XII

COLLOQUE INTERNATIONAL
DE
TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

PARIS

26 Juin — 2 Juillet 1947

Dans les premiers jours de l'été de l'an 1947, sur l'initiative de la Fondation Rockefeller et grâce aux apports conjugués de cet organisme et du Centre National de la Recherche Scientifique, divers colloques de savants furent organisés en France, essentiellement à Paris. La direction de l'un d'eux me fut confiée. La Topologie n'a pas cessé de m'intéresser, du moins celle des espaces cartésiens, et même plus particulièrement celle du plan. Mais l'abondance, la variété des résultats, le mérite des chercheurs sont moindres dans la topologie cartésienne générale que dans la topologie dite algébrique.

Henri Poincaré peut, à juste titre, passer pour le fondateur de cette science dans ses aspects modernes. Avant lui, elle en était à ses balbutiements. L'étudiant sous le nom d'*Analysis Situs*, notre célèbre compatriote en avait posé les définitions, créé les méthodes, fixé aussitôt le vocabulaire encore presque intégralement usité aujourd'hui. Il en avait signalé les applications aux intégrales curvilignes ou multiples, à la théorie des groupes. Une des premières réunions scientifiques de haut rang, sinon la première, convoquée pour tenir ses assises à l'Institut dont le nom est un hommage à la mémoire de ce savant, pouvait être assez naturellement affectée à la discipline qui devait tant à ses recherches et que son importance actuelle déjà recommandait à notre choix.

En Topologie algébrique, les variétés se distinguent par des caractères en nombre fini. La Topologie générale cartésienne ignore cette limitation. Les courbes ou variétés intégrales des équations différentielles ou aux dérivées partielles, régulières et simples dans le fini, déterminent, quand on les prolonge jusqu'aux bornes de leurs domaines d'existence, des configurations limites où les très singulières possibilités de la topologie non restreinte s'accomplissent normalement. Mais, quand les équations admettent des intégrales premières algébriques, la topologie homonyme à celles-ci ne peut manquer de révéler au sujet des variétés résolvantes certaines propriétés géométriques d'un intérêt évident.

Les représentants les plus réputés de cette profonde discipline avaient bien voulu répondre à notre appel. Celui-ci n'avait pu cependant s'adresser à tous ceux dont nous aurions souhaité la participation. L'admirable générosité de nos Mécènes devait inévitablement s'imposer des limites. En provenance des pays les plus voisins de la France, nous avons pu solliciter le concours de tous les topologues éminents. Pour les États les plus éloignés, la prise en charge des voyages excédait nos facultés, et c'est à regret que nous avons dû nous abstenir d'inviter certains savants à qui le lecteur de cet Ouvrage assurément pensera.

L'importance des communications dont on lira le texte dans ce Recueil montrera, je l'espère, que par sa réussite le Colloque de la Topologie algébrique a justifié la confiance que les instigateurs de ces réunions scientifiques accordaient par avance à leur efficacité.

Le service administratif du colloque fut assuré par M. Paul Belgodère dans des conditions très satisfaisantes. Je tiens à lui en exprimer mes remercîments.

ARNAUD DENJOY.

SUR LA NOTION DE CARAPACE EN TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE;

PAR HENRI CARTAN.
(Paris.)

Les idées que j'avais exposées en 1947, sous ce titre, dans une conférence au Colloque international de Topologie algébrique, à Paris, ont passablement évolué depuis cette date, sinon dans les principes essentiels, du moins dans la présentation. De plus, leur champ d'applicabilité a été assez notablement étendu. On comprendra que, deux ans plus tard, l'auteur ait préféré ne pas donner à l'impression un texte qui ne correspond plus entièrement à ses vues actuelles; celles-ci seront livrées à la publication dans un Mémoire détaillé, dont la rédaction n'est pas encore entièrement achevée.

Je voudrais néanmoins tenter de caractériser ici en quelques lignes la tentative qui avait fait l'objet de mon exposé du 27 juin 1947. Il s'agit essentiellement de construire une théorie axiomatique de la cohomologie des espaces *localement compacts*. Cette théorie diffère de celle d'Eilenberg et Steenrod (*Proc. nat. Acad. Sc.*, 31, 1945, p. 117-120) sur plusieurs points importants. Tout d'abord, elle ne vise à axiomatiser que la cohomologie au sens de Čech, ou au sens d'Alexander (on sait que les définitions de Čech et celles d'Alexander, comme celles de Kolmogoroff, conduisent à des anneaux de cohomologie isomorphes, au moins dans le cas des espaces compacts); au contraire, la théorie d'Eilenberg-Steenrod se donnait pour but d'englober toutes les théories de l'homologie ou de la cohomologie. Précisément à cause de sa généralité, la théorie d'Eilenberg-Steenrod ne pouvait comporter de théorème d'unicité que pour des espaces de nature très particulière; tandis que l'intérêt principal de notre théorie réside dans ses théorèmes d'unicité. Ceux-ci contiennent comme cas particulier les théorèmes de De Rham sur la cohomologie d'une variété différentiable, et aussi les théorèmes dits « de dualité » dus à Poincaré, Alexander, Pontrjagin et quelques autres pour le cas des variétés triangulées (mais qui sont ici établis sans triangulation).

Un autre point sur lequel notre théorie se différencie de celle d'Eilenberg-Steenrod est le suivant : elle travaille non point sur les groupes ou anneaux de cohomologie, mais directement sur des groupes (ou anneaux) munis d'un « opérateur différentiel » qui donne naissance à la cohomologie; elle est ainsi plus maniable, et c'est ce qui lui permet, par exemple, d'être appliquée à l'anneau des formes différentielles sur une variété différentiable et de conduire ainsi aux théorèmes de De Rham. Enfin, un autre avantage de notre théorie axiomatique réside dans le fait qu'elle vaut aussi pour la cohomologie à « coefficients locaux » (au sens de Steenrod, et, plus généralement, de Leray), ce qui n'est pas le cas de l'axiomatique d'Eilenberg-Steenrod.

J'ajoute que non seulement notre théorie axiomatique fournit des démonstrations unifiées de théorèmes connus (et dont la démonstration, à juste titre considérée comme difficile, nécessitait jusqu'à présent des hypothèses parasites), mais qu'elle donne aisément des résultats nouveaux, applicables notamment à la cohomologie des espaces fibrés.

Je m'en voudrais de ne pas dire, dans ce bref commentaire, ce que je dois aux idées de J. Leray, dont le Mémoire du *Journal de Mathématiques* (**24**, 1945, p. 95-248) est à l'origine de mes recherches. En lisant une démonstration du théorème de De Rham proposée par A. Weil (démonstration inédite, dans une lettre de février 1947), je reconnus une parenté entre le procédé de Weil et les raisonnements utilisés à maintes reprises par Leray dans son grand Mémoire (*loc. cit.*). C'est de ce rapprochement que naquit l'idée de ma théorie axiomatique; il me restait alors à systématiser le raisonnement et à formuler des énoncés précis dont le champ d'application fût cependant aussi large que possible.

Dans la mise au point définitive que j'espère publier bientôt, j'ai été influencé par les travaux plus récents de Leray (notamment par le texte provisoire de sa conférence au Colloque de 1947), et par le cours que j'ai professé sur ce sujet à l'Université Harvard au printemps de 1948. J'ai finalement adopté le cadre des « faisceaux » de J. Leray (*C. R. Acad. Sci.*, Paris, **222**, 1946, p. 1366-1369).

SUR LA THÉORIE DES ESPACES FIBRÉS;

PAR CHARLES EHRESMANN.
(Strasbourg.)

Introduction. — Je rappellerai la définition d'une structure d'espace fibré à groupe structural *topologique* G. Je définirai une relation d'ordre dans l'ensemble des structures d'espace fibré qu'on peut considérer sur un espace donné. Le problème de la recherche des *structures subordonnées* à une structure d'espace fibré donné est ramené à la recherche d'une section d'un *espace fibré associé*. On peut donner de nombreuses applications de ce problème. J'étudierai principalement les conditions d'existence, sur une variété différentiable réelle V_{2n}, d'une forme différentielle extérieure de degré 2 et de rang $2n$ en tout point de V_{2n}. L'existence d'une telle forme différentielle est équivalente à l'existence, dans l'espace vectoriel tangent à V_{2n} au point x, d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension n dépendant d'une façon continue de x. Nous dirons que V_{2n} est muni d'une *structure presque complexe* lorsqu'on a défini, d'une façon continue par rapport à x, une structure d'espace vectoriel complexe dans l'espace tangent en x. L'existence sur V_{2n} d'une structure presque complexe est nécessaire, mais probablement non suffisante, pour qu'on puisse définir sur V_{2n} une structure analytique complexe, subordonnée à la structure différentiable réelle. On obtient ainsi des conditions nécessaires pour qu'on puisse définir sur V_{2n} une structure analytique complexe, et c'est ce dernier problème qui est à l'origine du présent travail [1]. En particulier la sphère S_4

[1] J'ai posé ce problème pour la première fois dans une conférence faite au séminaire Bourbaki à Paris (janvier 1947) et j'ai indiqué alors les résultats exposés ici au n° 8. Dans une conférence faite à l'Institut des Hautes Études de Belgique le 30 avril 1947, j'ai traité le même problème en indiquant tous mes résultats actuels, à l'exception de celui concernant la sphère S_4.

n'admet pas de structure presque complexe. Par contre, la sphère S_6, et plus généralement toute variété différentiable orientable à six dimensions dont le groupe d'homologie de dimension 3 est nul, admet une structure presque complexe.

Pour finir je considérerai un problème analogue concernant les variétés analytiques complexes V_{2n}, à $2n$ dimensions complexes, ce qui conduit à une notion de *variété presque quaternionienne*.

Les nombres placés entre crochets renvoient à l'index bibliographique; celui-ci n'est pas une liste complète des publications concernant les questions traitées.

1. Définition d'une structure compatible avec un pseudo-groupe de transformations (¹). — Soient M un espace topologique, et Φ un ensemble d'ensembles ouverts de M tel que toute réunion et toute intersection finie d'ensembles de Φ appartiennent à Φ. Soit Γ un ensemble d'homéomorphismes vérifiant les axiomes suivants :

1° Tout homéomorphisme $f \in \Gamma$ est défini dans un ensemble $U \in \Phi$ et l'on a $f(U) \in \Phi$.

2° Soit U la réunion d'une famille d'ensembles U_i appartenant à Φ. Pour qu'un homéormorphisme f défini dans U appartienne à Γ, il faut et il suffit que sa restriction à U_i appartienne à Γ.

3° Pour tout $U \in \Phi$, l'application identique de U appartient à Γ. Si $f \in \Gamma$, l'application réciproque f^{-1} appartient à Γ. Si f et f' sont deux homéomorphismes appartenant à Γ, tels que le composé ff' soit défini, alors ff' appartient à Γ.

L'ensemble Γ vérifiant ces axiomes sera appelé *pseudo-groupe de transformations*.

Exemple. — Les homéomorphismes différentiables dont chacun transforme un ouvert de R^n en un ouvert de R^n forment un pseudo-groupe de transformations dans R^n.

Soit E un deuxième espace topologique. Nous appellerons *carte*

(¹) Nous reprenons ici, en les précisant, les notions introduites pour la première fois par O. Veblen et J. H. C. Whitehead dans *The foundations of differential geometry*, Cambridge Tracts, 1932.

locale de E par rapport à M un homéomorphisme d'un ouvert U de M sur un ouvert U' de E. A deux cartes locales f_1 et f_2 correspond un homéomorphisme φ_{21}, appelé *changement de carte locale* (ou de coordonnées locales), tel que $f_1(x) = f_2(x')$ soit équivalent à $x' = \varphi_{21}(x)$. Un ensemble de cartes locales de E par rapport à M est appelé *atlas* de E par rapport à M si les ouverts correspondant aux cartes dans E forment un recouvrement de E. Un atlas $\mathfrak{A}$ sera dit compatible avec le pseudo-groupe Γ défini dans M lorsque tous les changements de cartes locales correspondants appartiennent à Γ. Tout atlas $\mathfrak{A}$ compatible avec Γ est contenu dans *un atlas complet* (ou maximal) $\overline{\mathfrak{A}}$ bien déterminé, compatible avec Γ. Nous dirons qu'un atlas complet $\overline{\mathfrak{A}}$ de E par rapport à M compatible avec Γ, définit sur E une *structure compatible avec* Γ. Les cartes locales de $\overline{\mathfrak{A}}$ sont appelées cartes admissibles de la structure.

Par exemple [4], on définit ainsi les structures de variétés différentiables réelles ou complexes, localement euclidiennes, localement homogènes, de Lie, etc. Nous allons donner également sous cette forme la définition d'une structure d'espace fibré.

2. Définition d'un espace fibré à groupe structural G. — Soient E, B, F trois espaces topologiques et G un groupe d'automorphismes de F. Nous supposons G muni d'une topologie telle que, si $s \in G$, $y \in F$, sy désignant le transformé de y par s, l'application $(s, y) \to sy$ soit une application continue de $G \times F$ sur F. Soit Φ l'ensemble des ouverts de $B \times F$ de la forme $U \times F$, où U est un ouvert quelconque de B. Considérons dans $B \times F$ le pseudo-groupe Γ formé des automorphismes de $U \times F$ de la forme $(x, y) \to (x, s_x y)$, $x \in U$, $y \in F$, où $x \to s_x$ est une application continue de U dans G. Un atlas complet $\mathfrak{A}$ de E sur $B \times F$ compatible avec ce pseudo-groupe Γ définit alors sur E une structure d'espace fibré à groupe structural G (considéré comme groupe topologique) [10, 6, 2]. Nous supposerons que les ouverts qui correspondent dans $B \times F$ aux cartes de $\mathfrak{A}$ forment un recouvrement de $B \times F$.

Soit f un homéomorphisme de $U \times F$ dans E formant une carte locale admissible. L'application $y \to f(x, y)$, où $x \in U$, $y \in F$, définit un homéomorphisme h de F sur un sous-espace F_x de E.

Soit H l'ensemble des homéomorphismes h de F dans E correspondant ainsi aux cartes locales admissibles (appartenant à $\mathfrak{A}$). Le sous-espace F_x ne dépend que de x et s'appelle une fibre de l'espace fibré E. Les fibres forment une partition de E, et l'espace quotient de E par cette partition peut être identifié d'une façon naturelle avec B, appelé espace de base de l'espace fibré. L'ensemble des éléments h de H tels que $h(F) = F_x$ est l'ensemble $H_x = h_x G$, où h_x désigne un élément quelconque de H_x. La structure d'espace fibré définie par l'atlas complet $\mathfrak{A}$ pourra être désignée par le symbole E(B, F, G, H).

3. **Espaces fibrés associés** [2]. — Étant donnés deux espaces topologiques B et F, et un groupe topologique G d'automorphismes de F, tout espace fibré E(B, F, G, H) peut être obtenu de la manière suivante :

On se donne un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de B par des ouverts. Pour tout couple $(i, j) \in I \times I$ on se donne une fonction continue $x \to s_x^{ji}$ où $x \in U_i \cap U_j$, $s_x^{ji} \in G$, telle que $s_x^{ki} = s_x^{kj} s_x^{ji}$ pour $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, et $s_x^{ji} s_x^{ij} =$ élément unité de G. Considérons l'espace somme $S = \sum_{i\in I} U_i \times F$, et soit r la relation d'équivalence définie dans S par l'ensemble des automorphismes $(x, y) \to (x, s_x^{ji} y)$, $x \in U_i \cap U_j$, $y \in F$. L'espace quotient S/r est un espace fibré E(B, F, G, H). Soit F_i la restriction à $U_i \times F$ de l'application canonique de S sur $S/r = E$. Désignons par h_x^i l'homéomorphisme $y \to f_i(x, y)$, où $x \in U_i$, $y \in F$. On a $H_x = h_x^i G$ et $h_x^i = h_x^j s_x^{ji}$. Cette construction est encore valable lorsque les U_i sont les cellules fermées d'une subdivision cellulaire de B.

L'espace fibré E(B, F, G, H) étant supposé construit de la manière précédente, soit φ une représentation continue de G sur un groupe d'automorphismes G' d'un espace topologique F'. Soit $S' = \sum_{i\in I} U_i \times F'$, et soit r' la relation d'équivalence définie dans S' par l'ensemble des automorphismes $(x, y') \to [x, \varphi(s_k^{ij}) y']$, où $y' \in F'$. L'espace quotient S/r' est un espace fibré $E'(B, F', G', H')$ que nous appellerons *associé* à E(B, F, G, H). Il est parfaitement déterminé lorsque F', G' et φ sont donnés.

En particulier, soit φ la représentation de G sur le groupe G_γ des translations à gauche de G, telle que $\varphi(s)$ soit la relation $t \to st$, $j \in G$, $t \in G$. Soit $S' = \sum_{i\in I} U_i \times G$, et soit r' la relation d'équivalence définie dans S' par l'ensemble des automorphismes

$$(x, t) \to (x, s_x^{ij} t), \quad x \in U_i \cap U_j, \quad t \in G.$$

L'application de S' sur H qui fait correspondre à $(x, t) \in U_i \times G$ l'élément $h_x^i t$ de H_x est compatible avec la relation d'équivalence r'. Ceci permet d'identifier d'une façon canonique S/r' à H. On a ainsi défini sur H une topologie et une structure d'espace fibré $H(B, G, G_\gamma, H^*)$ que nous appellerons *espace fibré principal associé* à E(B, F, G, H). L'application $(h, y) \to h(y)$, où $h \in H$, $y \in F$, est continue.

4. **Structures d'espaces fibrés subordonnées** [3]. — Nous dirons que la structure $E(B, F, G', H')$ est subordonnée à la structure E(B, F, G, H) lorsque $H' \subset H$ et que l'application canonique de H' dans H est continue. Ceci implique que les fibres sont les mêmes pour les deux structures, que G' est un sous-groupe de G, et que l'application canonique de G' dans G est continue. Nous considérons surtout le cas où G' est un sous-groupe de G, muni de la topologie induite. Alors H' est un sous-espace de H, c'est-à-dire la topologie de H' est induite par celle de H.

Le produit topologique $B \times F$ sera considéré comme un espace fibré, de groupe structural réduit à la transformation identique de F. Un espace fibré E(B, F, G, H), dont le groupe structural est réduit à la transformation identique, est isomorphe à $B \times F$. La recherche d'une structure de produit topologique subordonnée à E(B, F, G, H) revient donc à la recherche d'une section de l'espace fibré associé principal $H(B, G, G_\gamma, H^*)$. On en déduit facilement le résultat suivant [2, 5] :

Si B *est un complexe contractile en un point, l'espace fibré* E(B, F, G, H) *admet une structure subordonnée isomorphe au produit topologique* $B \times F$.

5. **Recherche des structures subordonnées.** — *Problème.* — Étant donnée une structure d'espace fibré E(B, F, G, H), déter-

miner toutes les structures subordonnées $E(B, F, G', H')$ telles que G' soit un sous-groupe donné de G, muni de la topologie induite par celle de G.

Considérons l'espace fibré principal $H(B, G, G_\gamma, H^*)$ associé à $E(B, F, G, H)$, et soit (G') la relation d'équivalence définie dans H, dont les classes d'équivalence sont les ensembles hG', ou $h \subset H$. Si $h \in H_x$, on a $hG' \subset H_x$. Soit K l'espace homogène G/G' des classes sG' de G et soit G_K le groupe de transformations de cet espace homogène, à $t \in G$ correspondant la transformation $sG' \rightarrow t(sG')$. L'espace quotient $H/(G')$ est muni d'une structure d'espace fibré $H/(G')(B, K, G_K, H_K)$ dont les fibres sont les ensembles $K_x = H_x/(G')$. C'est l'espace fibré associé à $E(B, F, G, H)$ correspondant à la représentation de G sur G_K. Pour que l'ensemble $\overline{H}^*$ des restrictions à G' des homéomorphismes $h^* \in H^*$ détermine sur H une structure d'espace fibré $H[H/(G'), G', \overline{G}'_\gamma, H^*]$, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : (α). L'ensemble $\overline{G_\gamma}$ des restrictions à G' des translations à gauche de G détermine sur G une structure d'espace fibré $G(K, G', G'_\gamma, G_\gamma)$.

La condition (α) est vérifiée en particulier lorsque G est un groupe de Lie, G' un sous-groupe fermé de G.

Étant donnée une structure subordonnée $E(B, F, G', H')$, l'application $x \rightarrow H'_x$, où l'on considère H'_x comme élément de $H/(G')$, définit une section de l'espace fibré $H/(G')(B, F, G_K, H_K)$. Réciproquement, lorsque la condition (α) est vérifiée, toute section de cet espace fibré est projection d'un sous-espace H' de H, qui définit une structure subordonnée $E(B, F, G', H')$. Les structures subordonnées se répartissent alors en classes d'homotopie correspondant aux classes d'homotopie des sections de $H/(G')(B, K, G_K, H_K)$.

Remarque. — Supposons G non connexe, mais localement connexe. Soit G_0 la composante connexe de l'unité de G. L'espace fibré $H/(G')(B, K, G_K, H_K)$, où $K = G/(G')$ est un espace discret, est alors un revêtement de B. En général il n'admet pas de section. Mais si B' est une composante connexe de $H/(G_0)$, l'espace E admet un revêtement E' muni d'une structure $E'(B', F, G_0, H_0)$. En particulier, si G est discret, E admet un revêtement isomorphe à $B' \times F$.

6. **Premières applications** [4]. — Dans les cas suivants, il existe une classe et une seule de structures subordonnées à $E(B, F, G, H)$, en supposant que B soit un complexe.

1° $G =$ groupe de Lie connexe; $G' =$ sous-groupe clos maximal [8]. Alors G/G' est homéomorphe à un espace numérique R^m.

2° $F =$ espace numérique réel, complexe ou quaternionien; $G =$ groupe linéaire homogène correspondant; $G' =$ sous-groupe laissant invariant une forme quadratique ou une forme d'Hermite définie positive.

L'existence d'une structure subordonnée de groupe G' équivaut à l'existence d'un champ de formes quadratiques ou d'Hermite, c'est-à-dire d'une fonction continue qui à $x \in B$ associe une forme quadratique ou d'Hermite dans F_x.

3° $F = R^{2n}$ ou $F = C^{2n}$ ($R =$ droite numérique réelle, $C =$ droite numérique complexe); $G =$ groupe linéaire homogène qui laisse invariant la forme extérieure $x_1 \wedge x_2 + \ldots + x_{2n-1} \wedge x_{2n}$; $G' =$ sous-groupe qui laisse invariant $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2$, respectivement $x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \ldots + x_{2n}\overline{x}_{2n}$; G' peut alors être identifié avec le groupe unitaire complexe ou quaternionien.

7. **Conditions d'existence d'une section d'un espace fibré** $E(B, F, G, H)$. — Faisons les hypothèses suivantes :

B est un complexe de dimension n. En désignant par $\pi_i(F)$ le groupe d'homotopie de F pour la dimension i, nous supposons :

$$\pi_i(F) = 0, \quad \text{pour} \quad i < r; \quad \pi_r(F) \neq 0.$$

Si $r = 1$, $\pi_1(F)$ est supposé abélien. G est un groupe d'opérateurs pour $\pi_r(F)$. Il existe donc un espace fibré associé dont la fibre est $\pi_r(F)$, muni de la topologie discrète. C'est donc un revêtement de B. Nous le supposerons isomorphe au produit topologique de B par $\pi_r(F)$. Cette condition est vérifiée en particulier lorsque G est connexe.

On peut définir alors une classe de cohomologie caractéristique W_{r+1} de B relativement à l'espace fibré, analogue aux classes de Stiefel-Whitney. Pour qu'il existe une section sur le squelette K_{r+1} de dimension $r+1$ de B, il faut et il suffit que $W_{r+1} = 0$. Si de plus $\pi_j(F) = 0$ pour $h > j > r$, la condition $W_{r+1} = 0$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section sur tout l'espace de base B.

8. **Conditions d'existence, sur une variété différentiable V_{2n}, d'une structure presque complexe ou d'une forme différentielle extérieure de degré 2 et en tout point de rang $2n$.** — Soit V_{2n} une variété différentiable de dimension $2n$. L'espace des vecteurs tangents est un espace fibré $E(V_{2n}, R^{2n}, L, H)$, où L est le groupe linéaire homogène dans R^{2n}. Une structure d'espace vectoriel complexe, prolongeant la structure vectorielle réelle, sera déterminée sur R^{2n} par une transformation linéaire I, $x \to ix$, où $x \in R^{2n}$, sans droite fixe passant par zéro, et telle que $i(ix) = -x$. En désignant par $x_1, \ldots, x_{2n}$ les coordonnées canoniques de $x \in R^{2n}$, soit I_0 la transformation

$$x'_1 = -x_2, \quad x'_2 = x_1, \ \ldots, \ x'_{2n-1} = -x_{2n}, \quad x'_{2n} = x_{2n-1}.$$

R^{2n} muni de la structure complexe correspondante sera identifiée avec l'espace numérique complexe C^n de coordonnées canoniques

$$z_1 = x_1 + ix_2, \ \ldots, \ z_n = x_{2n-1} + ix_{2n}.$$

Soit L′ le groupe linéaire homogène complexe de C_n. C'est le sous-groupe de L qui laisse invariant I_0. L'espace homogène $K = L/L'$ est donc l'espace des structures complexes sur R^{2n} prolongeant la structure vectorielle réelle. La recherche d'une structure $E(V_{2n}, C^n, L', H')$ subordonnée à $E(V_{2n}, R^{2n}, L, H)$ revient à la recherche d'une section de l'espace fibré associé $H/(L')(V_{2n}, K, L_K, H_K)$. Une telle section définit sur V_{2n} une structure qu'on peut appeler *presque complexe*. Comme L′ est connexe, elle détermine une orientation sur V_{2n}. L'existence d'une telle structure presque complexe est une condition nécessaire pour qu'il existe sur V_{2n} une structure analytique complexe subordonnée à la structure différentiable réelle (²).

Soit Ω le sous-groupe connexe de L laissant invariant la forme quadratique $F = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2$ et soit Ω′ le sous-groupe de L′ laissant invariant la forme d'Hermite $\Phi = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \ldots + z_n\bar{z}_n$. En vertu des résultats du n° 6, le problème posé se ramène au suivant :

Étant donnée une structure $E(V_{2n}, R^{2n}, \Omega, H_1)$, où $H_1 \subset H$, et par suite une orientation sur V_{2n}, déterminer les structures subordonnées $E(V_{2n}, C^n, \Omega', H')$, ce qui revient à déterminer les sections de l'espace fibré associé $E'(V_{2n}, \Gamma_{(n)}, \Omega_\Gamma, H_\Gamma)$, où $\Gamma_{(n)}$ désigne l'espace homogène Ω/Ω'. Une telle section définit sur V_{2n} une structure qu'on peut appeler *presque hermitienne*, subordonnée à la structure riemannienne déterminée par $E(V_{2n}, R^{2n}, \Omega, H_1)$.

$\Gamma_{(n)}$ est isomorphe à une composante connexe (³) de l'espace des structures complexes sur R^{2n}, compatibles avec la forme quadratique F, c'est-à-dire définis par les transformations I telles que $F(x, ix) = 0$. $\Gamma_{(n)}$ est aussi isomorphe à une composante connexe de l'espace des formes bilinéaires alternées $\psi(x, y) = F(ix, y)$, qu'on peut appeler échangeable avec F. On en déduit le résultat suivant :

Pour qu'il existe sur V_{2n} une structure presque complexe ou presque hermitienne, il faut et il suffit qu'il existe sur V_{2n} une forme différentielle extérieure de degré 2 et en tout point de rang $2n$.

9. **Topologie de $\Gamma_{(n)}$.** — L'espace $\Gamma_{(n)}$ est encore isomorphe à une composante connexe de l'espace des génératrices linéaires de dimension n du cône quadratique $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 = 0$ de l'espace C^{2n}. J'en ai déterminé les bases d'homologie à l'aide d'une subdivion en cellules [1] :

$\Gamma_{(2)}$ est homéomorphe à S_2;

$\Gamma_{(3)}$ est homéomorphe à l'espace projectif complexe $P_3(C)$;

$\Gamma_{(4)}$ est homéomorphe à la quadrique complexe Q_6 à six dimensions complexes. Or Q_6 est homéomorphe à $S_6 \times P_3(C)$;

$\pi_1(\Gamma_{(4)}) = 0$, $\pi_2(\Gamma_4)$ est cyclique infini, $\pi_i(\Gamma_4) = \pi_i(S_6) \times \pi_i(S_7)$, pour $i > 2$;

(²) Étant données deux structures définies sur E par deux atlas complets $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ de E par rapport à un espace M, compatibles avec deux pseudo-groupes dans M, la première sera dite subordonnée à la seconde lorsque $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.

(³) Il y a deux composantes connexes correspondant aux deux orientations de R^{2n}.

$\Gamma_{(n)}$ admet toujours une structure fibrée multiple du type $S_{2n-2} \times .., \times S_6 \times S_4 \times S_2$; c'est-à-dire l'espace de base est S_{2n-2}, la fibre est un espace fibré de base S_{2n-4}, etc. Les groupes d'homologie de $\Gamma_{(n)}$ sont ceux de ce produit de sphères.

On a toujours $\pi_2(\Gamma_{(n)}) = \pi_2(S_2)$. Donc l'espace V_{2n} admet, relativement à E', une classe caractéristique W_3. Ainsi $W_3 = 0$ est une condition nécessaire d'existence sur V_{2n} d'une structure presque complexe ou encore d'une forme différentielle extérieure de degré 2 et de rang $2n$. *Cette condition est aussi suffisante pour une variété* V_6. *Elle est vérifiée en particulier pour la sphère* S_6. Remarquons que, pour toute variété orientable V_4, la classe W_3 est nulle. C'est une simple conséquence du résultat dû à H. Whitney, d'après lequel sur une telle variété la classe caractéristique de Stiefel-Whitney de dimension 3 est nulle [11].

