Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten

von Alfred Aeppli, Zürich

Einleitung

a) Der Begriff der Modifikation bezieht sich auf eine Situation, die in der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten häufig vorkommt, aber auch in geometrischen Zusammenhängen wohlbekannt ist: man nimmt aus einer Mannigfaltigkeit W eine Teilmenge A heraus und «ersetzt» sie durch eine Menge S, so daß eine neue Mannigfaltigkeit V entsteht, wobei je nach der vorliegenden Fragestellung bestimmte Strukturen erhalten bleiben sollen (zum Beispiel: V und W sollen differenzierbare oder komplexe Mannigfaltigkeiten sein usw.); eine andere zusätzliche Bedingung besteht darin, daß auch von den Teilmengen A und S Mannigfaltigkeitscharakter verlangt wird – diese einschränkende Bedingung werden wir im folgenden voraussetzen, abgesehen von gelegentlichen Zusätzen, in welchen auf allgemeinere Fälle hingewiesen wird. In der vorliegenden Arbeit sollen solche Modifikationen topologisch, insbesondere im Rahmen von Homologiebetrachtungen untersucht werden. Es zeigt sich nämlich, daß sich aus relativ schwachen Voraussetzungen ziemlich starke Einschränkungen für die auftretenden Räume ergeben.

Einfache Beispiele von Modifikationen: 1. Es werde aus der n-Sphäre Σ^n ein Punkt p herausgenommen und an seiner Stelle der $(n - 1)$-dimensionale reell projektive Raum P^{n-1} so eingesetzt, daß P^n entsteht; oder, wenn $n = 2m$ ist, der komplex projektive Raum $P^{(m-1)}$ von $m - 1$ komplexen Dimensionen, so daß $P^{(m)}$ entsteht. 2. Eine komplexe Mannigfaltigkeit V werde durch eine komplex analytische Abbildung φ «fast überall schlicht» auf eine andere W derselben Dimension abgebildet. Dabei heißt φ fast überall schlicht, wenn der Abbildungsgrad von φ gleich 1 ist. φ muß dann überall lokal topologisch sein, bis auf eine Singularitätenmenge S von niedrigerer Dimension, welche durch φ auf eine Menge A (A heißt Ausnahmemenge, $\dim(A) < \dim(S)$) abgebildet wird. φ induziert einen Homöomorphismus von $V - S$ auf $W - A$. – In derartigen Fällen, wo der Homöomorphismus von $V - S$ auf $W - A$ zu einer stetigen Abbildung von V auf W ausgedehnt werden kann, sprechen wir von «Modifikation mit Abbildung».

b) Im ersten Kapitel werden die Definitionen verschiedener Arten von Modifikation gegeben (topologische, differenzierbare, reell und komplex analytische Modifikation, spezielle und allgemeine Modifikation); dann wird auf die Erzeugungsweisen hingewiesen, insbesondere auf die Modifikation mit Abbildung, und schließlich werden die Zusammenhänge mit den Sphärenfaserungen und mit den Möglichkeiten des Abschlusses berandeter Mannigfaltigkeiten behandelt. Es zeigt sich, daß jede differenzierbare Modifikation zwei Sphärenfaserungen des Umgebungsrandes N von A in W (oder von S in V) induziert, und daß umgekehrt jedes Paar zweier Sphärenfaserungen des Umgebungsrandes eine Modifikation liefert. Ist weiter M eine «regulär» berandete Mannigfaltigkeit mit der Randmannigfaltigkeit N, und kann N in Sphären gefasert werden, so läßt sich M zu einer unberandeten Mannigfaltigkeit W abschließen; liegt ein differenzierbarer Abschluß von M zu W vor, so kann N in Sphären gefasert werden. Die §§ 5 und 6 handeln von den naheliegendsten Anwendungen auf Sphärenfaserungen: jedes differenzierbare Sphärenbündel ist äquivalent einem Normalenbündel; in § 6 betrachten wir die Antipodenabbildung in einem differenzierbaren Sphärenbündel, speziell bei Faserungen durch geraddimensionale Sphären, sowie Sphärenbündel mit unitärer und mit symplektischer Strukturgruppe. In § 7 wird die «Verfeinerung der Sphärenfaserung» beschrieben, welche zu Modifikationen mit Abbildung führt; umgekehrt kann jede differenzierbare Modifikation mit Abbildung durch Verfeinerung der Sphärenfaserung gewonnen werden. Es werden Beispiele von Modifikationen mit Abbildung gegeben ($\sigma^{n,q}$-Prozeß).

c) Die Kapitel II, III und IV haben die Cohomologietheorie der Modifikation zum Gegenstand. Dabei können zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden: 1. es werden die Zusammenhänge mit den Sphärenfaserungen benutzt, wie sie im ersten Kapitel dargestellt wurden, und dann die Cohomologietheorie der Sphärenfaserungen angewandt (Gysinsche exakte Sequenz); 2. wir gehen direkt von der Modifikation aus, schreiben die exakten Sequenzen der Paare (V, S) und (W, A) an, und benutzen den Homöomorphismus zwischen $V - S$ und $W - A$, der uns den Isomorphismus $H^k(W, A) \cong H^k(V, S)$ liefert. Es wird meistens von der zweiten Methode Gebrauch gemacht, welche den Vorteil hat, auch in solchen Fällen angewandt werden zu können, wo zur Modifikation keine Sphärenfaserungen gehören. Gewisse Resultate der Cohomologietheorie der Sphärenfaserungen werden dabei mitgeliefert. Neben den exakten Sequenzen kommt der Poincarésche Dualitätssatz in einem «Pendelverfahren» wiederholt zur Anwendung (§§ 10, 11, 15, 18). – In den §§ 9 bis 11 wird die «lokale» Modifikation (Ersetzen eines Punktes) besprochen. Das Hauptergebnis lautet: bei einer (differenzierbaren) lokalen Modifikation hat die eingesetzte Mannigfaltigkeit S die additive und die multiplikative Cohomologiestruktur des verallgemeinerten projektiven Raumes. In § 12 werden die beiden oben angegebenen Methoden nacheinander vorgeführt, im Falle der Modifikation durch Ersetzen einer Mannigfaltigkeit. – Das dritte Kapitel enthält die Cohomologietheorie der Modifikation mit Abbildung (§§ 13 und 15) samt Anwendungen und Zusätzen (§§ 14 und 16). Die Resultate lauten im wesentlichen dahin, daß unter geeigneten Dimensionsvoraussetzungen die eingesetzte Mannigfaltigkeit S additiv dieselbe Cohomologiestruktur hat wie das topologische Produkt von A mit einem verallgemeinerten projektiven Raum. – Im vierten Kapitel kommt die komplexe Modifikation mit Abbildung zur Sprache, wobei das Hauptgewicht auf dem Spezialfall Kählerscher Mannigfaltigkeiten liegt. Die meisten Betrachtungen über die Kählersche Modifikation beruhen darauf, daß die wichtigsten Cohomologieresultate von Kapitel III (und II) sich im Sinne der Typeneinteilung der Differentialformen auf einer Kählerschen Mannigfaltigkeit verfeinern lassen. Dabei ergeben sich Sätze, die in der Theorie der birationalen Transformationen in der algebraischen Geometrie bekannt sind (Invarianz des Geschlechtes), und die auf funktionentheoretischem Wege verschärft werden können.

d) Es sei in diesem Zusammenhang auf einen Satz hingewiesen, gemäß welchem jede nicht triviale komplexe Modifikation mit Abbildung äquivalent einem $\sigma^{n,q}$-Prozeß ist (Einzigkeitssatz für komplexe Modifikation mit Abbildung). Er liefert für komplexe Modifikationen mit Abbildung einen neuen Zugang zu den grundlegenden Beziehungen (63′) bzw. ($63'_{s,t}$) im Kählerschen Fall, unter Verwendung der Spektralfolge für projektive Bündel. Ferner lassen sich die verfeinerten Cohomologiebeziehungen für komplexe Modifikationen mit Abbildung auch ohne die Voraussetzung der Kählerschen Metrik formulieren, wenn man die Dolbeaultschen Cohomologiegruppen heranzieht, dies wiederum auf Grund des zitierten Einzigkeitssatzes. In der vorliegenden Arbeit wird der Einzigkeitssatz mit den genannten Anwendungen nur angedeutet (§ 19c); es ist darüber eine ausführliche Publikation in Vorbereitung.

e) Der Begriff der Modifikation kommt in der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten unter funktionentheoretischen Gesichtspunkten mehrfach vor. Es ist an die Arbeiten von Hopf [23], [24], Behnke und Stein [4], Kreyszig [26], Stoll [32], u.a. zu erinnern. In der vorliegenden Arbeit werden dagegen die *topologischen* Untersuchungsmethoden in den Vordergrund gerückt. Ein erster Ansatz hiezu, im Hinblick auf den Abschluß berandeter Mannigfaltigkeiten, befindet sich bei Hirsch [19]. – Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. B. Eckmann, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen. In vielen Diskussionen hat er mich auf die verschiedenen Fragestellungen geführt und manche wertvolle Hinweise gegeben. Auch Herrn Prof. H. Hopf möchte ich vielmals danken für die zahlreichen Anregungen und Ratschläge. – Schließlich danke ich für den Beitrag aus dem Zentenarfonds der Eidgenössischen Technischen Hochschule, der einen Teil der Druckkosten dieser Arbeit deckte.

Inhaltsübersicht

1. Kapitel. Modifikation und Faserung

Wir betrachten im folgenden vor allem die differenzierbare Modifikation. Als Anwendungen ergeben sich dabei bekannte Resultate. Daneben stellen wir Beispiele von Modifikationen bereit, die in den späteren Untersuchungen wiederholt herangezogen werden.

§ 1. Definition und Erzeugung einer Modifikation

a) Wenn im folgenden von einem Paar von Mannigfaltigkeiten (V^n, S^m) die Rede ist, so ist damit folgendes gemeint: V^n ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit (die Dimensionsindizes werden oft weggelassen [1])) und S^m eine abgeschlossene Teilmenge von V^n, welche eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Das Komplement von S in V wird wie üblich mit $V - S$ bezeichnet. Ein Paar von Mannigfaltigkeiten (V, S) heißt differenzierbar, wenn V differenzierbar ist und die Einlagerung $S \subset V$ ebenfalls; dabei soll «differenzierbar» immer unendlich oft differenzierbar bedeuten. Analog ist ein reell oder ein komplex analytisches Paar erklärt.

Definition. Unter einer Modifikation

$$\Phi: (V^n, S^m) \to (W^n, A^q) \tag{1}$$

verstehen wir ein System, bestehend aus zwei Paaren von Mannigfaltigkeiten (V, S) und (W, A), sowie einem Homöomorphismus

$$\varphi': V^n - S^m \to W^n - A^q \tag{2}$$

des Komplementes $V - S$ auf $W - A$, derart, daß für jede in $V - S$ gegen S strebende Punktfolge p_k die Folge $\varphi'(p_k)$ in W gegen A konvergiert. Es wird $n - 1 \geq \text{Max}\,(m, q)$ vorausgesetzt. Wir nennen S Singularitätenmannigfaltigkeit, A Ausnahmemannigfaltigkeit.

Sind die Paare (V, S) und (W, A) sowie der Homöomorphismus φ' differenzierbar, so sprechen wir von einer differenzierbaren Modifikation. Entsprechend ist die reell und die komplex analytische Modifikation zu verstehen [2]).

Kompaktheitsvoraussetzung. In der Modifikation (1) sollen V und W (und somit auch S und A) stets als kompakt vorausgesetzt werden. Gewisse Betrachtungen dieser Arbeit wären auch ohne diese Voraussetzung gültig, insbesondere

---

[1]) M und M^n bedeuten dieselbe Mannigfaltigkeit. Ebenso wird eine Mannigfaltigkeit gleichzeitig mit M und $M^{(n)}$ bzw. mit M und $M^{[n]}$ bezeichnet, wenn es sich um eine komplexe bzw. quaternionale Mannigfaltigkeit der komplexen bzw. quaternionalen Dimension n handelt.

[2]) Vgl. die Erklärung der Modifikation in [4] und in [24].

gelten die Sätze 1, 4, 5, 7, 8, 11 sinngemäß auch im nicht kompakten Fall. – Gelegentlich treten an Stelle von V und W offene Teilmengen von V bzw. von W, z. B. bei «lokalen» Fragen die offene Euklidische Umgebung eines Punktes; diese Abweichungen von der Kompaktheitsvoraussetzung sind jedoch unwesentlich.

Zusammenhangsvoraussetzung. Wenn nichts anderes gesagt wird, sollen in der Modifikation (1) die Mannigfaltigkeiten V, W, S, A zusammenhängend sein.

Allgemeine Modifikation. Wir nennen die Situation (1) eine allgemeine Modifikation (im Gegensatz zu den soeben beschriebenen «speziellen» Modifikationen), wenn V, W topologische Räume und $S \subset V$ bzw. $A \subset W$ Teilmengen sind. S heißt Singularitätenmenge, A Ausnahmemenge. Es werden keine Dimensionsforderungen gestellt, selbst wenn für die Räume eine Dimension definiert ist. Den Räumen V, W, S, A werden jedoch meistens einschränkende Bedingungen auferlegt, z. B. daß es sich um Polyeder oder um Homologiemannigfaltigkeiten handelt (siehe Kap. II und III). – Die Erzeugungsarten in b) und in c) bestehen auch für solche allgemeinen Modifikationen.

b) **Erzeugung durch eine Abbildung.** Es sei

$$\varphi : V^n \to W^n \tag{3}$$

eine Abbildung[3]) von V auf W, welche eine Abbildung

$$\bar{\varphi} : S^m \to A^q , \tag{4}$$

von $S \subset V$ auf $A \subset W$ und einen Homöomorphismus

$$\varphi' : V^n - S^m \to W^n - A^q , \tag{2}$$

von $V - S$ auf $W - A$ induziert. Es ist klar, daß durch eine solche Abbildung eine Modifikation gegeben wird. Ist φ differenzierbar bzw. analytisch, die auftretenden Mannigfaltigkeiten und Einlagerungen ebenfalls, so wird die durch (3) erzeugte Modifikation differenzierbar bzw. analytisch. Modifikationen (1), die durch eine Abbildung (3) erzeugt werden, heißen Modifikationen mit Abbildung; φ heißt Modifikationsabbildung («relativer Homöomorphismus» in [16], p. 266).

c) **Erzeugung durch Schnittfläche einer Faserung.** Wir bezeichnen mit

$$\mathfrak{E} = \{E, F, B\} \tag{5}$$

eine lokal triviale Faserung (Bündel). Dabei bedeutet E den Raum des Bündels (Faserraum), aufgefaßt als topologischen Raum aller Punkte, die zu irgend-

[3]) Alle betrachteten Abbildungen sind stetig.

einer Faser des Bündels gehören, F die Faser, B die Basis. Zu (5) gehört die Projektionsabbildung

$$\pi: \ E \to B . \tag{6}$$

Es sei nun W die Basis B in einer Faserung (5). Dann liefert eine «Schnittfläche V in $\mathfrak{E}$ mit Singularitätenraum S über A» eine Modifikation von W. Dies soll heißen: V sei eine Teilmenge von E, derart, daß die durch die Projektion (6) induzierte Abbildung $\varphi: V \to W$ die in b) beschriebenen Eigenschaften hat, bezüglich gewisser Teilmengen $S \subset V$ und $A \subset W$. $V - S$ ist für den über $W - A$ stehenden Teil der Faserung eine Schnittfläche im üblichen Sinn. Damit befinden wir uns im Falle b).

