpha$, décrit du point p comme centre, sera en entier dans son intérieur. Au contraire, tous les points de la courbe C lui seront extérieurs, car leur distance à P' est $< \alpha$.

Décomposons le contour R en éléments infiniment petits par des points de division a, a', a'', ... Soient ab, $a'b'$, ... des droites de plus courte distance menées de ces points au contour P'. Ces droites auront α pour longueur commune. Elles ne peuvent rencontrer sur leur parcours ni R ni P'; car, si cela avait lieu, on aurait sur R un point dont la distance à P' serait $< \alpha$. Elles resteront donc dans l'espace annulaire compris entre R et P'. Enfin, elles ne peuvent se couper mutuellement; car, si ab et $a'b'$, par exemple, se coupaient en un point c de leur parcours, on aurait évidemment

$$ab'+a'b < ab+a'b' < 2\alpha;$$

l'une des deux distances ab', $a'b$ serait donc $< \alpha$. On aurait donc ici encore, sur R, un point dont la distance à P' serait $< \alpha$.

Cela posé, soient ab, $a'b'$ deux lignes de plus courte distance consécutives. A la portion bcb' du polygone P′, comprise entre b et b', correspond un arc BB′ de la courbe C, dont les extrémités B, B′ sont respectivement à une distance $< \alpha$ de b et de b'. La distance rectiligne des points B, B′ sera infiniment petite, car elle est au plus égale à

$$Bb + ba + aa' + a'b' + b'B',$$

quantité moindre que $4\alpha + aa'$. Donc tous les points de l'arc BB′ sont à une distance infiniment petite de B. Il en sera de même des points de la ligne polygonale bcb', dont chacun est éloigné de moins de α de l'un des points de BB′. D'ailleurs la ligne polygonale $Bbaa'b'B'$ est également infiniment petite. Donc tout le contour polygonal $baa'b'cb$ sera contenu dans un cercle de rayon infiniment petit décrit autour de B, et tous les points de la région intérieure à ce contour seront infiniment voisins de B.

Donc tout point de la région annulaire comprise entre R et P′ sera infiniment voisin de la courbe C.

Le contour R, dont nous venons d'établir les propriétés, est formé de lignes droites et d'arcs de cercle; mais ces arcs de cercle, s'il en existe, tournent leur convexité vers l'intérieur de P′ et, en remplaçant chacun d'eux par un polygone inscrit dont les côtés soient assez multipliés pour que la distance du cercle au polygone soit moindre que la plus courte distance de R à la courbe C, on obtiendra un nouveau polygone S uniquement formé de lignes droites et jouissant des mêmes propriétés que R, à savoir : 1° il n'a pas de point multiple; 2° il contient à son intérieur un cercle de rayon fini; 3° il laisse à son extérieur tous les points de P′ et de C; 4° tout point de l'espace annulaire compris entre P′ et S est infiniment voisin de C.

43. On pourrait considérer de même, parmi les régions dans lesquelles le plan est décomposé par les lignes droites et les cercles auxiliaires, celle qui est extérieure à toutes ces lignes. On verrait aisément, par des considérations toutes semblables à celles que nous avons développées, que tous ses points sont à une distance de P′ plus grande que α; qu'elle est limitée par un contour fermé R′, sans points multiples, enveloppant le polygone P′ et la courbe C, et dont tous les points sont à la distance α de P′; que tous les points de l'espace annulaire, compris entre R′ et P′, sont infiniment voisins de C; enfin, qu'on peut remplacer R′ par un polygone S′ exclusivement formé de lignes droites et jouissant des mêmes propriétés.

44. Il est donc établi qu'on peut, quelle que soit la quantité ε, trouver deux polygones S, S′ sans points multiples, intérieurs l'un à l'autre, entre lesquels la courbe se trouve contenue, et tels que chaque point de l'espace annulaire qui les sépare soit à une distance de C moindre que ε.

Soient η, η' les plus courtes distances de ces polygones à la courbe C; ε_1 une quantité moindre que η et η'. On pourra trouver deux nouveaux polygones S_1, S'_1, intérieur et extérieur, dont l'écartement à la courbe soit $< \varepsilon_1$; ils seront évidemment compris entre les deux autres.