Pour $n > 3$, $\pi_6(\Gamma_{(n)})$ est cyclique infini. Si $W_3 = 0$, l'espace fibré $E'(V_{2n}, \Gamma_{(n)}, \Omega_\Gamma, H_\Gamma)$ admet une section sur le squelette de dimension 6. Pour qu'une telle section puisse s'étendre au squelette de dimension 7, il faut et il suffit qu'une certaine classe de cohomologie caractéristique de dimension 7 soit nulle. Cette classe dépend de la classe d'homotopie de la section donnée sur le squelette de dimension 6. Si le groupe d'homologie de la dimension 2 de V_{2n} est nul, cette classe caractéristique de dimension 7 est unique.

10. **Étude particulière du cas de la sphère** S_{2n}. — Supposons S_{2n} subdivisé en deux hémisphères B_{2n} et B'_{2n} dont l'intersection est une sphère S_{2n-1}. L'espace fibré principal $H(S_{2n}, \Omega, \Omega_\gamma, H^*)$, associé à l'espace fibré $E(S_{2n}, R^{2n}, \Omega, H)$ des vecteurs tangents à S_{2n}, peut être identifié avec l'espace quotient de $B_{2n} \times \Omega + B'_{2n} \times \Omega$ par une relation d'équivalence définie par une application continue σ de S_{2n-1} dans Ω [7]. Soit F l'espace homogène Ω/G', où G' est un sous-groupe fermé de Ω. Soit q la projection canonique de Ω sur Ω/G', et posons $\sigma' = q\sigma$. Pour que l'espace fibré associé $E'(S_{2n}, F, \Omega_F, H_F)$ admette une section, il faut il suffit que l'application de S_{2n-1} dans $F = \Omega/G'$ soit homotope à zéro.

L'application σ est celle qui fait correspondre à $x \in S_{2n-1}$ le produit des deux symétries dans R^{2n} par rapport à un diamètre fixe de S_{2n-1}, et par rapport au diamètre passant par x. Soit σ' l'application correspondante de S_{2n-1} dans $\Omega/\Omega' = \Gamma_{(n)}$. Pour qu'il existe sur S_{2n} une structure presque complexe ou une forme extérieure de degré 2 et de rang $2n$, il faut et il suffit que σ' soit homotope à zéro. Il en est bien ainsi pour $n = 3$, car $\pi_5(\Gamma_{(3)}) = 0$.

Pour $n = 2$, l'application σ' n'est pas homotope à zéro. En effet, le groupe Ω correspondant est homéomorphe au produit $S_3 \times P_3$, P_3 = espace projectif réel à trois dimensions. Toute application de S_3 dans Ω est donc caractérisée par un couple d'entiers (a, b). Pour l'application σ, ce couple est $(1, 1)$. L'application correspondante σ' de S_3 sur $\Gamma_{(2)} = S_2$ n'est donc pas homotope à zéro. *Donc sur* S_4 *il n'existe pas de forme différentielle extérieure de degré* 2 *et de rang* 4; *ou encore il n'existe sur* S_4 *aucune structure presque complexe, et* a fortiori *aucune structure complexe.*

Cas $n = 4$. — Soit Q_6 la variété des génératrices à une dimension du cône défini dans C^8 par $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_8^2 = 0$. $\Gamma_{(4)}$ est homéomorphe à Q_6, qui est elle-même homéomorphe à la variété des plans orientés de R^8 passant par l'origine. A σ correspond une application σ' de S_7 dans $\Gamma_{(4)}$ et une application σ'' de S_7 dans Q_6. L'application σ'' n'est pas homotope à zéro, sinon il existerait sur S_8 un champ d'éléments plans orientés, et par suite aussi un champ de vecteurs unitaires. Il existe bien un automorphisme de Ω qui induit un homéomorphisme de $\Gamma_{(4)}$ sur Q_6, mais les deux espaces fibrés associés à S_8, de fibres Q_6 et $\Gamma_{(4)}$, ne semblent pas être isomorphes.

Remarque. — Pour tout n, la variété des plans orientés de R^n, passant par l'origine, est homéomorphe à la variété Q_{n-2} des génératrices du cône $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$. Ses groupes d'homotopie, pour les dimensions > 2, sont ceux de la variété $V_{n,2}$ des couples de vecteurs unitaires et orthogonaux dans R^n. Q_{n-2} est simplement connexe et $\pi_2(Q_{n-2}) = \pi_2(S_2)$ pour $n > 4$, et $\pi_2(Q_4) = \pi_2(S_2) \times \pi_2(S_2)$. Le problème de l'existence d'un champ d'éléments plans tangents à une variété V_n conduit donc également à une classe caractéristique, de dimension qui est d'ailleurs nulle dans le cas d'une variété orientable V_4, d'après le résultat indiqué de Whitney.

11. Conditions d'existence, sur une variété analytique complexe V_{2n} d'une forme différentielle extérieure complexe de degré 2 et de rang 2 en tout point. — Soit Ω' le groupe linéaire complexe de C^{2n} qui laisse invariant la forme d'Hermite

$$\Phi = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \ldots + z_{2n}\bar{z}_{2n}.$$

Soit Ω'' le sous-groupe qui laisse invariant la transformation J_0 :

$$z'_1 = -\bar{z}_2,\ z'_2 = \bar{z}_1,\ \ldots,\ z'_{2n-1} = -\bar{z}_{2n},\ z'_{2n} = \bar{z}_{2n-1}.$$

L'espace homogène Ω'/Ω'' est l'espace des structures vectorielles quaternioniennes sur C^{2n}, compatibles avec la forme d'Hermite Φ; c'est encore l'espace des formes extérieures de degré 2, de rang $2n$, et échangeables avec Φ. C'est un espace muni d'une structure fibrée multiple de type $S_{4n-3} \times \ldots \times S_9 \times S_5 \times S_1$.

V_{2n} est l'espace de base d'un espace fibré de groupe structural Ω'. Le problème posé dans le titre de ce paragraphe revient à chercher une structure suborbonnée de groupe structural Ω''. On arrive d'abord à une classe caractéristique W_2, pour la dimension 2. $W_2 = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une structure subordonnée de groupe structural Ω'_1, groupe *unimodulaire* laissant invariant Φ. Supposons cette condition vérifiée. On est amené alors à étudier l'existence d'une section d'un espace fibré associé dont la fibre est l'espace homogène $\Omega'_1/\Omega'' = K_{(n)}$. L'espace $K_{(n)}$ admet une structure fibrée multiple de type $S_{4n-3} \times \ldots \times S_9 \times S_5$. C'est un des espaces riemanniens symétriques étudiés par É. Cartan. Le problème posé conduit à une classe caractéristique de dimension 6.

Les conditions d'existence sur V_{2n} d'une forme différentielle extérieure de degré 2 et de rang $2n$ sont aussi celles de l'existence d'une *structure presque quaternionienne*, en convenant d'appeler ainsi une section de l'espace fibré de base V_{2n} et ayant pour fibre l'espace des structures quaternioniennes prolongeant la structure complexe de C^{2n}. Cet espace est l'espace quotient L'/L'', où L'' est le sous-groupe de L' qui laisse invariant J_0. Remarquons que, si l'on voulait définir la notion de structure de variété quaternionienne par analogie avec le cas réel ou complexe, on obtiendrait seulement une classe de variétés localement affines.

Par exemple, toute variété analytique complexe V_2 (à 4 dimensions réelles), dont le groupe de Betti pour la dimension 2 est nul, admet une structure presque quaternonienne. L'espace projectif complexe $P_{2n}(C)$ n'en admet pas.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

[1] C. EHRESMANN, *Sur la Topologie de certains espaces homogènes* (*Ann. of Math.*, 35, 1934, p. 396-443).

[2] C. EHRESMANN, *Espaces fibrés associés* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 213, 1941, p. 762-764).

[3] C. EHRESMANN, *Espaces fibrés de structures comparables* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 214, 1943, p. 144-147).

[4] C. EHRESMANN, *Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 216, 1943, p. 628-630).

[5] C. EHRESMANN, *Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement* (*Bull. Soc. Math. France*, 72, 1944, p. 27-54).

[6] C. EHRESMANN et J. FELDBAU, *Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 212, 1941, p. 945-748).

[7] J. FELDBAU (sous le nom de J. LABOUREUR), *Les structures fibrées sur la sphère et le problème du parallélisme* (*Bull. Soc. Math. France*, 70, 1942, p. 181-185).

[8] A. MALCEV, *On the theory of the Lie groups in the large* (*Rec. Math.*, Moscou, 16, 1945, p. 163-189).

[9] O. VEBLEN et J. H. C. WHITEHEAD, *The fundations of differential geometry* (*Cambridge Tracts*, 1932).

[10] H. WHITNEY, *On the theory of sphere-bundles* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, 29, 1940, p. 148-153).

[11] H. WHITNEY, *On the Topology of differentiable manifolds* (*Lectures in Topology*, Ann. Arbor, 1941, p. 101-141).

LA GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE;

PAR HANS FREUDENTHAL.
(Utrecht.)

Exemple du calcul de Schubert [8]. — g est la condition imposée aux droites de l'espace P_3 (espace complexe projectif à trois dimensions) de couper une droite donnée, ou (ce qui est essentiellement la même chose) g est la variété des droites qui coupent la droite donnée.

Si a et b sont deux conditions qu'on peut imposer aux droites du P_3, $a.b$ sera le symbole de leur conjonction (ou de l'intersection des deux variétés respectives) et $a+b$ leur disjonction (ou l'union des deux variétés).

En conséquence g^i sera la condition de couper i droites données en position générale, ou g^2 la congruence linéaire, g^3 la surface réglée, g^4 une paire de droites.

Autres conditions qu'on peut imposer aux droites du P_3 :

g_p, celle de passer par un point donné;
g_e, celle d'appartenir à un plan donné;
g_s, celle d'appartenir à un faisceau donné;
G, celle de coïncider avec une droite donnée.

Si l'on spécialise en g^2 les deux droites de sorte que l'une coupe l'autre, g^2 se ramène à g_p et g_e. On pose $g^2 = g_p + g_e$. Multiplié par g : $g^3 = g_p g = g_e g = g_s + g_s = 2 g_s$. Encore une fois multiplié par g : $g^4 = 2\,\mathrm{G}$, ce qui est la traduction du fait bien connu que quatre droites ont deux transversales communes.

A première vue, on sera tenté de dire que l'inventeur de ce mode de raisonner était ou un sorcier ou un ignorant. Mais, dès que le topologiste algébriste se familiarise avec ces idées, il doit avouer qu'elles sont congéniales aux siennes. Les « conditions » font penser aux cycles, les produits aux intersections, et les nombres des éléments satisfaisant à un système de conditions rappellent les nombres d'intersections de la topologie. Pour les déterminer de la manière la plus rapide et la plus élégante, on remplacera les cycles donnés par des cycles homologues, c'est la notion d'équivalence la plus familière au topologiste. Mais, parmi les questions qui doivent s'élever à l'occasion de notre exemple, celle de la détermination des coefficients dans l'équation $g^2 = g_p + g_c$ semble être la plus sérieuse. Le choix que nous avons préféré (les deux coefficients sont posés égaux à l'unité) se justifie par deux faits : 1° le résultat $g^4 = 2G$; 2° la symétrie exigée par la dualité projective.

Autre exemple. — L'espace des couples ordonnés de droites du P_3. Les conditions possibles sont des combinaisons linéaires des produits $c^{(1)}c^{(2)}$, où $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ sont des conditions imposables à la première (respectivement deuxième) droite du couple. La condition σ qui demande que les membres du couple se rencontrent l'un l'autre, peut s'exprimer par $\sigma = g_1 + g_2$. Pour s'en convaincre, on multiplie les deux membres de l'équation par les conditions sextuples $g_s^{(1)}G^{(2)}$ et $G^{(1)}g_s^{(2)}$, ce qui donne des égalités.

Critique. — A-t-on raison de supposer que le système donné de conditions $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ est en effet complet dans un sens qui justifie l'application de ce procédé de vérification, qui est évidemment basé sur un principe topologique ou algébrique de dualité ?

Remarque. — Considérons dans cet exemple la condition c, qui demande que les droites du couple aient un point commun sur un plan donné. Si l'on veut former c^2, on est tenté de chercher les couples de droites qui ont des points communs sur deux plans donnés d'avance. On trouve alors les droites coïncidantes et les droites qui se coupent sur une droite donnée. La dimension de cette variété devient trop grande, grâce à sa seconde partie. Mais si l'on forme c^4, qui devrait être de la dimension zéro, on trouve comme solutions toutes les droites doubles, ce qui est de même déraisonnable. Évidemment, les éléments de c qu'on a choisis ne sont pas dans la position générale, qui est toujours exigée dans les problèmes d'intersection.

Cette difficulté devient plus grave, quand on passe au

Troisième exemple. — L'espace des couples de droites du P_3 se coupant l'une l'autre. Je me borne à mentionner que cette variété n'est plus régulière. Tous les couples dont les éléments coïncident, représentent des singularités. En analysant la remarque faite à l'occasion du second exemple, on voit qu'il n'est pas raisonnable de parler du point commun de deux droites sans s'occuper explicitement du cas où ce point devient indéterminé. Les difficultés disparaissent, dès qu'on passe au

Troisième exemple révisé. — L'espace des quadruples consistant en un point et un plan unis et deux droites passant par le point et situés dans le plan. Cette révision revient à dénouer les singularités rencontrées dans le troisième exemple; la condition des droites coïncidantes devient alors une condition simple, c'est-à-dire d'une seule dimension.

La nécessité de dénouer des singularités s'impose presque toujours s'il y a des dégénérescences des objets en question. Quand Schubert nous ordonne d'admettre une longue liste de dégénérescences, ce n'est pas une prescription arbitraire et autoritaire, mais en général ces dégénérescences se sont imposées au cours de calculs qui aboutissaient à des contradictions. Il apparaît que ces complications de dégénérescences répondent toujours à un dénouement nécessaire de singularités. Guidé par ses calculs, Schubert a merveilleusement réussi à éliminer les singularités qui se présentaient dans les systèmes étudiés. Je rappelle le système des triangles complets [9], où il a introduit dans les triangles dégénérés en un seul point et une seule droite un paramètre de courbure qui effectuait le dénouement des singularités.

La description précisée du système à envisager et de toutes ses dégénérescences est très importante. Un exemple antérieur à Schubert est le

Quatrième exemple. — Les coniques planes. Cet espace est équivalent à l'espace projectif à cinq dimensions. En conséquence, il n'y a pas d'autre condition que la condition μ imposée à la conique de passer par un point donné, et ses puissances. La dégénérescence δ des coniques décomposées en deux droites est équivalente à 3μ parce qu'il y a trois coniques dégénérées passant par quatre points donnés, tandis qu'il n'y en a qu'une seule qui passe par cinq points donnés. La condition ρ de toucher une droite donnée doit être équivalente à 2μ. En conséquence, on devrait avoir $2^5 = 32$ coniques qui touchent cinq droites données, au lieu d'une seule, et par exemple huit coniques tangentes à trois droites et passant par deux points, au lieu de quatre. Ces paradoxes s'expliquent par la présence des coniques dégénérées en une droite double, dont il y en a une (qu'on doit compter quatre fois) qui passe par deux points et touche les trois droites d'une manière peu intéressante, à savoir en coupant chacune d'elles en deux points coïncidants. Dans ce modèle-ci, la condition d'être tangente à une droite donnée arbitraire est remplie identiquement par toutes les coniques doublement dégénérées. Cela ne correspond pas à la notion intuitive de contact, et doit conduire à des paradoxes, dès que nous formons des puissances assez élevées de ρ. Pour éviter ces paradoxes, on a introduit les coniques complètes. Une conique complète consiste en une courbe d'ordre 2 et une courbe de classe 2, en position unie. Il y a deux dégénérescences simples :

δ : les points remplissent deux droites, les tangentes passent par le point double;

η : les tangentes passent par deux points, les points se trouvent sur la droite double.

Il y a une dégénérescence double $\delta\eta$, décrite par un point double situé sur une droite double.

Dans le modèle des coniques complètes, les conditions μ et ρ deviennent indépendantes, et les difficultés mentionnées disparaissent.

J'ai donné quelques exemples du calcul de Schubert, sans poser la question fondamentale de l'exactitude du procédé. En effet, pour un géomètre moderne qui a acquis des notions de topologie, cette question n'existe plus. Elle est réduite à des questions moins fondamentales et plutôt techniques. Quand même, la critique à laquelle on a soumis le calcul de Schubert a toujours manqué le but. A tort, on a reproché à Schubert de faire usage du principe de la conservation du nombre. En réalité, il s'en est servi moins souvent que la plupart de ses contemporains. Il l'a remplacé presque partout par sa méthode symbolique, et il ne l'applique que dans des cas presque évidents. Même le problème de la détermination des multiplicités des points d'intersection n'est pas grave, quoique Schubert semble les fixer d'une manière arbitraire ou par des raisonnements très vagues. En réalité ce sont toujours des raisonnements *a posteriori*. Schubert est toujours parti de quelques nombres d'intersection qui étaient évidemment 0 ou 1, et avec ce point de départ il a trouvé un grand nombre d'équations déterminées ou indéterminées qui surdéterminaient les coefficients inconnus. C'est la marche que Schubert a suivie, mais qu'il tait dans ses mémoires en se donnant l'air d'avoir acquis la connaissance des multiplicités par une inspiration surhumaine. Le problème essentiel qui reste est celui des caractéristiques, c'est-à-dire de savoir si le système de conditions, dont on tient compte, est complet dans un sens qui permet l'application d'un théorème de dualité.

Vous vous êtes sans doute aperçu des analogies topologiques, qu'il y a dans le calcul de Schubert. S. Lefschetz [5, 6] semble avoir été le premier qui les ait observées, et dès ce temps la topologie fut un des instruments auxquels on a recouru pour résoudre le problème fameux de Hilbert, de justifier le calcul de Schubert. B. L. van der Waerden [14] en a fait usage, tout en se servant en général de la théorie des idéaux. F. Severi [11, 12, 13] qui a voulu se passer de ces deux instruments, a développé un programme de géométrie énumérative exacte, mais non exactement de justification du calcul de Schubert. Ce sont C. Ehresmann [1], puis J. C. H. Gerretsen [2], qui ont au contraire développé des méthodes praticables et basées sur la topologie, pour traiter le calcul de Schubert des variétés de Grassmann d'une manière satisfaisante. Néanmoins je ne peux pas échapper à l'impression que toutes les méthodes actuelles (la mienne y comprise) sont trop compliquées. En persévérant dans cette tendance, nous serions forcés d'écrire un mémoire de 100 pages comme commentaire d'une seule page de Schubert. Je pense que la topologie est un instrument trop fin et dont il faut se passer aussitôt que possible, quoique actuellement il semble être le plus utile, parce qu'il rappelle des notions bien connues et dont on connaît le mieux la portée. Je suis convaincu que la seule voie qu'on doit suivre, et la plus rapide, est celle qui a été préparée par Schubert, mais on ne pourra pas la suivre sans avoir restauré les raisonnements heuristiques, qui forment la démonstration proprement dite de ses résultats. Dans ce but, il faudrait trouver quelques principes généraux que la topologie pourrait nous fournir.

C'est un programme dont je n'ai pu réaliser qu'une partie très modeste. Les principes que j'ai trouvés sont toujours trop fins, trop topologiques. Je les ai appliqués à un problème posé par la Société Mathématique Néerlandaise, le problème de la détermination du nombre des surfaces cubiques réglées passant par treize points donnés ([1]). Si je ne me trompe pas, c'était la première application du calcul de Schubert à un nouveau problème.

En passant à la justification du calcul de Schubert, la première question qui s'impose semble être celle de l'invention de méthodes très simples et très rapides, pour démontrer qu'un système donné de figures géométriques est une variété partout régulière. Les raisonnements purement géométriques seraient les meilleurs.

Premier exemple. — Les droites du P_3. Pour examiner le voisinage d'une droite donnée L_0, on choisit deux plans ε_1, ε_2 qui coupent L_0. Les points d'intersection de L_0 avec ε_1 et ε_2 peuvent servir de coordonnées des droites voisines de L_0. Cela donne un repère cartésien.

Deuxième exemple. — Les drapeaux du P_3, c'est-à-dire les triples constitués d'un point, d'une droite et d'un plan, tous les trois en position unie. Solution analogue à celle de l'exemple précédent.

Troisième exemple. — Les coniques complètes du plan. C'est plus difficile. Il suffit d'examiner l'entourage d'une conique complètement dégénérée, par exemple celle dont les équations (en coordonnées de point et de droite) sont $x_2^2 = 0$ et $u_3^2 = 0$. On choisit deux points p et q et deux droites P et Q tels qu'il y ait incidence entre p et P, q et Q, q et P. Par exemple $p = (010)$, $q = (110)$, $P = (001)$, $Q = (110)$. Les coordonnées de la figure polaire par rapport à la conique variable voisine de la conique dégénérée peuvent servir de repère local cartésien ([2]).

([1]) Non publié. *Voir* la Note additionnelle.

([2]) Le pôle de P est le centre de la conique, les points p, q avec ses polaires fixent l'involution des diamètres conjugués et par conséquent les axes, tandis que Q avec son pôle complète l'involution des points conjugués sur les axes, et donne par conséquent ses longueurs.

Les mêmes méthodes peuvent être appliquées pour trouver des repères locaux pour les courbes de troisième degré du plan et de l'espace, dont Schubert a fait des études fort détaillées. Je ne les ai pas calculées jusqu'au bout. Je ne suis plus convaincu qu'il faille démontrer *a priori* la régularité de la variété en question. Je pense que Schubert a eu raison de dériver les dégénérescences nécessaires à faire la variété régulière, des contradictions qu'on rencontre dans le calcul même. En tout cas, c'est un principe général qu'on peut appliquer le théorème topologique de dualité de Poincaré pour les dimensions duales k et $n-k$, même si l'on admet des singularités d'une dimension plus petite que k.

On ne doit pas examiner la régularité du système en des points qui n'entrent dans les intersections regardées qu'avec une dimension plus petite que celle de l'intersection même. Dans le cas des courbes du troisième degré en tant que Schubert les a traitées, il ne faut pas se soucier de singularités éventuelles d'une dimension duale plus grande que trois.

*
* *

Vous vous êtes aperçus de l'importance du théorème de dualité. Son application doit être basée sur la connaissance de bases complètes pour les conditions des dimensions respectives. C'est ce qu'on appelle en géométrie énumérative le problème des caractéristiques.

Premier exemple. — Les droites du P_3 :

$$\dim 4 : 1; \quad \dim 3 : g; \quad \dim 2 : g_p, g_e; \quad \dim 1 : g_s; \quad \dim 0 : G.$$

On a les relations d'intersection

$$1.G = G, \qquad g.g_s = G, \qquad g_p.g_p = G, \qquad g_p.g_e = 0, \qquad g_e.g_e = G,$$

qui vérifient la dualité topologique. Si l'on veut calculer g^2, on forme $g^2 g_p = g^2 g_e = G$, ce qui donne la formule $g^2 = g_p + g_e$, déjà mentionnée.

Deuxième exemple. — Les coniques complètes :

μ = condition de passer par un point donné;
ρ = condition d'avoir une tangente donnée;

δ = coniques dégénérées en deux droites;
η = coniques dégénérées en deux points.

Si l'on sait que μ et ρ forment une base, on peut poser $\delta = a\rho - b\mu$ et à cause de la dualité projective $\eta = a\mu - b\rho$. On observe que $\mu^3\eta = \rho^3\delta = 0$ (³), d'où suit $a\mu^4 = b\mu^3\rho$, et ayant multiplié par μ et ρ,

$$\mu^5 : \mu^4\rho = \mu^4\rho : \mu^3\rho^2 = b : a,$$

puis à cause de la dualité projective $\mu^3\rho^2 = \mu^2\rho^3$,

$$\mu^2\rho^3 : \mu\rho^4 = \mu\rho^4 : \rho^5 = a : b.$$

Partant de $\mu^5 = 1$ et $\mu^4\rho = 2$, on peut calculer les autres nombres $\mu^i\rho^j$. Et avec $\mu^4\delta = 3$ (⁴), on trouve en plus

$$\delta = 2\rho - \mu, \qquad \eta = 2\mu - \rho.$$

Nous sommes partis de quelques nombres d'intersection très élémentaires et principalement de nombres évidemment égaux à zéro, où la question de la multiplicité ne se pose pas. Si par hasard il y a doute sur une multiplicité, on commence par des coefficients indéterminés, et l'on aboutit à trouver ces coefficients par un grand nombre d'équations. Si nous avions poussé l'analyse plus loin, nous aurions pu nous passer de la connaissance du nombre $\mu^4\rho = 2$.

Le point essentiel est de savoir que les μ et ρ forment une base. Schubert en a donné une démonstration basée sur le principe de la projection singulière [8, 10]. Je vais vous montrer que cette méthode est absolument exacte, mais je choisirai un autre exemple moins connu et qui a été l'objet de recherches modernes achevées au moyen de méthodes plus fines, mais à mon avis moins propres à être généralisées [1, 2]. Ce sont les variétés de Grassmann des sous-espaces $[k]$ d'un espace donné $[n]$. J'exposerai la méthode, qui est tout à fait générale, dans le cas $k = 1$, $n = 3$, c'est-à-dire je m'occuperai de nouveau de l'.

(³) Il n'y a pas de conique $\eta(\delta)$ passant par trois points donnés (possédant trois tangentes données).

(⁴) Quatre points déterminent trois paires de droites.

Exemple. — Les droites du P_3. Schubert se sert [10] de la projection centrale (centre a) du P_3 sur un plan ε. Toutes les droites vont tomber en ε à l'exception de celles qui passent par a. Selon Schubert chaque droite L de cette dernière espèce sera transformée dans l'ensemble de toutes les droites passant par le point p d'intersection de L et ε. En conséquence chaque variété (ou cycle) de deux dimensions se décompose en un multiple du cycle des droites contenues dans ε (c'est g_e) et un autre qui est un multiple du cycle des droites passant par a (c'est g_p). C'est par cette raison que g_p et g_e forment une base de la deuxième dimension.

On peut préciser ce raisonnement curieux en se servant d'un principe que L. Pontrjagin [7] a découvert dans une autre partie de la topologie. Je le formulerai sans la précision qui est exigée dans le cas général. Si l'intersection de M et N est zéro en M au sens de l'homologie, on peut détacher M de N (au sens de l'homologie) tel que l'intersection devient zéro au sens ensembliste.

Ce principe s'applique à notre exemple de la manière suivante : M est la variété des droites passant par le centre de projection a. N est une variété quelconque. On connaît par induction le système des cycles S' de M (qui est essentiellement le plan projectif). Les voici :

dim 2, toutes les droites passant par a;
dim 1, les droites passant par a et situées dans un plan qui passe par a;
dim 0, une droite fixe passant par a.

Le cycle S = MN doit être un multiple de celles-là. Mais on connaît des cycles spéciaux N' qui ont avec M justement les intersections S'. Ce sont respectivement

dim 4, toutes les droites (1);
dim 3, les droites passant par une droite qui ne passe pas par a (g);
dim 2, les droites passant par un point différent de a (g_p).

MN doit être un multiple d'un MN', et, si l'on retranche de N ce multiple de N', on doit trouver un cycle qui a avec M une intersection nulle en M au sens de l'homologie, et qui, par conséquent, peut être supposé détaché de M. Par la projection de Schubert, il va tomber dans le plan ε, où l'on connaît (par induction) tous les cycles, à savoir g_e, g_s, G. Il s'ensuit que le sytème donné de conditions est complet.

C'est un exemple très simple de ce procédé, mais qui est essentiellement général. On peut en dériver les bases bien connues des variétés de Grassmann, et même les belles formules d'intersection de Giambelli [3], qui, il est vrai, exigent quelque correction.

Le principe le plus fertile, dont j'ai fait usage, est le « Umkehrhomomorphismus » de H. Hopf [4]. En réalité c'est un principe purement algébrique pour les transformations algébriques, mais je préfère vous le présenter sous sa forme topologique, qui correspond le mieux à sa signification et à sa portée en géométrie énumérative. Le théorème de H. Hopf dit qu'étant donnée une transformation f d'une variété en une autre, il existe une homomorphie F des anneaux d'intersection en sens inverse telle que pour chaque couple de cycles z (dans la variété originelle) et Z (dans l'image), on a $f(z)\,Z = f[z\,F(Z)]$ au sens de l'homologie. Dans les transformations algébriques de la géométrie énumérative, F(Z) a une signification très simple. Si f est régulière (c'est-à-dire si elle se comporte comme une projection ordinaire (à des points exceptionnels près qui remplissent une variété d'une dimension plus basse), F est l'inversion ensembliste de f. Même si f n'est plus régulière, on peut dire que F(Z) doit être une combinaison linéaire des cycles contenus dans l'original ensembliste de Z, ce qui est toujours un principe très utile.

Exemple. — Les coniques complètes du plan projectif seront transformées dans les couples non ordonnés de points d'une droite L, à savoir chaque conique dans le couple de ses points d'intersections avec L. Il y a des singularités pour les coniques dégénérées δ dont une droite coïncide avec L, mais la dimension de la variété singulière n'étant qu'un, cela n'influence pas nos raisonnements. Aux couples de points de L, on peut imposer par exemple la condition p, qui demande que l'un de ses éléments soit un point donné a, ou (autre exemple) la condition ε de coïncidence des deux éléments du couple. On démontre sans peine que ε

vaut $2p$. L'original de p dans la variété des coniques complètes est la condition μ de passer par le point donné a. L'original de ε consiste en toutes les coniques qui ont un point double commun avec L. Il se décompose en deux parties : 1° les coniques tangentes à L, c'est-à-dire la condition ρ ; 2° les coniques dégénérées η. On peut démontrer la régularité de la transformation, et, en appliquant le théorème de H. Hopf, on retrouve la formule $2\mu = \rho + \eta$. Si l'on n'admet pas la régularité de la transformation, on voit au moins que 2μ est une combinaison linéaire de ρ et η à coefficients entiers non négatifs, ce qui est déjà un fait considérable.