Umgekehrt kann die in b) beschriebene Situation aufgefaßt werden als Erzeugnis einer Schnittfläche in einem Faserraum: man nimmt das Bündel

$$\mathfrak{E} = \{W^n \times V^n, V^n, W^n\}$$

und als «Schnittfläche» den Graph der Abbildung (3).

Eine differenzierbare Faserung, in welcher E, F, B, die Einlagerungen und die Projektion (6) differenzierbar sind, gibt bei Vorgabe differenzierbar eingelagerter Schnittflächen mit differenzierbar eingelagerter Singularitätenmannigfaltigkeit Anlaß zu differenzierbaren Modifikationen. Analog im analytischen Fall.

Bemerkung. Ist $A = p$ ein Punkt, so kann jede Abbildung (2) fortgesetzt werden zu einer Abbildung (3), indem $\varphi(S) = p$ gesetzt wird, und wir befinden uns im Falle b). Ist überdies S ein absoluter Umgebungsretrakt, und beschränken wir uns auf eine Umgebung $U = U(p)$ in W, so kann die hier vorliegende lokale allgemeine Modifikation (vgl. §§ 9–11) immer gegeben werden durch eine Schnittfläche V in der Faserung $\mathfrak{E} = \{U \times S, S, U\}$ mit dem Singularitätenraum S über p, d. h. bei welcher der Singularitätenraum mit der Faser über p übereinstimmt. Daß hier S als Faser in $\mathfrak{E}$ genommen werden kann, wird so eingesehen: zunächst müßte eine Faserung $\tilde{\mathfrak{E}} = \{U \times \tilde{S}, \tilde{S}, U\}$ genommen werden, in welcher $\tilde{S}$ eine offene Umgebung von S ist; da S ein absoluter Umgebungsretrakt ist, kann aus einer Schnittfläche in $\tilde{\mathfrak{E}}$ mit dem Singularitätenraum S über p durch stetige Deformation eine Schnittfläche in $\mathfrak{E}$ konstruiert werden, welche ebenfalls die gewünschte Modifikation erzeugt.

d) **Erzeugung durch Faserung des Umgebungsrandes der Ausnahmemannigfaltigkeit.** W sei eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit, und A sei differenzierbar eingelagert in W. $\tilde{A}$ sei eine offene Umgebung $U(A)$ in W, derart, daß der Umgebungsrand $N^{n-1} = \partial(W^n - \tilde{A}^n)$ eine $(n-1)$-dimensionale in W differenzierbar eingelagerte Mannigfaltigkeit ist. N kann dann gefasert werden durch $(n-q-1)$-dimensionale Sphären Σ^{n-q-1}, indem (nach Wahl einer Riemannschen Metrik in W) in jedem Punkt von A die zum Tangentialraum an A orthogonale $(n-q)$-dimensionale geodätische Vollkugel mit N zum Schnitt gebracht wird ($\tilde{A}$ sei genügend klein gewählt). Das so entstandene Bündel heißt das Normalenbündel von A in W. Wir bezeichnen es mit

$$\mathfrak{N}(A) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-q-1}, A^q\} . \tag{7}$$

Kann nun N außer durch (7) auf eine weitere Art gefasert werden:

$$\mathfrak{N}(S) = \{N^{n-1}, F^{n-m-1}, S^m\} , \tag{8}$$

und zwar so, daß durch Identifikation jeder Faser F zu einem einzigen Punkt aus $W - \tilde{A}$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit V entsteht, so wird durch (8) eine (nicht triviale) Modifikation gegeben. Diese Erzeugungsart wird in den nächsten Paragraphen näher untersucht und bildet den Hauptgegenstand dieses Kapitels.

§ 2. Differenzierbare Modifikation und Faserung

Durch (1), (2) werde eine differenzierbare Modifikation gegeben. Da φ' in (2) eine Homöomorphie ist, wird auch

$$\tilde{\varphi} : \bar{N}^{n-1} \to N^{n-1} \tag{9}$$

eine topologische Abbildung, wenn

$$N^{n-1} = \partial(W^n - \tilde{A}^n) , \qquad \tilde{A}^n = U(A^q) ,$$
$$\bar{N}^{n-1} = \partial(V^n - \tilde{S}^n) , \qquad \tilde{S}^n = U(S^m) ,$$

und wo $\tilde{\varphi}$ die durch φ' induzierte Abbildung auf $\bar{N}$ ist. Die offenen Umgebungen $U(A)$ und $U(S)$ in W bzw. in V sollen so gewählt werden, daß N bzw. $\bar{N}$ differenzierbar gefasert werden können, wie dies in § 1 d) beschrieben wurde. Wir bekommen dann die beiden Faserungen

$$\mathfrak{N}(A) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-q-1}, A^q\} , \tag{7}$$

$$\mathfrak{N}(S) = \{\bar{N}^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, S^m\} . \tag{$\bar{7}$}$$

Da $\tilde{\varphi}$ ein Homöomorphismus ist, stellen (7) und ($\bar{7}$) zwei differenzierbare Faserungen desselben Raumes N dar. Wir sprechen diese Tatsache in dem folgenden Satz aus:

Satz 1. *Jede differenzierbare Modifikation kann durch Sphärenfaserung des Umgebungsrandes der Ausnahmemannigfaltigkeit erzeugt werden. Genauer: liegt eine differenzierbare Modifikation*

$$\Phi : (V^n, S^m) \to (W^n, A^q) \tag{1}$$

vor, so kann diese folgendermaßen erzeugt werden: der Raum $N = \partial(W - \tilde{A})$ *des Normalenbündels* $\mathfrak{N}(A)$ *wird differenzierbar gefasert, mit der Faser* Σ^{n-m-1} *und mit der Basis* S^m, *und dann wird jede Faser* Σ^{n-m-1} *als ein einziger Punkt aufgefaßt: dadurch werden* (V, S) *und* Φ *konstruiert.*

Nun fragen wir, ob jede Sphärenfaserung eines Umgebungsrandes N zu einer Modifikation führt, und ob außer Sphärenfaserungen auch andere Faserungen von N Modifikationen erzeugen (siehe § 4). Im Hinblick darauf untersuchen wir in § 3 die Möglichkeiten, eine berandete Mannigfaltigkeit durch Faserung abzuschließen.

§ 3. Abschluß durch Faserung

a) M^n sei eine *berandete* Mannigfaltigkeit mit der zusammenhängenden Randmannigfaltigkeit $N^{n-1} = \partial M^n$. Es soll nun N so gefasert werden können, daß durch Identifikation jeder einzelnen Faser zu einem Punkt aus M eine unberandete Mannigfaltigkeit V^n wird. Die Faserung der Randmannigfaltigkeit N sei gegeben durch

$$\mathfrak{N} = \{N^{n-1}, F^{n-m-1}, S^m\}\,. \tag{8}$$

Wir sagen auch: die Mannigfaltigkeit $M - N$ kann durch Hinzufügen der Mannigfaltigkeit S zur Mannigfaltigkeit V gemacht werden, oder M (bzw. $M - N$) kann durch S zur unberandeten Mannigfaltigkeit V «abgeschlossen» werden.

Gehen wir vom Rande N^{n-1} aus ein Stück weit ins Innere von M^n, und betrachten wir die Rinde $\tilde{N}^n$, welche eine abgeschlossene Umgebung von N in M ist; $\tilde{N}$ ist selbst gefasert:

$$\tilde{\mathfrak{N}}(N^{n-1}) = \{\tilde{N}^n, U^1, N^{n-1}\} \tag{10}$$

mit der eindimensionalen abgeschlossenen Euklidischen Zelle U^1 als Faser. Daß die Faserung (10) existiert, soll im Begriff «berandete Mannigfaltigkeit» enthalten sein, der Rand soll also genügend «regulär» sein. Die Faserung (8) kann auf $\tilde{N}^n$ ausgedehnt werden:

$$\mathfrak{N}(\tilde{S}^{m+1}) = \{\tilde{N}^n, F^{n-m-1}, \tilde{S}^{m+1}\}\,, \tag{11}$$

wo $\tilde{S}^{m+1}$ entsprechend (10) gefasert ist:

$$\tilde{\mathfrak{N}}(S^m) = \{\tilde{S}^{m+1}, U^1, S^m\}\,. \tag{12}$$

U^m sei eine abgeschlossene Umgebung, das heißt eine genügend kleine abgeschlossene Euklidische m-dimensionale Zelle, in der Basis S^m der Faserung (8). Wegen der lokalen Trivialität der Faserung (12) wird das Stück des Faserraumes $\tilde{S}^{m+1}$ über U^m gegeben durch

$$U^{m+1} = U^m \times U^1,$$

und U^{m+1} ist eine abgeschlossene Umgebung in der Basis $\tilde{S}^{m+1}$ der Faserung (11). Da auch die Faserung (11) lokal trivial ist, erhalten wir in

$$\tilde{K}^n = U^m \times U^1 \times F^{n-m-1} \tag{13}$$

das Stück des Faserraumes $\tilde{N}^n$ über $U^m \times U^1$ in der Faserung (11). $\tilde{K}^n$ kann in der Form

$$\tilde{K}^n = [U^m \times (U^1 - p) \times F^{n-m-1}] \cup [U^m \times p \times F^{n-m-1}] \tag{14}$$

geschrieben werden, wo $U^m \times (U^1 - p) \times F^{n-m-1}$ in $M^n - N^{n-1}$ liegt, und $U^m \times p \times F^{n-m-1}$ sich in N^{n-1} befindet.

Soll nun durch die Faserung (8) die berandete Mannigfaltigkeit M mit dem Rand N zu einer unberandeten Mannigfaltigkeit V gemacht werden, das heißt soll $\tilde{K}^n$ nach Identifikation jeder Faser in der Faserung (8) zur abgeschlossenen Vollkugel K^n homöomorph sein, so bedeutet dies, daß in (14) der zweite Summand homöomorph U^m wird, und der erste Summand homöomorph $U^m \times (U^1 - p) \times \Sigma^{n-m-1}$:

$$U^m \times (U^1 - p) \times F^{n-m-1} \leftrightarrow U^m \times (U^1 - p) \times \Sigma^{n-m-1}. \tag{15}$$

Aus (15) folgt: F^{n-m-1} hat den Homologie- und den Homotopietypus der $(n - m - 1)$-Sphäre. Wir sagen: F ist eine Homotopiesphäre.

b) Umgekehrt sehen wir: ist in der Faserung (8) die Faser F^{n-m-1} eine Sphäre Σ^{n-m-1}, so besteht die Homöomorphie (15) und damit auch $\hat{K}^n \leftrightarrow K^n$, wo $\hat{K}^n$ aus $\tilde{K}^n$ durch Identifikation jeder einzelnen Faser F in (8) zu einem Punkt entsteht, $\tilde{K}^n$ durch (13) gegeben, K^n n-dimensionale Vollkugel. Die Faserung (8) liefert also in diesem Fall einen Prozeß zur Bildung einer Mannigfaltigkeit V aus der berandeten M.

c) Schließlich gilt wie bei (7) und $(\bar{7})$ in § 2: kann M durch S differenzierbar abgeschlossen werden, das heißt kann durch Hinzufügen der differenzierbaren Mannigfaltigkeit S^m zur differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M^n - N^{n-1}$ die differenzierbare Mannigfaltigkeit V^n hergestellt werden, so daß S in V

differenzierbar eingebettet ist, so wird N zum Raum des Normalenbündels von S in V, und somit kann N in Sphären Σ^{n-m-1} gefasert werden. Die so erhaltene Faserung ist differenzierbar. Weiter ist jede differenzierbare Faserung (8), die einen differenzierbaren Abschluß erzeugt, dem Normalenbündel von S in V äquivalent und somit ein Sphärenbündel (zum Äquivalenzbegriff s. § 5 b)).

d) Zusammengefaßt:

Satz 2. 1. *Soll die berandete Mannigfaltigkeit M^n durch Faserung der zusammenhängenden Randmannigfaltigkeit N^{n-1} zu einer unberandeten Mannigfaltigkeit V^n gemacht werden, so muß N^{n-1} durch Homotopiesphären gefasert werden.*

2. *Kann die Randmannigfaltigkeit N^{n-1} durch Sphären gefasert werden:*

$$\mathfrak{N} = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, S^m\}\,, \tag{16}$$

so läßt sich $M^n - N^{n-1}$ durch Hinzufügen der Mannigfaltigkeit S^m zu einer unberandeten Mannigfaltigkeit V^n erweitern. Mit andern Worten: jede Sphärenfaserung von N^{n-1} liefert eine Möglichkeit, M^n abzuschließen zu einer unberandeten Mannigfaltigkeit V^n.

3. *Wird M^n durch S^m differenzierbar abgeschlossen, so kann N^{n-1} differenzierbar in Sphären Σ^{n-m-1} gefasert werden, derart, daß der Abschluß durch diese Faserung erzeugt wird. Wird M^n durch eine differenzierbare Faserung von N^{n-1} differenzierbar abgeschlossen, so muß diese Faserung ein Sphärenbündel sein.*

e) Ist M sowie die Faserung (16) differenzierbar, so heißt die Folgerung in Satz 2, 2.: $M - N$ kann durch Hinzufügen von S differenzierbar abgeschlossen werden. Nehmen wir noch Satz 2, 3. hinzu, so bekommen wir:

Satz 3. *Die Möglichkeit, M^n durch S^m differenzierbar abzuschließen, ist äquivalent der Möglichkeit, N^{n-1} differenzierbar in Sphären Σ^{n-m-1} zu fasern.*

Ein Spezialfall zu Satz 3 wurde von G. Hirsch in [19] angegeben: dort ist M^n eine n-dimensionale berandete Euklidische Zelle, und die auftretenden Faserungen sind Sphärenfaserungen der $(n-1)$-dimensionalen Randsphäre.

f) Besteht der Rand N aus mehreren Komponenten $N_1, N_2, \ldots, N_t$, wo N_k eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist, $k = 1, 2, \ldots, t$, so gelten die Sätze 2 und 3 bezüglich der Möglichkeit, M an einer einzelnen Randkomponente N_k abzuschließen. Ferner braucht N in der Faserung (16) nicht zusammenhängend zu sein, wenn $m = n - 1$ ist, das heißt wenn es sich um eine Faserung durch nulldimensionale Sphären handelt (bei zusammenhängendem S): N kann aus zwei Komponenten bestehen. Die Sätze 2 und 3 lassen sich auch auf diesen Fall übertragen.