Continuant ainsi, on pourra former une série de polygones intérieurs de plus en plus grands S, S_1, ..., et une série de polygones extérieurs S', S'_1, ..., comprenant toujours entre eux la courbe C et s'en rapprochant de plus en plus.

Les points du plan seront de trois sortes :

1° Ceux qui, à partir d'un certain terme de la série, deviendront extérieurs aux polygones S', S'_1, ...; on les nommera *points extérieurs à la courbe;*

2° Ceux qui sont intérieurs à partir d'un certain moment aux polygones S, S_1, ...; on les nommera *points intérieurs à la courbe;*

3° Ceux qui sont intérieurs à tous les polygones de la suite S', S'_1, ..., mais extérieurs à tous les polygones S, S_1, ... Ces points, dont la distance à la courbe est moindre que toute quantité assignable, seront situés sur elle.

Il est donc établi que toute courbe continue C divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini.

45. Deux points intérieurs q, q' peuvent toujours être réunis par un trait polygonal sans traverser la courbe. Il existe, en effet, dans la série S, S_1, ... des polygones intérieurs, un polygone S_i qui les contient tous deux. Par les points q, q', menons des droites quelconques qui coupent ce polygone en r et r'. Les droites qr, $q'r'$, jointes à l'un des deux arcs de S_i qui réunissent r à r', satisferont à la question.

Deux points extérieurs pourront être réunis de même sans traverser la courbe.

Au contraire, toute ligne continue D, qui joint un point intérieur q à un point extérieur q', coupera nécessairement la courbe C; car, en répétant le raisonnement par lequel on a démontré qu'une fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler, on verra qu'il existe sur la ligne D un point q'', tel que tout arc contenant q'' contienne à la fois des points intérieurs et des points extérieurs à C, d'où résulte que la distance de q'' à la courbe C est moindre que toute quantité assignable.

Remarquons, enfin, que toute ligne AC, continue et sans points multiples, menée dans l'intérieur d'une ligne continue et fermée sans points multiples ABCD entre deux points A et C de son contour, divise son intérieur en deux régions, limitées l'une par la ligne fermée ACDA, l'autre par la ligne fermée ACBA.

46. Courbes rectifiables. — Considérons une courbe, définie par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t).$$

Soient t_0, t_1, ..., t_n, T une série de valeurs du paramètre t; x_0, y_0; x_1, y_1; ...; X, Y les valeurs correspondantes de x, y. Le périmètre du polygone inscrit à la courbe, et dont ces points sont les sommets, sera

$$(5) \qquad \Sigma \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}.$$

Si cette somme tend vers une limite déterminée et constante, lorsque les intervalles $t_{k+1} - t_k$ dans lesquels on a divisé l'intervalle $T - t_0$ décroissent indéfiniment d'amplitude, cette limite représentera la *longueur de l'arc de courbe* correspondant à cet intervalle.

Pour que cette limite existe, il faut, en premier lieu, que la somme (5) ne puisse pas croître indéfiniment par un choix d'intervalles quelconque. Or l'expression

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

est au moins égale à $\operatorname{mod}(x_{k+1} - x_k)$ et à $\operatorname{mod}(y_{k+1} - y_k)$, mais ne peut surpasser la somme de ces quantités. Pour que cette première condition soit remplie, il est donc nécessaire et suffisant que les sommes

$$\Sigma \operatorname{mod}(x_{k+1} - x_k), \qquad \Sigma \operatorname{mod}(y_{k+1} - y_k)$$

soient limitées et, par suite, que $f(t)$ et $\varphi(t)$ soient des fonctions à variation limitée.

47. Supposons cette condition remplie, et soit L le maximum du périmètre des polygones possibles. Il faudra encore que le périmètre de tout polygone, pour lequel les intervalles $t_{k+1} - t_k$ sont suffisamment petits, soit aussi voisin qu'on voudra de L.

Cherchons à exprimer analytiquement cette condition. Nous remarquerons tout d'abord que les fonctions $f(t + \delta)$ et $\varphi(t + \delta)$, où δ est une quantité positive indéfiniment décroissante, tendront vers des limites déterminées $f(t + 0)$ et $\varphi(t + 0)$; car cela est évident pour chacune des deux fonctions non décroissantes dont $f(t)$ ou $\varphi(t)$ est la différence.