Autre exemple. — Si l'on considère une transformation f d'une variété V dans une autre, v, qui est k-univoque au voisinage d'une certaine sous-variété z de v, telle que z est la variété de ramification de f pour ce voisinage, on peut se demander quel multiple de l'original Z de z vaut l'original algébrique. On peut répondre à cette question, en appliquant une forme locale du théorème de H. Hopf. On coupe z avec une portion y d'une variété telle que l'intersection est un point simple. L'original de y est un certain Y, mais $f(Y) = ky$, d'où suit que $F(Z) = kZ$.

L'exemple précédent contient un principe très important, la méthode des repères locaux multi-univoques. On peut profiter de ces repères pour dénouer des intersections singulières, et calculer les multiplicités d'intersections de la manière la plus directe.

Exemple. — On se propose de calculer le nombre $\eta\mu\rho^3$ des coniques complètes, c'est-à-dire le nombre des coniques dénégérées en deux points, passant par un point donné a, et tangentes à trois droites données L_1, L_2, L_3. Deux de ces tangentes doivent passer par le même point de la conique dégénérée; leur point d'intersection est l'un de ces points, et la droite qui le joint à a est sa droite double, le point, où elle rencontre la troisième tangente donnée, est l'autre point de la conique, qui est alors complètement déterminée. On en conclurait $\eta\mu\rho^3 = 3$, mais l'examen *a posteriori* des nombres d'intersections montre qu'il doit être 6. Schubert se tire de cette affaire en décrétant que la condition μ imposée aux coniques dégénérées η compte pour deux, parce que la droite à laquelle elle est imposée est une droite double. Cela semble être un subterfuge, mais il est quand même correct. On peut se contenter de la remarque qu'on a calculé ce nombre *a posteriori* d'une manière rigoureuse, mais il est utile de connaître la vraie cause du dédoublement de cette condition, parce que c'est un phénomène très fréquent en géométrie énumérative. Si l'on veut éviter des détours ennuyeux, ce principe, appliqué par Schubert avec une routine admirable dans bien des cas, est indispensable. Pour le démontrer, il est avantageux d'introduire un repère (2-1) pour les coniques voisines de l'exemplaire dégénéré en question. Par deux points arbitaires, mais fixes, on construit les tangentes L_1, L_2 (respectivement L_3, L_4) à la conique variable, qui sont numérotées de sorte que L_1 et L_3 passent dans le voisinage de l'un des deux points singuliers de la conique dégénérée η, et L_2, L_4 dans celui de l'autre. Comme coordonnées locales on choisit (1) le point d'intersection de L_1 et L_3, (2) celui de L_2 et L_4, (3) un point d'intersection de la conique variable avec une droite fixe L_0. C'est évidemment un repère (2-1), dans lequel à la condition μ répond une valeur assignée de la cinquième coordonnée, tandis que η est représenté par une relation linéaire entre les cinq coordonnées, qui traduit le fait que pour ces coniques les trois points servant de coordonnées sont alignés. Dans le repère, l'intersection de ces deux conditions est régulière, quoiqu'elle soit singulière dans le système des coniques mêmes. Le théorème de H. Hopf explique le dédoublement signalé.

Passons à une autre application de ce théorème. En géométrie énumérative, on est souvent confronté avec un type de problème, dont voici un exemple très élémentaire [8] :

Exemple. — Étant donné un système de coniques, dont on connaît le nombre des individus passant par un point, et le nombre de ceux qui sont tangents à une droite, on se propose de calculer le nombre de ceux qui touchent une droite d'un faisceau donné dans un point d'une droite donnée. Le résultat en est que le troisième nombre est la somme des deux premiers, ce qui revient à dire que la troisième condition, σ, est la somme des autres $\mu+\rho$. Il est impossible de redire les histoires merveilleuses que Schubert raconte sur cette affaire, qui est une des plus mystérieuses de son œuvre. Schubert met le système des coniques en relations avec le système des éléments de contact du plan (point et droite en position unie), dont les conditions fondamentales sont p (le point appartient à une droite donnée) et g (la droite appartient à un faisceau linéaire donné) et où il y a la relation fondamentale $p^2+g^2=pg$. Schubert compare ces conditions avec celles qu'on peut imposer aux coniques, et il dit que la condition p^2, qui fixe le point de l'élément de contact, est traduite par μ, que g^2 (qui fixe la droite de l'élément de contact) est traduite par ρ, et qu'en conséquence à $pg=p^2+g^2$ doit correspondre $\mu+\rho$. Mais pg qui force le point à se mouvoir sur une droite et la droite à appartenir à un faisceau, est selon Schubert justement l'équivalent de la condition que nous avons appelée σ, d'où suit $\sigma=\mu+\rho$.

Ce raisonnement, qui semble rappeler les fantaisies de certains quadrateurs du cercle, est néanmoins exact. Il peut être justifié par une généralisation du théorème de Hopf, appliqué à des transformations qui ne sont univoques dans aucune direction. Voici le principe de ce raisonnement : On a une relation entre les coniques et les éléments de contact, qui est dans une direction la décomposition de la conique envisagée dans ses éléments de contact, et dans la direction inverse la reconstruction de la conique décomposée. A une conique correspondent tous ses éléments de contact — c'est la décomposition — et à un élément de contact correspondent toutes les coniques qui le contiennent — c'est la globalisation. Formulées avec les termes de cette correspondance, les assertions de Schubert deviennent absolument claires. Dans cette correspondance, l'image de p^2 (éléments de contact à point donné) est μ (coniques passant par ce point), l'image de g^2 (éléments de contact à droite donnée) est ρ (coniques tangentes à cette droite), et l'image de pg (point variable sur une droite, droite variable dans un faisceau) est évidemment σ. Le théorème de H. Hopf généralisé permet de traduire l'égalité $pg=p^2+g^2$ par $\sigma=\mu+\rho$.

Note additionnelle.

Voici une esquisse de la marche que j'ai suivie pour résoudre le problème posé en 1942 par la Société mathématique néerlandaise :

Déterminer le nombre des sufaces réglées cubiques passant par une treizaine générale de points de l'espace.

Je rappelle que les droites génératrices d'une surface réglée cubique R_3 font partie d'une congruence linéaire à directrices l et m; le cas de directrices coïncidantes conduisant à des congruences paraboliques et aux surfaces de Cayley. On sait que les génératrices de R_3 produisent une correspondance (1, 2) entre les points de l et m et une correspondance (2, 1) entre les plans passant par l et m. Dans le cas général, ces correspondances déterminent l'une et l'autre la surface R_3 elle-même. Une correspondance (2, 1) peut être dégénérée, c'est-à-dire composée de deux correspondances projectives, dont l'une doit être singulière; si toutes les deux sont singulières, il y a dégénérescence double. Les correspondances simplement dégénérées donnent lieu aux surfaces

φ : composées d'une surface réglée du second degré et d'un faisceau linéaire.

L'étude de la variété des congruences linéaires conduit à la formule classique,

$$l + m = \sigma + 2\varepsilon,$$

où ε est condition des congruences paraboliques et σ celle des congruences singulières (à directrices l, m situées dans un plan e et se rencontrant l'une l'autre au point p). ε donne naissance aux surfaces

ε : surface de Cayley;

tandis que σ produit quatre types de surfaces R_3 dégénérées. En effet, en cherchant les génératrices de R_3 rencontrant une droite arbitraire, on en peut trouver 3, 2, 1 ou zéro situé dans e (zéro, 1, 2, 3 passant par p). A ces cas correspondent les dégénérescences simples appartenant à σ

π : système des tangentes d'une courbe plane de classe 3 et d'ordre 4, située en e et possédant la tangente double l et la tangente simple m, la correspondance des points étant régulière, celle des plans étant doublement dégénérée;

π^* : système composé de : 1° les tangentes d'une conique de classe 2, située en e et tangente à l; 2° un faisceau linéaire pe', où e' est un plan tangent de la conique, la correspondance des points étant régulière, celle des plans étant simplement dégénérée.

$\varkappa^*$: système dual de π^*;

$\varkappa$: système dual de π.

Outre ces conditions, on étudie les conditions l, m, μ (la surface passe par un point donné), ρ (la surface possède un plan tangent donné). On se propose de calculer les nombres

$$\mu^i \rho^j \; (i + j = 13).$$

On se procure les formules nécessaires, en coupant les R_3 par un plan fixe. Cela donne naissance à une transformation ζ des R_3 en figures P_3, qui consistent d'une courbe d'ordre 3 et de classe 4 et des points a et b, points d'intersection de l et m avec le plan, b étant le point double de la courbe. Il faut d'abord s'instruire des propriétés du système P_3, où l'où doit étudier les conditions :

ν : la courbe passe par un point donné;
a : le point a est situé sur une droite donnée;
b : le point b est situé sur une droite donnée;
ε : a et b coïncident, la droite joignante restant déterminée;
φ : la courbe est dégénérée, a se trouvant sur la partie conique;
r : la courbe est dégénérée, a se trouvant sur la partie droite.

On trouve les relations

$$4\nu = \varphi + 2a + 4b - 3\varepsilon, \tag{1}$$
$$\nu = r - 2a - b + 3\varepsilon. \tag{2}$$

L'homéomorphisme inverse à ζ fait correspondre aux

$$\nu, \quad a, \quad b, \quad \varepsilon, \quad \varphi, \quad r,$$

les

$$\mu, \quad l, \quad m, \quad \varepsilon, \quad \varphi, \quad y\varkappa^* + x\rho$$

(x et y étant indéterminés). ζ étant singulier pour π et π^*, on peut traduire les relations (1) et (2) par

$$4\mu \equiv \varphi + 2l + 4m - 3\varepsilon \qquad (\text{mod } \pi, \pi^*),$$
$$\mu \equiv y\varkappa^* + x\rho - m - 2l + 3\varepsilon \qquad (\text{mod } \pi, \pi^*).$$

En tenant compte de la dualité projective et en calculant quelques cas simples, on est conduit aux formules

$$\begin{aligned}
4\mu &= \varphi + 2l + 4m + 6\pi + 2\pi^* - 3\varepsilon,\\
4\rho &= \varphi + 4l + 2m + 6\varkappa + 2\varkappa^* - 3\varepsilon,\\
\rho - \mu &= m + 2l - \varkappa^* - 2\pi^* - 3\pi - 3\varepsilon,\\
\mu - \rho &= l + 2m - \pi^* - 2\varkappa^* - 3\varkappa - 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

Par ces formules, le calcul des $\mu^i\rho^j$ $(i+j=13)$ est réduit à celui des

$$\alpha\mu^i\rho^j \qquad (i+j=12,\quad \alpha=\pi,\ \pi^*,\ \varkappa^*,\ \varkappa,\ \varphi).$$

Le calcul du groupe $\alpha=\pi$ revient à celui de certains nombres du système dual à P_3, le cas $\alpha=\pi^*$ dépend de certains nombres pour les coniques, les cas $\alpha=\varkappa^*$ et $\alpha=\varkappa$ sont dérivés des précédents par dualité, tandis que $\alpha=\varphi$ demande l'étude des systèmes R_2, surfaces réglées de degré 2 avec deux directrices l, m, étude analogue à celle des R_3, mais plus simple.

On finit par trouver des nombres pour les R_3, dont je vais citer les plus intéressants,

504 surfaces passant par 13 points donnés;

1 surface à directrice m donnée et passant par 9 points;

4 surfaces de Cayley à directrice m donnée et passant par 8 points;

9 surfaces, dont la directrice m appartient à un faisceau linéaire donné, et qui passent par 10 points donnés.

J'ai encore étudié quelques autres conditions qu'on peut imposer aux R_3 (par exemple la condition d'être tangente à une droite donnée, ou des conditions cuspidales), mais ces conditions demandent des modèles plus compliqués de R_3.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] C. Ehresmann, *Sur la topologie de certains espaces homogènes. Thèse*, Paris, 1934 (*Annals of Math.*, 35, 1934, p. 396-443).

[2] J. C. H. Gerretsen, *De topologische grondslagen der meetkunde van het aantal* (*Diss. Groningen*, 1939, Groningen, P. Noordhoff, 1939).

[3] G. Z. Giambelli, *Risoluzione del problema degli spazi secanti.* [*Mem. Acad. Torino*, (2), 52, 1903, p. 171-211].

[4] H. Hopf, *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* (*Journ. f. d. r. u. angew. Math.*, 163, 1930, p. 71-88).

[5] S. Lefschetz, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Paris, 1924.

[6] S. Lefschetz, *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques* (*Mémorial Sc. math.*, 40, 1929).

[7] L. Pontrjagin, *Homologies in compact groups* (*Rec. Math. Moscou*, nouv. série 6, (48), 1939, p. 389-422).

[8] H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1879),

[9] H. Schubert, *Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks* (*Math. Ann.*. 17, 1880, p. 153-212).

[10] H. Schubert, *Lösung des Charakteristikenproblems für lineare Räume beliebiger Dimension* (*Mitt. math. Ges. Hamburg* 1, 1889, p. 134-155).

[11] F. Severi, *Sul principe della conservazione del numero* (*Rend. Palermo*, 33, 1912, p. 314-327).

[12] F. Severi, *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche* (*Atti R. Ist. Veneto*, 75_2, 1916, p. 1121-1161).

[13] F. Severi, *Ueber die Grundlagen der algebraischen Geometrie* (*Abh. Hamburg*, 9, 1932, p. 335-364).

[14] B. L. van der Waerden, *Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie* (*Math. Ann.*, 102, 1929, p. 337-362).

LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE ET LA TOPOLOGIE DES ESPACES FIBRÉS.

PAR GUY HIRSCH.
(Bruxelles).

Je traiterai ici un problème de topologie (sphères fibrées en sphères) qui s'introduit notamment par l'étude de l'axiomatique des espaces projectifs; je montrerai l'équivalence de deux problèmes (problème d'axiomatique et problème de structures fibrées) et donnerai quelques résultats relatifs à ce dernier [en particulier, des relations entre l'existence de certaines structures fibrées en sphères et de certains espaces (sphères et espaces projectifs réels) parallélisables].

Les ensembles de trois nombres réels, de trois nombres complexes ou de trois quaternions, donnés à un facteur près (respectivement réel, complexe ou quaternion, avec toutes les multiplications prises dans le même sens, *soit* à gauche, *soit* à droite, lorsqu'il s'agit de quaternions) sont, par définition, les *plans projectifs* respectivement réel, complexe ou quaternionien.

Au point de vue topologique, ces plans projectifs sont des variétés closes (compactes) respectivement à 2, 4 ou 8 dimensions.

L'ensemble des points d'un plan projectif dont les coordonnées vérifient une équation linéaire (à coefficients respectivement réels, complexes ou quaternions; dans ce dernier cas, les coefficients étant *soit* tous à droite, *soit* tous à gauche, et dépendant de la convention analogue faite plus haut) est une *droite projective*; celle-ci est aussi équivalente à l'ensemble de deux nombres (réels, complexes ou quaternions) définis à un facteur (réel, complexe ou quaternion) près (ce qui justifie son nom de droite projective), et est une variété close, homéomorphe à une sphère, respectivement à 1, 2 ou 4 dimensions.

Ces droites projectives dans un plan projectif vérifient les axiomes d'incidence de la géométrie projective plane :

(Γ). Deux points dans le plan projectif déterminent une droite projective (et une seule); deux droites projectives dans le plan projectif déterminent un point (et un seul); de plus, cette droite ou ce point dépendent d'une manière continue des deux points ou des deux droites.

D'autre part, on sait que le complément, dans le plan projectif, d'une droite projective quelconque, est homéomorphe à l'espace euclidien (respectivement à 2, 4 ou 8 dimensions); ce qui revient à dire qu'on peut « clore » l'espace euclidien (à 2, 4 ou 8 dimensions) par une sphère (respectivement à 1, 2 ou 4 dimensions) pour obtenir le plan projectif (réel, complexe ou quaternionien) [propriété que je désignerai par (Π)].

On sait [théorème de Frobenius (1)] que les seuls systèmes hypercomplexes (sur les nombres réels) sans diviseurs de zéro sont les nombres réels, les nombres complexes et les quaternions. Par conséquent, il ne sera pas possible de définir de nouvelles *variétés*, généralisant les plans projectifs, au moyen d'une définition algébrique analogue à celle qui a été donnée plus haut (éléments d'un corps ou d'un corps gauche, donnés à un facteur près) (2).

Il convient donc de se demander si les trois plans mentionnés plus haut sont les seules variétés V (dont j'appelle $n+n'$ le nombre de dimensions) dans lesquelles on peut construire une *géométrie projective plane*, c'est-à-dire dans lesquelles on peut définir une famille de sous-variétés (à n dimensions) M (que l'on appellera droites projectives), telles que les axiomes d'incidence (Γ) soient vérifiés.

S'il peut effectivement exister d'autres variétés V admettant une géométrie projective plane, les droites projectives M doivent-elles nécessairement être homéomorphes à une sphère à n dimensions?

(1) *Voir*, par exemple, L. Pontrjagin, *Topological Groups* (Princeton, 1939, p. 175).

(2) On pourrait obtenir des géométries projectives planes en partant d'un corps ou d'un corps gauche quelconques; mais les « plans » ainsi définis, s'ils ne coïncident pas avec un des trois exemples cités plus haut, ne contiendraient pas de sous-ensemble ayant la topologie de la droite réelle, et ne seraient donc pas des variétés. Ce cas ne nous intéresse pas ici.

D'autre part, existe-t-il d'autres variétés (à $n'+n$ dimensions) que les trois plans projectifs classiques, pour lesquelles (Π) est valable, c'est-à-dire dans lesquelles le complément d'une sphère à n dimensions est un espace euclidien à $n'+n$ dimensions?

Si la réponse à ces questions est affirmative (c'est-à-dire s'il est possible de fournir d'autres exemples de pareilles variétés différentes des trois cas déjà mentionnés), ces propositions (Γ) et (Π) sont-elles équivalentes? Autrement dit, si une variété V admet par hypothèse une géométrie projective plane, pourra-t-on affirmer que le complément d'une droite projective M est homéomorphe à un espace euclidien, ou encore, dans une variété où, par hypothèse, une certaine sphère a pour complément un espace euclidien, sera-t-il possible de construire une famille de sous-variétés M vérifiant les axiomes d'incidence (Γ)?

Je montrerai ici que la réponse à ces questions est affirmative : comme nous le verrons ci-dessous, il y a au moins une variété (à 16 dimensions topologiques) dans laquelle on peut construire une géométrie projective plane, où les droites sont homéomorphes à la sphère S^8 à 8 dimensions. On verra plus loin que le nombre de dimensions d'une variété pour laquelle (Γ) ou (Π) sont vrais est une puissance de 2. Dans l'état actuel de nos connaissances, il n'est pas possible d'énumérer effectivement toutes les variétés de plans projectifs, ou de décider s'il peut en exister d'autres, différentes de la précédente et des trois cas classiques. Mais ce problème est équivalent à un problème connu de topologie : déterminer les possibilités de fibrer une sphère (à $2n-1$ dimensions) en sphères (équatoriales) à $n-1$ dimensions (la variété des fibres étant alors, elle aussi, une sphère). Je démontre en effet que si (pour ces dimensions respectives $2n-1$, $n-1$ et n), une pareille structure fibrée existe [propriété que j'appelle (Φ_n)], alors on peut construire une variété M, à $2n$ dimensions, vérifiant (Γ) et (Π) (3). Réciproquement, l'existence d'une variété V pour laquelle (Γ) ou (Π) sont valables implique $n+n'=2n$, et S^{2n-1} se laisse fibrer en S^{n-1} équatoriales avec S^n pour variété de base.

(3) L'existence d'un système de fibres S^7 sur S^{15} [c'est-à-dire la propriété (Φ_8)] a été établie par H. Hopf, *Ueber die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimensionen* (*Fund. Math.*, 25, 1935, p. 427-440).

Dans la deuxième partie de ce travail, je détermine des conditions nécessaires et suffisantes pour que (Φ_n) soit valable, pour un nombre de dimensions n donné. La première propriété que j'établis peut être considérée comme une réciproque (affaiblie) de la propriété (algébrique) qui a servi à définir les plans projectifs classiques : puisque nous avons vu qu'il y a au moins une variété de plan projectif non homéomorphe aux trois exemples classiques, il en résultait que l'existence d'une algèbre primitive (ou d'un système hypercomplexe sans diviseurs de zéro sur le corps des nombres réels) correspondante, condition *suffisante* pour l'existence d'une géométrie projective plane [et d'une variété vérifiant (II)], n'est pas une condition *nécessaire*. Quelle condition *nécessaire et suffisante*, pour (Γ) et (II), analogue à l'existence d'une algèbre, peut-on énoncer ?

La réponse est fournie par cette propriété de la structure fibrée (Φ_n) : (Φ_n) implique l'existence sur S^{n-1} d'une « multiplication » continue *bi-topologique* (4) différentiable et semi-linéaire [c'est-à-dire telle que le « produit » (dans un sens) de points alignés sur un arc de grand cercle fournit encore un ensemble de points alignés sur un grand cercle]. [Propriété que j'appelle (M_n)].

Cette « multiplication » comprend comme cas particuliers les systèmes hypercomplexes sans diviseurs de zéro, mais elle est plus générale, car elle ne postule ni la distributivité, ni l'associativité du produit. Une pareille multiplication, non associative, existe effectivement sur la sphère à sept dimensions S^7, où elle est fournie par la multiplication des octaves de Cayley (5) dont la norme vaut 1. L'existence de cette multiplication (qui est d'ailleurs linéaire dans les deux sens), permet la construction du « plan projectif des octaves », variété à 16 dimensions topologiques, annoncée plus haut (6).

(4) Cela signifie que si l'on pose $r = p.q$, où p, q et r sont des points de la sphère, les applications $T_0(q) = p_0.q$ (p_0 fixé et q variant seul), ainsi que $T_0(p) = p.q_0$ (q_0 fixé et p variant seul) sont des applications *topologiques* de la sphère en elle-même quels que soient p_0 et q_0 et dépendent d'une manière continue respectivement de p_0 ou q_0.

(5) *Voir*, par exemple, L. E. Dickson, *Linear Algebras* (Cambridge, 1914), ou *Algebren und ihre Zahlen theorie* (Zürich, 1927), pour la définition des nombres hypercomplexes à 8 unités de Cayley.

(6) C'est cette même multiplication des octaves qui a permis la construction par H. Hopf du système de fibres S^7 dans S^{15}, cité plus haut [note (3)]. Nos connaissances sur les structures fibrées dans les sphères ne vont guère au delà de ce travail de Hopf; il en résulte qu'il n'est pas possible actuellement de résoudre complètement le problème de l'existence des plans projectifs.

L'existence de la structure fibrée en sphères équatoriales (Φ_n) entraîne aussi l'existence d'un parallélisme (7) dans la sphère S^{n-1} et aussi dans l'espace projectif (réel) à $n-1$ dimensions (8). En vertu d'un résultat de Stiefel et Hopf (9), ceci exige que n soit une puissance de 2.

La variété V^{16} construite ici est simplement connexe, et son polynome de Poincaré (10) est de la forme $1 + t^8 + t^{16}$. L'existence d'une pareille variété (et, en général, de variétés dont le polynome de Poincaré serait un trinome $1 + t^n + t^{2n}$ avec $n > 4$) avait été mise en doute par A. Bassi (11). J'établis d'ailleurs que toute variété V vérifiant (Γ) ou (II) a un polynome de Poincaré de cette forme, et est décomposable en une somme de trois boules à $2n$ dimensions. [J'ignore si toute variété ayant un polynome de Poincaré de la forme $1 + t^n + t^{2n}$ vérifie (Γ) et (II), ce qui entraînerait qu'elle ne peut exister, au plus, que pour des nombres de dimensions qui sont des puissances de 2. Tout ce qu'on peut en affirmer, c'est que si l'on exige encore que cette variété soit décomposable en une somme de trois boules, alors il en sera effectivement ainsi, et la variété pourra être considérée comme un « plan projectif ».]

(7) *Voir* E. Stiefel, *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten* (*Comment. Math. Helvet.*, 8, 1935, p. 3-51).

(8) J'établis ici que la présence sur S^{2n-1} d'une structure fibrée en S^{n-1} *équatoriales* entraîne l'existence d'un parallélisme dans l'*espace projectif réel* P^{n-1}. On peut rapprocher ce théorème d'un résultat de J. Feldbau (sous le pseudonyme de J. Laboureur), *Les structures fibrées sur la sphère et le problème du parallélisme* (*Bull. Soc. math. de France*, 1942), qui établit (par une méthode d'ailleurs différente) que si S^{2n-1} se laisse fibrer en S^{n-1} (pas nécessairement équatoriales !), alors S^{n-1} (mais pas nécessairement P^{n-1} !) est parallélisable.

(9) E. Stiefel, *Comment. Math. Helvet.*, 13, 1941, p. 201, th. A; H. Hopf, *Comment. Math. Helvet.*, 13, 1941, p. 238, th. Ve.

(10) On appelle polynome de Poincaré d'un espace C un polynome en une variable t, où le coefficient de la k^e puissance de t est égal au nombre de Betti de C pour la dimension k.

(11) A. Bassi, *Un problema topologico di esistenza* (*Mem. della Cl. di Scienza, R. Accad. d'Italia*, 6, 1935, p. 669-714).

On peut enfin se poser un problème analogue au précédent dans le cas des espaces projectifs à plus de deux dimensions (projectives) : ayant défini les espaces projectifs classiques (réels, complexes ou quaternioniens) à partir d'un corps ou d'un corps gauche, et considérant les axiomes d'incidence qui y lient les sous-espaces projectifs et leurs intersections, on peut se demander encore si toute variété dans laquelle il est possible de définir des familles de sous-variétés dont les intersections vérifient ces axiomes d'incidence, est nécessairement homéomorphe à un des espaces classiques. Contrairement à ce qui se passait dans le cas des *plans* projectifs, on peut maintenant affirmer qu'ici il n'y a pas d'autres variétés répondant à ces conditions. En effet, dans une géométrie projective à plus de deux dimensions, le théorème de Desargues (qui est un *postulat* dans une géométrie projective plane) est démontrable. Or, il résulte des travaux de Hilbert sur l'axiomatique de la géométrie que le théorème de Desargues entraîne l'existence d'un corps (ou d'un corps gauche) correspondant; si, comme nous l'avons supposé, les espaces projectifs considérés sont des variétés, ils contiennent des sous-ensembles ayant la topologie de la droite réelle, et il résulte du théorème de Frobenius cité plus haut que le corps (ou corps gauche) construit se confond avec le corps des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions ([12]).

Dans un espace projectif à k dimensions (projectives), le complément d'un hyperplan projectif (à $k-1$ dimensions projectives) est un espace euclidien. On peut encore établir, comme précédemment, que, d'une manière générale, la possibilité de « clore » un espace euclidien à $n'+n$ dimensions par une variété M à n' dimensions (pour obtenir une variété close à $n'+n$ dimensions) est équivalente à la possibilité de fibrer $S^{n'+n-1}$ en S^{n-1} équatoriales, avec M pour variété des fibres (ce qui impliquera que n' est un multiple de n). Pour ce dernier

([12]) Cette remarque montre en particulier que la géométrie projective construite dans la V^{16} citée plus haut (plan projectif des octaves) est, nécessairement, non-arguésienne. Une construction, par voie axiomatique, d'une géométrie non-arguésienne, utilisant également l'algèbre des octaves de Cayley, a fait l'objet d'un travail de M^lle R. Moufang, *Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit* (*Abh. Math. Seminar*, Hamburg, 9, 1932, p. 207-222.).

problème, on connaît ([13]) les structures fibrées correspondant aux trois géométries projectives classiques, et l'on ignore s'il en existe d'autres. La remarque faite ci-dessus (non-existence de géométries projectives « non classiques » à plus de deux dimensions) permet en tout cas d'énoncer certaines restrictions qui leur seraient applicables.

J'esquisse ici la démonstration des équivalences.

1. (Γ) *implique* (Φ_n). — Les droites projectives passant par un point donné forment un ensemble homéomorphe à une droite projective, et découpent sur la frontière d'un voisinage (supposé sphérique) du point un système de fibres qui sont des sphères à $n-1$ dimensions. (Il convient d'imposer aux « droites » une condition de régularité.)

Pour établir que la variété des fibres (qui est homéomorphe à une droite projective) est homéomorphe à la sphère S^n, on décomposera S^{2n-1}, à partir de deux fibres quelconques, en une somme de deux « tores solides », suivant un diagramme de Heegaard généralisé.

2. (II) *implique* (Φ_n). — Un voisinage de M^n dans V^{2n} sera une variété bordée par une sphère (parce que le complément de M^n est un espace euclidien) à $2n-1$ dimensions, fibrée en boules (normales à M^n) dont les bords S^{n-1} fibrent S^{2n-1}.

3. (Φ_n) *implique* (II). — En considérant la fibre S^{n-1} comme le bord d'une boule à n dimensions, on construit une variété à $2n$ dimensions, bordée par une sphère (fibrée en S^{n-1}) à $2n-1$ dimensions. Il suffit d'y souder par sa frontière une boule à $2n$ dimensions pour obtenir V^{2n}.