§ 4. Faserungen, die auf Modifikationen führen

Wir wenden Satz 2, 2. an auf die Situation der Modifikation. W und $A \subset W$ seien wieder kompakte Mannigfaltigkeiten; wir erhalten:

Satz 4. *Ist* (W^n, A^q) *gegeben, so liefert jede Sphärenfaserung des Raumes* $N^{n-1} = \partial(W^n - \tilde{A}^n)$ *eine Modifikation*

$$\Phi: \ (V^n, S^m) \to (W^n, A^q) . \tag{1}$$

Denn eine Faserung von $\partial(W - \tilde{A})$ in Sphären Σ^{n-m-1} mit der Basis S liefert einen Abschluß von $W - A$ durch S, so daß eine unberandete (in diesem Fall kompakte) Mannigfaltigkeit V entsteht mit der Homöomorphie $\varphi' : V - S \to W - A$. Es gehört also zu jeder Sphärenfaserung von $\partial(W - \tilde{A})$ eine Modifikation Φ. Dabei wird vorausgesetzt, daß $W - \tilde{A}$ eine regulär berandete Mannigfaltigkeit ist (Existenz der Faserung (10), siehe § 3 a)).

Bemerkung. Wird die Modifikation (1) durch die identische Abbildung induziert, so daß also $S = A$ und $V = W$, so sprechen wir von einer trivialen Modifikation. Im differenzierbaren Fall tritt sie in Satz 4 als die zum Normalenbündel $\mathfrak{N}(A)$ gehörige Modifikation auf.

Weiter bekommen wir aus Satz 2, 1 und 2, 3: soll die Modifikation (1) mittels einer Faserung (8) erzeugt werden, so muß (8) eine Faserung durch Homotopiesphären sein, im differenzierbaren Fall durch Sphären.

Beschränken wir uns auf differenzierbare Modifikationen, so folgt aus Satz 1 und Satz 3:

Satz 5. *Die differenzierbaren Modifikationen*

$$\Phi : (V^n, S^m) \to (W^n, A^q) \tag{1}$$

stehen bei fest gegebenen (W^n, A^q) *in eineindeutiger Beziehung zu den differenzierbaren Faserungen von* N^{n-1} *in Sphären* Σ^{n-m-1}:

$$\mathfrak{N} = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, S^m\} . \tag{16}$$

Jede differenzierbare Modifikation (1) *liefert eine differenzierbare Faserung* (16) *und umgekehrt.*

Satz 5 besagt also: an Stelle der differenzierbaren Modifikationen von W mittels Ersetzen von A durch S können die differenzierbaren Sphärenfaserungen von $N = \partial(W - \tilde{A})$ betrachtet werden und umgekehrt.

Bemerkung zur Differenzierbarkeit. Wir haben in § 1 a) festgelegt, daß differenzierbar immer unendlich oft differenzierbar heißen soll. Unter dieser Voraussetzung gelten die obigen Äquivalenzsätze, Satz 3 und Satz 5. Verzichtet man auf die unendliche Differenzierbarkeit, so muß berücksichtigt werden, daß bei der Konstruktion des Normalenbündels einer eingebetteten Mannigfaltigkeit differenziert wird, so daß Satz 5 folgendermaßen lauten müßte: eine längs S k-mal stetig differenzierbare Modifikation liefert eine $(k-1)$-mal stetig differenzierbare Sphärenfaserung von N und umgekehrt[4]). Analoge Formulierung bei Satz 3.

§ 5. Berandende Mannigfaltigkeiten. Sphärenfaserungen und Normalenbündel

a) **Sphärenfaserungen und berandende Mannigfaltigkeiten.** Die kompakte Mannigfaltigkeit N^{n-1} sei der Raum einer Sphärenfaserung. Wir bilden das topologische Produkt

$$\tilde{M}^n = N^{n-1} \times U^1, \tag{17}$$

wo U^1 wie in § 3 das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ bedeutet. Der Rand von $\tilde{M}$ setzt sich aus den beiden Komponenten $N \times (0)$ und $N \times (1)$ zusammen. Da N in Sphären gefasert werden kann, kann gemäß Satz 2, 2. $\tilde{M}$ an der Randkomponente $N \times (1)$ abgeschlossen werden, und wir erhalten eine berandete Mannigfaltigkeit M^n mit der Randmannigfaltigkeit $N \times (0)$, das heißt N ist berandend. Wir sehen also: kann eine Mannigfaltigkeit in Sphären gefasert werden, so ist sie berandend. Diese Bemerkung stammt von THOM [33]. Ist N durch nulldimensionale Sphären gefasert, so ist N zweifacher Überlagerungsraum von S, und es gilt: ist eine Mannigfaltigkeit nicht berandend, so kann sie nicht als zweifacher Überlagerungsraum auftreten. Da für eine berandende Mannigfaltigkeit N die Euler-Poincarésche Charakteristik $\chi(N)$ gerade ist, erhalten wir: der Raum einer Sphärenfaserung besitzt gerade Charakteristik. Dies folgt auch daraus, daß für eine Faserung (5) mit kompaktem E die Gleichung

$$\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F) \tag{18}$$

gilt. Zur Herleitung von (18) vergleiche man [6], IX–4 oder [7], X–5, ferner [18], p. 113. Es folgt zum Beispiel, daß die reell projektiven Räume P^n gerader Dimension nicht in Sphären gefasert werden können, insbesondere können sie nicht als zweifache Überlagerungsräume auftreten. Dasselbe gilt für die komplex projektiven Räume $P^{(n)}$ gerader komplexer Dimension und analog für die quaternional projektiven Räume.

Ist N differenzierbar und kann N differenzierbar in Sphären gefasert werden, so wird durch die Konstruktion bei (17) die berandete Mannigfaltigkeit M differenzierbar, und es gilt: kann eine differenzierbare Mannigfaltigkeit differenzierbar in Sphären gefasert werden, so ist sie differenzierbar berandend. Ist N orientierbar, und wird N^{n-1} durch Sphären Σ^{n-m-1} der Dimension

[4]) $k \geq 1$. Dabei sollen V, W und die Einlagerungen $A \subset W$, $S \subset V$ von der Klasse C^k (k-mal stetig differenzierbar) sein. «Null-mal stetig differenzierbar» bedeutet stetig.

$n - m - 1 \geq 1$ gefasert, so wird M orientierbar, und die Orientierungen von M und N können so gewählt werden, daß mit Hilfe des Randoperators $\partial: H_n(M, N) \to H_{n-1}(N)$ durch die Orientierung von M diejenige von N induziert wird. Wir sagen: kann eine orientierbare Mannigfaltigkeit in Sphären der Dimension ≥ 1 gefasert werden, so ist sie orientierbar berandend. Nach einem Satz von PONTRJAGIN (Theorem 3 in [30]; vgl. auch [34] und [35], Theorem IV 2. und Theorem IV 3.) sind für eine berandende differenzierbare Mannigfaltigkeit alle Stiefel-Whitneyschen charakteristischen Zahlen gleich null, und für eine orientierbar berandende differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $4r$ verschwinden alle Pontrjaginschen charakteristischen Zahlen; ferner ist für eine orientierbar berandende $4r$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Index τ der durch das Cup-Produkt auf der $2r$-dimensionalen Cohomologiegruppe definierten quadratischen Form gleich null ([35], Theorem V 11). Damit folgt: ist für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit eine Stiefel-Whitneysche charakteristische Zahl verschieden von null, so kann die Mannigfaltigkeit auf keine Weise differenzierbar in Sphären gefasert werden; ist für eine orientierbare $4r$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit eine Pontrjaginsche charakteristische Zahl oder der Index τ verschieden von null, so kann die Mannigfaltigkeit nicht in Sphären der Dimension ≥ 1 gefasert werden. Ein Beispiel einer 5-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit einer von null verschiedenen Stiefel-Whitneyschen charakteristischen Zahl liefert die Mannigfaltigkeit W^5 von WU WEN-TSUN [37], eine Mannigfaltigkeit, die über der Kreislinie Σ^1 mit der Faser $P^{(2)}$ gefasert wird: man nimmt das Produkt $U^1 \times P^{(2)}$ und identifiziert $(0) \times (z_1, z_2, z_3)$ mit $(1) \times (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$, wo z_1, z_2, z_3 homogene Koordinaten in $P^{(2)}$ sind, und der Querstrich den Übergang zum Konjugiertkomplexen bedeutet. Es ist $\chi(W^5) = 0$, so daß die Betrachtung der Euler-Poincaréschen Charakteristik keinen Aufschluß darüber gibt, ob W^5 in Sphären gefasert werden kann oder nicht. Hingegen sind die zweite und die dritte Stiefelschen Klassen verschieden von null sowie ihr Produkt, es ist also eine charakteristische Zahl verschieden von null, und daraus folgt, daß eine Sphärenfaserung von W^5 unmöglich ist. Es ergibt sich ferner, daß die oben beschriebene Faserung von W^5 mit $P^{(2)}$ als Faser nicht trivial ist.

b) **Sphärenfaserungen und Normalenbündel.** N^{n-1} sei eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit, die durch eine Faserung (16) differenzierbar in Sphären gefasert wird. Bilden wir die durch (17) gegebene berandete Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ und schließen wir sie kraft der Faserung (16) an der einen Randkomponente ab, so erhalten wir die bei (17) beschriebene berandete Mannigfaltigkeit M und darin differenzierbar eingelagert die Mannigfaltigkeit S. Bei geeigneter Wahl der Riemannschen Metrik in M kann dann die Faserung (16) aufgefaßt werden als Normalenbündel von S in M, oder: die Faserung (16) ist äquivalent dem Normalenbündel von S in M. Dabei heißen zwei differenzierbare Faserungen $\mathfrak{E}_1 = \{E_1, F_1, B_1\}$ und $\mathfrak{E}_2 = \{E_2, F_2, B_2\}$ äquivalent, wenn ein differenzierbarer fasertreuer Homöomorphismus $E_1 \to E_2$ existiert, der einen Homöomorphismus $B_1 \to B_2$ induziert. Schließlich können wir, wieder nach Satz 2, 2., M abschließen zu einer kompakten Mannigfaltigkeit V, und somit erhalten wir:

Satz 6. *Jedes differenzierbare Sphärenbündel*

$$\mathfrak{N} = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, S^m\}, \tag{16}$$

N^{n-1} kompakt, ist äquivalent dem Normalenbündel der Mannigfaltigkeit S^m, S^m eingebettet in einer kompakten Mannigfaltigkeit V^n, V^n mit einer geeigneten Riemannschen Metrik versehen.

Als Strukturgruppe für ein Normalenbündel kann die Gruppe $O(n-m)$ der orthogonalen Transformationen des $(n-m)$-dimensionalen Euklidischen Raumes genommen werden (zum Begriff der Strukturgruppe eines Faserraumes siehe Steenrod [31], insbesondere für die Reduktion der Strukturgruppe [31], pp. 56–59). Daraus folgt wegen Satz 6:

Satz 7. *Jedes differenzierbare Sphärenbündel*

$$\mathfrak{N} = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, S^m\} \tag{16}$$

ist äquivalent einem Sphärenbündel mit orthogonaler Strukturgruppe $O(n-m)$.

Wenn man sich auf differenzierbare Sphärenbündel beschränkt, genügt es also, die Sphärenbündel mit orthogonaler Strukturgruppe zu betrachten.

Bemerkung. Die Sätze 6 und 7 gelten nicht nur für unendlich oft differenzierbare Faserungen, sondern ebenso für k-mal stetig differenzierbare, $k \geq 1$. Im topologischen (nicht notwendigerweise differenzierbaren) Fall lautet Satz 6: die Mannigfaltigkeit N in (16) kann aufgefaßt werden als Umgebungsrand von S in V, so daß die berandete Mannigfaltigkeit $M = V - \widetilde{S}$ durch die Sphärenfaserung (16) abgeschlossen wird zu V.

§ 6. Die Antipodenabbildung. Sphärenbündel mit unitärer Strukturgruppe

a) **Die Antipodenabbildung.** N^{n-1} sei wie in § 5 ein durch (16) differenzierbar gefaserter Raum. Nach Satz 7 nehmen wir als Strukturgruppe die orthogonale Gruppe $O(n-m)$. Nun betrachten wir in jeder Faser Σ^{n-m-1} die Antipodenabbildung, welche jedem Punkt p in der Faser Σ^{n-m-1} seinen Antipoden $-p$ in derselben Faser zuordnet. Wegen der lokalen Trivialität der

Faserung (16) wird dadurch zunächst eine Abbildung von $U^m \times \Sigma^{n-m-1}$ auf sich definiert, wo U^m eine m-dimensionale Euklidische Zelle in der Basis S^m bedeutet. Die Antipodenabbildung einer Faser wird durch die negative Einheitsmatrix dargestellt und ist daher mit allen Elementen der Strukturgruppe $O(n-m)$ vertauschbar. Daraus folgt, daß durch die Antipodenabbildung in jeder Faser eine Abbildung α des Raumes N auf sich induziert wird, die wir wieder Antipodenabbildung nennen. α ist eine fasertreue Abbildung von N auf sich, welche auf der Basis S die Identität induziert. Die Abbildung α wurde auch von LIAO in [29], p. 185, betrachtet.

α besitzt keine Fixpunkte und ist periodisch mit der Periode 2: $\alpha^2 = I$, wo I die Identität bedeutet. Die Abbildungen I und α sind also die Elemente einer Gruppe $\{I, \alpha\}$ von Decktransformationen von N, das heißt N ist zweifacher Überlagerungsraum einer Mannigfaltigkeit N_0. Daraus erhalten wir wegen Satz 2, 2. und 3., unter Benutzung der dortigen Bezeichnungen: läßt sich die offene berandete Mannigfaltigkeit $M - N$ durch die Mannigfaltigkeit S differenzierbar abschließen, so läßt sich $M - N$ durch N_0 differenzierbar abschließen, wo N zweifacher Überlagerungsraum von N_0 ist.