4. (II) *implique* (Γ). — Reprenons les constructions des n^os 2 et 3, et considérons la boule à $2n$ dimensions comme une demi-sphère à $2n$ dimensions. Prenons celles des hypersphères équatoriales, dans cette demi-sphère, qui coupent la frontière de la demi-sphère suivant les fibres S^{n-1} de cette frontière (qui existent,

([13]) *Voir* le travail de H. Hopf cité plus haut [note (3)].

en vertu du n° 2). Si l'on identifie les points de chacune de ces fibres, les hypersphères à n dimensions considérées, fermées par ce point (« point à l'infini »), ainsi que M^n (« droite à l'infini »), engendrent une géométrie projective plane dans V^{2n}.

5. (Φ_n) *implique* (M_n). — En reprenant le diagramme de Heegaard généralisé (n° 1), nous pouvons y introduire deux systèmes de coordonnées bi-sphériques, qui correspondent respectivement aux deux boules qui figurent dans le diagramme (c'est-à-dire aux sphères qui sont homotopes à un point respectivement dans les deux parties du diagramme). La deuxième « ligne » coordonnée sera la fibre. Alors, par définition, l'une de ces premières coordonnées sera égale au « produit » de l'autre par la coordonnée de la fibre.

6. (M_n) *implique* (Φ_n). — A la multiplication par un point donné on peut faire correspondre un système de relations linéaires entre les coordonnées projectives de deux points d'un espace projectif à $n-1$ dimensions. En les interprétant comme des relations entre les coordonnées cartésiennes dans un espace euclidien à $2n$ dimensions, on définira un système d'hyperplans à n dimensions passant tous par l'origine des coordonnées, qui découperont sur la sphère-unité à $2n-1$ dimensions le système de fibres demandé.

7. (M_n) *implique que la sphère et l'espace projectif réel à* $n-1$ *dimensions sont parallélisables*. — Pour mener par un point de la sphère la direction « parallèle » à une direction donnée par le point-unité, il suffira de multiplier ce point par une suite de points situés sur la direction donnée. Ce parallélisme s'étend à l'espace projectif réel, obtenu à partir de la sphère par identification des points diamétralement opposés, parce que (en vertu du caractère semi-linéaire du produit) des directions « parallèles » appliquées en des points diamétralement opposés de la sphère sont, elles aussi, diamétralement opposées.

THE FINITE ALGEBRAIC FORM OF THE THEORY OF HARMONIC INTEGRALS;

By W. V. D. HODGE
(Cambridge, England).

1. Harmonic integrals are defined in spaces which, in the large, are closed orientable manifolds, and in the small, are Riemannian spaces. Let M be such a space, and let $(x^1, \ldots, x^n)$ be an allowable coordinate system in some neighbourhood of M, and suppose that the Riemannian metric is given in this neighbourhood by the positive definite quadratic form $\sum g_{ij}\, dx^i\, dx^j$.

A p-fold integral on M is given, in the neighbourhood in question, by the expression

$$\int P = \int \sum P_{i_1 \ldots i_p}\, dx^{i_1} \ldots dx^{i_p},$$

where $P_{i_1 \ldots i_p}$ is a skew-symmetric covariant tensor. The components $P_{i_1 \ldots i_p}$ are usually assumed to have continuous derivatives of the second order. Integration is taken over elementary p-loci E^p defined by the equations

$$x^i = f^i(u_1, \ldots, u_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

where $f^i(u_1, \ldots, u_p)$ has continuous derivatives and $u_1, \ldots, u_p$ vary in a p-cell Δ^p of Euclidean p-space. Then

$$\int_{E^p} P = \int_{\Delta^p} \sum P_{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})}{\partial(u_1, \ldots, u_p)}\, du_1 \ldots du_p.$$

More generally, integrals are taken over any p-locus which is a finite sum of elementary p-loci. The integral $\int P$ defines two other integrals

$$(1) \quad \int dP \quad \text{where} \quad dP = \sum \left[\sum_{r=1}^{p+1} (-1)^{r-1} \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \times P_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots p+1} \right] dx^{i_1} \dots dx^{i_{p+1}},$$

$$(2) \quad \int \delta P \quad \text{where} \quad \delta P = \sum \left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} P_{i_1 \dots i_{p-1}, i, j} \right) dx^{i_1} \dots dx^{i_{p-1}},$$

where $\cdot j$ denotes covariant differentiation with respect to the Christoffel symbols of the metric. The integral is said to be harmonic at a point if at this point we have

$$dP = 0, \qquad \delta P = 0,$$

and it is said, simply to be harmonic if it is defined at all points of the space M and is harmonic at every point of M.

Let K be a covering complex of M, whose p-cells are assumed to be fields of integration of p-fold integrals $(p = 1, \dots, n)$. We denote the p-cells by $E_i^p \, (i = 1, \dots, \alpha^p)$ and we define the integers

$$\eta_{ij}^p (i = 1, \dots, \alpha^{p+1}, j = 1, \dots, \alpha^p, p = 0, \dots, n-1)$$

by the properties

$\eta_{ij}^p = 0$, *if* E_j^p is not on the boundary of E_i^{p+1};
$\eta_{ij}^p = 1$, *if* E_j^p is a cell of the oriented boundary of E_i^{p+1};
$\eta_{ij}^p = -1$, *if* $-E_j^p$ is a cell of the oriented boundary of E_{p+1}^i.

The integral $\int P$ defines a function Φ of the p-cells of K as follows

$$\Phi(E_i^p) = \int_{E_i^p} P,$$

and this function has the property

$$\Phi(-E_i^p) = -\Phi(E_i^p).$$

Hence Φ is a (p, R)-chain on K, in the language of modern homology theory, where R is the additive group of real numbers.

Let us consider the proportion of Φ which correspond to the properties $dP = 0$, $\delta P = 0$. The first of these conditions implies that the value of $\int P$ over the boundary of any $(p+1)$-cell of K is zero, that is

$$\sum_{j=1}^{\alpha^p} \eta_{ij}^p \Phi(E_j^p) = 0 \qquad (i = 1, \dots, \alpha^{p+1}),$$

that is, the co-boundary $\gamma\Phi$ of Φ is zero. Φ is thus a co-cycle. The interpretation of the condition $\delta P = 0$ is not so obvious, since it depends on the choice of the Riemannian métric. However, a fruitful suggestion is obtained if we consider the case in which the metric is locally Euclidean $(g_{ij} = \delta_{ij})$ and the complex is obtained by cutting the neighbourhood into cells by the loci

$$x^i = m^i h \qquad (i = 1, \dots, n;\ m^i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Any p-cell is given by

$$m^{ij} h \leq x^{ij} \leq (m^{ij} + 1) h, \qquad x^k = m^k h \qquad (k \neq i, \dots, i_p),$$

for some choice of $i_1, \dots, i_p$. The value of Φ on this cell depends only on $(P_i, \dots, i_p)$. We may replace $(P_i, \dots, i_p)$ this cell by it average value without altering Φ.

We must replace

$$\sum_{i,j} g^{ij} P_{i_1 \dots i_{p-1}, i, j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_{i \dots i_{p-1} i}}{\partial x_i}$$

by a difference équation in an obvious manner, and obtain the equation

$$\sum_{j=1}^{\alpha^p} \eta_{ji}^p \Phi(E_j^p) = 0.$$

If this relation holds for all the $(p-1)$ cells of K, the boundary $\beta\Phi$ of Φ in zéro, that is, Φ is a cycle.

This suggests how we might define harmonic chains on any finite complex K with an arbitrary additive topological group $\mathcal{G}$ as coefficient group. We continue to denote by $E_i^p \, (i = 1, \dots, \alpha^p)$ the p-cells of K, and define the incidence numbers η_{ij}^p as before.

Let Φ be a $(p, \mathcal{G})$-chain on K. Then, as a first condition on Φ that it be harmonic, we require

$$\gamma\Phi = 0.$$

The second condition calls for a little care. The suggestion $\beta\Phi = 0$ does not turn out to be the best, and we require a slight modification of it. $\beta\Phi = 0$ is indeed only suggested by a very special case, in which the metric on M is Euclidean. A little further consideration suggests that, to represent the case of a general Riemannian metric, we should replace $\beta\Phi = 0$ by $\beta\Phi^* = 0$, where Φ^* is a p-chain determined by Φ is some invariant way.

Further consideration also suggests that Φ^* should not be taken as a $(p, \mathcal{G})$-chain but as a $(p, \mathcal{G}^*)$-chain, where $\mathcal{G}^*$ is the character group of $\mathcal{G}$. The arguments in favour of this are contained in the discussion of periodic properties of harmonic chain which follows. It may be pointed out, at once, however, that once we recognise that Φ^* should be a $(p, \mathcal{G})$-chain it follows that even when we are dealing with a coefficient group $\mathcal{G}$ which coincides with its character group $\mathcal{G}^*$ there is no reason to give a privileged position to the case $\Phi = \Phi^*$, and indeed we find that this particular case is of little interest.

2. The theory of integrals on a manifold makes considerable use of the value of an integral over a field of integration. In particular, when $\int P$ is such that

$$dP = 0,$$

it is well-known that

$$\int_{C^p} = \int_{D^p} P,$$

where C^p and D^p are fields of integration such that $C^p - D^p$ is a boundary. The analogous definitions for $(p, \mathcal{G})$-chains on K are as follows. Let Φ be any $(p, \mathcal{G})$-chain, Ψ^* any $(p, \mathcal{G}^*)$-chain. We define the *value* of Φ on Ψ^* to be

$$\Psi^*(\Phi) = \sum_{1}^{\alpha^p} \Psi^*(E_i^p)\,\Phi(E_i^p),$$

where $\Phi(E_i^p)$ is the value of Φ on E_i^p, $\Psi^*(E_i^p)$ that of Ψ^* on the same cell, and $\Psi^*(E_i^p)\,\Phi(E_i^p)$ is the element in the additive group of real numbers *modulo one* which represents $\Phi(E_i^p)$ in the homomorphism determined by $\Psi^*(E_i^p)$.

The relation

$$\{\beta\Psi^*\}(\Phi) = \Psi^*(\gamma\Phi)$$

states that the value of the co-boundary $\gamma\Phi$ over a $(p+1, \mathcal{G}^*)$-chain Ψ^* is equal to the value of the $(p, \mathcal{G})$-chain over the boundary $\beta\Psi$. This is just the finite form of Stokes' Theorem. If Φ is a co-cycle, we deduce that the value of Φ over any boundary is zero. If Ψ_1^* and Ψ_2^* are homologous $(p, \mathcal{G}^*)$-cycles

$$\Psi_1^*(\Phi) - \Psi_2^*(\Phi) = \{\Psi_1^* - \Psi_2^*\}(\Phi) = 0,$$

since $\Psi_1^* - \Psi_2^*$ is a boundary, Hence a co-cycle Φ has the same value on all cycles of a homologous set, and we call this common value the period of Φ on any cycle of the set (on the corresponding element of the homology group).

If Φ is a $(p, \mathcal{G})$ co-cycle all of whose periods are zero

$$\Psi^*(\Phi) = 0$$

for all $(p, \mathcal{G}^*)$-cycles Ψ^*. Φ then belongs to the annihilat or of the group of all $(p, \mathcal{G})$-cycles, and is hence a co-boundary. This corresponds to a well-known result of de Rham. On the other hand, de Rham's theorem that there exists on a manifold an exact integral having assigned periods on any set of independant cycles does not necessarily hold in our representation.

3. Considerations of the period properties of harmonic integrals suggest that we define a $(p, \mathcal{G})$-chain on K to be harmonic as follows : we associate with Φ a $(p, \mathcal{G}^*)$-chain Φ^* subject to the following conditions :

1° Φ defines Φ^* uniquely, $\Phi = 0$ implies $\Phi^* = 0$ and conversely;
2° $\Phi^*(\Phi) > 0$ unless $\Phi = 0$;
3° If Φ and Ψ are any two $(p, \mathcal{G})$-chains, Φ^*, Ψ^* the associated $(p, \mathcal{G}^*)$-chains, then

$$(\Phi + \Psi)^* = \Phi^* + \Psi^*$$

and (4°) :

$$\Psi^*(\Phi) = \Phi^*(\Psi).$$

Then Φ is harmonic if $\gamma\Phi = 0$, $\beta\Phi^* = 0$.

It is easily shown that a harmonic $(p, \mathcal{G})$-chain, which is by definitive a co-cycle, cannot have all its periods zero. If Φ has all its periods zero, it is necessarily a co-boundary $\Phi = \gamma\Psi$. Then, writing

$$\Phi_i \text{ for } \Phi(E_i^p), \qquad \Psi_i \text{ for } \Psi(E_i^{p-1}),$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{\alpha^{p+1}} \eta_{ij}^{p-1} \Psi_j.$$

Then condition $\gamma\Phi = 0$ is satisfied automatically, and the condition $\beta\Phi^* = 0$ is

$$\sum_{j=1}^{\alpha^p} \eta_{ji}^{p-1} \Phi_j^* = 0$$

and hence

$$\sum_i \sum_j \Psi_i \eta_{ji}^{p-1} \Phi_j^* = 0$$

and therefore

$$\Phi^*(\Phi) = 0$$

by (2) above, this implies $\Phi = 0$.

It follows from this that the harmonic $(p, \mathcal{G})$-chains form an additive group isomorphic with a sub-group of the co-homology group $Z_p(K, \mathcal{G})$. An exactly similar argument shows that the associated $(p, \mathcal{G}^*)$-chains of the harmonic $(p, \mathcal{G})$-chains form a group of the homology group $Z_p(K, \mathcal{G}^*)$.

4. It is of some interest to consider special cases of the group $\mathcal{G}$. Let us suppose that $\mathcal{G}$ satisfies the condition that $\mathcal{G}^*$ is isomorphic with $\mathcal{G}$, but is otherwise arbitrary. We then identify $\mathcal{G}^*$ with $\mathcal{G}$. If Φ is a $(p, \mathcal{G})$-chain, Φ^* the associated $(p, \mathcal{G}^*)$-chain, condition (1) of § 3 is satisfied when

$$\Phi_i^* = \sum_{d=1}^{\alpha^p} r_{ij} \Phi_j,$$

when r is a unimodular matrix of integers. Condition (3°) is

also satisfied. Condition (4°) requires $r_{ij} = r_{ji}$ and condition (2°) requires that r be positive definite. Then Φ is harmonic if

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_{j,k} \eta_{ji}^{p-1} r_{jk} \Phi_k = 0 & (i = 1, \ldots, \alpha^{p-1}), \\ \sum_j \eta_{ij}^p \Phi_j = 0 & (i = 1, \ldots, \alpha^{p+1}). \end{cases}$$

It is well known that we can find unimodular matrices of integers a^{p+1}, a^p, a^{p-1} such that

$$a^{p+1} \eta^p (a^p)^{-1} = \zeta^p = \left\| \begin{array}{c:c:c} \begin{matrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_\rho \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$a^p \eta^{p-1} (a^{p-1})^{-1} = \zeta^{p-1} = \left\| \begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f_\sigma \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

where $e_1, \ldots, e_\rho$ are the invariant factor of η^p, $f_1, \ldots, f_\sigma$ those of η^{p-1}. If we define Ψ_i by the equation

$$\Psi_i = \sum a_{ij}^p \Phi_i,$$

equations (1) are easily reduced to the matrix form

$$(\zeta^{p-1})' s \Psi = 0, \qquad \zeta^p \Psi = 0,$$

where $s = [(a^p)^{-1}]' r (a^p)^{-1}$ is a symmetric positive definite matrix of integers.

If t is the matrix consisting of the $(\rho+1)^d, \ldots, (\rho+\sigma)^d$ row of s the equations become

$$e_i \Psi_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \rho),$$

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha^p} f_i t_{ij} \Psi_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \sigma).$$

It is easily deduced from this that the harmonic $(p, \mathcal{G})$-chain form a group isomorphic with a direct sum of R_ρ groups $\mathcal{G}$ (where

R_ρ is the ρ^{th} Betti number of K) and groups $\mathcal{G}_{d_1}, \ldots, \mathcal{G}_{d_r}$ where $\mathcal{G}_a$ is the sub-group of $\mathcal{G}$ consisting of elements g of $\mathcal{G}$ for which $ag = 0$ and $d_1, \ldots, d_k$ are the invariant factors of the matrix of coefficients of (2).

$d_1, \ldots, d_k$ will depend on the choice of r, but it is not difficult to see that $\mathcal{G}_{d_1} + \ldots + \mathcal{G}_{d_k}$ always contain a sub-group isomorphic with

$$\mathcal{G}_{e_1} + \ldots + \mathcal{G}_{e_\rho} + \mathcal{G}_{f_1} + \ldots + \mathcal{G}_{f_\sigma}.$$

Moreover, we can choose so that $\mathcal{G}_{d_1} + \ldots + G_{d_k}$ coincides with this sub-group. We merely take $r = (a^p)' a^p$. Then s is the unit matrix.

It should be noted, however, that it is not always clear that for a given $\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$ we can choose the matrix r so that $\Phi^*(\Phi) > 0$ unless $\Phi = 0$.

5. A more particular case is that in which $\mathcal{G} = R$ is the additive group of real numbers. Then $\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$. In this case it is not necessary the reduce the product of an element of $\mathcal{G}^*$ by an element of $\mathcal{G}$ modulo one, and it is not difficult to show that none of the results of § 3 and 4 are lost if we no longer so reduce products. Hence we shall suppose that this reduction does not take place. It is then easy to show that the condition r positive definite is sufficient to assure that $\Phi^*(\Phi) > 0$ unless $\Phi = 0$. The elements ν_{ij} may be real numbers, not necessarily integers.

In this case, the number of independant solutions of (2) is $\alpha_p - k$ where k is the rank of the matrix of coefficients. Since (t_{ij}) $(i = 1, \ldots, \sigma, j = \rho + 1, \ldots, \sigma)$ is non-singular because s is positive definite the rank is $k = \rho + \sigma$, and $\alpha_p - k = R_\rho$. The solution from a group which is the direct sum of p group $\mathcal{G}$, and since the cohomology group and homology group are both isomorphic with this it easily follows that there exists exactly one harmonic p-chain with assigned periods on the elements of the homology group.

6. We may mention briefly one or two special problems which suggest themselves in connection with harmonic chains. These problems are suggested by the analogy with the theory of harmonic integrals. As harmonic integral theory is a generalisation of potential theory, the question of the generalisation of such theorems as the Dirichlet and Neumann theorems arise.

a. We may ask whether it is possible to find a chain such that

$$\beta\Phi^* = \Psi, \qquad \gamma\Phi = \chi,$$

where Ψ is a given $(p - 1, \mathcal{G}^*)$-chain, and χ is a given $(p + 1, \mathcal{G})$-chain on K. Clearly, in order that there should be a solution Ψ must be a boundary, $\Psi = \beta\Psi'$ and χ must be a co-boundary. It is probable that these conditions are also sufficient, but we only prove this in the case $\mathcal{G} = \mathcal{G}^* = R$. The equations to be solved are then

$$(\eta^{p-1})' r \Phi = (\eta^{p-1})' \Psi',$$
$$\eta_p \Phi = \eta_p \chi'.$$

Any relation correcting the left hand sides of these equations is expressible as a combination of a relation connecting the first set and a relation connecting the second set. Since r is non-singular, it easily follows that these relations also connect the right hand sides, and hence the equations are soluble. The most general solution is obtained by adding a harmonic chain to a particular solution.

There is an interesting application of this result to the theory of electrical networks (suggested by Prof. Tucker). $\mathcal{G}$ was a one-dimensional network, we can construct a 2-dimensional complex from it by taking the vertices of the network as 0-cells the (directed) conductors as 1-cells, and the circuits as 2-cells. By construction we find the first Betti number is zero. Let r_i be the resistance of E_i' and let χ_i be the e. m. f. in E_i'. Let the current leaving the network at E_i' by j. We have to find the current γ_i in E_i. We write $\Phi_i = r_i \gamma_i$. Then if

$$r = \begin{Vmatrix} r_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & r_{\alpha'}^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Kirchoff's equations are

$$\beta\Phi^* = j, \qquad \gamma\Phi = \gamma\chi.$$

From the analysis give above it follows that there exists a solution which is unique, if and only if j is a boundary, that is, is and only if the total current entering the network in zero.

b. The theory can be extended to open complexes. Let K be any closed complex L a closed sub-complex. We may suppose that the p-cells of K are marked so that E_i^p is in K — L if $i \leqq \beta_i^p$ and in L if $i > \beta^0$. Then the matrix η^p is of the form

$$\eta^p = \left\| \begin{matrix} \eta_1^{(p)} & \eta_2^{(p)} \\ 0 & \eta_3^{(p)} \end{matrix} \right\|$$

where $\eta_1^{(p)}$ is a $\beta_{p+1} \times \beta_p$ matrix. The equation $\eta^p \eta^{p-1} = 0$, leads to $\eta_1^{(p)} \eta_1^{(p-1)} = 0$ and since the analysis is based on such a relation the theory carries over at once.

The problem of most interest are the solution of the équations

$$\beta\Phi^* = \Psi, \qquad \gamma\Phi = 0,$$

or the equations

$$\beta\Phi^* = 0, \qquad \gamma\Phi = \chi,$$

where Ψ is a chain having zero values in K — L and χ has zero values in L.

7. Finally, we indicate briefly how our results can be related to the theory of manifolds. M. de Rham has shown how the theory of integrals in a manifold can be used to investigate the intersection properties of cycles in the manifold, and, similarly, we can relate the theory described above to intersections on a finite complex which is a manifold. It should be noted, however, that M. de Rham's theory does not require the integrals to be harmonic; nevertheless, it is found in particular cases, for instances in applications to algebraic geometry, that much additional information can be obtained by applying his theory to harmonic integrals. Similarly, in the case of finite complexes it is possible to relate the theory of general $(p, \mathcal{G})$-cocycles to the theory of intersection of $(p, \mathcal{G})$-cycles, but it is interesting to see how the theory works out when the cocycles are harmonic.

It is not necessary to work out the whole theory in this paper; a brief description of the basic features of the theory is all that is necessary in order that a topologist may be able to work out the full theory for himself, and I shall limit myself to the bare essentials.

Suppose that the complex K is a manifold, and let $\overline{K}$ denote the dual complex. $\overline{E}_i^{n-p}$ the $(n-p)$-cell dual to E_i^p. If Φ is a $(p, \mathcal{G})$-chain of K, we define a $(n-p, \mathcal{G})$-chain $\overline{\Phi}$ of $\overline{K}$ by writing

$$\overline{\Phi}_i = \overline{\Phi}(\overline{E}_i^{n-p}) = \Phi(E_i^p) = \Phi_i,$$

[There is a possibility of a generalisation here, defining $\overline{\Phi}$ to be a $(n-p)$-chain on $\overline{K}$ associated with Φ is more general way.] It is well-known that

$$\beta\overline{\Phi} = (-1)^{p-1}(\gamma\Phi), \qquad \gamma\overline{\Phi} = (-1)^{p-1}(\beta\Phi),$$

and that, if $\overline{\Psi}^*$ is the $(n-p, \mathcal{G}^*)$-chain defined similarly from the $(p, \mathcal{G}^*)$-chain Ψ^*,

$$\overline{\Psi}^*(\overline{\Phi}) = \Psi^*(\Phi).$$

If Φ is a harmonic $(p, \mathcal{G})$-chain, Φ^* the associated $(p, \mathcal{G}^*)$-chain in the harmonic theory for K,

$$\beta\Phi^* = 0, \qquad \gamma\Phi = 0,$$

nnd hence

$$\gamma\overline{\Phi}^* = 0, \qquad \beta\overline{\Phi} = 0.$$

This does not imply that $\overline{\Phi}$ or $\overline{\Phi}^*$ is harmonic in $\overline{K}^*$. In order that the harmonic property be preserved when we pass from K to K it is necessary that we should be able to define harmonic duality for $(n-p, \mathcal{G}^*)$-chains of $\overline{K}$ so that

$$(\overline{\Phi}^*)^* = \overline{\Phi}.$$

In order that this should be possible, the group $\mathcal{G}$ must satisfy certain restrictions. Its simplest cases in which these restrictions can be satisfied are those in wich $\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$; such groups include the additive group R of real numbers and finite groups, and direct sums of such groups. Even in this limited range, however, it is possible to chose $\mathcal{G}$ so that we can obtain deeper results than I obtained, in the case $\mathcal{G} = R$, in my book *Harmonic integrals*.

In the case of groups for which we can define harmonic duals on $\overline{K}$ so that

$$(\overline{\Phi}^*)^* = \overline{\Phi},$$

we can extend de Rham's results on the relation between integrals and intersections in view of the following consideration. De Rham's results depend largely on the fact that if we have a p-fold integral and a q-fold integral on an n-dimensional manifold we can combine them, by exterior multiplication, to give a $(p+q)$-fold integral (zero if $p+q>n$). We can do the same for chains in K, $\overline{\mathrm{K}}$. From K, $\overline{\mathrm{K}}$ we can construct a complex K_1 each of where cells is the intersection of a cell of K and a cell of $\overline{\mathrm{K}}$. If E_i^p is a p-cell of K, $\overline{\mathrm{E}}_j^q$ is a q-cell of $\overline{\mathrm{K}}$, the either do not meet or have a $(p+q-n)$-cell $\mathrm{E}_i^p\mathrm{E}_j^q$ in common. It is these non-vacuous intersection which are the cells of K_1. Let Φ be a $(p, \mathcal{G})$-chain of K, Ψ^* a $(p, \mathcal{G}^*)$-chain of $\overline{\mathrm{K}}$. From the we can define a $(p+q-n, \mathrm{R}_1)$-chain $\chi=\Phi\times\Psi^*$ of K_1

$$\chi(\mathrm{E}_i^{p'}\overline{\mathrm{E}}_j^{q'})=0 \quad \text{where} \quad p=p', \quad q=q',$$
$$\chi(\overline{\mathrm{E}}_i^{p}\overline{\mathrm{E}}_j^{q})=\Phi(\overline{\mathrm{E}}_i^{p})\Psi^*(\overline{\mathrm{E}}_j^{q}).$$

It is easily seen that if Φ and Ψ^* are co-cycles so is χ. In order to preserve the analogy with integral theory, we wish to define from Φ and Ψ^* a $(p+q)$-chain. We can do this as follows. Let $\overline{\Phi}$ be the $(n-p, \mathcal{G})$-chain of $\overline{\mathrm{K}}$ defined by Φ, $\overline{\Psi}^*$ the $(n-q, \mathcal{G}^*)$-chain of K defined by Ψ^*. The $\overline{\Psi}^*\times\overline{\Phi}$ is a $(n-p-q, \mathrm{R}_1)$-chain of K_1, and it defines a $(p+q, \mathrm{R}_1)$-chain $\Phi\times\Psi^*$ of the dual complex of K_1. If Φ, Ψ^* are harmonic, $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}^*$ are cycles, and so is $\overline{\Psi}^*\times\overline{\Phi}$. If harmonic duality is suitably defined, e. g. when $\mathcal{G}=\mathcal{G}^*$ and $\Phi^*=\Phi$, we can deduce that $\overline{\Psi}^*\times\overline{\Phi}$ is harmonic, and hence that $\Phi\times\Psi^*$ is a cocycle.

The problem of extending de Rham's results to finite complexes is now clear, and provides an interesting exercise.

SUR LES CHAMPS D'ÉLÉMENTS DE SURFACE DANS LES VARIÉTÉS A 4 DIMENSIONS;

PAR H. HOPF.
(Zürich.)

---

1. Les recherches dont il est question ci-dessous se rattachent à un théorème connu sur les champs de directions dans les variétés V^n à n dimensions, closes et différentiables. D'après Poincaré et Brouwer, on peut attribuer à chaque singularité isolée d'un tel champ un nombre entier, son « index »; si le champ n'en comprend qu'un nombre fini, il lui correspondra alors une certaine « somme d'indices ». Le théorème auquel nous faisions allusion affirme que cette somme ne dépend pas du champ particulier, mais est un invariant de la variété (et égal à sa caractéristique d'Euler).

Le problème que nous envisageons ici est de savoir si un « théorème d'invariance » analogue vaut pour les champs d'éléments plans à deux dimensions ou « éléments de surface ».

2. Nous nous bornons au cas $n=4$ et considérons des champs d'éléments plans à deux dimensions orientés, situés dans des variétés V^4 orientées, closes et différentiables. Nous supposons en outre que ces champs ont au plus un nombre fini de points singuliers (forcément isolés).

Remarque. — *A priori*, on s'attendrait plutôt à trouver des lignes singulières et l'on peut se demander si notre dernière condition est toujours réalisable; cette question est du reste sans importance ici, car il existe suffisamment d'exemples de champs à singularités isolées. Par ailleurs, selon H. Whitney (1), il y a dans toute V^4 orientable des champs de paires de directions, donc

(1) H. WHITNEY, *On the topology of differentiable manifolds*, *Lectures in Topology* (*Ann. Arbor*, 1941, § 23).

aussi d'éléments de surface, dont les singularités sont en nombre fini.

L'index d'une singularité d'un champ se définit de la façon habituelle et naturelle : c'est un élément du groupe d'homotopie $\pi_3(U)$, U désignant la variété de tous les plans à deux dimensions orientés menés par un point de l'espace euclidien E^4, ou, ce qui revient au même, de tous les grands cercles orientés de la sphère S^3. La somme d'indices est aussi un élément de $\pi_3(U)$. Il faut encore remarquer ici que, la V^4 étant orientée, il règne un isomorphisme bien determiné entre les groupes $\pi_3(U)$ attachés aux différents points de la variété, de sorte qu'on peut les identifier entre eux.

La variété U est le produit cartésien de deux sphères S^2; par conséquent, $\pi_3(U)$ est la somme directe de deux groupes cycliques infinis, et les indices et sommes d'indices sont caractérisés par des paires (a, b) de nombres entiers.

3. Comme nous l'annoncions au n° **1**, nous nous posons maintenant la question suivante : *La somme d'indices est-elle un invariant de la* V^4, *c'est-à-dire indépendante du choix du champ?*

Sans encore démontrer de théorème général, on peut voir facilement par des cas particuliers que la réponse sera affirmative pour certaines V^4 et négative pour d'autres. Par exemple, on peut prouver que, sur la sphère S^4, tous les champs ont la somme d'indices $(-1, +1)$, mais que, par contre, sur le produit cartésien $V^4 = S^2 \times S^2$, on a un champ de somme $(0, 0)$ et un autre de somme $(-4, +4)$.

Comme conséquence du théorème principal que nous formulerons plus loin (n° 5), on obtient le théorème : *La condition nécessaire et suffisante pour que la somme d'indices soit un invariant est que le deuxième nombre de Betti* p^2 *de la variété soit nul;* de plus, *lorsque* $p^2 \neq 0$, *une infinité de paires différentes de nombres entiers figurent comme sommes d'indices.*

4. Comme $U = S^2 \times S^2$, la recherche systématique des sommes d'indices se ramène à l'étude d'espaces fibrés R dans lesquels la fibre est une S_2 et la base notre V^4. Nous suivons tout d'abord la méthode habituelle : soit K^i le squelette à i dimensions d'une division simpliciable de V^4 et F une « surface de section » (allemand : Schnittfläche) donnée dans R sur K^3; pour chaque simplexe x_j^4 de K^4, la sphère S^3 située dans F au-dessus du bord de x_j^4 définit un élément du groupe $\pi^3(S^2)$, donc un nombre entier γ_j; nous nous intéressons au cocycle $\Gamma = \Sigma\gamma_j x_j^4$.

Soit de même F′ une deuxième surface de section sur K^3 et $\Gamma' = \Sigma\gamma'_j x_j^4$ le cocycle correspondant à Γ. Par un procédé connu, on peut joindre F et F′ par-dessus K^1; on construit par là sur chaque simplexe y_i^2 de K^2 une sphère s_i^2 qui détermine un élément du groupe $\pi_2(S^2)$, donc un nombre entier d_i. La chaîne $\Sigma d_i y_i^2 = \Delta(F, F')$ est un cocycle à deux dimensions; c'est « l'obstacle » qui s'oppose à la jonction de F et F′.

5. Nommons $\overline{F}$ la surface de section obtenue à partir de F lorsque l'on échange les points antipodes de chaque fibre S^2. Notre *théorème principal* est

$$\Gamma' - \Gamma = \Delta(F', F)\,\Delta(F', \overline{F}), \tag{1}$$

le produit étant celui de la cohomologie. A la place de (1), on peut aussi écrire :

$$\Gamma' = [\Delta(F', F)]^2 + \Delta(F, \overline{F})\,\Delta(F', F) + \Gamma. \tag{2}$$

Une fois F donnée, $\Delta(F, \overline{F})$ et Γ sont bien déterminés, tandis que $\Delta(F', F)$ peut encore être choisi arbitrairement; cela signifie que, Δ étant un cocycle à deux dimensions quelconque, il existe toujours une surface de section F′ pour laquelle $\Delta(F, F') = \Delta$; dans ce sens, la formule (2) fournit le Γ′ plus général possible.

Les formules (1) et (2) sont du reste en relation avec de nouveaux résultats de N. E. Steenrod, *Products and extensions of mappings* (*Ann. of Math.*, t. 48, 1947).

6. La démonstration de (1) repose essentiellement sur le lemme suivant :

Lemme. — *Soient f, f′ des transformations* $S^3 \to S^2$ *d'invariants* γ *et* γ'; *si elles sont suffisamment régulières, les points* $x \in S^3$ *pour lesquels* $f(x) = f'(x)$ *forment un cycle z; de même si* $\overline{p}$ *désigne l'antipode de* $p \in S^2$, *les points y vérifiant* $\overline{f(y)} = f'(y)$

constituent un deuxième cycle $\bar{z}$. La conclusion du lemme est : la différence $\gamma' - \gamma$ est égal au coefficient d'enlacement de z et $\bar{z}$.

7. A l'aide de (2), on peut calculer les sommes d'indices possibles des champs d'éléments-plans pour beaucoup de V^4. *Exemples :* Soit $V^4 = S^1 \times V^3$, où V^3 est une variété à trois dimensions dont le premier nombre de Betti n'est pas nul; les paires $(2u, 2v)$, u et v entiers quelconques, représentent toutes des sommes d'indices et il n'y en a pas d'autres.

Pour le plan projectif complexe $P^4 = V^4$, on tire tout d'abord de (2) que les sommes d'indices ont la forme

$$(y^2 + cy + d, \qquad x^2 + ax + b),$$

où x et y sont arbitraires et a, b, c, d certaines constantes; celles-ci peuvent aisément être calculées, et l'on trouve comme sommes d'indices toutes les paires :

$$(y^2 + y - 2, \qquad x^2 + x + 1), \tag{3}$$

x et y entiers arbitraires [2].

8. Il y a dans le plan projectif complexe des éléments plans particuliers, les éléments « linéaires complexes ». Pour un champ ne comprenant que des éléments de cette sorte, le premier terme de (3) est nul; réciproquement, étant donné un nombre entier x quelconque, il existe toujours un champ d'éléments linéaires complexes dont la somme d'indices vaut $(0, x^2 + x + 1)$.

Plus généralement, soit V^4 une « variété complexe »; nous entendons par là que l'on peut recouvrir V^4 par des systèmes de coordonnées locaux complexes de telle façon que le passage d'un de ces systèmes à l'autre dans un domaine commun d'existence soit défini par des fonctions analytiques de variables complexes. On peut alors toujours former dans V^4 des champs d'éléments linéaires complexes n'ayant qu'un nombre fini de singularités, et

(2) J'ai communiqué ce théorème sur le plan projectif complexe à la session de topologie des entretiens : *The problems of Mathematics*, Princeton, Décembre 1946.

les sommes d'indices correspondantes ont la forme $(0, b)$. Cela fournit une condition nécessaire pour qu'une variété V^4 donnée soit complexe au sens défini précédemment; en particulier, on déduit du n° 3 que la sphère S^4 n'est pas une variété complexe; de manière analogue, on peut indiquer une infinité de variétés non complexes.

9. Si l'on essaie de généraliser aux dimensions $n > 4$ les recherches précédentes, on se heurte à des différences essentielles avec le cas $n = 4$, et à de nouvelles et plus grandes difficultés; ainsi j'ai tenté de montrer que la sphère S^{2m} n'est pas une variété complexe pour $2m > 4$, mais je n'y suis encore parvenu que pour $2m = 8$, et cela à l'aide d'une communication de B. Eckmann.

L'HOMOLOGIE FILTRÉE [1];

PAR JEAN LERAY.
(Paris.)

Introduction.

N'ayant pas à parler d'homologie, mais exclusivement de cohomologie, je dirai homologie quand l'usage est de dire cohomologie.

1. Étant donnés un anneau $\mathcal{A}$ et une application φ d'un espace X dans un espace Y, il est naturel [2] d'établir des relations entre l'anneau d'homologie $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ de X relatif à $\mathcal{A}$ et l'anneau d'homologie $\mathcal{H}_2$ de Y qui s'obtient en utilisant comme anneau de coefficients au point y de Y l'anneau d'homologie de $\overset{-1}{\varphi}(y)$ relatif à $\mathcal{A}$; nous nommons *faisceau* un tel système de coefficients. Une terminologie convenable nous permettra d'énoncer comme suit ces relations :

$\mathcal{H}_2$ est le premier d'une suite d'anneaux gradués $\mathcal{H}_r$ $(r \geqq 2)$;
$\mathcal{H}_r$ possède une différentielle homogène de degré r et a pour anneau d'homologie $\mathcal{H}_{r+1}$;
la suite des $\mathcal{H}_r$ définit une filtration de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$.

La suite des $\mathcal{H}_r$ et cette filtration sont des invariants topolo-

(1) Ce résumé du cours que j'ai fait au Collège de France durant l'hiver 1947-1948 fut exposé à la Société mathématique le 17 novembre 1947; il diffère par son titre et son contenu de ma conférence au Colloque de topologie algébrique : j'adopte les perfectionnements que H. CARTAN (Conférence au Colloque) a apportés à ma définition des complexes (*Journal de Math.*, 24, 1945, p. 95-247); j'introduis dans les définitions de base la notion d'anneau différentiel qui vient d'être définie et utilisée avec succès par J. L. KOSZUL (*C. R. Acad. Sc.*, 225, 1947, p. 217 et 477).

(2) J. LERAY, *C. R. Acad. Sc.*, 222, 1945, p. 1366 et 1419; 223, 1945, p. 395 et 412.

giques de l'application donnée φ, mais ne sont pas des invariants de sa classe d'homotopie ([3]).

En explicitant cette théorie j'ai été amené à envisager les invariants topologiques, de nature plus générale, que voici :

2. Étant donnés un anneau différentiel $\mathcal{A}$ et un espace X, on peut définir l'anneau d'homologie $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ de X relatif à $\mathcal{A}$; si l'on se donne en outre un entier l de signe quelconque et une filtration f de $\mathcal{A}$, on peut définir une filtration de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ que caractérise une suite d'anneaux $\mathcal{H}_r$ analogue à la précédente. Si $l = 1$, $f = 0$ et si la différentielle de $\mathcal{A}$ est nulle, tous les $\mathcal{H}_r$ sont identiques à $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ dont la filtration est le degré (ou dimension) classique.

3. Plus généralement, soient un anneau différentiel $\mathcal{A}$, un espace X_0, une application φ_1 de X_0 dans espace X_1, une application φ_2 de X_1 dans X_2, ..., φ_ω de $X_{\omega-1}$ dans X_ω; la donnée d'une filtration de $\mathcal{A}$ et d'une suite d'entiers $l_0 < l_1 < \ldots < l_\omega$ définit une filtration de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ caractérisée par une suite d'anneaux gradués $\mathcal{H}_r (r > l_\omega)$ dont le premier est l'anneau d'homologie de X_ω relatif au transformé par φ_ω d'un faisceau défini sur $X_{\omega-1}$ et appartenant à une suite de faisceaux $\mathcal{F}_r$ dont les propriétés sont analogues à celles des $\mathcal{H}_r$. Le cas cité au n° 1 correspond aux données suivantes : $\omega = 1$, $l_0 = 0$, $l_1 = 1$; la différentielle et la filtration de $\mathcal{A}$ sont nulles.

4. Les Notes citées donnent diverses applications de l'homologie filtrée à la topologie des espaces fibrés et des espaces homogènes. J'avais annoncé dans ma conférence au Colloque de topologie algébrique que l'homologie filtrée permet d'établir des relations entre les anneaux d'homologie d'un espace Y, d'un de ses revêtements X et le quotient du groupe fondamental de Y par celui de X; la Note qui suit cet article développe cette idée.

([3]) On peut toutefois en déduire des invariants de la classe d'homotopie de φ qui sont en relation avec ceux de W. GYSIN (*Comm. math. helv.*, 14, 1941, p. 61-122) et de N. E. STEENROD (*Proc. nat. Acad. of Sc.*, 33, 1947, p. 124-128).

CHAPITRE I.

L'ANNEAU D'HOMOLOGIE FILTRÉE D'UN ANNEAU DIFFÉRENTIEL FILTRÉ.

I. — Anneau différentiel filtré.

5. **Anneau différentiel.** — Adoptons la définition, voisine de celle de Koszul, que voici : Un anneau différentiel est un anneau $\mathcal{A}$ sur lequel sont définis un automorphisme α et un opérateur linéaire δ tels que

$$(1)\qquad \begin{cases} \delta^2 = 0; \qquad \alpha\delta + \delta\alpha = 0; \\ \delta(aa') = (\delta a)a' + (\alpha a)\delta a', \qquad \text{où } a \text{ et } a' \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Par exemple l'anneau des formes de Pfaff d'une variété différentielle et un anneau différentiel.

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ l'anneau des $c \in \mathcal{A}$ tels que $\delta c = 0$; soit $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ l'ensemble des δa; $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$;

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})/\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

sera nommé *anneau d'homologie* de $\mathcal{A}$.

Une application λ d'un anneau différentiel $\mathcal{A}'$ dans un anneau différentiel $\mathcal{A}$ sera nommé *homomorphisme* quand elle respectera la structure d'anneau, α et δ.

6. **Anneau filtré** ([4]). — Une application $f(a)$ de $\mathcal{A}$ dans l'ensemble que constituent les nombres réels et $+\infty$ sera nommée filtration de $\mathcal{A}$ quand elle satisfait les conditions suivantes :

$$(1)\quad f(a - a') \geqq \min[f(a), f(a')]; \quad f(aa') \geqq f(a) + f(a'); \quad f(0) = +\infty.$$

$\mathcal{A}^p$ désignera l'ensemble des $a \in \mathcal{A}$ tels que $f(a) \geqq p$; $\mathcal{A}^p\mathcal{A}^q$ désignera l'ensemble des aa' tels que $a \in \mathcal{A}^p$, $a' \in \mathcal{A}^q$; les conditions (1) équivalent aux suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}^p \text{ est un groupe additif}; \qquad \mathcal{A}^p \subset \mathcal{A}^q \text{ si } q < p; \\ \mathcal{A}^p\mathcal{A}^q \subset \mathcal{A}^{p+q}; \qquad \lim\limits_{p \to -\infty} \mathcal{A}^p = \mathcal{A}. \end{cases}$$

([4]) La notion d'anneau filtré est voisine de la notion classique de corps valué : VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, Ch. X, Bewertete Körper.

Par définition *un anneau différentiel filtré* $\mathcal{A}$ vérifiera la condition

$$f(\delta a) = f(a)$$

et $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ sera filtré comme suit : soit $h \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$; $f(h)$ est la borne supérieure de $f(c)$ quand c décrit la classe d'homologie h.

Soit λ une application d'un anneau filtré $\mathcal{A}'$ dans un anneau filtré $\mathcal{A}$; $f(\lambda)$ désignera, s'il existe, le plus grand entier tel que

$$f(\lambda a') \geqq f(\lambda) + f(a'), \qquad \text{où } a' \in \mathcal{A}';$$

$f(\lambda)$ sera nommé filtration de λ.

7. Anneau gradué. — Soient des groupes abéliens $\mathcal{L}^p$ (p réel) et des lois de multiplication bilinéaires associant au couple ($l^p \in \mathcal{L}^p$; $l'^q \in \mathcal{L}^q$) un produit $l^p l'^q \in \mathcal{L}^{p+q}$. Soit $\mathcal{A}$ le groupe abélien somme directe des $\mathcal{L}^p$: tout $a \in \mathcal{A}$ peut être mis, d'une façon unique, sous la forme

$$a = \sum_p l^p, \qquad \text{où } l^p \in \mathcal{L}^p;$$

l^p sera nommé composante de degré p de a, les éléments l^p des $\mathcal{L}^p$ seront nommés éléments de $\mathcal{A}$ homogènes de degré p. Définissons une multiplication dans $\mathcal{A}$ en posant

$$\left(\sum_p l^p\right)\left(\sum_q l'^q\right) = \sum_{p,q} l^p l'^q;$$

$\mathcal{A}$ est un anneau; nous le nommerons *anneau gradué* engendré par les $\mathcal{L}^p$; nous écrirons

$$\mathcal{A} = \sum_p \mathcal{L}^p.$$

Par exemple l'anneau des formes de Pfaff d'une variété différentiable est gradué.

Étant donné un entier m, $\mathcal{A}^m$ désignera l'anneau $\mathcal{A}$ filtré comme suit :

$$f\left(\sum_p l^p\right) \text{ est le minimum des } mp \text{ tels que } l^p \neq 0.$$

Une *différentielle* δ, définie sur $\mathcal{A}$, sera dite *homogène de degré* g quand elle transformera tout élément homogène de degré p en un élément homogène de degré $p + g$

$$\delta \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^{p+g}.$$

$\mathcal{A}$ étant un anneau filtré, posons

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{A}^p / \mathcal{A}^{p+1};$$

si

$$l^p = a^p \bmod \mathcal{A}^{p+1}, \qquad l'^q = a'^q \bmod \mathcal{A}'^{q+1}, \qquad a^p \in \mathcal{A}^p, \qquad a'^q \in \mathcal{A}'^q,$$

définissons

$$l^p l'^q = a^p a'^q \bmod \mathcal{A}^{p+q+1};$$

soit $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ l'anneau gradué défini par ces $\mathcal{L}^p$ et cette multiplication; nous dirons que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est *l'anneau gradué* de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est gradué, $\mathcal{G}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Propriétés. — *a*. Un homomorphisme λ d'un anneau filtré $\mathcal{A}'$ dans un anneau filtré $\mathcal{A}$ définit, si $f(\lambda) \geqq 0$, un homomorphisme de $\mathcal{G}(\mathcal{A}')$ dans $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

b. Un homomorphisme λ d'un anneau filtré $\mathcal{A}'$ dans un anneau filtré $\mathcal{A}$ respecte la valuation quand $f(\lambda) \geqq 0$ et que λ définit un isomorphisme de $\mathcal{G}(\mathcal{A}')$ dans $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

8. L'anneau spectral d'homologie d'un anneau différentiel filtré. — Nous allons attacher à un anneau différentiel filtré $\mathcal{A}$ un anneau gradué $\mathcal{H}_r(\mathcal{A})$, dépendant de l'indice entier r et possédant une différentielle homogène δ_r de degré r. Soit

$$\mathcal{C}^p = \mathcal{A}^p \cap \mathcal{C}(\mathcal{A}); \qquad \mathcal{D}^p = \mathcal{A}^p \cap \mathcal{D}(\mathcal{A});$$

$\mathcal{C}^p_r$ l'ensemble des $a \in \mathcal{A}^p$ tels que

$$\delta a \in \mathcal{A}^{p+r}; \qquad \delta \mathcal{C}^p_r = \mathcal{D}^p_r;$$

on a, la flèche désignant la limite d'une suite monotone,

$$\ldots \subset \mathcal{D}^p_r \subset \mathcal{D}^p_{r+1} \subset \ldots \to \mathcal{D}^p \subset \mathcal{C}^p \subset \ldots \subset \mathcal{C}^p_{r+1} \subset \mathcal{C}^p_r \subset \ldots \to \mathcal{A}^p,$$
$$\mathcal{C}^p_r \mathcal{C}^q_r \subset \mathcal{C}^{p+q}_r; \qquad \mathcal{C}^p_r \mathcal{D}^q_{r-1} \subset (\mathcal{C}^{p+q+1}_{r-1}, \mathcal{D}^{p+q}_{r-1}),$$

où $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ désigne le plus petit sous-groupe additif contenant les sous-groupes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Ces formules prouvent que l'anneau gradué $\sum_p(\mathcal{C}_{r-1}^{p+1}, \mathcal{D}_{r-1}^{p})$ est un idéal de l'anneau $\sum_p \mathcal{C}_r^p$; posons

$$\mathcal{H}_r(\mathcal{A})=\sum_p \mathcal{C}_r^p/(\mathcal{C}_{r-1}^{p+1}, \mathcal{D}_{r-1}^{p});$$

δ définit sur $\mathcal{H}_r(\mathcal{A})$ une différentielle δ_r homogène de degré r; l'anneau d'homologie de l'anneau différentiel $\mathcal{H}_r(\mathcal{A})$ ainsi défini est $\mathcal{H}_{r+1}(\mathcal{A})$. Nous poserons

$$\mathcal{H}_\infty(\mathcal{A})=\sum_p \mathcal{C}^p/(\mathcal{C}^{p+1}, \mathcal{D}^p).$$

Il existe un homomorphisme canonique $\varkappa_s^r$ d'un sous-anneau de $\mathcal{H}_r(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}_s(\mathcal{A})$, si $r<s$, s pouvant valoir ∞; $\varkappa_t^s \varkappa_s^r=\varkappa_t^r$ si $r<s<t$. D'autre part $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{A})$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{G}\mathcal{H}(\mathcal{A})$. Nous nommerons *anneau spectral d'homologie de l'anneau filtré* $\mathcal{A}$ l'anneau $\mathcal{H}_r(\mathcal{A})$ (r : entier ou ∞) et l'homomorphisme $\varkappa_s^r$.

Plus généralement nous nommerons *anneau spectral* tout anneau $\mathcal{H}_r$ possédant les propriétés que voici :

$\mathcal{H}_r$ dépend d'un indice r dont les valeurs sont ∞ et les entiers (éventuellement supérieurs à un entier donné);

$\mathcal{H}_r$ est un anneau gradué;

si r est fini, $\mathcal{H}_r$ possède une différentielle homogène δ_r de degré r;

si $r<s$, il existe un homomorphisme canonique $\varkappa_s^r$ d'un sous-anneau de $\mathcal{H}_r$ sur $\mathcal{H}_s$; si $r<s<t$, $\varkappa_t^s\varkappa_s^r=\varkappa_t^r$; $\varkappa_{r+1}^r$ est l'homomorphisme canonique de l'anneau des cycles de $\mathcal{H}_r$ sur l'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_r$, qui est $\mathcal{H}_{r+1}$.

9. **Propriétés de l'anneau spectral d'homologie.** — *a.* Si la filtration de tout élément non nul de $\mathcal{A}$ est négative ou nulle et si, pour un entier $r>0$, tous les termes de $\mathcal{H}_r(\mathcal{A})$ sont homogènes de degré nul, alors $\varkappa_s^r$ est l'identité et $\mathcal{H}(\mathcal{A})=\mathcal{H}_r(\mathcal{A})$.

b. Soient $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ deux anneaux différentiels filtrés; soit λ un homomorphisme de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ possédant les propriétés suivantes :

$$f(\lambda)\geqq 0; \quad \lambda\delta=\delta\lambda;$$

λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_r(\mathcal{A}')$ sur $\mathcal{H}_r(\mathcal{A})$ pour une valeur r particulière. Alors λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_s(\mathcal{A}')$ sur $\mathcal{H}_s(\mathcal{A})$ pour $r\leqq s<\infty$, un isomorphisme de $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{A}')$ dans $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{A})$ et un homomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{A}')$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ respectant la filtration.

[On utilise la propriété *b* du n° 7.]

c. Supposons définies sur un anneau filtré $\mathcal{A}$ deux différentiations (α, δ) et (α', δ'); si $f(\delta-\delta')$ est défini, alors

$$\mathcal{H}_r(\mathcal{A})=\mathcal{H}'_r(\mathcal{A}) \quad \text{pour} \quad r\leqq f(\delta-\delta');$$
$$\delta_r=\delta'_r \quad \text{pour} \quad r<f(\delta-\delta').$$

En particulier :

d. Supposons $f(\delta)$ défini :

si $r\leqq f(\delta)$, alors $\mathcal{H}_r(\mathcal{A})=\mathcal{G}(\mathcal{A})$;

si $r<f(\delta)$, alors $\delta_r=0$;

si $r=f(\delta)$, $\delta_r(a^p \bmod \mathcal{A}^{p+1})=\delta a^p \bmod \mathcal{A}^{p+r+1}$, si $a^p\in\mathcal{A}^p$.

e. Si $\mathcal{A}$ est un anneau gradué possédant une différentielle homogène de degré g, alors

$$\mathcal{H}_r(\mathcal{A})=\mathcal{A} \text{ pour } r\leqq g; \quad \delta_r=0 \text{ pour } r<g; \quad \delta_r=\delta \text{ pour } r=g;$$
$$\mathcal{H}_r(\mathcal{A})=\mathcal{H}(\mathcal{A}) \text{ pour } r>g; \quad \delta_r=0 \text{ pour } r>g.$$

[La notion d'anneau spectral d'homologie est donc alors sans intérêt.]

II. — Produit tensoriel d'un anneau canonique $\mathcal{K}$ et d'un anneau différentiel $\mathcal{A}$.

10. **Définitions.** — Nous nommerons *anneau canonique* tout anneau gradué $\mathcal{K}$ ayant les propriétés suivantes :

a. Les éléments homogènes k^p de $\mathcal{K}$ ont des degrés $p\geqq 0$;

b. $\mathcal{K}$ possède une différentielle homogène de degré 1;

c. $\alpha k^p=(-1)^p k^p$ (d'où résulte $\delta\alpha+\alpha\delta=0$);

d. Si m est entier, si $k\in\mathcal{K}$, alors $mk=0$ exige $m=0$ ou $k=0$.

Étant donnés un anneau canonique $\mathcal{K}$ et un anneau différentiel $\mathcal{A}$, leur *produit tensoriel* $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ sera, par définition, l'anneau différentiel suivant :

le groupe additif de $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ est le produit tensoriel, au sens de Whitney (5), des groupes additifs de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$;

la multiplication de $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ est définie par la formule

$$[k^p\otimes a][k'^q\otimes a'] = [k^p k'^q]\otimes[(\alpha^{-q}a)a'];$$

la différentielle de $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ est définie par les formules

$$\alpha(k^p\otimes a) = (-1)^p k^p\otimes\alpha a; \qquad \delta(k^p\otimes a) = (\delta k^p)\otimes a + (-1)^p k^p\otimes\delta a.$$

Supposons $\mathcal{A}$ filtré; soit un nombre réel l; posons

$$w\left(\sum_\alpha k_\alpha^{p_\alpha}\otimes a_\alpha\right) = \min_\alpha[lp_\alpha + f(a_\alpha)];$$

nous définissons ainsi sur $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ une fonction multiforme, dont les valeurs sont les entiers et $+\infty$; la borne supérieure des valeurs prises par w sur un élément de $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ est une filtration de $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$; $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ ainsi filtré sera noté $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}$.

11. **Propriétés du produit tensoriel.** — *a*. Si $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ est de degré nul, il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}(\mathcal{H}(\mathcal{K})\otimes\mathcal{A}) \simeq \mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}).$$

[On donne à $\mathcal{A}$ la filtration nulle; à l'aide de la proposition *c* du n° 9, on prouve que $\mathcal{H}_1(\mathcal{K}^{-1}\otimes\mathcal{A})$ est isomorphe à $\mathcal{H}(\mathcal{H}(\mathcal{K})\otimes\mathcal{A})$ et par suite de degré nul; on applique la proposition *a* du n° 9.]

b. Si la filtration de $\mathcal{A}$ est nulle, alors

$$\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^1\otimes\mathcal{A}) \simeq \mathcal{H}(\mathcal{K}^1\otimes\mathcal{H}(\mathcal{A})),$$

$\delta_r = 0$ et $\varkappa_s^r$ est l'identité pour $r \geqq 2$; la filtration des éléments non nuls de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^1\otimes\mathcal{A})$ est finie.

[La preuve de cette proposition *b* est assez longue.]

(5) *Duke math. J.*, 4, 1938, p. 495-528; BOURBAKI, *Algèbre multilinéaire*.

CHAPITRE II.

HOMOLOGIE FILTRÉE D'UN ESPACE, RELATIVE A UN FAISCEAU DIFFÉRENTIEL FILTRÉ.

I. — Faisceau.

12. **Définition.** — Un faisceau $\mathcal{B}$ (différentiel, filtré, gradué, spectral) sera défini sur un espace localement compact X par les données suivantes :

a. Un *anneau* $\mathcal{B}(F)$ (différentiel, filtré, gradué, spectral) associé à chaque partie fermée F de X;

b. Un *homomorphisme* de $\mathcal{B}(F)$ dans $\mathcal{B}(F_1)$ quand F_1 est une partie fermée de F; cet homomorphisme est nommé *section* par F_1; on notera $F_1 b$ l'élément de $\mathcal{B}(F_1)$ en lequel il transforme l'élément b de $\mathcal{B}(F)$; (la section commute avec la différentielle, est de filtration $\geqq 0$, transforme un élément homogène en un élément homogène de même degré).

Ces données sont assujetties aux conditions suivantes :

c. $\mathcal{B}(\emptyset) = 0$;

d. Si $F_2 \subset F_1 \subset F$ et si $b \in \mathcal{B}(F)$, alors $F_2(F_1 b) = F_2 b$.

Si X est compact, $\mathcal{B}$ est dit *continu* quand $\mathcal{B}(F)$ est la limite directe des $\mathcal{B}(V)$, les V étant les voisinages fermés de F :

e'. Étant donné $b \in \mathcal{B}(F)$, il doit exister un voisinage fermé V de F et un élément b_V de $\mathcal{B}(V)$ tels que $b = F b_V$;

e''. Étant donnés $b \in \mathcal{B}(F)$ et $F_1 \subset F$ tels que $F_1 b = 0$, il doit exister dans le sous-espace F un voisinage fermé V_1 de F_1 tel que $V_1 b = 0$.

Si X n'est pas compact, soit $\overline{X}$ l'espace compact qu'on obtient en lui adjoignant un point à l'infini x_∞; si $\overline{F}$ est une partie fermée de $\overline{X}$, définissons

$$\overline{\mathcal{B}}(\overline{F}) = \mathcal{B}(\overline{F} \cap X);$$

$\mathcal{B}$ sera dit *continu* si le faisceau $\overline{\mathcal{B}}$ que constituent les $\overline{\mathcal{B}}(\overline{F})$ est continu sur $\overline{X}$.

Cas particulier : $\mathcal{B}(F) = 0$ si F n'est pas compact; sinon $\mathcal{B}(F)$ est un anneau $\mathcal{A}$ indépendant de F, la section par $F_1 \subset F$ étant l'isomorphisme identique de $\mathcal{A}$ sur lui-même : nous dirons que le *faisceau* $\mathcal{B}$ est *identique à l'anneau* $\mathcal{A}$; un tel faisceau est continu.