Nun sehen wir mit Hilfe von Satz 4: sind in (1) W^n und A^q gegeben mit $q \leq n-2$, so existiert im differenzierbaren Fall mindestens eine nicht triviale Modifikation von W durch Ersetzen von A, nämlich diejenige, in welcher A durch N_0 ersetzt wird:

Satz 8. *Ist die Mannigfaltigkeit A^q in der differenzierbaren Mannigfaltigkeit W^n differenzierbar singularitätenfrei eingelagert, und ist $q \leq n-2$, so liefert die Antipodenabbildung α von N^{n-1} eine nicht triviale Modifikation*

$$\Phi : (V^n, N_0^{n-1}) \to (W^n, A^q) . \tag{19$_1$}$$

Ist A ein Punkt p in W, so bedeutet (19$_1$) die Ersetzung des Punktes p durch den reell projektiven Raum P^{n-1}. Dieser Prozeß ist das reelle Analogon in höheren Dimensionen des von HOPF in [23], [24] beschriebenen σ-Prozesses. Wir nennen diese Modifikation den reellen σ-Prozeß. Ist A eine Mannigfaltigkeit der Dimension $q \geq 1$, so kann die Modifikation (19$_1$) folgendermaßen gewonnen werden (vgl. § 7): man nimmt in jedem Punkt p von A den zu A in W^n orthogonalen Euklidischen Raum E^{n-q} und ersetzt den Punkt p in E^{n-q} durch P^{n-q-1}; dadurch entsteht aus A^q die Mannigfaltigkeit $S^{n-1} = N_0^{n-1}$, welche mit der Faser P^{n-q-1} gefasert wird, und aus W entsteht die modifizierte Mannigfaltigkeit V (reeller $\sigma^{n,q}$-Prozeß).

b) **Faserungen durch geraddimensionale Sphären.** Die kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit N^{n-1} werde in geraddimensionale Sphären Σ^{n-m-1} differenzierbar gefasert, so daß ein orientierbares differenzierbares Sphärenbündel $\mathfrak{N}(S)$ vorliegt. $\mathfrak{N}(S)$ heißt orientierbar, wenn mit Hilfe einer Orientierung in der Basis S und einer Orientierung in der Faser Σ der Raum N orientiert werden kann. Wir sagen dann: N wird durch Σ orientierbar gefasert. Es sei $n - 1 = d$, $d - m = 2t = n - m - 1 \geq 2$. In diesem Fall ist der Abbildungsgrad der Antipodenabbildung auf der einzelnen Faser Σ^{2t} gleich -1 (nach Wahl einer Orientierung), und daher ist wegen der Orientierbarkeit von $\mathfrak{N}(S)$ auch der Abbildungsgrad $g(\alpha)$ der Abbildung α gleich -1. $g(\alpha) = -1$ bedeutet, daß N zweifacher Überlagerungsraum der nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit N_0 ist. Nun wenden wir die von Eckmann in [14], Theorem 6, angegebenen Beziehungen zwischen den Bettischen Zahlen von N und N_0 an: bezeichnen wir mit b_k bzw. b_k^0 die Bettischen Zahlen von N bzw. N_0, $k = 0, 1, 2, \ldots, d$, so gilt wegen [14], (16), (17), (18)

$$\text{für } d = 3 \quad : \quad b_1 = 2b_1^0 - 1 \quad , \tag{20}$$

$$\text{für } d = 2r \quad : \quad b_r = 2b_r^0 \quad , \tag{21}$$

$$\text{für } d = 2r + 1 : \sum_{k=0}^{r} (-1)^k b_k = 2\sum_{k=0}^{r} (-1)^k b_k^0 \, , \tag{22}$$

$$\sum_{k=0}^{r} b_{2k} = 2\sum_{k=0}^{r} b_{2k}^0 \quad . \tag{23}$$

Daraus bekommen wir:

Satz 9. *Ist die kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit N^d der Raum eines orientierbaren differenzierbaren Sphärenbündels, dessen Fasern Sphären gerader Dimension ≥ 2 sind, so gilt*

$$\textit{für } d = 3 \quad : \quad b_1 \equiv 1 \quad \textit{mod } 2 \; , \tag{20'}$$

$$\textit{für } d = 2r + 1 : \quad \sum_{k=0}^{r} b_k \equiv 0 \quad \textit{mod } 2 \; . \tag{22'}$$

(20′) folgt aus (20), und (22′) ist eine Folge von (22) oder von (23) zusammen mit dem Poincaréschen Dualitätssatz für N^d. Die modulo 2 reduzierte Gleichung (21) liefert nichts Neues: kann N^d, $d = 2r$, in Sphären gefasert werden, so ist nach § 5 a) $\chi(N)$ gerade, und daher die mittlere Bettische Zahl b_r ebenfalls (was für $r = 2r' + 1$ für jede orientierbare Mannigfaltigkeit richtig ist, ob sie in Sphären gefasert werden kann oder nicht).

(22′) in Satz 9 besagt zum Beispiel, daß eine differenzierbare Faserung der ungeraddimensionalen Sphäre Σ^{2r+1} in Sphären gerader Dimension ≥ 2 unmöglich ist, und daraus folgt, daß dasselbe für die ungeraddimensionalen reell projektiven Räume gilt. Eine weitere Anwendung zu Satz 9 ist die folgende:

Satz 10. *Ist M^{2r} eine orientierbare kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit ungerader mittlerer Bettischer Zahl: $b_r(M^{2r}) \equiv 1$ mod 2, so kann die Man-*

nigfaltigkeit $M^{2r} \times \Sigma^{2s+1}$ *nicht durch geraddimensionale Sphären* Σ^{2t}, $t \geq 1$, *differenzierbar und orientierbar gefasert werden.*

Bemerkung. Aus $b_r(M^{2r}) \equiv 1$ *mod* 2 folgt $r = 2r'$, so daß wir uns in Satz 10 auf $4r'$-dimensionale Mannigfaltigkeiten $M^{4r'}$ beschränken können.

Der Beweis zu Satz 10 ergibt sich leicht aus der Betrachtung der Summe $\sum_{k=0}^{r+s} b_k(M^{2r} \times \Sigma^{2s+1})$. Es ist

$$\sum_{k=0}^{r+s} b_k(M^{2r} \times \Sigma^{2s+1}) \equiv b_r(M^{2r}) \mod 2\,,$$

und daraus folgt mit Hilfe von Satz 9 die Behauptung in Satz 10.

Wegen $b_r(M^{2r}) \equiv 1 \mod 2$ ist M^{2r} nicht durch Sphären faserbar (ungerade Charakteristik). Als Verschärfung von Satz 10 ist daher zu vermuten, daß $M \times \Sigma^{2s+1}$ nicht durch geraddimensionale Sphären Σ^{2t}, $t \geq 1$, gefasert werden kann, wenn M auf keine Weise in Sphären gefasert werden kann.

Zum Fall $d = 3$: wenn N^3 durch Σ^{2t}, $t \geq 1$, gefasert werden soll, bleibt nur die Faserung $\{N^3, \Sigma^2, \Sigma^1\}$ übrig. Dann folgt aus (20'): es ist $b_1(N^3) = b_2(N^3) = 1$, das heißt die additive Homologiestruktur von N^3 über dem Körper der reellen Zahlen ist diejenige von $\Sigma^1 \times \Sigma^2$.

Bemerkung. Nach [18], Satz 40, p. 115, ist bei Sphärenfaserungen durch geraddimensionale Sphären die Faser Σ^{2t} nicht homolog null in N über den reellen Zahlen. Daraus folgt, daß die additive Homologiestruktur von N über den reellen Zahlen zusammenfällt mit derjenigen des topologischen Produktes $S \times \Sigma$, wie wir dies eben für $d = 3$ gesehen haben. Daher gelten die Sätze 9, 10 ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen.

c) **Sphärenbündel mit unitärer Strukturgruppe.** (16) sei eine Sphärenfaserung mit $n - m = 2\lambda \geq 2$ und mit der Strukturgruppe $U(\lambda)$ der unitären Transformationen des komplex λ-dimensionalen komplex Euklidischen Raumes. Das Zentrum Z von $U(\lambda)$ besteht aus den Matrizen $z.I$, wo I die Einheitsmatrix bedeutet und z eine komplexe Zahl vom Betrage $1: z = e^{i\varkappa}$. Die Transitivitätsbereiche von Z auf der Sphäre $\Sigma^{2\lambda-1}$ sind Kreislinien Σ^1, welche durch $\varkappa$ parametrisiert werden: es wird die Hopfsche Faserung von $\Sigma^{2\lambda-1}$ in Kreislinien Σ^1 mit dem komplex projektiven Raum $P^{(\lambda-1)}$ als Basis erzeugt (vgl. [13], [22]). Da die Transformationen aus Z mit allen Elementen aus $U(\lambda)$ vertauschbar sind, folgt, wie in a) für die Antipodenabbildung, daß die Hopfsche Faserung der einzelnen Fasern $\Sigma^{2\lambda-1}$ in Kreislinien eine Faserung des gesamten Raumes N in Kreislinien liefert: der Raum N eines Sphärenbündels mit der Faser $\Sigma^{2\lambda-1}$, $\lambda \geq 1$, und mit unitärer Strukturgruppe $U(\lambda)$ läßt sich in Kreislinien Σ^1 fasern. Diese Faserung von N gibt wegen Satz 4 Anlaß zu Modifikationen, und es gilt ein zu Satz 8 analoger Satz für «quasikomplexe Modifikation». Dabei wollen wir unter einer quasikomplexen Modifikation eine differenzierbare Modifikation (1) verstehen, in welcher $n - q$ gerade ist und die Strukturgruppe des Normalenbündels von A^q in W^n die unitäre Gruppe $U\left(\frac{n-q}{2}\right)$. In § 7 wird näher auf den komplexen Fall eingegangen.

Wir können auch sagen: zu einem Sphärenbündel (16) mit $n - m = 2\lambda \geq 2$ und mit unitärer Strukturgruppe $U(\lambda)$ gehört eine Faserung

$$\mathfrak{E}(S^m) = \{L^{2\lambda+m},\ E^{(\lambda)},\ S^m\}$$

mit der Basis S und dem komplex λ-dimensionalen komplex Euklidischen Raum $E^{(\lambda)}$ als Faser, $E^{(\lambda)}$ mit einem komplexen unitär orthogonalen Koordinatensystem versehen. Die Strukturgruppe bleibt $U(\lambda)$; $\mathfrak{E}(S)$ wird in natürlicher Weise durch die Faserung (16) mit Hilfe der Transformationen aus $U(\lambda)$ induziert. Umgekehrt wird die Faserung (16) aus $\mathfrak{E}(S)$ dadurch erhalten, daß in jeder Faser $E^{(\lambda)}$ die Sphäre $\Sigma^{2\lambda-1}$ mit einem fest gegebenen Radius und mit dem Mittelpunkt im Ursprung O genommen wird (zum Beispiel die Einheitssphäre mit dem Zentrum in O). Nun wird die Hopfsche Kreislinienfaserung der einzelnen Faser $\Sigma^{2\lambda-1}$ dadurch gewonnen, daß $\Sigma^{2\lambda-1} \subset E^{(\lambda)}$ mit allen komplexen Geraden in $E^{(\lambda)}$ durch O geschnitten wird. Wenn diese Konstruktion in jeder Faser $E^{(\lambda)}$ vorgenommen wird, so bekommen wir eine Faserung von N in Kreislinien, welche mit der oben genannten Kreislinienfaserung von N zusammenfällt. Ist $n - m = 4\lambda \geq 4$ und die Strukturgruppe die symplektische Gruppe $Sp(\lambda)$, so liefert die analoge quaternionale Konstruktion eine Faserung von N in 3-Sphären, und wir erhalten analog zu Satz 8 und zur Existenz der obigen quasikomplexen Modifikation auch einen Satz über «quasiquaternionale Modifikation». In einer quasiquaternionalen Modifikation ist $n - q \equiv 0 \mod 4$, und das Normalenbündel von A^q in W^n besitzt die symplektische Gruppe $Sp\left(\frac{n-q}{4}\right)$ als Strukturgruppe (es handelt sich um differenzierbare Modifikation).

§ 7. Modifikation durch Verfeinerung der Sphärenfaserung

a) Modifikation durch gleichmäßige Verfeinerung der Sphärenfaserung. Wir wollen eine Methode angeben, wie gewisse Modifikationen mit Abbildung erhalten werden können. Gehen wir von (W^n, A^q) aus, und nehmen wir an, daß A aus dem Umgebungsrand N in W durch eine Sphärenfaserung

$$\mathfrak{N}(A^q) = \{N^{n-1},\ \Sigma^{n-q-1},\ A^q\} \tag{7}$$

erhalten wird. Im differenzierbaren Fall geht dies immer: $\mathfrak{N}(A)$ ist das Normalenbündel von A in W. Kann nun jede einzelne Faser Σ^{n-q-1} in (7) so in Sphären gefasert werden:

$$\mathfrak{S} = \{\Sigma^{n-q-1}, \Sigma^{n-m-1}, P^{m-q}\} \tag{24}$$

(jede Faser Σ^{n-q-1} in (7) ist gemäß (24) gefasert, das heißt die Faserung in jeder einzelnen Faser Σ^{n-q-1} ist äquivalent (24)), daß dadurch eine Sphärenfaserung des ganzen Umgebungsrandes N entsteht:

$$\mathfrak{N}(S^m) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, S^m\}\,, \tag{16}$$

so bekommen wir eine Modifikation (1) mit Abbildung

$$\Phi\colon\ (V^n, S^m) \to (W^n, A^q)\,. \tag{1}$$

Dabei wird S mit der Faser P und der Basis A gefasert:

$$\mathfrak{P}(A^q) = \{S^m, P^{m-q}, A^q\}\,, \tag{25}$$

wo P^{m-q} die Basis in der Sphärenfaserung (24) ist. Die zu (1) gehörige Modifikationsabbildung φ wird folgendermaßen erhalten: auf $V - S$ ist φ die Identität; ist x ein Punkt in S, so nehmen wir die über x gelegene Faser in (16), welche nach Voraussetzung ganz in einer Faser der Faserung (7) liegt; diese Faser in (7) wird durch die Projektionsabbildung der Faserung (7) auf einen Punkt y in A abgebildet, und die auf diese Weise gegebene Zuordnung $x \to y$ definiert die Abbildung φ auf S; dadurch ist φ auf ganz V definiert, φ ist stetig und erzeugt die Modifikation (1). φ, auf S beschränkt, nennen wir wie in (4) $\bar{\varphi}$, und wir sehen: $\bar{\varphi}$ ist die zur Faserung (25) gehörige Projektionsabbildung.

Wir nennen die eben beschriebene Methode zur Erzeugung einer Modifikation die Methode der gleichmäßigen Verfeinerung der Sphärenfaserung, womit wir betonen, daß die Faserung (7) durch (24) so verfeinert wird, daß alle Faserungen der einzelnen Fasern Σ^{n-q-1} in (7) der Faserung (24) äquivalent sind. Wird das Bündel (7) zu (16) verfeinert, so daß nicht notwendigerweise alle Faserungen der einzelnen Fasern Σ^{n-q-1} miteinander äquivalent sind, so sprechen wir von Modifikation durch allgemeine Verfeinerung der Sphärenfaserung (im Unterschied zur gleichmäßigen Verfeinerung) oder von Modifikation durch Verfeinerung der Sphärenfaserung schlechthin.

Beispiel 1. Ein Beispiel einer Modifikation durch gleichmäßige Verfeinerung der Sphärenfaserung wurde in § 6 a), Satz 8, gegeben: reeller $\sigma^{n,q}$-Prozeß. Dort ist $m = n - 1$, $P^{m-q} = P^{n-q-1}$ der $(n - q - 1)$-dimensionale reell projektive Raum, und die Faserung (24) stellt die zweifache Überlagerung dieses projektiven Raumes dar, welche durch die Antipodenabbildung in Σ^{n-q-1} erzeugt wird.

Beispiel 2. In § 6 c) sahen wir, daß wir aus (7) eine Faserung (16) herstellen können durch gleichmäßige Verfeinerung, falls (7) ein Sphärenbündel mit $n - q = 2\lambda$ und mit unitärer Strukturgruppe ist. Es ist dann $m = n - 2$, die Faserung (24) wird ermöglicht durch die Hopfsche Faserung von Σ^{n-q-1} in Kreislinien mit der Basis $P^{m-q} = P^{(\lambda-1)}$ (dem komplex $(\lambda - 1)$-dimensionalen komplex projektiven Raum). Zur komplexen Realisierung siehe c).