13. **Faisceau quotient; faisceau d'homologie.** — Un *sous-faisceau* $\mathcal{B}'$ du faisceau $\mathcal{B}$ sera constitué par des sous-anneaux $\mathcal{B}'(F)$ des anneaux $\mathcal{B}(F)$ tels que $F_1\mathcal{B}'(F) \subset \mathcal{B}'(F_1)$. Si chaque $\mathcal{B}'(F)$ est un idéal de $\mathcal{B}(F)$, $\mathcal{B}'$ est dit *idéal* de $\mathcal{B}$; les quotients $\mathcal{B}(F)/\mathcal{B}'(F)$ constituent alors un faisceau, nommé quotient de $\mathcal{B}$ par $\mathcal{B}'$ et noté $\mathcal{B}/\mathcal{B}'$; ce quotient est continu si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ le sont. En particulier, quand $\mathcal{B}$ est un faisceau différentiel, les $\mathcal{H}(\mathcal{B}(F))$ constituent un faisceau qui sera noté $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ et nommé *faisceau d'homologie* de $\mathcal{B}$; quand $\mathcal{B}$ est filtré (et continu), $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ est filtré (et continu) et les $\mathcal{H}_r(\mathcal{B}(F))$ constituent de même un faisceau (continu) $\mathcal{F}_r(\mathcal{B})$, nommé *faisceau spectral d'homologie* de $\mathcal{B}$.

Un *homomorphisme* λ d'un faisceau $\mathcal{B}'$ dans un faisceau $\mathcal{B}$ sera constitué par un homomorphisme λ de $\mathcal{B}'(F)$ dans $\mathcal{B}(F)$ tel que

$$F\lambda b' = \lambda F b'.$$

14. **Transformé d'un faisceau $\mathcal{B}'$ défini sur X' par une application continue φ de X' dans X.** — Soit un faisceau $\mathcal{B}'$ défini sur un espace X' et soit φ une application continue de X' dans un espace X; nous définirons comme suit sur X un faisceau $\mathcal{B}$, que nous nommerons transformé de $\mathcal{B}'$ par φ et que nous noterons $\varphi(\mathcal{B}')$: soient $F_1 \subset F$ deux parties fermées de X;

$$\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}'\big(\overset{-1}{\varphi}(F)\big); \qquad F_1 b = \overset{-1}{\varphi}(F_1) b.$$

Si $\mathcal{B}$ est continu, $\varphi(\mathcal{B})$ l'est.

Cas particulier. — Si $\mathcal{B}'$ est identique à l'anneau $\mathcal{A}$, $\varphi(\mathcal{B}')$ est identique à $\mathcal{A}$ sur $\varphi(X')$ quand φ est *propre*, c'est-à-dire possède les trois propriétés équivalentes que voici :

a. Ou bien X' est compact; ou bien X et X' sont localement compacts et, en adjoignant à chacun d'eux un point à l'infini, x_∞ et x'_∞, en posant $\varphi(x'_\infty) = x_\infty$ on obtient une application continue de $X' \cup x'_\infty$ sur $X \cup x_\infty$.

b. φ applique toute partie fermée de X' sur une partie fermée de X et $\overset{-1}{\varphi}(x)$ est compact, quel que soit $x \in X$.

c. $\overset{-1}{\varphi}$ applique toute partie compacte de X sur une partie compacte de X'.

II. — Complexe.

15. **Définition.** — Un *complexe* $\mathcal{K}$ est défini sur un espace localement compact X par la donnée d'un *anneau différentiel* et d'une fonction qui, à chaque élément k de cet anneau, associe une partie fermée de X, dite *support* de k et notée $S(k)$; ces supports sont assujettis aux lois suivantes :

$$S(0) = \emptyset; \quad S(k - k') \subset S(k) \cup S(k'); \quad S(kk') \subset S(k) \cap S(k'); \ S(\delta k) \subset S(k).$$

Les éléments à support vide constituent un idéal; en faisant le quotient de l'anneau de $\mathcal{K}$ par cet idéal on obtient un complexe, que H. Cartan nomme : *complexe séparé* associé à $\mathcal{K}$. Pour que $\mathcal{K}$ soit séparé, c'est-à-dire identique à son complexe séparé, il faut et il suffit que la condition $S(k) = \emptyset$ entraîne $k = 0$.

16. **Opérations sur un complexe.** — Soit φ une application continue d'un espace X' dans X; le complexe séparé, associé au complexe défini par l'anneau de $\mathcal{K}$ et les supports $\overset{-1}{\varphi}(S(k))$, sera noté $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{K})$ et nommé *transformé de* $\mathcal{K}$ *par* $\overset{-1}{\varphi}$.

Soit F une partie fermée de X; soit φ l'application canonique de F dans X; $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{K})$ sera nommé *section* de $\mathcal{K}$ par F et noté $F\mathcal{K}$.

Supposons les supports $\mathcal{K}$ compacts; soit ψ une application continue de X dans un second espace Y; le complexe défini par l'anneau de $\mathcal{K}$ et les supports $\psi(S(k))$ sera noté $\psi(\mathcal{K})$ et nommé *transformé de* $\mathcal{K}$ *par* ψ.

Si $k \in \mathcal{K}$, les images de k dans $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{K})$, $F\mathcal{K}$ et $\psi(\mathcal{K})$ seront respectivement notées $\overset{-1}{\varphi}(k)$, Fk et $\psi(k)$.

Les $F\mathcal{K}$ constituent un faisceau $\mathcal{B}$, qui sera dit *faisceau associé* à $\mathcal{K}$; le faisceau associé à $\psi(\mathcal{K})$ est $\psi(\mathcal{B})$; les faisceaux $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{F}_r(\mathcal{B})$ seront notés $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{F}_r(\mathcal{K})$; ils seront nommés faisceau d'homologie et faisceau spectral d'homologie du complexe $\mathcal{K}$.

17. Complexe canonique; intersection de complexes. — Nous nommerons *canonique* tout complexe $\mathcal{K}$ ayant les propriétés suivantes : l'anneau définissant $\mathcal{K}$ est canonique (n° 10); $\mathcal{K}$ est séparé;

$$S\left(\sum_p k^p\right) = \bigcup_p S(k^p), \text{ où } k^p \text{ est homogène de degré } p;$$

$$S(mk) = S(k) \text{ si } m \text{ est un entier non nul.}$$

Les transformés et les sections des complexes canoniques sont des complexes canoniques.

Soient sur un espace X deux complexes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}$ étant canonique; soit $\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}'$ le produit tensoriel des anneaux différentiels de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$; définissons le support d'un élément $\sum_\alpha k_\alpha\otimes k'_\alpha$ de $\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}'$ comme l'ensemble des points x tels que

$$\sum_\alpha (xk_\alpha)\otimes(xk'_\alpha) \neq 0.$$

Le complexe séparé associé au complexe que nous venons de définir sera nommé *intersection* de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$; il sera noté $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}'$; ses éléments seront notés $\sum_\alpha k_\alpha\bigcirc k'_\alpha$.

Propriétés. — *a.* $x(\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}') = (x\mathcal{K})\otimes(x\mathcal{K}')$;

b. Si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont canoniques, $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{K}$ sont canoniques et isomorphes : l'élément $k^p\bigcirc k'^q$ est homogène, de degré $p+q$ et son isomorphe dans $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{K}$ est $(-1)^{pq}k'^q\bigcirc k^p$;

c. Si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont canoniques,

$$(\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}')\bigcirc\mathcal{K}'' = \mathcal{K}\bigcirc(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{K}'').$$

18. Complexe fin. — Soit un complexe $\mathcal{K}$ sur un espace X; soit λ une application de $\mathcal{K}$ en lui-même; si $S(\lambda k)\subset S(k)$ quel que soit $k\in\mathcal{K}$, nous nommerons *support* $S(\lambda)$ de λ la plus petite partie fermée de X telle que

$$S(\lambda k)\subset S(\lambda)\cap S(k).$$

Exemple : $\lambda\in\mathcal{K}$.

Nous dirons que $\mathcal{K}$ est *fin* quand, étant donné un recouvrement fini, ouvert de X,

$$\bigcup_\alpha V_\alpha = X,$$

(l'un au moins des V_α étant un voisinage de l'infini, si X n'est pas compact), on peut trouver des applications λ_α de $\mathcal{K}$ en lui-même, telles que

$$\lambda_\alpha(k-k') = \lambda_\alpha k - \lambda_\alpha k'; \qquad \sum_\alpha \lambda_\alpha k = k; \qquad S(\lambda_\alpha)\subset V_\alpha.$$

Les complexes fins sont donc, dans la terminologie de H. Cartan, des *carapaces* d'un type particulier.

Si $\mathcal{K}$ possède une unité u, cette définition équivaut à la suivante :

Il existe des $u_\alpha\in\mathcal{K}$ tels que $\sum_\alpha u_\alpha = u$ et $S(u_\alpha)\subset V_\alpha$.

Propriétés. — *a.* $F\mathcal{K}$ et $\varphi(\mathcal{K})$ sont fins quand $\mathcal{K}$ est fin;

b. $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}'$ est fin si $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{K}'$ est fin;

c. $\varphi\big(\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{K}')\bigcirc\mathcal{K}\big) = \mathcal{K}'\bigcirc\varphi(\mathcal{K})$ si $\mathcal{K}$ est fin.

D'autres propriétés essentielles des complexes fins seront énoncées aux n^{os} 19 et 20.

19. Intersection d'un faisceau continu et d'un complexe canonique. — Soient, sur un espace X, un complexe canonique $\mathcal{K}$ et un faisceau continu $\mathcal{B}$; nous définirons l'*intersection* $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{B}$ de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{B}$ comme étant le *complexe* suivant :

Les éléments de $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{B}$ sont des sommes finies

$$\sum_\alpha k_\alpha\bigcirc b_\alpha, \quad \text{où } b_\alpha\in\mathcal{B}(F_\alpha) \quad \text{et} \quad S(k_\alpha)\subset F_\alpha;$$

on convient que

$$k\bigcirc b = k\bigcirc(S(k)b).$$

Ces sommes obéissent aux règles de calculs, analogues à celles du produit tensoriel, que voici : si les premiers membres ont un sens

$$k \bigcirc b + k' \bigcirc b = (k + k') \bigcirc b,$$
$$k \bigcirc b + k \bigcirc b' = k \bigcirc (b + b'),$$
$$[k^p \bigcirc b][k'^q \bigcirc b'] = [k^p k'^q] \bigcirc [(\alpha^q b) b'],$$
$$\alpha(k^p \bigcirc b) = (-1)^p k^p \bigcirc \alpha b; \qquad \delta(k^p \bigcirc b) = \delta k^p \bigcirc b + (-1)^p k^p \bigcirc \delta b.$$

Par définition $S\left(\sum_\alpha k_\alpha \bigcirc b_\alpha\right)$ sera l'ensemble des points x tels que

$$\sum_\alpha (x k_\alpha) \otimes (x b_\alpha) \neq 0;$$

cet ensemble est compact.

Enfin $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}$ sera un complexe séparé : les éléments à support vide seront annulés.

Propriétés. — a. $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}' = \mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}'$ quand $\mathcal{B}'$ est le faisceau associé au complexe $\mathcal{K}'$;

b. $x(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}) = (x\mathcal{K}) \otimes \mathcal{B}(x)$;

c. $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$ est fin et $\mathcal{K} \bigcirc (\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}) = (\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}') \bigcirc \mathcal{B}$ si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont canoniques et si $\mathcal{K}'$ est fin;

d. $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B} = \mathcal{K}^* \otimes \mathcal{A}$ si $\mathcal{K}$ est fin, si $\mathcal{K}^*$ est l'ensemble de ses éléments à supports compacts et si le faisceau $\mathcal{B}$ est un anneau $\mathcal{A}$ (n° 12, cas particulier).

Définition d'une filtration sur $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}$. — Supposons $\mathcal{B}$ filtré; soit un entier l; posons

$$w\left(\sum_\alpha k_\alpha^{p_\alpha} \bigcirc b_\alpha\right) = \min_\alpha [l p_\alpha + f(b_\alpha)];$$

nous définissons ainsi sur $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}$ une fonction multiforme, dont les valeurs sont les entiers et $+\infty$; la borne supérieure des valeurs prises par w sur un élément de $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}$ est une filtration de $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}$; $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}$ ainsi filtré sera noté $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}$.

Soient un autre entier m et un autre complexe, canonique et fin, $\mathcal{K}'$; on définirait de même une filtration sur $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$, qui, ainsi filtré, sera noté

$$\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{K}'^m \bigcirc \mathcal{B}.$$

II. — L'anneau d'homologie d'un espace relatif à un faisceau différentiel.

20. Couverture. — Définition. — Nous nommerons *couverture d'un espace localement compact* X tout complexe $\mathcal{K}$, défini sur X, ayant les propriétés suivantes :

1° $\mathcal{K}$ est un complexe canonique;

2° $\mathcal{K}$ possède une unité u homogène, de degré nul, de support $S(u) = X$;

3° $\mathcal{H}(x\mathcal{K})$ a pour seuls éléments les multiples entiers de son unité quel que soit $x \in X$.

Nos couvertures sont donc d'un type un peu plus général que les Z-couvertures basiques de H. Cartan alors que nos complexes fins sont, rappelons-le, d'un type un peu plus particulier que ses carapaces.

Propriétés. — a. L'image réciproque $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{K})$ d'une couverture, la section $F\mathcal{K}$ d'une couverture et l'intersection $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}'$ de deux couvertures sont des couvertures.

b. Si $\mathcal{K}$ est une couverture de X, si $\mathcal{K}'$ est un complexe défini sur X, fin, à supports compacts et si $\delta = 0$ sur $\mathcal{K}'$, alors il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}') \simeq \mathcal{K}'.$$

[La condition d du n° 10 permet d'établir cette proposition quand x est un point; on la déduit de ce cas particulier en utilisant la propriété a du n° 17 et la définition des complexes fins].

c. Si $\mathcal{K}$ est une couverture de X et si $\mathcal{K}'$ est un complexe défini sur X, fin et à supports compacts, il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}') \simeq \mathcal{H}(\mathcal{K}').$$

[La preuve est analogue à celle de la proposition a du n° 11 : la proposition b qui précède et la proposition c du n° 9 permettent d'établir que $\mathcal{H}_1(\mathcal{K}^{-1} \bigcirc \mathcal{K}'^0)$ est isomorphe à $\mathcal{H}(\mathcal{K}'^0)$ et par suite de degré nul; on applique la proposition a du n° 9.]

Cette proposition c est voisine du théorème 1 de H. Cartan.

21. Un exemple de couverture fine. — Nous allons construire une couverture fine d'un espace localement compact X en apportant à une construction connue d'Alexander et Kolmogoroff diverses simplifications dont l'une est due à H. Cartan.

Soit $\mathcal{K}$ l'anneau canonique suivant : ses éléments homogènes de degré p constituent le groupe additif des fonctions à valeurs entières $f^p(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ de $p+1$ points de X ; le produit f^{p+q} de deux éléments homogènes f^p et f^q de $\mathcal{K}$ est

$$f^{p+q}(x_0, x_1, \ldots, x_{p+q}) = f^p(x_0, x_1, \ldots, x_p) f^q(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}),$$

le second membre étant le produit, en sens ordinaire, des deux entiers $f^p(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ et $f^q(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$; on définit $f^{p+1} = \delta f^p$ comme suit :

$$f^{p+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}) = \sum_{\alpha=0}^{p+1} (-1)^\alpha f^p(x_0, x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_{p+1}).$$

Définissons $S(f^p)$ comme l'ensemble des points $x \in X$ dont tout voisinage contient au moins un système de $p+1$ points $x_0, \ldots, x_p$ tels que

$$f^p(x_0, \ldots x_p) \neq 0.$$

Soit

$$S\left(\sum_p f^p\right) = \bigcup_p S(f^p);$$

$\mathcal{K}$ est un complexe dont le complexe séparé est une couverture fine $\mathcal{X}$ de X.

Remarque. — On peut construire une couverture fine de X dont les éléments soient de degrés au plus égaux à la dimension de X.

22. Définition de l'anneau d'homologie d'un espace. — Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{X}$ deux couvertures de X, dont la deuxième est fine ; soit $\mathcal{B}$ un faisceau sur X ; vu 19*c*, la proposition 20*c* définit un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{H}(\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}).$$

La proposition 17*b* permet de compléter comme suit ce résultat :

si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ sont deux couvertures fines de X, il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}(\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{H}(\mathcal{X}' \bigcirc \mathcal{B});$$

si $\mathcal{X}''$ est une troisième couverture fine de X, l'isomorphisme précédent est le produit des deux suivants :

$$\mathcal{H}(\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{H}(\mathcal{X}'' \bigcirc \mathcal{B}); \quad \mathcal{H}(\mathcal{X}'' \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{H}(\mathcal{X}' \bigcirc \mathcal{B}).$$

Ces faits justifient la définition que voici :

Définition. — *Étant donnés un espace localement compact* X *et un faisceau différentiel* $\mathcal{B}$ *sur* X, *nous nommerons anneau d'homologie de* X *relatif à* $\mathcal{B}$ *et nous noterons* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ *l'anneau, défini à une isomorphie près,* $\mathcal{H}(\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B})$, *où* $\mathcal{X}$ *désigne une couverture fine de* X.

Quand $\mathcal{K}$ est une *couverture non fine* de X, on peut définir un *homomorphisme canonique de* $\mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$.

Quand le faisceau $\mathcal{B}$ est identique à un anneau différentiel $\mathcal{A}$ (n° 12, cas particulier), nous écrirons $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ au lieu de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$; $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *est un invariant topologique de* X, *quel que soit l'anneau différentiel* $\mathcal{A}$; rappelons (n° 19 *d*) que

$$\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B} = \mathcal{X}^* \otimes \mathcal{A},$$

où $\mathcal{X}^*$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{X}$ à supports compacts.

IV. — Filtration de l'anneau d'homologie d'un espace.

23. Définition de l'anneau filtré d'homologie $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ et de l'anneau spectral d'homologie $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$. — Soit, sur l'espace X, un faisceau différentiel filtré et continu $\mathcal{B}$; soit un entier l ; soit $\mathcal{X}$ une couverture fine de X ; le n° 6 définit la filtration de $\mathcal{H}(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$; le n° 8 définit l'anneau spectral d'homologie $\mathcal{H}_r(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$; la proposition *c* du n° 9 permet de prouver que

$$\mathcal{H}_l(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{F}_l(\mathcal{B}); \qquad \mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{F}_l(\mathcal{B})),$$

dans cette dernière formule on doit utiliser sur $\mathcal{X}^l$ la différentielle δ et sur $\mathcal{F}_l(\mathcal{B})$ la différentielle δ_l ; la différentielle utilisée sur $\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{F}_l(\mathcal{B})$ est donc homogène de degré l. Puisque $\mathcal{X}$ est une couverture fine

$$\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{F}_l(\mathcal{B})) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$$

sont, à une isomorphie près, indépendants du choix de $\mathcal{X}$; la proposition d du n° 9 permet d'en déduire que, à une isomorphie près, $\mathcal{H}_r(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$, pour $r > l$, et l'anneau filtré $\mathcal{H}(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ sont indépendants du choix de $\mathcal{X}$.

Ces faits justifient la définition que voici :

Définition. — *Soient un espace localement compact* X, *un entier l et sur* X, *un faisceau différentiel filtré et continu* $\mathcal{B}$; *nous noterons*

$$\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B}) \quad (r > l)$$

les anneaux, définis à une isomorphie près,

$$\mathcal{H}(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_r(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}),$$

où $\mathcal{X}$ *désigne une couverture fine de* $\mathcal{B}$. $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *sera nommé anneau filtré d'homologie de* X *relatif à l et* $\mathcal{B}$; $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *sera nommé anneau spectral d'homologie filtrée de* X *relatif à l et* $\mathcal{B}$. $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est un anneau spectral au sens du* n° 8; *il est défini pour* $r > l$,

$$\mathcal{H}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{F}_l(\mathcal{B})),$$

$\mathcal{H}_l(\mathcal{B})$ *étant muni de la différentielle* δ_l

$$\mathcal{H}_\infty(X^l \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{G}\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B}),$$

Remarque. — Soit un entier $k > 0$; soit $\mathcal{B}'$ l'anneau $\mathcal{B}$ dont on a multiplié la filtration par k; soit $l' = kl$; $\mathcal{H}(X^{l'} \bigcirc \mathcal{B}')$ s'obtient en multipliant par k la filtration de $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$; $\mathcal{H}_{kr}(X^{l'} \bigcirc \mathcal{B}')$ s'obtient en multipliant par k le degré de $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$.

Signalons le théorème suivant : *un élément de* $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est nilpotent quand sa filtration dépasse celles des éléments non nilpotents de l'anneau* $\mathcal{H}(\mathcal{B}(x))$, *quel que soit* $x \in X$.

24. Invariants topologiques d'un espace. — Quand $\mathcal{B}$ est identique à un anneau différentiel filtré $\mathcal{A}$ (n° 12, cas particulier), nous écrirons $X^l \bigcirc \mathcal{A}$ au lieu de $X^l \bigcirc \mathcal{B}$ (*voir* 19 *d*). *L'anneau filtré d'homologie* $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$ *et l'anneau spectral d'homologie* $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{A})$ *sont des invariants topologiques de l'espace* X, *quels que soient le nombre réel l et l'anneau différentiel filtré* $\mathcal{A}$.

Le n° 11 *b* prouve le théorème suivant :

Si la filtration de $\mathcal{A}$ *est nulle, alors la filtration de tout élément non nul de* $\mathcal{H}(X^1 \bigcirc \mathcal{A})$ *est finie et*

$$\mathcal{H}_r(X^1 \bigcirc \mathcal{A}) \simeq \mathcal{G}(\mathcal{H}(X^1 \bigcirc \mathcal{A})) \simeq \mathcal{H}(X^1 \bigcirc \mathcal{H}(\mathcal{A})).$$

$\mathcal{H}(X^1 \bigcirc \mathcal{H}(\mathcal{A}))$, anneau d'homologie de X relatif à l'anneau sans différentielle $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, est un anneau d'homologie du type classique; sa filtration est la filtration classique (degré ou dimension); le théoréme précédent relie donc aux invariants classiques les nouveaux invariants que nous venons de définir.

25. Isomorphismes remarquables. — On peut établir le théorème suivant :

Soit $\mathcal{B}$ *un faisceau différentiel, gradué, continu, défini sur un espace* X; *supposons le degré de* $\mathcal{B} \geqq 0$, *la différentielle de* $\mathcal{B}$ *homogène de degré* > 0 *et* $\mathcal{H}(\mathcal{B}(x))$ *de degré nul, quel que soit* $x \in X$; *il existe alors un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{F}(\mathcal{B})).$$

Ce théorème et 20 *c* ont une conséquence voisine du théorème fondamental de H. Cartan sur les carapaces :

Soient un espace X, un faisceau continu $\mathcal{B}$ défini sur X et un complexe fin $\mathcal{K}$, défini sur X et possédant les propriétés suivantes : ses supports sont compacts, son degré est $\geqq 0$, sa différentielle est homogène de degré $+1$, $\mathcal{H}(x\mathcal{K})$ est de degré nul, $\mathcal{B}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{B}(x) = \mathcal{H}(x\mathcal{K})$ quel que soit $x \in \mathcal{K}$; il existe alors un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}).$$

On a de même

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B}), \qquad \mathcal{H}_r(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B}),$$

quand on ajoute aux hypothèses précédentes les suivantes : $\mathcal{B}$ et

$\mathcal{K}$ sont filtrés, $\mathcal{B}(x)$ a même filtration que $\mathcal{H}(x\mathcal{K})$; le degré de $\mathcal{H}_{l+1}(x\mathcal{K})$ correspondant au degré de $\mathcal{K}$ est nul; $\mathcal{F}_l(\mathcal{K})$ est le faisceau associé à un complexe fin de X.

CHAPITRE III.

INVARIANTS TOPOLOGIQUES D'UNE APPLICATION.

26. Invariants topologiques d'une application. — Soient : un *espace* localement compact X; un *faisceau* différentiel, filtré, continu $\mathcal{B}$, défini sur X; une *application* φ de X dans un *espace* localement compact Y; *deux entiers* l et m, tels que $l < m$.

F étant une partie fermée de X les $\mathcal{H}(F^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}_r(F^l \bigcirc \mathcal{B})$ $(l < r)$ constituent deux faisceaux continus que nous noterons $\mathcal{F}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{F}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$; nous les nommerons *faisceau filtré d'homologie* et *faisceau spectral d'homologie* de X^l relatifs à $\mathcal{B}$

$$\mathcal{F}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{B}) \simeq \mathcal{F}(X^l \bigcirc \mathcal{F}_l(\mathcal{B})),$$

le faisceau $\mathcal{F}_l(\mathcal{B})$ *étant muni de la différentielle* δ_l; $\mathcal{F}_\infty(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est le faisceau gradué de* $\mathcal{F}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$.

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux couvertures fines de X et Y; $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{Y}) \bigcirc \mathfrak{X}$ est une couverture fine de X; $\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{Y}^m) \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}\big)$ est donc $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$, muni d'une certaine filtration.

D'après la proposition 18 *c*,

$$\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{Y}^m) \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B} \simeq \mathfrak{Y}^m \bigcirc \varphi(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B});$$

or

$$\mathcal{H}_{m+1}(\mathfrak{Y}^m \bigcirc \varphi(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})) \simeq \mathcal{H}(Y^m \bigcirc \varphi\mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})).$$

En s'appuyant sur 9 *b* on peut déduire de là, comme au n° 23, que

$$\mathcal{H}_r\big(\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{Y}^m) \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}\big) \quad (r > m) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}\big(\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{Y}^m) \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}\big)$$

sont indépendants des choix des couvertures fines $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$; nous exprimerons ce fait en remplaçant dans nos notations $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ par X et Y. Les propriétés des invariants topologiques ainsi attachés à φ, $\mathcal{B}$, l, m sont les suivantes :

$$\mathcal{H}_{m+1}\big(\overset{-1}{\varphi}(Y^m) \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big) \simeq \mathcal{H}(Y^m \bigcirc \varphi\mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})),$$

le faisceau $\mathcal{F}_m$ *étant muni de sa différentielle* δ_m;

$$\mathcal{H}_r\big(\overset{-1}{\varphi}(Y^m) \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big)$$

est un anneau spectral (n° 8);

$$\mathcal{H}_\infty\big(\overset{-1}{\varphi}(Y^m) \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big)$$

est l'anneau gradué de l'anneau

$$\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\varphi}(Y^m) \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big),$$

qui est $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$, *muni d'une certaine filtration;* sur les éléments non nuls cette filtration vaut au plus

$$m \dim Y + l \max_{y \in Y} \dim \overset{-1}{\varphi}(y) + \max_{b \neq 0} f(b).$$

On peut généraliser les théorèmes du n° 25. D'autre part : *La section par* $\overset{-1}{\varphi}(y)$ *définit un homorphisme, de filtration* $\geqq 0$, *de*

$$\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\varphi}(Y^m) \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big) \quad \textit{dans} \quad \mathcal{H}\big((\overset{-1}{\varphi}(y))^l \bigcirc \mathcal{B}\big).$$

$\overset{-1}{\varphi}$ *définit un homomorphisme de filtration* $\geqq 0$, *de*

$$\mathcal{H}(Y^m \bigcirc \varphi(\mathcal{B})) \quad \textit{dans} \quad \mathcal{H}\big(\overset{-1}{\varphi}(Y^m) \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big).$$

Si φ est la projection d'*un espace fibré* X sur la base Y, l'étude de ces homomorphismes fournit des relations remarquables entre les anneaux d'homologie de l'espace fibré, de sa base et de sa fibre.

27. Invariants topologiques d'une application composée. — Soient un *espace* localement compact X; un *faisceau* différentiel, filtré, $\mathcal{B}$, défini sur X; une application continue φ de X dans un espace localement compact Y; une application continue ψ de Y dans un espace localement compact Z; trois entiers, $l < m < n$.

F étant une partie fermée de Y, les $\mathcal{H}_r\big(\overset{-1}{\varphi}(F^m) \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big)$ constituent un faisceau spectral

$$\mathcal{F}_r\big(\overset{-1}{\varphi}(Y^m) \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big) \qquad (m < r);$$

$$\mathcal{F}_{m+1}\big(\overset{-1}{\varphi}(Y^m) \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big) \simeq \mathcal{F}(Y^m \bigcirc \varphi\mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})),$$

le faisceau $\mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ étant muni de sa différentielle δ_m.

On définit comme au n° 26 un *anneau spectral*

$$\mathcal{H}_r\big(\overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}(Z^n)\bigcirc\overset{-1}{\varphi}(Y^m)\bigcirc X^l\bigcirc\mathcal{B}\big)\qquad(n<r);$$

$$\mathcal{H}_{n+1}\big(\overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}(Z^n)\bigcirc\overset{-1}{\varphi}(Y^m)\bigcirc X^l\bigcirc\mathcal{B}\big)\simeq\mathcal{H}(Z^n\bigcirc\psi\,\mathcal{F}_n(Y^m\bigcirc\varphi(X^l\bigcirc\mathcal{B}))),$$

$\mathcal{F}_n$ étant muni de sa différentielle δ_n;

$$\mathcal{H}_\infty\big(\overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}(Z^n)\bigcirc\overset{-1}{\varphi}(Y^m)\bigcirc X^l\bigcirc\mathcal{B}\big)$$

est l'anneau gradué de

$$\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{\psi}(Z^n)\bigcirc\overset{-1}{\varphi}(Y^m)\bigcirc X^l\bigcirc\mathcal{B}\big)$$

qui est $\mathcal{H}(X\bigcirc\mathcal{B})$ muni d'une filtration dépendant des données X, $\mathcal{B}$, φ, ψ, l, m, n.

Comme le signale l'introduction (n° 3), on peut envisager plus généralement une suite d'espaces distincts ou non X_α $(\alpha\geqq 0)$, d'applications $\varphi_{\alpha+1}$ de X_α dans $X_{\alpha+1}$ et d'entiers $l_0<l_1<\ldots$.

RELATIONS ENTRE ANNEAUX D'HOMOLOGIE ET GROUPES DE POINCARÉ [1];

PAR HENRI CARTAN ET JEAN LERAY.
(Paris.)

Cette Note fait suite à l'exposé précédent de J. Leray; les références s'y rapportent.

1. Anneau différentiel sur lequel opère un groupe fini. — Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel; soit Γ un groupe fini d'automorphismes γ de $\mathcal{A}$; nous supposons ces automorphismes permutables avec la différentiation. Nous dirons que $\mathcal{A}$ est *fin* sur Γ si $\mathcal{A}$ possède un sous-groupe additif $\mathcal{A}'$ tel que $\mathcal{A}$ soit la somme directe des transformés de $\mathcal{A}'$ par Γ

$$\mathcal{A}=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma\mathcal{A}';$$

on ne suppose pas que $\delta\mathcal{A}'$ appartienne à $\mathcal{A}$. $\underline{\mathcal{A}}$ désignera le sous-anneau que constituent les éléments de $\mathcal{A}$ invariants par Γ

$$\gamma\underline{a}=\underline{a}\qquad\text{quel que soit }\gamma\in\Gamma\qquad\text{si}\quad\underline{a}\in\underline{\mathcal{A}}.$$

Si $\mathcal{A}$ est un anneau canonique (n° 10) possédant une unité de degré nul et si $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ se réduit aux multiples entiers de cette unité, nous dirons que $\mathcal{A}$ est une *couverture* de Γ; une construction, due à Eilenberg, Mac Lane et Eckmann, analogue à celle d'Alexander et Kolmogoroff (n° 21) donne un exemple de

---

[1] Nos résultats complètent ceux de : H. HOPF, *Comm. math. helv.*, 14, 15; ECKMANN, *ibid.*, 18; EILENBERG et MAC LANE, *Ann. of Math.*, 46; FREUDENTHAL, *ibid.*, 47; H. CARTAN a réussi à étendre la présente étude au cas où Γ est infini (*C. R. Acad. Sc.*, 226, p. 148 et 303).

couverture fine. Si Γ opère sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$, Γ opérera sur $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ comme suit

$$\gamma\Big(\sum_\lambda k_\lambda \otimes a_\lambda\Big) = \sum_\lambda (\gamma k_\lambda)\otimes(\gamma a_\lambda).$$

On a les propositions suivantes, analogues à celles qui permettent de définir l'anneau filtré d'homologie d'un espace :

a. Si $\mathcal{A}$ est fin sur Γ et si $\mathcal{K}$ est une couverture de Γ,

$$\mathcal{H}(\underline{\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}}) \simeq \mathcal{H}(\underline{\mathcal{A}}).$$

b. $\mathcal{H}(\underline{\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}})$ est indépendant du choix de la couverture fine $\mathcal{K}$ de Γ;

c. Si $\mathcal{K}$ est fin et si Γ laisse invariante la filtration de $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{H}_{l+1}(\underline{\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}}) \simeq \mathcal{H}(\underline{\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l(\mathcal{A})}).$$

$\mathcal{K}$ étant une couverture fine de Γ, nous pouvons donc convenir d'écrire $\mathcal{H}(\underline{\Gamma\otimes\mathcal{A}})$ au lieu de $\mathcal{H}(\underline{\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}})$ et $\mathcal{H}_r(\underline{\Gamma^l\otimes\mathcal{A}})$ au lieu de $\mathcal{H}_r(\underline{\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}})$.

2. **Application géométrique.** — *Soit* Γ *un groupe fini d'applications bicontinues, sans point fixe, d'un espace localement compact* X *sur lui-même; soit* $\underline{X}$ *l'espace qu'on obtient en identifiant chaque point de* X *à tous ses transformés par* Γ. Il est aisé de construire une couverture $\mathcal{X}$ de X fine sur X et sur Γ; soit $\mathcal{X}^*$ l'ensemble de ses éléments à supports compacts; $\underline{\mathcal{X}}$ est une couverture fine de $\underline{X}$.

Soit $\mathcal{A}$ un anneau filtré que chaque opération de Γ représente identiquement sur lui-même; soient deux entiers $l < m$; on constate aisément que l'anneau $\mathcal{H}_r(\underline{\Gamma^m\otimes\mathcal{X}^{*l}\otimes\mathcal{A}})$ est indépendant du choix de $\mathcal{X}$ pour $m < r$; nous le noterons $\mathcal{H}_r(\underline{\Gamma^m\otimes X^l\bigcirc\mathcal{A}})$; *cet anneau spectral est un invariant topologique de la paire* (X, Γ); *il est défini pour* $l < m < r$;

$$\mathcal{H}_{m+1}(\underline{\Gamma^m\otimes X^l\bigcirc\mathcal{A}}) \simeq \mathcal{H}(\underline{\Gamma^m\otimes\mathcal{H}_m(X^l\bigcirc\mathcal{A})}).$$

$\mathcal{H}_\infty(\underline{\Gamma^m\otimes X^l\bigcirc\mathcal{A}})$ *est l'anneau gradué de* $\mathcal{H}(\underline{X}\bigcirc\mathcal{A})$; *muni d'une filtration dépendant de* Γ, l et m.

Cas particulier. — $l = -1$, $m = 0$, la filtration et la différentielle de $\mathcal{A}$ sont nulles

$$\mathcal{H}_1(\underline{\Gamma^0\otimes X^{-1}\bigcirc\mathcal{A}}) \simeq \mathcal{H}(\underline{\Gamma^0\otimes\mathcal{H}(X^{-1}\bigcirc\mathcal{A})});$$

l'anneau spectral $\mathcal{H}_r(\underline{\Gamma^0\otimes X^{-1}\bigcirc\mathcal{A}})$ qui est défini pour $r \geqq 1$, met donc en relations $\mathcal{H}(\underline{X}\bigcirc\mathcal{A})$ avec $\mathcal{H}(X\bigcirc\mathcal{A})$ et la façon dont Γ opère sur cet anneau.

3. On peut étudier de même une application φ (éventuellement composée) d'un espace X dans un espace Y et un groupe Γ opérant sur X et Y, commutant avec φ, quand aucun élément de Γ ne laisse fixe de point de X ni de Y; on obtient des conclusions analogues à celle du nº 27.

SUR LES CONDITIONS D'HOMÉOMORPHIE DE DEUX ROTATIONS DE LA SPHÈRE A n DIMENSIONS, ET SUR LES COMPLEXES AVEC AUTOMORPHISMES;

PAR GEORGES DE RHAM.
(Genève et Lausanne.)

---

1. Il s'agira ici de quelques problèmes d'homéomorphie, assez particuliers, mais qui pourront peut-être servir à éprouver des théories générales. Ces problèmes ne sont pas complètement résolus, d'où le caractère fragmentaire des réflexions et remarques qui suivent.

Deux transformations R et R′ d'une variété V en elle-même sont dites *homéomorphes*, s'il existe une transformation topologique T telle que $TR = R'T$. On appelle *rotation* de la sphère à n dimensions S^n, définie dans l'espace euclidien réel à $n+1$ dimensions par l'équation $\sum_1^{n+1} x_i^2 = 1$, toute transformation qui se traduit par une substitution linéaire orthogonale $x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$. Les racines de l'équation de degré $n+1$ en λ, déterminant $\| a_{ik} - \lambda\delta_{ik} \| = 0$, sont appelées les *racines caractéristiques* de la rotation. Ce sont des nombres de module égal à 1.

PREMIÈRE QUESTION. — Quelle est la condition pour qu'une transformation topologique de S^n en elle-même soit homéomorphe à une rotation? En d'autres termes, quelles sont les propriétés topologiques caractéristiques des rotations?

Pour qu'une transformation topologique R soit homéomorphe à une rotation, il est nécessaire que l'ensemble des puissances R^n de R, d'exposant n entier positif ou négatif, soient également continues. En effet, cette propriété appartient évidemment à toutes les rotations et c'est une propriété topologique. Cette condition nécessaire est-elle aussi suffisante ? Pour $n = 1$ ou 2, la réponse est affirmative. La démonstration est aisée pour $n = 1$, et pour $n = 2$ elle se trouve dans les travaux de Kérékjarto. Mais pour n supérieur à 2, on ne sait rien. Remarquons que, si R est d'ordre fini, ses puissances sont en nombre fini et sont par suite également continues; or, déjà pour $n = 3$, on ne sait pas si une transformation d'ordre fini est homéomorphe à une rotation.

Deuxième question. — Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux rotations soient homéomorphes ?

D'après un théorème connu, si les deux rotations R et R′ ont les mêmes racines caractéristiques, et dans ce cas seulement, il existe une rotation R_1 telle que $R_1 R = R' R_1$. Il est donc suffisant que R et R′ aient les mêmes racines caractéristiques pour qu'elles soient homéomorphes. Cette condition est-elle aussi nécessaire ? Pour $n = 1$ ou 2, la réponse est affirmative. J'ai tenté de prouver qu'il en est de même dans le cas général, mais une difficulté subsiste. Comme je le montrerai ci-dessous, la démonstration serait achevée si l'on était assuré de l'invariance topologique proprement dite de ce qu'on appelle les invariants de Reidemeister.

Troisième question. — Considérons les transformations continues f, pas nécessairement biunivoques, qui satisfont à l'équation $fR = R'f$, R et R′ étant deux rotations données. Disons que deux telles transformations sont *homotopes relativement à* R *et* R′, si l'une peut être déformée en l'autre sans que l'équation ci-dessus ne cesse d'être satisfaite, et rangeons dans une même classe toutes les transformations qui sont ainsi homotopes à l'une d'elles. On demande d'énumérer ces classes et de les caractériser.

Ce dernier problème a fait l'objet de travaux de MM. Rueff, Franz et Hirsch, *dans le cas particulier où les rotations* R *et* R′ *sont d'ordre fini h et où toutes leurs racines caractéristiques sont des racines primitives $h^{\text{ièmes}}$ de l'unité.*

Je me bornerai ici à ce cas particulier. Toute la difficulté du problème d'homéomorphie (question 2) réside d'ailleurs dans le cas des rotations d'ordre fini. L'hypothèse que les racines caractéristiques sont des racines $h^{\text{ièmes}}$ de l'unité signifie que la rotation est d'ordre h, $R^h = 1$. L'hypothèse que toutes sont des racines primitives $h^{\text{ièmes}}$ de l'unité signifie que chaque point appartient à

un cycle de h points distincts, permutés circulairement sous l'effet de la rotation. En identifiant les h points d'un tel cycle, c'est-à-dire en les assimilant à un seul point, on déduit de la sphère les variétés appelées *Linsenräume* par Seifert et Threllfall, espaces en forme de lentilles ou espaces lenticulaires, à cause d'une manière de les représenter dans le cas de trois dimensions. Les problèmes relatifs aux rotations particulières envisagées ici se laissent formuler comme des problèmes relatifs à ces variétés. Mais il me semble préférable de les considérer comme des problèmes relatifs aux rotations.

2. En introduisant des coordonnées complexes $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$, $z_k = x_{2k-1} + i x_{2k}$, on peut ramener les équations de la rotation à $z'_k = \zeta_k z_k \, (k = 1, \ldots, \nu)$, l'équation de la sphère étant $\sum_k z_k \bar{z}_k = 1$, et les racines caractéristiques étant les nombres ζ_k et les nombres imaginaires conjugués ζ_k^{-1}. $n = 2\nu - 1$ est impair. Posons

$$\zeta_k = e^{\frac{2i\pi}{h} m_k},$$

m_k est un entier premier à h par hypothèse. Désignons par l_k son inverse $(\operatorname{mod} h)$: $l_k m_k \equiv 1 \ (\operatorname{mod} h)$. Les entiers $l_1, \ldots, l_\nu$ déterminent les racines caractéristiques de la rotation. Ils ne sont définis que $(\operatorname{mod} h)$, au signe près et à l'ordre près. En échangeant z_k et $\bar{z}_k$, on remplacerait en effet ζ_k par ζ_k^{-1} et l_k par $-l_k$. Toutefois, on peut associer une orientation de S^n au système de coordonnées, de manière que cette orientation change si l'on échange z_k et $\bar{z}_k$. Il en résulte que le signe du produit $l_1 l_2 \ldots l_\nu \ (\operatorname{mod} h)$ est lié à une orientation de la sphère où opère la rotation.

On peut obtenir une division de S^n en cellules, invariante vis-à-vis de la rotation, contenant h cellules de chaque dimension, permutées circulairement par la rotation. En désignant par a^q, $\gamma a^q, \ldots, \gamma^{k-1} a^q$ celles de dimension q, le schéma de la subdivision, qui fait connaître le bord de chaque cellule convenablement orientée, se réduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{L} a^{2k} &= (1 + \gamma + \ldots + \gamma^{h-1}) \, a^{2k-1} \qquad && (k = 1, \ldots, \nu - 1), \\ \mathcal{L} a^{2k-1} &= (\gamma^{l_k} - 1) \, a^{2k-2} && (k = 1, \ldots, \nu), \end{aligned}$$

a^{2k-2} est définie par

$$z_1 = \ldots = z_{\nu-k} = 0, \qquad 0 = \arg z_{\nu-k+1}.$$

et a^{2k-1} par

$$z_1 = \ldots = z_{\nu-k} = 0, \qquad 0 < \arg z_{\nu-k+1} < \frac{2\pi}{k}.$$

Une telle subdivision définit un complexe, et la rotation R se traduit par un automorphisme γ de ce complexe.

3. Considérons plus généralement un complexe quelconque, admettant un automorphisme γ d'ordre h. Supposons que chaque cellule appartienne à un cycle de h cellules distinctes permutées circulairement par γ. Désignons par

$$a_i^q \,(i = 1, \ldots, \alpha_q;\ q = 0, \ldots, n)$$

les cellules d'un *système fondamental* (ou domaine fondamental) c'est-à-dire un ensemble minimum de cellules dont toutes les autres se déduisent par l'automorphisme γ et ses puissances. Toute cellule sera représentée par un symbole tel que $\pm \gamma^k a_i^q$ et une chaîne à q dimensions par une combinaison linéaire

$$c^q = \sum_i \xi_i a_i^q,$$

avec pour coefficients ξ_i non plus des nombres ordinaires, mais des éléments de l'anneau du groupe cyclique engendré par γ. Le bord de chaque cellule du système fondamental sera en particulier de cette forme,

$$\mathcal{L} a_i^q = \sum_j \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1},$$

et toutes ces relations constituent le schéma du complexe avec automorphismes.

4. Supposons que les groupes d'homologie du complexe envisagé soient les mêmes que ceux de la sphère à $n = 2\nu - 1$ dimensions. En n'envisageant que les chaînes à coefficients entiers (ce qui fait intervenir l'anneau du groupe cyclique sur l'anneau des entiers rationnels), je vais définir une relation entre les cycles à n dimensions et les chaînes à zéro dimension.

Pour exprimer que la chaîne c^{q-1} est le bord de la chaîne c^q, on écrit $c^{q-1} = \mathcal{L} c^q$. J'écrirai aussi $c^q = \mathcal{L}^{-1} c^{q-1}$. L'opération $\mathcal{L}^{-1}$ n'a de sens qu'appliquée à une chaîne homologue à zéro, et elle n'est alors pas uniforme : la chaîne $\mathcal{L}^{-1} c^{q-1}$ n'est déterminée qu'à une chaîne fermée près. Soit $\sigma = 1 + \gamma + \ldots + \gamma^{h-1}$, de sorte que σc désigne la somme de toutes les transformées de c par l'automorphisme γ et ses puissances. Cela étant, on définit une relation entre cycles à n dimensions et chaînes à 0 dimension en posant

$$c^n = \sigma \mathcal{L}^{-1}(\gamma - 1)\mathcal{L}^{-1} \sigma \mathcal{L}^{-1}(\gamma - 1) \ldots \sigma \mathcal{L}^{-1}(\gamma - 1) c^0,$$

ce que nous écrirons, pour abréger, $c^n \to c^0$. On vérifie que les opérations $\mathcal{L}^{-1}$, qui figurent n fois dans cette relation, sont toujours applicables, et que la classe d'homologie $(\bmod h)$ de c^n ne dépend que de la classe d'homologie $(\bmod h)$ de c^0. On a ainsi un isomorphisme entre les groupes d'homologie $(\bmod h)$ à n et zéro dimensions, associé à l'automorphisme γ.

Cet isomorphisme est caractérisé par un entier $(\bmod h)$, L, que j'appellerai l'*invariant* $(\bmod h)$, tel que, si c_0^0 et c_0^n sont des bases des groupes d'homologie, $c_0^n \to \mathrm{L} c_0^0$.

Soient C et C′ deux complexes avec automorphisme, tels que ceux envisagés ici, et soit f une application de C dans C′ permutable avec l'automorphisme (que je désigne toujours par γ). Il est clair que si $c^n \to c^0$ dans C, $fc^n \to fc^0$ dans C′.

Soient L l'invariant $(\bmod h)$ de C, L′ celui de C′, et d le degré de f, c_0^n, c_0^0, ${c'_0}^n$, ${c'_0}^0$ étant des bases des groupes d'homologie de C et C′, on a les relations

$$c_0^n \to \mathrm{L} c_0^0, \qquad f c_0^n = d {c'_0}^n, \qquad f c_0^0 = {c'_0}^0, \qquad {c'_0}^n = \mathrm{L}' {c'_0}^0,$$

d'où résulte $\mathrm{L} \equiv d\mathrm{L}' \,(\bmod h)$. *Le degré d de l'application f est donc déterminé $(\bmod h)$.*

5. Pour le complexe considéré ci-dessus, associé à la rotation d'invariants $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$, a^0 et σa^n sont des bases des groupes d'homologie, et l'on déduit immédiatement du schéma que

$$\sigma a^n \to \prod_k \frac{\gamma^{l_k} - 1}{\gamma - 1} a^0,$$

d'où, comme $\gamma a^0 \sim a^0$ et $\frac{\gamma^{l_k} - 1}{\gamma - 1} a^0 \sim l_k a^0$, $\mathrm{L} = l_1 l_2 \ldots l_\nu$.

On obtient ainsi le théorème établi d'une manière tout à fait différente par M. Rueff :

Le degré d d'une application continue f de S^n sur elle-même, telle que $fR = R'f$, R et R' étant deux rotations d'invariants $l_1, \ldots, l_\nu$ et $l'_1, \ldots, l'_\nu$, satisfait à la congruence

$$l'_1 \ldots l'_\nu d \equiv l_1 \ldots l_\nu \quad (\mathrm{mod}\, h).$$

M. Rueff a montré qu'il existe effectivement des applications f de chaque degré satisfaisant à cette congruence, et W. Franz a prouvé que deux telles applications sont homotopes relativement à R et R' si elles ont le même degré. La deuxième question est ainsi complètement résolue, du moins pour les rotations de la classe particulière envisagée ici.

Une homéomorphie étant une application de degré ± 1, il résulte de là que, pour que les deux rotations R et R' soient homéomorphes, il est nécessaire que

$$l'_1 l'_2 \ldots l'_\nu \equiv l_1 l_2 \ldots l_\nu \quad (\mathrm{mod}\, h).$$

Si cette condition est remplie, il existe deux applications f et f' telles que $fR = R'f$, $f'R' = Rf$, ff' étant homotope à l'identité relativement à R', et R', $f'f$ étant homotope à l'identité relativement à R et R. Ce qu'on peut exprimer en disant que R et R' ont le même type d'homotopie.

6. Pour énoncer ce qu'on sait de plus, relativement au problème d'homéomorphie, il est nécessaire de faire intervenir la notion d'*homéomorphie au sens combinatoire*.

Si l'on subdivise une cellule d'un complexe C avec un automorphisme γ, et si l'on subdivise de manière correspondante toutes les cellules qui correspondent à celle-là par γ et ses puissances, on obtient un nouveau complexe C' auquel s'étend l'automorphisme. On appelle transformation élémentaire le passage de C à C' ou le passage inverse, et l'on dit que deux complexes avec automorphisme sont *homéomorphes au sens combinatoire* si l'un peut être rendu isomorphe à l'autre par une suite de transformations élémentaires (deux complexes avec automorphisme sont dits isomorphes, si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre les cellules de l'un et celles de l'autre, qui respecte la

dimension, les relations d'incidence et qui soit permutable avec l'automorphisme). L'hypothèse que l'homéomorphie au sens ordinaire entraîne l'homéomorphie au sens combinatoire (Hauptvermutung) a été abondamment discutée, comme on sait, sans que la question soit résolue.

Pour les rotations d'ordre fini, en se référant aux complexes introduits ci-dessus, ou à d'autres analogues, la notion d'homéomorphie au sens combinatoire prend un sens parfaitement clair, et l'on peut prouver que deux rotations d'ordre fini ne peuvent être homéomorphes au sens combinatoire que si elles ont les mêmes racines caractéristiques. D'autre part, si l'on savait que deux rotations d'ordre fini ne peuvent être homéomorphes (au sens ordinaire) que si elles ont les mêmes racines caractéristiques, on en déduirait aisément la même proposition pour deux rotations quelconques, et la deuxième question serait complètemenl résolue.

Voici, en nous bornant aux rotations de la classe particulière envisagée ci-dessus, dont toutes les racines caractéristiques sont des racines primitives $h^{\text{ièmes}}$ de l'unité, quelques indications sur la manière dont on obtient ce résultat.

On prouve que, si les rotations d'invariants $l_1, \ldots, l_\nu$ et $l'_1, \ldots, l'_\nu$ sont homéomorphes au sens combinatoire, la relation

$$(*) \qquad \prod_k \frac{1-\gamma^{l_k}}{1-\gamma} \, \frac{1-\gamma^{-l_k}}{1-\gamma^{-1}} = \prod_k \frac{1-\gamma^{l'_k}}{1-\gamma} \, \frac{1-\gamma^{-l'_k}}{1-\gamma^{-1}}$$

est vérifiée en remplaçant γ par toute racine $h^{\text{ième}}$ de l'unité. On remarque que, pour $\zeta = 1$, cette relation se réduit à la condition établie ci-dessus pour que les deux rotations aient le même type d'homotopie.

On déduit de là, comme l'a montré W. Franz, en utilisant le fait que la série de Dirichlet $L(s, \chi)$ est $\neq 0$ pour $s = 1$ lorsque χ n'est pas le caractère principal, que l'ensemble des nombres l_k, $-l_k$ coïncide $(\mathrm{mod}\, h)$ avec l'ensemble des nombres l'_k, $-l'_k$, ce qui revient à dire que les deux rotations ont les mêmes racines caractéristiques.

7. La relation (*) fait intervenir la *torsion de W. Franz*, invariant topologique combinatoire dont la signification demeure mystérieuse. Voici une manière de la définir.

Dans l'espace vectoriel des chaînes d'un complexe, avec comme coefficients des nombres complexes quelconques, on introduit une métrique en définissant de la manière usuelle le produit scalaire hermitique $c_1 . c_2$, de deux chaînes c_1 et c_2. Les cellules, ou plutôt les chaînes dont tous les coefficients sont nuls, sauf un seul égal à 1, forment dans cet espace un système de référence orthogonal et normal. A l'opération $\mathcal{L}$, qui donne le bord, correspond l'opération adjointe $\mathcal{L}^*$, définie par l'identité $\mathcal{L} c_1 . c_2 = c_1 . \mathcal{L}^* c_2$, qui donne le cobord, et l'espace C de toutes les chaînes se décompose en la somme de trois sous-espaces deux à deux orthogonaux : l'espace C_1 des bords (ou chaînes homologues à zéro), l'espace C_2 des cobords (ou chaînes cohomologues à zéro) et l'espace C_3 des chaînes harmoniques.

Les espaces C_1 et C_2 sont appliqués sur eux-mêmes par les opérateurs $\mathcal{L}\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{L}^*\mathcal{L}$ respectivement, et se décomposent en sous-espaces $C_{i,\lambda}$, deux à deux orthogonaux, associés aux valeurs propres λ (toutes réelles) de ces opérateurs

$$C_i = \sum_\lambda C_{i,\lambda} \qquad (i = 1, 2).$$

Chacun de ces espaces $C_{i,\lambda}$ est transformé en lui-même par l'automorphisme γ, et se décompose par suite en sous-espaces $C_{i,\lambda,\zeta}$ associés aux diverses racines $h^{\text{ièmes}}$ de l'unité ζ, les chaînes d'un tel sous-espace étant multipliées par ζ sous l'effet de γ.

Enfin $C_{i,\lambda,\zeta}$ se laisse encore décomposer en deux sous-espaces, constitués l'un par les chaînes de dimension impaire, l'autre par les chaînes de dimension paire. Désignons par $n'(\lambda, \zeta)$ le nombre de dimensions du premier, par $n''(\lambda, \zeta)$ le nombre de dimensions du second.

Si toute chaîne harmonique est invariante par γ, comme c'est le cas pour les complexes avec automorphisme associés aux rotations, on peut vérifier que, pour toute racine $h^{\text{ième}}$ de l'unité ζ distincte de 1, le produit

$$\Delta_\zeta = \prod_\lambda \lambda^{n'(\lambda,\zeta) - n''(\lambda,\zeta)}$$

est un invariant topologique combinatoire : c'est la torsion de W. Franz.

Pour le complexe avec automorphisme associé à la rotation d'invariants $l_1, \ldots, l_\nu$, un calcul facile montre que

$$\Delta_\zeta = \prod_k (1 - \zeta^{l_k})(1 - \zeta^{-l_k}),$$

d'où résulte le théorème énoncé plus haut.

Le fait que la torsion puisse différer pour deux rotations ayant le même type d'homotopie, explique l'insuccès de certaines tentatives de démontrer son invariance topologique, invariance qui est encore hypothétique.

BIBLIOGRAPHIE.

W. Franz, *Ueber die Torsion einer Uberdeckung* (*Journal für die reine u. ang. Math.*, 173, 1935, p. 245-254).

W. Franz, *Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume* (*Ibid.*, 185, 1943, p. 65-77).

K. Reidemeister, *Homotopieringe und Linsenräume* (*Hamb. Abh.* 11, 1935).

G. de Rham, *Sur les nouveaux invariants topologiques de M. Reidemeister* (*Recueil mathématique de Moscou*, 1, (43), p. 737-742).

G. de Rham, *Sur les complexes avec automorphismes* (*Commentarii Math. Helv.*, vol. 12, p. 191-211).

M. Rueff, *Beiträge zur Untersuchung der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* (*Compositio Mathematica*, 6, 1938, p. 161-202).

J. H. C. Whitehead, *On C¹-Complexes* (*Annals of Math.*, 41, 1940, p. 809-824).

J. H. C. Whitehead, *On incidence matrices, nuclei and homotopy types* (*Ibid.*, 42, 1941, p. 1197-1239).

SUR LES NOMBRES DE BETTI DES GROUPES DE LIE CLOS;

PAR E. STIEFEL
(Zürich).

Soit G un groupe de Lie simple et clos. Supposons que G, en tant que variété topologique, soit simplement connexe, ce qui, comme on le sait, n'est pas une restriction essentielle. É. Cartan, L. Pontrjagin, H. Hopf, H. Samelson et J. L. Koszul ont fait des recherches générales à propos de l'anneau d'homologie de G. Dans le cas où G appartient à l'une des quatre classes de Cartan, L. Pontrjagin, R. Brauer et C. Ehresmann ont calculé les nombres de Betti de G par trois méthodes différentes. Dans ce qui suit, nous exposons une quatrième méthode pour résoudre ce problème. On peut espérer qu'elle conduit aussi au résultat dans le cas des groupes exceptionnels de Lie. Elle donne de plus une construction systématique des cycles minima de G, donc une base de l'anneau de Pontrjagin de G. L'essentiel de cette méthode réside dans l'emploi du polyèdre de Cartan de G.

Un simplexe à l dimensions de l'espace euclidien R^l est dit rationnel quand tous les angles entre deux de ses faces sont des parties entières de π. A tout groupe de Lie G correspond un simplexe rationnel nommé polyèdre de Cartan de G. Sa dimension l est le rang de G. Cette correspondance est réciproquement univoque, c'est-à-dire qu'à tout simplexe rationnel correspond un groupe G univoquement déterminé (à un isomorphisme près). Exemples : Au simplexe à une dimension (segment) correspond le groupe des rotations d'une sphère à deux dimensions; au triangle équilatéral correspond le groupe A_2 des matrices unitaires à trois lignes de déterminant $+1$. Comme G est déterminé univoquement par son polyèdre, il doit être possible d'obtenir les nombres de Betti de G à partir de ce polyèdre, sans connaître plus exactement la structure de G. Pour établir la méthode qui permet cette détermination, il faut examiner un peu les relations qui existent entre G et le polyèdre. Comme illustration et comme exemple, nous nous servirons du cas du triangle équilatéral.

Si l'on prend les symétriques du simplexe successivement par rapport à chacune de ses faces, on obtient un groupe discontinu Γ de mouvements et de symétries de l'espace euclidien R^l (*fig.* 1). Les plans de symétrie de Γ forment m familles de plans parallèles et Γ peut aussi être engendré par les symétries par rapport à ces plans. On sait que les translations contenues dans Γ forment un réseau γ. Si l'on identifie deux points équivalents par rapport à γ, l'espace R^l devient un tore T à l dimensions et Γ devient un groupe fini Φ de transformations de ce tore. L'addition vectorielle habituelle de R^l fait de T un groupe abélien continu nommé toroïde.

La relation mentionnée réside dans le fait que T peut être considéré comme sous-groupe du groupe de Lie G, et, de plus, T est un sous-groupe abélien maximum de G; en d'autres termes, tout sous-groupe abélien qui contient T est confondu avec T. Le groupe Φ obtient la signification suivante : tous les automorphismes intérieurs de G qui transforment en lui-même le toroïde T (considéré comme sous-groupe de G) engendrent des transformations de T qui forment exactement le groupe Φ. La figure 1 qui se compose des plans de symétrie de Γ se nomme aussi le diagramme de G.

Il existe encore les relations suivantes : Tout point t de l'espace R^l peut être considéré comme élément de T ou de G. Si t se trouve sur ν plans de symétrie du diagramme, la dimension du normalisateur de t dans le groupe G est égale à $l+2\nu$. Les points t par lesquels passent m plans forment le centre de G. La dimension de G est donc $n=l+2m$. L'élément unité e est un de ces points.