Beispiel 3. Ist (7) ein Bündel mit $n - q = 4\lambda$ und mit symplektischer Strukturgruppe, so erhält man mittels gleichmäßiger Verfeinerung der Sphärenfaserung durch 3-Sphären analog zu den beiden ersten Beispielen eine Modifikation der oben beschriebenen Art (vgl. § 6 c)).

b) **Differenzierbare Modifikation mit Abbildung.** Im differenzierbaren Fall kann die Modifikation durch gleichmäßige Verfeinerung der Sphärenfaserung auch dadurch erhalten werden, daß wir in jedem Punkt p von A den Orthogonalraum E^{n-q} zu A^q in W^n nehmen (bezüglich einer Riemannschen Metrik), und dann in jedem E^{n-q} eine Modifikation vornehmen, bei welcher der Punkt p in E^{n-q} durch die Mannigfaltigkeit P^{m-q} ersetzt wird. Der Bedingung, daß die Faserungen aller einzelnen Fasern Σ^{n-q-1} in (7) eine Faserung (16) ergeben, entspricht hier die Bedingung, daß sich die Menge der Mannigfaltigkeiten P^{m-q} in den modifizierten Orthogonalräumen zu A^q in W^n zu einer einzigen Mannigfaltigkeit zusammenfassen läßt.

Wir haben in a) gesehen: jede Modifikation durch gleichmäßige Verfeinerung der Sphärenfaserung ist eine Modifikation mit Abbildung, und dasselbe gilt für die Modifikation durch allgemeine Verfeinerung der Sphärenfaserung. Sind die auftretenden Faserungen differenzierbar, ebenso W und die Einlagerung $A \subset W$, so erhalten wir differenzierbare Modifikationen mit Abbildung (die Abbildung φ soll differenzierbar sein, wenn wir von einer differenzierbaren Modifikation mit Abbildung sprechen). Nun gehen wir aus von einer differenzierbaren Modifikation (1) mit Abbildung φ. Es ist leicht zu sehen, daß solche Riemannsche Metriken in V und in W gefunden werden können, daß jede Normale zu S in V durch φ in eine Normale zu A in W abgebildet wird. Diese Abbildung $\tilde{\varphi}$ (vgl. § 2 (9)) der Normalen zu S in V in die Gesamtheit der Normalen zu A in W ist eine eineindeutige Abbildung auf, das heißt $\tilde{\varphi}$ kann mit dem Homöomorphismus von $\overline{N}$ auf N in § 2 identifiziert werden. Es folgt: das Normalenbündel $\mathfrak{N}(S)$ stellt eine differenzierbare Verfeinerung des Normalenbündels $\mathfrak{N}(A)$ dar, das heißt jede differenzierbare Modifikation mit Abbildung kann durch differenzierbare Verfeinerung des Normalenbündels von A erhalten werden (nach geeigneter Wahl der Riemannschen Metriken in V und in W). Wir fassen zusammen:

Satz 11. *Jede Modifikation durch Verfeinerung der Sphärenfaserung ist eine Modifikation mit Abbildung. Jede differenzierbare Modifikation durch Verfeinerung der Sphärenfaserung ist eine differenzierbare Modifikation mit Abbildung und umgekehrt.*

c) **Komplexe Modifikation mit Abbildung.** In gewissen Fällen kann die Modifikation des Beispiels 2 in a) komplex vorgenommen werden. Es sei zunächst $A = p$, wir wollen also die Modifikation

$$\Phi: (\overline{U}^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (U^{(n)}, p) \tag{26}$$

betrachten. $U^{(n)}$ ist eine komplex n-dimensionale komplexe Koordinatenzelle, $\overline{U}^{(n)}$ die modifizierte Zelle. Wenn $z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplexe Koordinaten in $U^{(n)}$ sind, p der Ursprung des Koordinatensystems, $P^{(n-1)}$ der komplex $(n-1)$-dimensionale komplex projektive Raum mit den komplexen homogenen Koordinaten $t_1, t_2, \ldots, t_n$, so betrachten wir im topologischen Produkt $X = U^{(n)} \times P^{(n-1)}$ die Mannigfaltigkeit $V^{(n)}$, welche durch die Gleichungen

$$t_\varrho z_\sigma - t_\sigma z_\varrho = 0\,, \qquad \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n\,,$$

gegeben wird. In X, aufgefaßt als Faserraum mit der Faser $P^{(n-1)}$ und der Basis $U^{(n)}$, ist $V^{(n)}$ komplex analytische Schnittfläche mit der komplex analytischen Singularitätenmannigfaltigkeit $P^{(n-1)}$ über p, und dadurch wird gemäß § 1 c) eine komplex analytische Modifikation (26) gegeben mit $S = P^{(n-1)}$:

$$\Phi: (\overline{U}^{(n)}, P^{(n-1)}) \to (U^{(n)}, p)\,. \tag{$27_{(1)}$}$$

Die hier beschriebene Konstruktion erweist sich als unabhängig von der Wahl der Koordinaten in $U^{(n)}$ (siehe [24] oder [26]).

Ist nun $W^{(n)}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, $A^{(q)}$ ebenso, und ist A regulär eingelagert in W (das heißt komplex analytisch), so ist nach Wahl einer Hermiteschen Metrik in W in jedem Punkt p von A der Orthogonalraum $E^{(n-q)}$ zu A in W komplex analytisch: der Tangentialraum $T^{(q)}$ in p an A ist komplex analytisch, und ist $\mathfrak{t}$ ein Vektor in $T^{(q)}$, $\mathfrak{n}$ ein Vektor in $E^{(n-q)}$, so daß das Skalarprodukt bezüglich der gewählten Hermiteschen Metrik $(\mathfrak{n}, \mathfrak{t})$ verschwindet, so ist auch $(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{t}}) = 0$, und deswegen auch $(\overline{\mathfrak{n}}, \mathfrak{t}) = 0$, wo der Querstrich den Übergang zum Konjugiertkomplexen bedeutet. Dies besagt, daß $E^{(n-q)}$ komplex analytisch ist, genauer: $E^{(n-q)}$ ist ein komplex Euklidischer Raum, dessen komplexe Struktur durch diejenige des Tangentialraumes in p an W induziert wird. In $E^{(n-q)}$ kann die Modifikation $(27_{(1)})$ vorgenommen werden, indem $E^{(n-q)}$ durch Ersetzen des Punktes p modifiziert wird. Wenn wir dies für alle p in A ausführen, entsteht aus A eine komplexe Mannigfaltigkeit $S^{(n-1)}$, und W wird modifiziert zu einer komplexen Mannigfaltigkeit $V^{(n)}$. Daß die beschriebene Konstruktion zu einem differenzierbaren Paar (V, S) führt, ist mit Hilfe der entsprechenden Faserungen sofort einzusehen (Beispiel 2 in a)); in [26] wird gezeigt, daß man tatsächlich eine komplexe Modifikation

$$\Phi : (V^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (W^{(n)}, A^{(q)}) \tag{$19_{(1)}$}$$

bekommt. $(19_{(1)})$ ist ein Spezialfall zu Beispiel 2 in a). Zu $(19_{(1)})$ gehört eine komplex analytische Modifikationsabbildung φ, und die Faserung (25) ist hier eine komplexe Faserung $(25_{(1)})$ mit dem komplex projektiven Raum $P^{(n-q-1)}$ als Faser. $(27_{(1)})$ ist der (höherdimensionale) Hopfsche σ-Prozeß (vgl. [24], [26]), auch quadratische Transformation genannt ([25], p. 30). $(19_{(1)})$ heißt $\sigma^{n,q}$-Prozeß oder komplexer $\sigma^{n,q}$-Prozeß. In [26] wird bewiesen: der $\sigma^{n,q}$-Prozeß $(19_{(1)})$ kann ohne Benutzung einer Hermiteschen Metrik hergestellt werden, wobei die Wahl der Koordinatensysteme in W keine Rolle spielt, die Mannigfaltigkeiten V, S samt der Einlagerung $S \subset V$ und die Modifikation $(19_{(1)})$ sind also bis auf komplexe Homöomorphie durch (W, A) eindeutig bestimmt.

d) Entsprechend zu $(27_{(1)})$ existieren die Modifikationen, in denen an Stelle des komplex projektiven Raumes der reell projektive Raum P^{n-1} oder der quaternional projektive Raum $P^{[n-1]}$ steht, und an Stelle der komplexen Koordinatenzelle eine reelle bzw. quaternionale. Diese Modifikationen werden genau wie $(27_{(1)})$ mit Hilfe einer Schnittfläche V in X erhalten, nur nimmt man an Stelle der komplexen Koordinaten reelle bzw. quaternionale. Wir erhalten so den reellen bzw. quaternionalen σ-Prozeß. Anstatt $(19_{(1)})$ bekommt man weiter im reellen Fall die Modifikation des Beispiels 1 in a): reeller $\sigma^{n,q}$-Prozeß (19_1). Daneben gibt es auch den quaternionalen $\sigma^{n,q}$-Prozeß

$$\Phi : (V^{[n]}, S^{[n-1]}) \to (W^{[n]}, A^{[q]}) , \tag{$19_{[1]}$}$$

in welchem V, W quaternionale Mannigfaltigkeiten sind, und S, A quaternional eingelagert in V bzw. W (reguläre Einlagerungen). Dabei heißt eine Mannigfaltigkeit quaternional (oder quaternional analytisch), wenn sie mit quaternionalen Koordinatensystemen so überdeckt werden kann, daß die Koordinatentransformationen durch quaternionale Potenzreihen dargestellt werden (unter Berücksichtigung der Nichtkommutativität der Quaternionen).

II. Kapitel. Cohomologietheorie der Modifikation

Nachdem in Satz 1 festgestellt wurde, daß wir an Stelle der differenzierbaren Modifikationen die differenzierbaren Faserungen von N in Sphären betrachten können, liegt es nahe, die Cohomologietheorie der Sphärenfaserungen heranzuziehen. Dies wird in § 12 b) getan. Sonst ziehen wir es aber vor, eine andere direkte Methode zu verwenden, bei welcher kein Gebrauch gemacht wird von der Existenz irgendwelcher Faserungen. Diese Methode hat außerdem den Vorteil, daß sie auch auf nicht differenzierbare Modifikationen angewandt werden kann, wobei überdies die Mannigfaltigkeitsvoraussetzungen in gewissem Sinne abgeschwächt werden können.

§ 8. Homologiemannigfaltigkeiten. Exakte Sequenzen

a) Es sei die allgemeine Modifikation (1) gegeben. Die auftretenden Räume seien Polyeder, so daß simpliziale Homologie- und Cohomologietheorie getrieben werden kann, oder, was in vielen Fällen bequemer ist, auch die singuläre Theorie angewandt werden kann. Für alle Fragen, die speziell die Homologie- und Cohomologietheorie angehen, verweise ich auf das Buch [16] von EILENBERG und STEENROD. Wir werden meistens die Sprache der Cohomologie benutzen, nur an wenigen Stellen, wo wir uns für die Torsion interessieren, kommen Homologiegruppen vor.

Im folgenden werden *Homologiemannigfaltigkeiten* betrachtet. Dies sind Räume, für welche der Poincarésche Dualitätssatz gilt. Genauer: unter einer n-dimensionalen Homologiemannigfaltigkeit M^n verstehen wir ein Polyeder, für welches die folgenden Bedingungen erfüllt sind: n sei die Dimension von M [5]), das heißt $\dim(M) = n$; es sei $J = K$ oder $J = Z_2$ der Koeffizientenbereich der Homologie- und Cohomologiegruppen, wo K ein beliebiger Körper ist und Z_2 die ganzen Zahlen modulo 2; dann soll

$$\text{(a)}\quad H^n(M^n; J) \cong J ,$$
$$\text{(b)}\quad H^k(M^n; J) \cong H^{n-k}(M^n; J) ,$$

und der letzte Isomorphismus wird durch das Alexandersche Produkt (Cup-Produkt) in der Weise induziert, daß zu jeder Basis $z_1^k, z_2^k, \ldots, z_{b_k}^k$ von $H^k(M; J)$ eine Basis $z_1^{n-k}, z_2^{n-k}, \ldots, z_{b_k}^{n-k}$ in $H^{n-k}(M; J)$ existiert mit

$$z_r^k z_s^{n-k} = \delta_{rs} m^n , \qquad \delta_{rs} = \begin{cases} 0 \text{ für } r \neq s \\ 1 \text{ für } r = s \end{cases} , \qquad r, s = 1, \ldots, b_k ,$$

wo m^n die n-dimensionale Fundamentalklasse von M ist. Sind für M die Bedingungen (a), (b) erfüllt für $J = K$, K jeder beliebige Körper, so nennen

[5]) Der Dimensionsindex n wird wie bei den Mannigfaltigkeiten öfters weggelassen.

wir M eine orientierbare Homologiemannigfaltigkeit. Wir können dann $J = R$ wählen, $R =$ Körper der reellen Zahlen. Gilt (a), (b) für $J = Z_2$, aber nicht für $J = R$, so heißt M nicht orientierbare Homologiemannigfaltigkeit, und wir sagen in diesem Fall: M ist eine Homologiemannigfaltigkeit modulo 2.

Bemerkung. Unter der *Dimension* eines Polyeders verstehen wir die topologische Dimension. Für die Homologiemannigfaltigkeit M^n ist also n die topologische Dimension. An vielen Stellen genügt es jedoch, unter n die «Homologiedimension» von M^n zu verstehen, das heißt diejenige Zahl n, so daß $H^n(M; J) \neq 0$ (im Fall einer Homologiemannigfaltigkeit $H^n(M; J) \cong J$) und $H^k(M; J) = 0$ für alle $k \geq n + 1$.

Jede kompakte Mannigfaltigkeit (als Polyeder vorausgesetzt) ist Homologiemannigfaltigkeit modulo 2, und jede orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit ist orientierbare Homologiemannigfaltigkeit.

b) Alle im folgenden vorkommenden Sequenzen von Gruppen und Homomorphismen sind *exakte Sequenzen*, wenn nichts anderes gesagt wird.

Der bei einer allgemeinen Modifikation (1) auftretende Homöomorphismus (2) induziert den Isomorphismus Φ^*:

$$0 \to H^k(W, A) \xrightarrow{\Phi^*} H^k(V, S) \to 0 \,. \tag{28}$$

Die exakten Cohomologiesequenzen für (V, S) und für (W, A) führen wegen (28) zu dem folgenden Diagramm:

$$\left.\begin{array}{c}
0 \\
\uparrow \\
\ldots \xrightarrow{i^*} H^{k-1}(S) \xrightarrow{\delta} H^k(V, S) \xrightarrow{j^*} H^k(V) \xrightarrow{i^*} H^k(S) \xrightarrow{\delta} \ldots \\
\uparrow \Phi^* \\
\ldots \xrightarrow{i^*} H^{k-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^k(W, A) \xrightarrow{j^*} H^k(W) \xrightarrow{i^*} H^k(A) \xrightarrow{\delta} \ldots \\
\uparrow \\
0
\end{array}\right\} . \tag{29}$$

Wegen $q = \dim A$ ist $H^k(A) = 0$ für $k \geq q + 1$, so daß aus (29) folgt:

$$\ldots \to H^{k-1}(S) \to H^k(W) \to H^k(V) \to H^k(S) \to \ldots \quad \text{für } k \geq q + 2 \,. \tag{30}$$

Bemerkung. (28), (29), (30) gelten für jede allgemeine Modifikation, in welcher für die auftretenden Räume eine Cohomologietheorie im Sinne von Eilenberg und Steenrod aufgestellt werden kann (vgl. das oben zitierte Buch [16]), sobald A ein Deformationsretrakt einer Umgebung von A in W ist und desgleichen S in V.