Afin d'appliquer ces relations à la topologie, choisissons dans le diagramme $(l-1)$ plans de symétrie qui passent par e et qui sont en position générale. Ils se coupent suivant une droite d à une dimension (*fig.* 2). Dans le plan R' perpendiculaire à d par e, considérons le diagramme partiel à $(l-1)$ dimensions qui est formé par les intersections de R' avec les plans de symétrie parallèles à la droite d. On peut démontrer qu'il existe dans G un sous-

groupe G' qui correspond à ce diagramme partiel. Sa dimension est $n'=(l-1)+2m'$, où m' désigne le nombre de plans de symétrie de l'espace R^l passant par d.

Il s'agit d'abord d'examiner si G' est homologue à O dans G ou non. A cet effet, construisons dans G un cycle z de la façon suivante : Sur la droite d, soit s le segment orienté qui va de e jusqu'au premier point de d qui se trouve dans un plan de symétrie ne contenant pas d. z sera formé de tous les éléments de G qui sont conjugués aux points de s. Comme le normalisateur

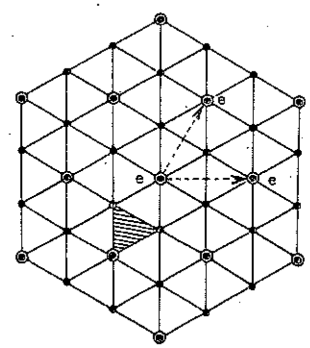

Fig. 1.

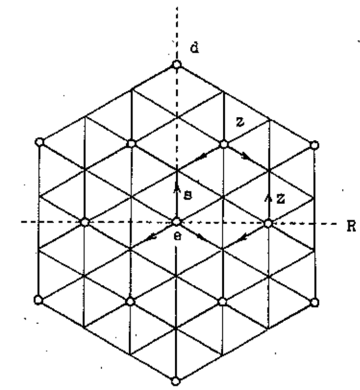

Fig. 2.

d'un point intérieur de s a la dimension $(l+2m')$, la dimension de z est donc

$$n-(l+2m')+1=n-n',$$

z est un cycle, car le normalisateur de l'extrémité de s a une dimension plus grande que celle du normalisateur d'un point intérieur; par conséquent, les éléments conjugués du point frontière de s ne peuvent pas former de bord pour z au sens algébrique. On obtient la partie de z comprise dans le toroïde T en exerçant sur s les transformations du groupe Γ, car Γ se compose justement des automorphismes intérieurs de G qui laissent T invariant. Dans la figure 2, cette partie se compose des hexagones dessinés.

Comme z a la dimension duale $(n-n')$ de la dimension n de G', on peut compter le nombre des points d'intersection de z

et de G'. Le fait décisif pour notre méthode est que z et G' ne peuvent avoir en commun que des points de T. On peut donc compter le nombre cherché dans le diagramme. Dans la figure 2, il a la valeur 1, car R' n'a en commun avec le système des hexagones que le point e (et les points équivalents par rapport au réseau γ). Pour compter exactement le nombre des points d'intersections, il faut à vrai dire remplacer G' par une classe de restes voisine, ce qui revient dans le diagramme à effectuer une petite translation sur R'.

Si l'on a trouvé de cette façon un sous-groupe G' non homologue à zéro de rang $(l-1)$, on obtient, d'après un théorème de Samelson, le polynome de Poincaré $P(x)$ de G comme produit du polynome de G' par le facteur $(1+x^{n-n'})$. Dans l'exemple, nous aurions ainsi

$$n = 2+2\times 3 = 8, \qquad n' = 1+2\times 1 = 3, \qquad n-n' = 5.$$

Le polyèdre de Cartan de G' est le segment; G' est donc le groupe des rotations de la sphère (plus exactement le groupe de recouvrement universel de ce groupe de rotations). En tant qu'espace topologique G' est donc une sphère à trois dimensions avec le polynome de Poincaré $(1+x^3)$. On en déduit le polynome de A_2 (groupe de Lie correspondant à notre triangle équilatéral) :

$$P(x) = (1+x^3)(1+x^5).$$

En outre, notre cycle z est un élément minimum de l'anneau d'homologie de G, c'est-à-dire que z est un élément de la base de l'anneau de Pontrjagin de $\mathcal{G}$.

Notre méthode permet de déterminer facilement les nombres de Betti des groupes des quatre classes de Cartan.

Comme application, j'ai déterminé de plus la base de l'anneau de Pontrjagin du groupe exceptionnel $\mathcal{G}_2$ dont le polynome de Poincaré vaut $(1+x^3)(1+x^{11})$.

En utilisant une généralisation de la méthode on peut démontrer le théorème suivant : *Dans chaque groupe de Lie $\mathcal{G}$ simple et clos existe un sous-groupe $\mathcal{G}^*$ (simple et clos) de rang* 1, *qui n'est pas homologue à zéro dans $\mathcal{G}$*. Comme $\mathcal{G}^*$ est isomorphe au groupe des rotations de la sphère ordinaire (ou à son groupe de recouvrement universel), sa dimension est égale à 3 et par conséquent nous retrouvons la propriété bien connue et démontrée par É. Cartan, que le troisième nombre de Betti de $\mathcal{G}$ est non nul [1].

[1] Après ma conférence, J. L. Koszul m'a signalé qu'il a obtenu et généralisé ce théorème en utilisant une autre méthode. Il a publié son résultat dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 225, p. 477-478, séance du 22 septembre 1947).

ON SIMPLY CONNECTED, 4-DIMENSIONAL POLYHEDRA;

By J. H. C. WHITEHEAD.
(Oxford, England.)

Our main purpose is to show that the homotopy type of a simply connected, 4-dimensional polyhedron is completely determined by its inter-related co-homology rings mod m ($m = 0, 2, \ldots$), together with one additional element of structure. The latter is defined in terms of a product, which was introduced by L. Pontrjagin [1] and which has recently been studied in greater generality by N. E. Steenrod [2]. What we need is Pontrjagin's method of associating a $2n$-dimensional co-homology class, px, mod $4r$, with every n-dimensional co-homology class x, mod $2r$. We shall call px the *Pontrjagin square* of x. If f is a co-cycle, mod $2r$, in the co-homology class x, then px is represented by the co-chain which, in Steenrod's notation, is written as

$$f \cup f + f \cup_1 \delta f.$$

The co-homology rings mod m ($m = 0, 2, \ldots$) of a polyhedron P may be combined into a sigle ring by a method due to M. Bockstein [3]. If f is a co-cycle mod r and g a co-cycle mod s then the product in this ring of the co-homology classes of f and g, mod r and mod s, is the co-homology class of $f \cup g$, mod (r, s). We give this ring additional structure by introducing an operator Δ and also the Pontrjagin squares. If f is a co-cycle mod m, if x is its co-homology class and if $\delta f = mg$, then Δx is the (absolute) co-homology class of g. We also have an operator $\mu_{\nu,s}$ for every $\nu > 0$, $s \geqq 0$, which plays the same part as the operators used by Bockstein. If f is a co-cycle mod s then $\left(\frac{r}{a}\right) f$ is a co-cycle mod r where $a = (r, s)$, and $\mu_{\nu,s} x$ is the co-homology class, mod r, of $\left(\frac{r}{a}\right) f$, x being the co-homology class, mod s, of f. We prove that :

1° Any such ring, which satisfies the general algebraic conditions appropriate to a finite, simply connected polyhedron of at most four dimensions, can be realized geometrically. That is to say it is possible to construct a polyhedron of this nature, whose co-homology ring is " properly " isomorphic to the given ring.

2° Any two such polyhedra are of the same homotopy type if, and only if, their co-homology rings are properly isomorphic.

The second of these theorems is split into two. We define a " proper " homomorphism of one such ring into another and show that any proper homomorphism of the co-homology ring of P into the co-homology ring of Q can be " realized geometrically ", P and Q being finite, simply connected polyhedra of at most four dimensions. This means that there is a map $Q \to P$ which determines a given proper homomorphism of the ring of P into the ring of Q. Secondly, if P and Q are finite, simply connected polyhedra of any dimensionality and if there is a map $f: P \to Q$, which induces an isomorphism of each co-homology group of Q, with integral co-efficients, onto the corresponding group of P, then P and Q are of the same homotopy type.

2. We shall not prove these theorems here, even in outline, but will indicate what seems to be the key to the relation between the homotopy and co-homology theories of polyhedra of this type. Any such polyhedron is of the same homotopy type as a " reduced complex ", K, which consists of :

1° A single 0-cell e^0, and a cluster of 2-spheres attached to e^0, no two meeting each other anywhere else. These form the 2-dimensional skeleton, K^2.

2° A set of 3-cells, each of which is bounded by one of the 2-spheres, taken τ_i times, where $\tau_1, \ldots, \tau_t$ are the co-efficients of 2-dimensional torsion, together with a set of 3-spheres attached to e^0.

3° A set of 4-cells, each of which is is bounded by a singular 3-sphere in the union of K^2 and the 3-spheres in the 3-dimensional skeleton, K^3.

We study $\pi_3(K^3)$. Let $S_1^2, \ldots, S_n^2$ be the 2-spheres in K^2 and let a_i be a generating element of $\pi_2(S_i^2)$. Then $\pi_3(K^2)$ is a free

Abelian group, with $\frac{n(n+1)}{2}$ free generators $e_{ij} = e_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, where

(1) e_{ii} generates $\pi_3(S_i^2)$,

(2) if $i \neq j$, then $e_{ij} = a_i a_j$,

(*Cf.* [4], in which ab was written as $a.b$).

Any element $\gamma \varepsilon \pi_3(K^2)$ is thus of the form

$$\gamma = \sum_{i \leq j} \gamma_{ij} e_{ij},$$

and γ_{ij} is the generalized Hopf invariant ([1] and [4]) of γ. It is easily verified, that $a_i a_i = 2 e_{ii}$.

We now add a 3-cell e_i^3 whose boundary covers S_i^2 with degree τ_i $(i = 1, \ldots, t \leq n)$. We do this by taking a 3-simplex σ_i^3 together with a map $f_i: \dot{\sigma}_i^3 \to S_i^2$ of degree τ_i and identifying each point $p \varepsilon \dot{\sigma}_i^3$ with $f_i p \varepsilon S_i^2$. Let $g: S^3 \to \dot{\sigma}^3$ be a map with Hopf invariant ± 1. Then the map $f_i g_i S^3 \to S_i^2$ has Hopf invariant $\pm \tau_i^2$ and therefore represents the element $\pm \tau_i^2 e_{ii} \varepsilon \pi_3(K^2)$. Also $f_i g_i: \dot{\sigma}_i^3 \to S_i^2$ represents the element $\pm \tau_i a_i \varepsilon \pi_2(S_i^2)$. Therefore it follows from a theorem in [4] that $\pi_3(K^2 + e_i^3)$ is generated by the elements e_{ij} subject to the relations

$$\tau_i^2 e_{ii} = 0, \qquad \tau_i a_i a_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Since $a_i a_i = 2 e_{ii}$ these are equivalent to

$$d_{ii} e_{ii} = 0, \qquad \tau_i e_{ij} = 0 \qquad (j \neq i),$$

where $d_{ii} = (\tau_i^2, 2\tau_i) = 2\tau_i$ or τ_i according as τ_i is even or odd.

Now add all the 3-cells $e_1^3, \ldots, e_p^3$, forming a complex K_0^3. Then, reiterating the previous argument, it follows that $\pi_3(K_0^3)$ is generated by e_{ij}, subject to the relations (*cf.* [1]).

$$d_{ij} e_{ij} = 0,$$

where

$$d_{ij} = (\tau_i, \tau_j) \quad \text{if } i \neq j, \qquad d_{ii} = (\tau_i^2, 2\tau_i).$$

We now add the cluster of 3-spheres, $S_1^3, \ldots, S_q^3$, thus completing the 3-dimensional skeleton K^3. Then ([5], p. 285) $\pi_3(K^3)$, is the direct sum

$$\pi_3(K^3) = \pi_3(S_1^3) + \ldots + \pi_3(S_q^3) + \pi_3(K_0^3).$$

Let b_λ be a generator of $\pi_3(S^3_\lambda)$ and let $e^4_1, \ldots, e^4_r$ be the 4-cells, which we attach to K^3 in the same way that e^3_i was attached to K^2. The element of $\pi_3(K^3)$, which is represented by the boundary of e^4_λ, is of the form

$$(2.1) \qquad \gamma_\lambda = b^*_\lambda + \sum_{i \leq j} \gamma_{\lambda ij} e_{ij},$$

where $\gamma_{\lambda ij}$ is to be calculated mod d_{ij} and b^*_λ is an element in the sub-group of $\pi_3(K^3)$ which is generated by $b_1, \ldots, b_q$.

Let $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ be a basis for the 2-dimensional co-cycles in K^2, such that $\Phi_i S^2_j = \delta_{ij}$. Then Φ_i is a co-cycle, mod τ_i in K^4 $(\tau_{p+1} = \ldots = \tau_n = 0)$ and it turns ou that

$$\Phi_i \cup \Phi_j = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \gamma_{\lambda ij} \psi_\lambda,$$

where $\psi_1, \ldots, \psi_\nu$ are 4-dimensional co-cycles such that $\psi_\lambda e^4_\mu = \delta_{\lambda\mu}$. Also, if τ_i is even,

$$\Phi_i \cup \Phi_i + \Phi_i \cup_1 \delta \Phi_i = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \gamma_{\lambda ii} \psi_\lambda,$$

where $\gamma_{\lambda ij}$ mean the same as in (2.1).

REFERENCES

[1] L. Pontrjagin, *C. R. Acad. Sc. (Doklady)*, 34, 1942, p. 35-37.
[2] N. E. Steenrod, *Annals of Math.*, 48, 1947.
[3] M. Bockstein, *C. R. Acad. Sc. (Doklady)*, 37, 1942, p. 243-245.
[4] J. H. C. Whitehead, *Annals of Math.*, 42, 1941, p. 409-428.
[5] J. H. C. Whitehead, *Proc. L. M. S.*, 45, 1939, p. 243-327.

LA TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ET LA THÉORIE DE L'INTÉGRATION;

Par Hassler WHITNEY.
(Harvard University, Cambridge, Mass.)

1. Introduction. — Dans cette conférence, je me propose d'exposer des méthodes pour étudier la théorie de l'intégration, méthodes qui s'appliquent surtout à la géométrie différentielle, et aux théories où entre le théorème de Stokes. Le but le plus important est d'utiliser des éléments de caractère géométrique plutôt qu'analytique; en particulier, nous ferons très peu usage des systèmes de coordonnées (1).

Remarquons que la théorie de Cartan-De Rham (2) peut être présentée comme suit. Une forme X^r de degré r (élément d'intégration r-uple) dans une variété différentiable M sera dénommée *r-cochaîne différentiable;* l'intégrale $\int_{A^r} X^r$ de X^r sur un champ d'intégration, ou r-chaîne, A^r est bien définie.

Désignons respectivement par δX^r et ∂A^{r+1} la forme dérivée de X^r, et la frontière de A^{r+1}; on a alors la formule de Stokes,

$$\int_{\partial A^{r+1}} X^r = \int_{A^{r+1}} \delta X^r.$$

L'intégrale $\int_A X$ correspond au produit algébrique XA; en utilisant cette notation, la formule peut être écrite

$$X^r \partial A^{r+1} = \delta X^r A^{r+1},$$

(1) Les résultats principaux de cette théorie ont été présentés dans une Note : *Algebraic topology and integration theory* [Proceedings of the National Academy of Sciences (U. S. A.), vol. 33, 1947, p. 1-6].

(2) *Voir* G. de Rham, *Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions* (*Journal de Math., pures et appl.*, 1931, p. 115-200); *Relations entre la Topologie et la Théorie des intégrales multiples* (*L'Enseignement Mathématique*, 35e année, 1936, p. 213-228).

formule bien connue en topologie algébrique. Une cochaîne X^r est un *cocycle* si $\delta X^r = 0$; X^r et Y^r sont *cohomologues* si $Y^r - X^r = \delta Z^{r-1}$; les cocycles cohomologues forment les éléments du *groupe de cohomologie de dimension r* de la variété M. Le théorème fondamental de M. de Rham nous apprend que ce *groupe est isomorphe au groupe de cohomologie algébrique de* M *formé avec une subdivision polyédrale de* M; de plus, *les deux anneaux de cohomologie sont isomorphes*.

La théorie des formes de Cartan-De Rham donne ainsi un aspect géométrique à la topologie algébrique sur une variété différentiable M. Or, la théorie de l'intégration ne dépend pas du fait que les formes sont différentiables. Nous allons remplacer cette hypothèse par des conditions de Lipschitz; il en résultera une théorie de l'intégration qui équivaut à la théorie de la cohomologie algébrique, et qui est valable dans des espaces bien plus généraux, dans des *espaces de Lipschitz*, qui contiennent en particulier les polyèdres (*voir* ci-dessous). Tous les espaces considérés seront métriques; nous les supposerons compacts, quoique ce ne soit pas indispensable.

2. Représentations de Lipschitz. — Une représentation f d'un espace R dans un autre R' sera dite *de Lipschitz* s'il existe un nombre N tel que

$$\rho[f(p), f(q)] \leqq N\rho(p, q) \qquad (p, q \in R).$$

Nous désignerons par *extension* $\mathcal{E}(f, R) = \mathcal{E}(f)$ de f la borne inférieure des nombres N.

Si f est une représentation d'un sous-ensemble de l'espace euclidien E^n dans R, nous définirons l'*extension réduite* $\mathcal{E}_*(f)$ comme suit. Soit Φ une représentation affine de E^n en lui-même, avec $\mu_n[\Phi(Q)] = \mu_n(Q)$; $\mathcal{E}_*(f)$ est alors la borne inférieure de $\mathcal{E}(f\Phi)$. [$\mu_n(Q)$ = mesure de Q.]

Un espace (métrique compact) R sera dit *espace de Lipschitz* s'il existe une homéomorphie f de R dans un espace euclidien E, telle que f et f^{-1} soient des représentations de Lipschitz, et telle qu'il existe une rétraction Φ de Lipschitz d'un voisinage $U \subset E$ de $R_1 = f(R)$ sur R_1; c'est-à-dire, Φ est une représentation de Lipschitz de U dans R_1, et $\Phi(p) = p$, $p \in R_1$. Pour ceci, il faut et

il suffit que R_1 soit un espace *localement connexe de Lipschitz* dans toutes les dimensions.

3. Chaînes de Lipschitz. — Nous désignerons par $\mu_r(Q)$ la mesure r-dimensionnelle de Q, définie par exemple si Q est un ensemble mesurable dans E^r, ou si Q est un polyèdre métrique r-dimensionnel.

Nous désignerons par *simplexe de Lipschitz* dans R un couple (τ, f), τ étant un simplexe euclidien, et f une représentation de Lipschitz de τ dans R; s'il existe une représentation affine Φ de τ' sur τ telle que $f'(p') = f[\Phi(p')]$ $(p' \in \tau')$, nous poserons $(\tau, f) = (\tau', f')$. Nous écrirons aussi $(\tau, f) = f\tau$. Au moyen de ces simplexes de Lipschitz on peut construire des *simplexes singuliers de Lipschitz* par la méthode classique (*voir* par exemple Seifert-Threlfall, *Topologie*).

Nous appellerons *masse* $|f\tau^r|$ de τ^r la borne inférieure

$$|f\tau^r| = \inf \sum_i \mathcal{E}_*^r(f, \tau_i^r)\mu_r(\tau_i^r),$$

où $\mathfrak{S}\tau^r = \Sigma\tau_i^r$ est une subdivision arbitraire de τ^r en simplexes euclidiens τ_i^r. On définit de même la masse $|A|$ d'une chaîne $A = \Sigma a_i f\tau_i^r$ de Lipschitz (les a_i étant des nombres réels), et au moyen des identifications définissant les chaînes singulières, la masse $|A|_*$ d'une chaîne singulière de Lipschitz.

Si l'on utilisait l'égalité $\mathfrak{S}\tau^r = \Sigma Q_i$, les Q_i étant des ensembles mesurables de τ^r, on trouverait une définition de $|f\tau|$ de type de Lebesgue; mais l'étude des cochaînes de Lipschitz présenterait alors des difficultés.

4. Cochaînes de Lipschitz. — Nous appellerons *r-cochaîne de Lipschitz* dans l'espace R une fonction linéaire $X^r(A^r)$ (nous écrirons aussi XA) des r-chaînes A^r de Lipschitz, telle qu'il existe des nombres N, N' satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(a) \qquad |X^r A^r| \leqq N|A^r|,$$
$$(b) \qquad |X^r \partial A^{r+1}| \leqq N'|A^{r+1}|.$$

Les valeurs de XA peuvent être des nombres réels, ou plus généralement, des éléments d'un espace de Banach. Nous désignerons par δX la cochaîne de Lipschitz définie par la formule du paragraphe 1. Nous désignerons respectivement par $|X|$ et $|\delta X|$ les bornes inférieures des nombres N et N'.

Si f est une représentation de Lipschitz de l'espace R dans l'espace R', à chaque cochaîne de Lipschitz X' dans R' correspond une cochaîne de Lipschitz $f^* X'$ dans R, définie par la formule

$$f^* X' A = X' f A.$$

Nous pouvons démontrer les formules suivantes :

$$\delta f^* X' = f^* \delta X', \qquad |f^* X'| \leq \mathcal{E}^r(f)\,|X'|.$$

Soit K un complexe, $\mathfrak{S}K$ une subdivision de K, et soient A_0, $\mathfrak{S}A_0$ respectivement une chaîne de K et la subdivision correspondante de A_0. Soit f une représentation de Lipschitz de K dans R. Construisons le produit cartésien $I \times K$ de l'intervalle-unité I par K, et posons $F(t, p) = f_t(p)$. Considérons aussi une subdivision $\mathfrak{S}(I \times K)$ telle que

$$\mathfrak{S}(O \times K) = K, \qquad \mathfrak{S}(I \times K) = \mathfrak{S}K.$$

Posons $A = f A_0$, $\mathfrak{S}A = f \mathfrak{S}A_0$. On a alors la formule

$$\partial F \mathfrak{S}(I \times A_0) = \mathfrak{S}A - A - F\mathfrak{S}(I \times \partial A_0).$$

D'où

$$|X \mathfrak{S}A - XA| \leq |\delta X|\,|F\mathfrak{S}(I \times A_0)| + |X|\,|F\mathfrak{S}(I \times \partial A_0)|.$$

D'après la définition de F, on a $|\tau| = 0$ pour chaque simplexe entrant dans $\mathfrak{S}(I \times A_0)$ ou $\mathfrak{S}(I \times \partial A_0)$. Par suite $X\mathfrak{S}A = XA$. Il en résulte facilement qu'on peut définir XA pour une chaîne polyédrale A par la formule $XA = X\mathfrak{S}A$, puisque $X\mathfrak{S}A$ ne dépend pas de la subdivision choisie.

Si X^n est une cochaîne de Lipschitz dans l'espace euclidien E^n, on peut définir $X^n Q$ pour les ensembles ouverts et bornés Q, donc pour les ensembles mesurables. Il existe par suite une fonction bornée mesurable $D_X(p)$ telle que

$$X^n Q = \int_Q D_X(p)\,dp, \qquad |X^n| = \sup |D_X(p)|.$$

5. Cochaînes squelettes de Lipschitz. — Un *r-simplexe squelette* $\sigma^r = p_0 \dots p_r$ dans l'espace métrique R est un

ensemble de $r+1$ points $p_0, \dots, p_r$ dans R. Choisissons r arêtes $p_{\lambda_1}p_{\mu_1}, \dots, p_{\lambda_r}p_{\mu_r}$ de σ^r, de sorte que chaque paire de sommets de σ^r soient réunis par une suite de ces arêtes. Nous définissons alors

$$\mathrm{Pot}(\sigma^r) = \frac{1}{r!} \min \rho(p_{\lambda_1}, p_{\mu_1}) \dots \rho(p_{\lambda_r}, p_{\mu_r}).$$

Les *chaînes-squelettes* de R sont les formes linéaires $\Sigma a_i \sigma_i^r$. Une *cochaîne-squelette de Lipschitz* est une fonction linéaire $x \circ A$ des chaînes squelettes de Lipschitz telle qu'il existe des nombres N, N' satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) $\quad |x \circ \sigma^r| \leq N\,\mathrm{Pot}(\sigma^n),$

(b') $\quad |x \circ \partial\sigma^{r+1}| \leq N'\,\mathrm{Pot}(\sigma^{r+1}).$

On définit $|x|$, $|\delta x|$ comme précédemment.

En utilisant une *suite standard* $\mathfrak{S}_1 K$, $\mathfrak{S}_2 K$, ... de subdivisions de K, c'est-à-dire une suite telle que [3]

$$\frac{\mu_r(\tau^r)}{[\mathrm{diam}(\tau^r)]^r} \geq \alpha > 0,$$

pour tous les simplexes τ^r de chaque $\mathfrak{S}_i K$, on peut définir

$$\bar{x} A^r = \lim_{i \to \infty} x \circ \mathfrak{S}_i A^r.$$

Nous pouvons démontrer que *cette limite existe, indépendamment du choix des subdivisions;* de plus, *$\bar{x}$ est une cochaîne de Lipschitz, telle que*

$$|\bar{x}| \leq |x|, \qquad |\delta \bar{x}| \leq |\delta x|.$$

Nous pouvons remplacer A^r dans cette formule par une *chaîne de Lipschitz-Vietoris*. Inversement, *pour chaque* X *dans un espace de Lipschitz il existe une x telle que $\bar{x} = X$.*

Nous dirons que x, y sont *équivalentes* si $\bar{x} = \bar{y}$. Pour ceci il suffit qu'il existe pour chaque $\varepsilon > 0$, un nombre $\eta > 0$ tel que

$$|y \circ \sigma - x \circ \sigma| \leq \varepsilon\,\mathrm{Pot}(\sigma) \qquad \text{si} \quad \mathrm{diam}(\sigma) < \eta.$$

(3) *Voir* H. Freudenthal, *Annals of Math.*, vol. 43, 1942, p. 580-582.

6. **Cochaînes tensorielles de Lipschitz.** — Pour simplifier les idées, nous étudierons seulement l'espace euclidien E^n. Une *r-cochaîne tensorielle de Lipschitz* est une fonction $T(p; v_1, \ldots, v_r)$ du point p et des vecteurs $v_1, \ldots, v_r$, qui est une fonction linéaire et alternée des vecteurs, telle qu'il existe des nombres N, N' satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(a'') \qquad |T(p; v_1, \ldots, v_r)| \leqq N|v_1|\ldots|v_r|,$$
$$(b'') \qquad |T(p'; v_1, \ldots) - T(p; v_1, \ldots)| \leqq N'|p'-p||v_1|\ldots|v_r|.$$

Nous faisons correspondre à T une cochaîne squelette de Lipschitz x comme suit. Soit $\sigma^r = p_0 \ldots p_r$ un simplexe euclidien dans E^n. Soient $v_1 = p_{\mu_1} - p_{\lambda_1}, \ldots, v_r = p_{\mu_r} - p_{\lambda_r}$ des vecteurs sur des arêtes de σ^r tels que $(v_1, \ldots, v_r)$ définissent l'orientation positive de σ^r. Soit p_σ le centre de gravité des sommets de σ^r. Nous posons alors

$$x \circ \sigma^r = \frac{1}{r!} T(p_\sigma; v_1, \ldots, v_r).$$

Si T est différentiable, on peut définir la dérivée alternée (différentielle extérieure de Grassman) δT; la cochaîne squelette correspondante est équivalente à δx.

On peut définir

$$\int_Q T = \int_Q \bar{x} = \bar{x}\, Q,$$

ce qui donne la théorie de l'intégration ordinaire.

7. **Produits de cochaînes.** — On définit pour commencer le produit $X^0 Y^s$ comme suit. Si $f\tau^s$ est un simplexe de Lipschitz dans R, alors $f^* Y^s$ est une cochaîne de Lipschitz dans τ^s, et $D_{f^*Y^s}$ est défini comme au paragraphe 4; nous posons alors

$$X^0 Y^s f\tau^s = \int_{\tau^s} X^0 f(p)\, D_{f^*Y^s}(p)\, dp.$$

Ce produit est une cochaîne de Lipschitz.

En général, il est possible de définir d'une manière unique le produit $X^r Y^s$ dans un espace de Lipschitz, de manière que les conditions suivantes soient satisfaites :

α. $X^r Y^s$ est une $(r+s)$-cochaîne de Lipschitz, linéaire dans X^r et Y^s.

β. Il existe un nombre N_{rs} tel que

$$|X^r Y^s| \leqq N_{rs} |X^r| |Y^s|.$$

γ. On a la formule

$$\delta(X^r Y^s) = \delta X^r Y^s + (-1)^r X^r \delta Y^s.$$

On peut alors démontrer que

$$(XY)Z = X(YZ), \qquad Y^s X^r = (-1)^{rs} X^r Y^s,$$
$$f^*(XY) = f^* X f^* Y.$$

8. **Le théorème de G. de Rham.** — Dans un complexe K, nous pouvons faire correspondre à chaque cochaîne de Lipschitz X^r une cochaîne algébrique ΦX, par la formule

$$\Phi X(\sigma^r) = X \sigma^r.$$

On peut démontrer que la transformation Φ établit un isomorphisme entre les anneaux de cohomologie algébrique et les anneaux de cohomologie de Lipschitz.

De même la correspondance Φ définie par la formule

$$\Phi T(\sigma^r) = \int_{\sigma^r} T,$$

établit un isomorphisme entre les anneaux de cohomologie algébrique et les anneaux de cohomologie tensorielle.

TABLE DES MATIÈRES