§ 9. Allgemeine Modifikation durch Ersetzen eines Punktes: ein Lemma

In der Modifikation (1) seien zunächst V^n, W^n kompakte Mannigfaltigkeiten, $A^q = A^0$ sei ein Punkt p in W, und S^m sei ein Teilraum von V mit $m \leq n-1$. Es handelt sich also um eine allgemeine Modifikation von W durch Ersetzen des Punktes p durch S. Eine solche Modifikation von W ist eine lokale Angelegenheit für W, das heißt die Möglichkeiten, die für S in Betracht kommen, sind unabhängig von den globalen Eigenschaften von W. Wir nennen daher nach HOPF [24] die Modifikationen, in denen $A = p$ ist, *lokale* Modifikationen. Es kommt nur darauf an, daß eine Umgebung $U^n = U(p)$ des Punktes p (U^n ist die n-dimensionale Euklidische Zelle) in eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit eingebettet werden kann, und daß bei der Modifikation aus U^n ein Raum $\overline{U}^n$ entsteht, der wieder in eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit eingelagert werden kann. Um die lokale Modifikation

$$\Phi : (\overline{U}^n, S^m) \to (U^n, p) \tag{31}$$

zu untersuchen, betten wir also U^n in die Sphäre Σ^n ein und betrachten an Stelle von (31) die Modifikation

$$\Phi : (V^n, S^m) \to (\Sigma^n, p) . \tag{32}$$

Wir wollen Homologieeigenschaften von S untersuchen. Dazu machen wir die folgende Voraussetzung, welche bei allen Betrachtungen über lokale Modifikation gelten soll: die Euklidische Umgebung U^n lasse sich in der Homologiesphäre Σ^n (Σ bezeichnet sowohl die Sphäre wie die Homologiesphäre) einbetten, und die Modifikation (31) induziere dadurch eine Modifikation (32), in welcher V eine n-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit (eventuell mod 2) wird. Wir interessieren uns also für die Modifikation (32), in welcher Σ eine Homologiesphäre und V eine Homologiemannigfaltigkeit ist.

Es sei $J = K$ oder $J = Z_2$, je nachdem V orientierbar ist oder nicht. (30) liefert unmittelbar

$$H^k(V) \cong H^k(S) \quad \text{für} \quad 2 \leq k \leq n-2 .$$

Außerdem gilt für $n \geq 2$

$$\left.\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & \uparrow & & & & & & \\
0 & \to & H^0(V) & \to & H^0(S) & \to & H^1(V,S) & \to & H^1(V) & \to & H^1(S) & \to & 0 \\
 & & & & & & \uparrow \Phi^* & & & & & & \\
0 & \to & H^0(\Sigma) & \to & H^0(p) & \to & H^1(\Sigma, p) & \to & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & \nearrow & \uparrow & & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & & &
\end{array}\right\} ,$$

es ist also $H^1(V, S) \cong H^1(\Sigma, p) = 0$, so daß $H^1(V) \cong H^1(S)$ und $H^0(V) \cong H^0(S) \cong J$, S ist also zusammenhängend. Aus (29), $H^n(V) \cong H^n(\Sigma) \cong J$ und $H^n(S) = 0$ (wegen $m \leq n - 1$) folgt noch $H^{n-1}(V) \cong H^{n-1}(S)$. Für $n = 1$ bleibt die Isomorphie $H^0(V) \cong H^0(S) \cong J$ richtig, wie leicht einzusehen ist.

Die obigen Resultate zusammengefaßt ergeben:

Lemma 1. *Für die Modifikation*

$$\Phi: (V^n, S^m) \to (\Sigma^n, p), \tag{32}$$

V n-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit, S Teilraum in V, $m \leq n - 1$, gilt

$$H^k(V^n; J) \cong H^k(S^m; J) \quad \text{für} \quad 0 \leq k \leq n - 1. \tag{33}$$

Zusatz: *Die Isomorphismen* (33) *werden induziert durch die Inklusionsabbildung $i: S \to V$, es kann also geschrieben werden:*

$$0 \to H^k(V^n; J) \xrightarrow{i^*} H^k(S^m; J) \to 0 \quad \textit{für} \quad 0 \leq k \leq n - 1. \tag{33*}$$

Die Behauptung des Zusatzes folgt sofort: die Isomorphismen (33) stammen aus (30) bzw. (29), und in (29) werden die Homomorphismen i^* durch die Inklusionsabbildung i induziert.

Bemerkung. Lemma 1 und sein Zusatz gelten auch dann, wenn V ein topologischer Raum ist mit $H^0(V) \cong H^n(V) \cong J$, denn es wurden zum Beweis neben (28), (29) nur diese Eigenschaften von V gebraucht.

Da die durch Abbildungen induzierten Homomorphismen zwischen den Cohomologiegruppen produkttreu sind (bezüglich des Alexanderschen Produktes zwischen den Cohomologieklassen), folgt aus (33*):

Lemma 1′. *Für die Modifikation*

$$\Phi: (V^n, S^m) \to (\Sigma^n, p), \tag{32}$$

V n-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit, S Teilraum in V, $m \leq n - 1$, gilt

$$\mathfrak{H}^{n-1}(V^n; J) \cong \mathfrak{H}(S^m; J). \tag{33′}$$

$\mathfrak{H}(M; J)$ bezeichnet den Cohomologiering des Raumes M über dem Koeffizientenbereich J (J muß hier ein Ring sein), und $\mathfrak{H}^r(M; J)$ ist der Ring $\mathfrak{H}(M; J)$, beschränkt auf die Elemente $z^k \in H^k(M; J)$ mit $k \leq r$.

§ 10. Ersetzen eines Punktes durch eine Mannigfaltigkeit

a) Ersetzen eines Punktes durch eine $(n-1)$-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit. In den Modifikationen (31), (32) sei S eine $(n-1)$-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit. Als Koeffizientenbereich nehmen wir wie in § 9 K oder Z_2, je nachdem die Homologiemannigfaltigkeiten V und S orientierbar sind oder nicht, und wir schreiben in beiden Fällen J.

Lemma 2. *Für die Modifikation*

$$\Phi : (V^n, S^{n-1}) \to (\Sigma^n, p)\,, \tag{32_1}$$

V, S Homologiemannigfaltigkeiten, gilt

$$\left.\begin{aligned} H^k(V^n\ ; J) &\cong J\,, \quad 0 \le k \le n\,, \\ H^k(S^{n-1}; J) &\cong J\,, \quad 0 \le k \le n-1\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Beweis:

(33), angewandt für $k = n-1$, liefert	$H^{n-1}(V) \cong H^{n-1}(S) \cong J$,
nach dem Poincaréschen Dualitätssatz für V ist	$H^1\ (V) \cong H^{n-1}(V) \cong J$,
(33), angewandt für $k = 1$, liefert	$H^1\ (S) \cong H^1\ (V) \cong J$,
nach dem Poincaréschen Dualitätssatz für S ist	$H^{n-2}(S) \cong H^1\ (S) \cong J$,
(33), angewandt für $k = n-2$, liefert	$H^{n-2}(V) \cong H^{n-2}(S) \cong J$,

usw.

Man erkennt: setzt man dieses Verfahren fort, indem abwechslungsweise (33), dann der Dualitätssatz für V, dann wieder (33), dann der Dualitätssatz für S, dann (33) usw. angewandt wird, so gelangt man schrittweise zu den Isomorphismen (34).

Das Vorgehen in dem obigen Beweis durch wiederholtes Anwenden von (33) und des Dualitätssatzes in V und in S wird in mehreren Beweisen wieder vorkommen. Diese Beweismethode nennen wir das «*Pendelverfahren*».

Da für eine Homologiemannigfaltigkeit M^{4r+2} die mittlere Bettische Zahl b_{2r+1} gerade ist, folgt aus (34), daß für $n \equiv 2 \bmod 4$ und für $n \equiv 3 \bmod 4$ der Koeffizientenbereich $J = Z_2$ genommen werden muß, in diesen beiden Fällen ist also entweder V oder S nicht orientierbar. Es gilt daher: Modifikation von U^n durch Ersetzen des Punktes p durch eine orientierbare Homologiemannigfaltigkeit S^{n-1}, so daß $\overline{U}^n$ orientierbar wird (das heißt V^n in der zugehörigen Modifikation (32_1) orientierbar wird), ist unmöglich für $n = 4r+2$ und für $n = 4r+3$. Dies folgt mit Hilfe von (34) allein daraus, daß V und S Homologiemannigfaltigkeiten sind. Ziehen wir noch die spezielle multiplikative Struktur von $\mathfrak{H}(V)$ und von $\mathfrak{H}(S)$ in Betracht, so folgt:

Satz 12. *Modifikation von $U^n (n \geq 2)$ durch Ersetzen des Punktes p durch eine orientierbare $(n - 1)$-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit S^{n-1}, so daß $\overline{U}^n$ orientierbar wird, ist unmöglich.*

Beweis: Es ist zu beweisen, daß die Modifikation (32_1) unmöglich ist, wenn sowohl V wie S orientierbar sind. Mit andern Worten: es ist zu zeigen, daß für J nicht R gewählt werden kann. Gemäß (34) kann eine Basis

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\quad x^k \in H^k(V)\,,$$

für die additiven Cohomologiegruppen $H^k(V)$ gewählt werden. Wir setzen

$$i^* x^k = \overline{x}^k,\quad 0 \leq k \leq n - 1\,, \tag{35}$$

so daß die $\overline{x}^k$ wegen (33*) eine Basis für die additiven Cohomologiegruppen $H^k(S)$ bilden. Ferner bestimmen die $\overline{x}^k$ wegen (33') dieselbe multiplikative Struktur wie die x^k in $\mathfrak{H}^{n-1}(V)$, so daß wir die $\overline{x}^k$ mit den x^k für $0 \leq k \leq n - 1$ identifizieren können. Wir lassen daher im folgenden die Querstriche wieder weg.

D_V bzw. D_S sei der Poincarésche Dualitätsoperator in V bzw. S:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \to H^k(V; J) \xrightarrow{D_V} H^{n-k}(V; J) \to 0\,, \\ 0 \to H^k(S; J) \xrightarrow{D_S} H^{n-k-1}(S; J) \to 0\,. \end{array}\right\} \tag{36}$$

Nun können wir die Basiselemente x^k geeignet wählen. x^0 sei die nulldimensionale Fundamentalklasse von V und von S. Dann ist $x^n = D_V x^0$ die n-dimensionale Fundamentalklasse von V, $x^{n-1} = D_S x^0$ die $(n - 1)$-dimensionale Fundamentalklasse von S. Das Produkt zwischen den Cohomologieklassen ist das Alexandersche Produkt. Wir bestimmen x^1 so, daß

$$x^1 = D_V x^{n-1},\ \text{und daher}\ x^1 x^{n-1} = x^n;$$

weiter wählen wir x^{n-2} so, daß

$$x^1 = D_S x^{n-2},\ \text{und daher}\ x^1 x^{n-2} = x^{n-1}\,.$$

Daraus folgt

$$x^1 x^1 x^{n-2} = x^n. \tag{37}$$

Wegen $x^r x^s = (-1)^{rs} x^s x^r$ ist $x^1 x^1 = 0$ über dem Koeffizientenbereich R, und daraus folgt zusammen mit (37), daß für J nicht R genommen werden kann, womit Satz 12 bewiesen ist.

Modulo 2 ergibt (37) keinen Widerspruch, sondern es kann durch weitere Anwendung von D_V und D_S die multiplikative Struktur der Ringe $\mathfrak{H}(V; Z_2)$ und $\mathfrak{H}(S; Z_2)$ bestimmt werden («multiplikatives Pendelverfahren»):

x^{n-1}, x^n seien wie oben gewählt;

x^1 wird durch $x^1 = D_V x^{n-1}$ bestimmt, so daß $x^1 x^{n-1} = x^n$;

x^{n-2} wird durch $x^1 = D_S x^{n-2}$ bestimmt, so daß $x^1 x^{n-2} = x^{n-1}$;

x^2 wird durch $x^2 = D_V x^{n-2}$ bestimmt, so daß $x^2 x^{n-2} = x^n$;

es folgt $x^2 = x^1 x^1$;

x^{n-3} wird durch $x^2 = D_S x^{n-3}$ bestimmt, so daß $x^2 x^{n-3} = x^{n-1}$;

x^3 wird durch $x^3 = D_V x^{n-3}$ bestimmt, so daß $x^3 x^{n-3} = x^n$;

es folgt $x^3 = x^1 x^2 = x^1 x^1 x^1 = (x^1)^3$;

usw.

Nehmen wir noch $x^0 = D_V x^n = D_S x^{n-1}$ hinzu, so erhalten wir:

Satz 13. *Bei den Modifikationen*

$$\Phi : (\overline{U}^n, S^{n-1}) \to (U^n, p) \tag{31_1}$$

und

$$\Phi : (V^n, S^{n-1}) \to (\Sigma^n, p) \, , \tag{32_1}$$

V, S Homologiemannigfaltigkeiten, wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}(V^n \,; Z_2) &= \{x^0, x^1, (x^1)^2, \ldots, (x^1)^n \}\,, \\ \mathfrak{H}(S^{n-1}; Z_2) &= \{x^0, x^1, (x^1)^2, \ldots, (x^1)^{n-1}\}\,. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

b) **Ersetzen eines Punktes durch eine $(n-1)$-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit.** Satz 13 besagt, daß die Ringe $\mathfrak{H}(V^n; Z_2)$ und $\mathfrak{H}(S^{n-1}; Z_2)$ übereinstimmen mit den Cohomologieringen $\mathfrak{H}(P^n; Z_2)$ und $\mathfrak{H}(P^{n-1}; Z_2)$. Wenn wir uns den Zusammenhang mit den Sphärenfaserungen zunutze machen, wie er im ersten Kapitel beschrieben wurde, das heißt in diesem Fall den Zusammenhang mit den Möglichkeiten, den Umgebungsrand $N^{n-1} = \Sigma^{n-1}$ von p in U^n als zweifachen Überlagerungsraum einer Mannigfaltigkeit $N_0^{n-1} = S^{n-1}$ darzustellen, wenn wir nun also voraussetzen, daß V, S, Mannigfaltigkeiten sind und nicht nur Homologiemannigfaltigkeiten, so gilt der folgende Satz:

Satz 14. *Für die Modifikationen*

$$\Phi : (\overline{U}^n, S^{n-1}) \to (U^n, p) \, , \tag{31_1}$$

$$\Phi : (V^n, S^{n-1}) \to (\Sigma^n, p) \, , \tag{32_1}$$

V, S kompakte Mannigfaltigkeiten, Σ Sphäre, gelten die folgenden Homöomorphien:

$$\left.\begin{aligned} V^n &\leftrightarrow P^n \,, \\ S^{n-1} &\leftrightarrow P^{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

wo P^r den r-dimensionalen reell projektiven Raum bedeutet.

Zusatz: *Für die Modifikationen* (31_1), (32_1), V, S *kompakte Mannigfaltigkeiten,* Σ *Sphäre, sind*

$$\text{für } n \equiv 0 \text{ mod } 2 \quad \bar{U}^n \text{ und } V^n \text{ nicht orientierbar, } S^{n-1} \text{ orientierbar,}$$

$$\text{für } n \equiv 1 \text{ mod } 2 \quad \bar{U}^n \text{ und } V^n \text{ orientierbar, } S^{n-1} \text{ nicht orientierbar.}$$

Aus Satz 14 und dem Zusatz folgen Satz 13 und Satz 12 für den Fall, daß V, S Mannigfaltigkeiten sind und Σ die Sphäre. Anderseits wird durch die Betrachtung in a) die additive und multiplikative Struktur des Ringes $\mathfrak{H}(P^n; Z_2)$ bestimmt: man nimmt für die Modifikation (31_1) den reellen σ-Prozeß.

Beweis zu Satz 14: Es genügt, die Modifikation (32_1) zu betrachten. Die Modifikationen durch Ersetzen des Punktes p in Σ^n durch S^{n-1} entsprechen den Möglichkeiten, den Umgebungsrand Σ^{n-1} von p in Σ^n als zweifachen Überlagerungsraum einer Mannigfaltigkeit S^{n-1} darzustellen (Spezialfall des Satzes 5, ohne daß hier Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht werden müssen). Zu jeder zweifachen Überlagerung gehört eine Decktransformation α von Σ^{n-1} mit $\alpha^2 = I$; I ist die Identität.

Sei $n \equiv 0$ mod 2. Für jede fixpunktfreie Decktransformation α von Σ^{n-1}, für welche also die Lefschetzsche Zahl $\Lambda(\alpha) = 0$ (vgl. [3], p. 531) ist, ist der Abbildungsgrad gleich 1: $g(\alpha) = 1$. Nach [3], p. 509, Satz I, ist dann α homotop zur Antipodenabbildung von Σ^{n-1}. Diese Homotopie führt zu einer Homöomorphie zwischen P^{n-1} und der Mannigfaltigkeit S^{n-1}, welche durch Identifikation von x mit $\alpha(x)$, x Punkt in Σ^{n-1}, entsteht. Wegen $g(\alpha) = 1$ ist S^{n-1} orientierbar. Ist $\tilde{p}$ eine Umgebung von p in Σ^n, so entsteht durch die obige Identifikation auf Σ^{n-1} aus $\Sigma^n - \tilde{p}$ ein zu P^n homöomorpher Raum, der wegen $n = 2n'$ nicht orientierbar ist, was auch aus Satz 12 wegen der Orientierbarkeit von S^{n-1} folgt.

Ist $n \equiv 1$ mod 2, so wird für eine fixpunktfreie Decktransformation α wegen $\Lambda(\alpha) = 0$ der Abbildungsgrad $g(\alpha) = -1$, α ist homotop zur Antipodenabbildung der Sphäre Σ^{n-1}, und daher S^{n-1} homöomorph P^{n-1}. Wegen $g(\alpha) = -1$ ist in diesem Fall S^{n-1} nicht orientierbar. V^n wird dann homöomorph P^n und ist orientierbar.

Entsprechend zu Satz 14 beweist man den folgenden etwas stärkeren Satz:

Satz 14'. *Jede lokale Modifikation*

$$\Phi: (\bar{U}^n, S^{n-1}) \to (U^n, p), \tag{31_1}$$

S *kompakte Mannigfaltigkeit, ist äquivalent dem reellen* σ*-Prozeß in* p.

Zum reellen σ-Prozeß vgl. § 6 a) und § 7 d). Zwei Modifikationen $\Phi_1 : (V_1, S_1) \to (W, A)$ und $\Phi_2 : (V_2, S_2) \to (W, A)$ mit den Abbildungen $\varphi_1 : V_1 \to W$ und $\varphi_2 : V_2 \to W$ heißen äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $\theta : V_1 \to V_2$ gibt, so daß $\varphi_1 = \varphi_2 \theta$ gilt.

Als Korollar zu Satz 14′ erhalten wir:

Satz 15. *Die einzige Möglichkeit bis auf topologische Äquivalenz, den Euklidischen Raum E^n durch eine $(n-1)$-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit S^{n-1} zu einer kompakten Mannigfaltigkeit V^n abzuschließen, besteht im bekannten Abschluß von E^n zum reell projektiven Raum P^n durch $S^{n-1} = P^{n-1}$.*

c) Ersetzen eines Punktes durch eine $(n-r)$-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit. In der Modifikation (31) bzw. (32) sei $S^m = S^{n-r}$ eine $(n-r)$-dimensionale Homologiemannigfaltigkeit. J sei wieder K oder Z_2. Die dem Lemma 2 entsprechende Aussage lautet:

Lemma 3. *Für die Modifikation*

$$\Phi : (V^n, S^{n-r}) \to (\Sigma^n, p) \ , \tag{32_r}$$

$r \geq 1$, *V, S Homologiemannigfaltigkeiten, gilt*

$$n = \lambda r \ , \tag{40}$$

$$\left.\begin{array}{ll} H^{\mu r}(V^n \ ; J) \cong J, & 0 \leq \mu \leq \lambda, \\ H^k \ (V^n \ ; J) = 0, & k \not\equiv 0 \mod r, \\ H^{\mu r}(S^{n-r}; J) \cong J, & 0 \leq \mu \leq \lambda - 1, \\ H^k \ (S^{n-r}; J) = 0, & k \not\equiv 0 \mod r. \end{array}\right\} \tag{41}$$

Beweis: Mit Hilfe des Pendelverfahrens.

(33), angewandt für $k = n - r$, liefert	$H^{n-r}(V) \cong H^{n-r}(S) \cong J$,
nach dem Poincaréschen Dualitätssatz für V ist	$H^r(V) \cong H^{n-r}(V) \cong J$,
(33), angewandt für $k = r$, liefert	$H^r(S) \cong H^r(V) \cong J$,
nach dem Poincaréschen Dualitätssatz für S ist	$H^{n-2r}(S) \cong H^r(S) \cong J$,
(33), angewandt für $k = n - 2r$, liefert	$H^{n-2r}(V) \cong H^{n-2r}(S) \cong J$,

usw.

Es sei $1 \leq s \leq r - 1$. Dann folgt:

(33), angewandt für $k = n - s$, liefert	$H^{n-s}(V) \cong H^{n-s}(S) = 0$,
nach dem Poincaréschen Dualitätssatz für V ist	$H^s(V) \cong H^{n-s}(V) = 0$,
(33), angewandt für $k = s$, liefert	$H^s(S) \cong H^s(V) = 0$,
nach dem Poincaréschen Dualitätssatz für S ist	$H^{n-r-s}(S) \cong H^s(S) = 0$,
(33), angewandt für $k = n - r - s$, liefert	$H^{n-r-s}(V) \cong H^{n-r-s}(S) = 0$,

usw.

Es muß (40) gelten: es sei $n = \lambda r + t$, $0 \leq t \leq r - 1$, ferner $\mu^* = [\lambda/2]$, so daß $\mu^* \leq \lambda/2$, $\mu^* + 1 > \lambda/2$. Dann gilt (41) kraft des obigen Pendelverfahrens für alle $k \leq \mu^* r$ und für $k \geq m - \mu^* r$, $m = n - r$. Ist nun

$$0 < | m/2 - \mu^* r | < r/2 , \tag{42}$$

so führt die Anwendung des Poincaréschen Dualitätssatzes für S im Falle $m/2 < \mu^* r$ und für V im Falle $m/2 > \mu^* r$ zu einem Widerspruch, und es muß daher in (42) entweder links oder rechts das Gleichheitszeichen stehen. Daraus folgt $t = 0$ und damit (40).

Wegen (40) schließt sich das Pendelverfahren lückenlos in der Mitte, und alle Isomorphismen (41) sind als richtig erwiesen.

d) **Die differenzierbaren Modifikationen (31_r) und (32_r).** Betrachten wir die Modifikation (32_r) mit $n - 1 \geq r \geq 2$. Dann wird wegen der Orientierbarkeit von Σ^n auch V orientierbar. Dieselbe Überlegung wie im Beweis zu Satz 12 führt auf die zu (37) analoge Gleichung

$$x^r x^r x^{n-2r} = x^n , \tag{37_r}$$

wo x^n die n-dimensionale Fundamentalklasse von V bedeutet, und x^r die zur Fundamentalklasse x^{n-r} von S in V duale Cohomologieklasse. Aus (37_r) folgt: ist in der Modifikation (32_r), $r \geq 2$, S^{n-r} orientierbar, so muß r gerade sein. Für eine differenzierbare Modifikation (32_r) mit $r \geq 2$ ist die Mannigfaltigkeit S orientierbar, denn S ist nach Satz 1 Basis einer Sphärenfaserung des Umgebungsrandes Σ^{n-1} von p mit der Faser Σ^{r-1}, und in einem Bündel (5), in welchem zwei der Räume E, F, B orientierbar sind, ist auch der dritte orientierbar, wenn E einfach zusammenhängend ist. Wir können also sagen: für eine topologische Modifikation (32_r), $r \geq 2$, welche durch Faserung des Umgebungsrandes Σ^{n-1} erzeugt wird, sind V und S orientierbar, und daher ist wegen (37_r) r gerade. Wir bestimmen für $J = K$ wie bei Satz 13 den Cohomologiering von V und denjenigen von S mit Hilfe der in (36) definierten Dualitätsoperatoren D_V und D_S (multiplikatives Pendelverfahren). Wir erhalten:

Satz 16. *Bei den differenzierbaren Modifikationen*

$$\Phi : (\bar{U}^n, S^{n-r}) \to (U^n, p) , \tag{31_r}$$

$$\Phi : (V^n, S^{n-r}) \to (\Sigma^n, p) , \tag{32_r}$$

$r \geq 2$, *V, S kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Σ Sphäre, werden $\bar{U}^n$, V, S orientierbar, es muß*

$$n = \lambda r; \quad r = 2r', \ \textit{wenn} \ n - 1 \geq r;$$

und die Cohomologieringe von V und S über K werden gegeben durch

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H}(V^n\ ; K) &= \{x^0, x^r, (x^r)^2, \ldots, (x^r)^\lambda\ \}\,,\\ \mathfrak{H}(S^{n-r}; K) &= \{x^0, x^r, (x^r)^2, \ldots, (x^r)^{\lambda-1}\}\,.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Es wurden in Satz 16 die Orientierungen von V und von S (das heißt die Elemente x^n und x^{n-r}) so gewählt, daß (43) zutrifft: es soll

$$x^{\mu r} = (x^r)^\mu, \quad \mu = 0, 1, \ldots, \lambda\,,$$

gelten. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, daß

$$x^{\mu r} = (x^r)^\mu, \quad \mu = 0, 1, \ldots, \lambda - 1\,, \quad x^n = -(x^r)^\lambda.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} D_S(x^r)^\mu &= (x^r)^{\lambda-\mu-1}, & \mu &= 0, 1, \ldots, \lambda - 1\,,\\ D_V(x^r)^\mu &= -(x^r)^{\lambda-\mu}, & \mu &= 0, 1, \ldots, \lambda\,.\end{aligned}$$

Im Falle des Hopfschen σ-Prozesses handelt es sich um eine Realisierung dieser zweiten Möglichkeit (für $r = 2$), falls die Orientierungen von V^n und von $S^{n-2} = P^{(\lambda-1)}$ durch die komplexe Struktur von $\overline{U}^n$ induziert werden (siehe [24], pp. 140–141, wo dies für $n = 4$ gezeigt wird; für $n = 2\lambda \geq 4$ führt eine analoge Betrachtung zum Ziel).

Torsion. Es gilt (33*) dual für die Homologiegruppen, und der Poincarésche Dualitätsoperator D_M führt in einer kompakten Mannigfaltigkeit M über einem beliebigen Koeffizientenbereich von der Cohomologie zur Homologie:

$$D_M:\ H^k(M^n) \to H_{n-k}(M^n)\,. \tag{44}$$

Führt man die Überlegungen im Beweis zu (41) mit Hilfe dieses durch (44) definierten Operators D bzw. D^{-1} aus, und benutzt man neben (33*) den dazu dualen Isomorphismus für die entsprechenden Homologiegruppen, so kann als Koeffizientenbereich der Ring Z der ganzen Zahlen genommen werden, und wir sehen, daß bei den differenzierbaren Modifikationen (31_r), (32_r) im Falle $r \geq 2$ wegen der Orientierbarkeit von V und S keine Torsion auftritt. Daher haben die Ringe $\mathfrak{H}(V; Z)$ und $\mathfrak{H}(S; Z)$ dieselbe Struktur wie diejenigen über R:

Satz 16′. *Bei den differenzierbaren Modifikationen* (31_r), (32_r) *wird für* $r \geq 2$

$$n = \lambda r\,; \quad r = 2r'\,, \quad \textit{wenn} \quad n - 1 \geqslant r\,;$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H}(V^n\ ; Z) &= \{x^0, x^r, (x^r)^2, \ldots, (x^r)^\lambda\ \}\,,\\ \mathfrak{H}(S^{n-r}; Z) &= \{x^0, x^r, (x^r)^2, \ldots, (x^r)^{\lambda-1}\}\,.\end{aligned}\right\} \tag{43'}$$

Bemerkung 1. Es wird durch (43) bzw. (43′) für $r = 2$ und für $r = 4$ die Cohomologiestruktur der komplex und quaternional projektiven Räume bestimmt, denn in diesen Fällen existieren die entsprechenden Modifikationen, bei denen ein Punkt durch den komplex projektiven Raum $P^{(n-1)}$ oder durch den quaternional projektiven Raum $P^{[n-1]}$ ersetzt wird (komplexer bzw. quaternionaler σ-Prozeß).

Bemerkung 2. An Stelle der Differenzierbarkeit kann in Satz 16 sowie in Satz 16′ vorausgesetzt werden, daß die topologische Modifikation (31_r) bzw. (32_r) durch Sphärenfaserung des Umgebungsrandes Σ^{n-1} von p in U^n erzeugt wird, oder es kann vorausgesetzt werden, daß V^n, S^{n-r} Homologiemannigfaltigkeiten sind, Σ^n die n-Homologiesphäre, und S orientierbar ist, und daß bei Satz 16′ der Dualitätssatz in V und in S über Z gilt (vermöge des Operators (44)).

e) **Beziehung zu den Sphärenfaserungen der Sphäre.** Aus Satz 4 und Satz 16′, Bemerkung 2, folgt: liegt die Faserung

$$\mathfrak{S} = \{\Sigma^{n-1}, \Sigma^{r-1}, S^{n-r}\}, \quad n - 1 \geq r \geq 2,$$

vor, so muß $n = \lambda r$, $r = 2r'$, und

$$\mathfrak{H}(S^{n-r}; Z) = \{x^0, x^r, (x^r)^2, \ldots, (x^r)^{\lambda-1}\},$$

man bekommt also die Faserungen

$$\mathfrak{S}_{r,\lambda} = \{\Sigma^{\lambda r-1}, \Sigma^{r-1}, S^{(\lambda-1)r}\}, \quad r = 2r'.$$

Dieses Resultat ist bekannt als Folge aus der Gysinschen exakten Sequenz. Nach ADEM [1], Theorem 2. 2, insbesondere Corollary 2. 3, muß für r die Gleichung $r = 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$, gelten, und für $k \geq 3$ muß $\lambda = 2$, so daß für die Basis S für $k \geq 3$ nur noch Homologiesphären in Betracht kommen. Entsprechend werden nach Satz 1 die möglichen differenzierbaren Modifikationen (31_r), (32_r) eingeschränkt, oder wir können wie in Satz 15 an Stelle dieser Modifikationen vom Abschluß des Euklidischen Raumes sprechen:

Satz 17. *Wird der Euklidische Raum E^n durch die $(n - r)$-dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit S^{n-r} differenzierbar abgeschlossen zur kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit V^n, $n - r \geq 1$, so muß*

$$n = \lambda r, \qquad r = 2^k, \qquad \lambda = 2 \quad \textit{für} \quad k \geq 3,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}(V^n\ ; Z) &= \{x^0, x^r, (x^r)^2, \ldots, (x^r)^{\lambda}\} \\ \mathfrak{H}(S^{n-r}; Z) &= \{x^0, x^r, (x^r)^2, \ldots, (x^r)^{\lambda-1}\} \end{aligned}\right\}, \quad \textit{wenn } r \geq 2, \qquad (43')$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H}(V^n\ \ ;Z_2) &= \{x^0, x^r, (x^r)^2, \ldots, (x^r)^\lambda\}\\ \mathfrak{H}(S^{n-r};Z_2) &= \{x^0, x^r, (x^r)^2, \ldots, (x^r)^{\lambda-1}\}\end{aligned}\right\}, \quad \textit{wenn}\ r \geq 1\,. \qquad (43'')$$

Satz 17 kann folgendermaßen angewandt werden: liegt ein Abschluß von E^n zur kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit V^n vor, und ist für V oder für S eine der in (43″) gegebenen Bedingungen nicht erfüllt, so handelt es sich um einen Abschluß mit Singularitäten, das heißt S ist nicht singularitätenfrei eingelagert in V, oder S ist als ein in V eingelagerter Raum keine Mannigfaltigkeit. S ist keine orientierbare Mannigfaltigkeit, falls eine Bedingung in (43′) verletzt wird. Zu Satz 17 gilt betreffend die Differenzierbarkeit dieselbe Bemerkung wie zu Satz 16′ (Bemerkung 2 in d)).

§ 11. Höherdimensionale Hopfsche Bäume

a) Wir betrachten allgemeine Modifikationen (31), (32), in denen V eine Homologiemannigfaltigkeit ist, und S sich zusammensetzt aus mehreren Homologiemannigfaltigkeiten $S_1^m, S_2^m, \ldots, S_t^m$, $m = n - r$: S ist ein zusammenhängender Teilraum von V, welcher die Vereinigung ist von t Komponenten S_ϱ, $\varrho = 1, 2, \ldots, t$, es ist also

$$S^m = S_1^m \cup S_2^m \cup \ldots \cup S_t^m = \bigcup_{\varrho=1}^{t} S_\varrho^m .$$

Weiter soll der Durchschnitt zweier Komponenten S_ϱ und S_σ für $\varrho \neq \sigma$ höchstens aus endlich vielen Punkten bestehen, das heißt es ist

$$S_{\varrho\sigma}^0 = S_\varrho^m \cap S_\sigma^m = \text{nulldimensionaler Zyklus für } \varrho \neq \sigma\,, \qquad (45)$$

wo zu den nulldimensionalen Zyklen auch der Zyklus, bestehend aus der leeren Punktmenge, gerechnet wird. Es kann sowohl in V wie in jeder einzelnen Komponente S_ϱ der Poincarésche Dualitätssatz verwendet werden. Es gelten (33*), (33′). Außerdem soll die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$z_\varrho^s z_\sigma^{n-s} = 0 \ \text{ für } n-1 \geq s \geq 1,\ z_\varrho^s \in H^s(S_\varrho),\ z_\sigma^{n-s} \in H^{n-s}(S_\sigma),\ \varrho \neq \sigma, \qquad (46)$$

das Produkt in V genommen. Es werden wegen (33*) wie bei (35) die Cohomologieklassen von V identifiziert mit den mittels der Inklusionsabbildung entsprechenden von S, und mit $z_\varrho^s \in H^s(S_\varrho)$ meinen wir, daß das Element z_ϱ^s durch eine Cohomologieklasse in S_ϱ induziert wird. In der hier beschriebenen Situation gilt:

Satz 18: *Liegt die folgende Modifikation vor:*

$$\Phi : (\overline{U}^n, S^{n-r}) \to (U^n, p)\,, \tag{$31_{r,t}$}$$

oder

$$\Phi : (V^n, S^{n-r}) \to (\Sigma^n, p)\,, \tag{$32_{r,t}$}$$

$$S^{n-r} = \bigcup_{\varrho=1}^{t} S_\varrho^{n-r}\,,$$

$$S_{\varrho\sigma}^0 = S_\varrho^{n-r} \cap S_\sigma^{n-r} = \textit{nulldimensionaler Zyklus für } \varrho \neq \sigma\,, \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} &z_\varrho^s z_\sigma^{n-s} = 0 \quad \textit{für} \quad n-1 \geq s \geq 1,\ z_\varrho^s \in H^s(S_\varrho),\\ &z_\sigma^{n-s} \in H^{n-s}(S_\sigma),\ \varrho \neq \sigma\,, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

V, S_ϱ Homologiemannigfaltigkeiten, $r \geq 2$, so wird $n = \lambda r$, und

$$\mathfrak{H}(S_\varrho^{n-r}; Z_2) = \{x^0, x_\varrho^r, (x_\varrho^r)^2, \ldots, (x_\varrho^r)^{\lambda-1}\}\ ;$$

ist S_ϱ orientierbar, $n - r \geq 1$, so ist $n = \lambda r$, $r = 2r'$, und

$$\mathfrak{H}(S_\varrho^{n-r}; K) = \{x^0, x_\varrho^r, (x_\varrho^r)^2, \ldots, (x_\varrho^r)^{\lambda-1}\}\,.$$

Zusatz: *Ist in Satz* 18 $n = 2r \geq 2$, *so wird S_ϱ eine Homologiesphäre über Z_2 bzw. über K, auch wenn* (46) *nicht erfüllt ist.*

Handelt es sich um eine «differenzierbare» Modifikation $(31_{r,t})$ bzw. $(32_{r,t})$, das heißt sind in $(32_{r,t})$ V und S_ϱ, $\varrho = 1, 2, \ldots, t$, kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten und die Einlagerungen $S_\varrho \subset V$ differenzierbar regulär, und ist Σ^n die n-Sphäre, so wird wie in § 10 d) bei Satz 16 eingesehen, daß wegen $r \geq 2$ S_ϱ orientierbar wird für alle ϱ. Denn das «Normalenbündel» von S in $\overline{U}^n$ bzw. in V liefert eine Sphärenfaserung von Σ^{n-1} mit Singularitäten über der Menge $\bigcup_{\varrho\neq\sigma} S_{\varrho\sigma}^0$, bestehend aus höchstens endlich vielen Punkten, so daß die Orientierungen von Σ^{n-1} und der Fasern Σ^{r-1} eine Orientierung in jeder Komponente S_ϱ induzieren. Somit ist in Satz 18 die Bedingung «S_ϱ orientierbar» für alle ϱ erfüllt, wenn wir differenzierbare Modifikationen $(31_{r,t})$, $(32_{r,t})$ betrachten.

Wir werden sehen: der Cohomologiering $\mathfrak{H}(S)$ wird gleich der direkten Summe der Cohomologieringe $\mathfrak{H}(S_\varrho)$, und wegen (33′) ebenso $\mathfrak{H}^{n-1}(V)$, das heißt die additive Cohomologiegruppe $H^k(S)$, $k \geq 1$, ist gleich der direkten Summe der Gruppen $H^k(S_\varrho)$, $\mathfrak{H}(S_\varrho)$ ist additiv und multiplikativ isomorph eingebettet in $\mathfrak{H}(S)$, und es gilt

$$z_\varrho^u z_\sigma^v = 0 \text{ für } u \geq 1,\ v \geq 1,\ z_\varrho^u \in H^u(S_\varrho),\ z_\sigma^v \in H^v(S_\sigma),\ \varrho \neq \sigma, \tag{46′}$$

das Produkt in S genommen. (46′) folgt aus (45).

Da $\mathfrak{H}(S)$ gleich der direkten Summe der Ringe $\mathfrak{H}(S_\varrho)$ ist, wird S aus den Komponenten S_ϱ so zusammengesetzt, daß beim Aufbau von S aus den einzelnen Komponenten keine neuen Zyklen entstehen: das Diagramm[6]) von S enthält keine Zyklen. Das Diagramm von S ist ein Streckenkomplex. Jeder Komponente S_ϱ entspricht im Diagramm ein Eckpunkt und umgekehrt, und zwei Eckpunkte im Diagramm werden durch eine k-fach gezählte Kante verbunden, wenn die entsprechenden Komponenten in S k Punkte gemeinsam haben. Wie wir soeben festgestellt haben, können zwei Eckpunkte im Diagramm durch höchstens eine einfach gezählte Kante verbunden werden, und das Diagramm enthält keine Zyklen, es handelt sich also um einen Baum:

Satz 19. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 18 *ist für die Modifikationen* $(31_{r,t})$, $(32_{r,t})$ *das Diagramm von S ein Baum* (HOPF [24]).

Dies folgt auch direkt daraus, daß der Umgebungsrand von S^{n-r}, $r \geq 2$, in $\overline{U}^n$ bzw. in V die Sphäre Σ^{n-1}, $n \geq 4$, ist: jede geschlossene Kurve auf S läßt sich innerhalb S auf einen Punkt zusammenziehen. Satz 19 ist richtig unabhängig von der Gültigkeit von (46). Wesentlich ist die Voraussetzung $r \geq 2$. In Anlehnung an das Diagramm nennen wir die hier betrachteten Gebilde S^{n-r}, $r \geq 2$, *σ-Bäume.*

b) **Beweis zu Satz 18:** Mit Hilfe des Pendelverfahrens.

1. J sei wie immer Z_2 oder K. Es sind die Ringe $\mathfrak{H}(S_\varrho; J)$ und $\mathfrak{H}(S; J)$ zu bestimmen. Es genügt, die Modifikation $(32_{r,t})$ zu betrachten. Es ist $r \geq 2$.

2. Ist $1 \leq s \leq r-1$, so liefert das Pendelverfahren, beginnend mit $H^{n-s}(S)$,
$$H^k(V; J) \cong H^k(S; J) = 0$$
für $k \not\equiv 0 \mod r$ und für $n - k \not\equiv 0 \mod r$, $k \leq n/2$, genau wie im Beweis zu Lemma 3, und dies gilt unabhängig von (46). Es wird dabei der Poincarésche Dualitätssatz in V und in den einzelnen Komponenten S_ϱ benutzt. Man erkennt: es muß $r \leq n/2$, und der Zusatz ist als richtig erwiesen. Insbesondere folgt $H^1(S) = 0$, und damit Satz 19.

3. x^0 ist die nulldimensionale Fundamentalklasse von V und ebenso diejenige von S_ϱ für alle ϱ. Dann ist $x^n = D_V x^0$ die n-dimensionale Fundamentalklasse von V, und $x_\varrho^{n-r} = D_{S_\varrho} x^0$ ist die $(n-r)$-dimensionale Fundamentalklasse von S_ϱ. Wegen 1., 2., (45), (33*) bilden die t Elemente x_1^{n-r}, x_2^{n-r}, $\ldots$, x_t^{n-r} eine Basis in $H^{n-r}(S)$ und in $H^{n-r}(V)$. Der Operator D_V liefert die Elemente x_ϱ^r:
$$x_\varrho^r = D_V x_\varrho^{n-r}, \text{ so daß } x_\varrho^r x_\sigma^{n-r} = \delta_{\varrho\sigma} x^n. \tag{47}$$

6) Bei HOPF [24] als «Nerv» bezeichnet.

Die Elemente x_ϱ^r bilden eine Basis in $H^r(V)$ und nach (33*) ebenso in $H^r(S)$. Wegen (45), (46), (47) liegt x_ϱ^r in $H^r(S_\varrho)$. Nun wenden wir in jeder Komponente S_ϱ den Operator D_{S_ϱ} an:

$$x_\varrho^r = D_{S_\varrho} x_\varrho^{n-2r},$$

so daß $x_\varrho^{n-2r} \in H^{n-2r}(S_\varrho)$, und wegen (46′) wird

$$x_\varrho^r x_\sigma^{n-2r} = \delta_{\varrho\sigma} x_\varrho^{n-r},$$

das Produkt in S genommen. Die Elemente x_ϱ^{n-2r} bilden also eine Basis in $H^{n-2r}(S)$ und damit wegen (33*) auch in $H^{n-2r}(V)$. Jetzt kommt wieder der Operator D_V an die Reihe, welcher die Basiselemente $x_\varrho^{2r} \in H^{2r}(S_\varrho)$ liefert (mit Hilfe von (33*), (45) und (46)), worauf von neuem die Operatoren D_{S_ϱ} verwendet werden, usw.

4. Damit sich das Pendelverfahren, wie es in 2. und 3. beschrieben wird, in der Mitte schließt, muß $n = \lambda r$ sein. Dies wird wie im Beweis zu Lemma 3 eingesehen.

5. Es folgt nun wie bei den Sätzen 13 und 16, daß

$$\mathfrak{H}(S_\varrho^{n-r}; J) = \{x^0, x_\varrho^r, (x_\varrho^r)^2, \ldots, (x_\varrho^r)^{\lambda-1}\},$$

und die obige Konstruktion zeigt, daß $\mathfrak{H}(S; J)$ gleich der direkten Summe der Ringe $\mathfrak{H}(S_\varrho; J)$ ist. Ist S_ϱ orientierbar und gilt $r \leq n-1$, so muß $r = 2r'$, was wie bei (37_r) gezeigt wird. Dazu genügt, daß unter den t Komponenten S_ϱ eine einzige orientierbar ist.

Bemerkung 1. Liegen solche orientierbaren Homologiemannigfaltigkeiten vor, für welche der Poincarésche Dualitätssatz mit Hilfe von (44) über Z gilt, das heißt kann man an Stelle der Operatoren D_V, D_{S_ϱ} die durch (44) definierten entsprechenden Dualitätsoperatoren nehmen (wie dies für kompakte orientierbare Mannigfaltigkeiten der Fall ist), so wird analog zur obigen Konstruktion der Cohomologiering von S_ϱ über Z gewonnen. Es muß dann für $r \leq n-1$ $r = 2r'$, und $\mathfrak{H}(S_\varrho; Z)$ hat dieselbe Struktur wie $\mathfrak{H}(S_\varrho; K)$.

Bemerkung 2. Falls der Dualitätssatz über Z in V und in S_ϱ verwendet werden kann, gelten wie in § 10 e) wegen des Satzes von Adem für r und für λ dieselben Gleichungen wie in Satz 17.

Bemerkung 3. Ist $n = 2r$, so ist S_ϱ nach dem Zusatz zu Satz 18 eine r-Homologiesphäre über Z_2 bzw. K, unabhängig von (46). Für $n = 4$, $r = 2$ erhält man im differenzierbaren Fall für S^2 Sphärenbäume, in welchen alle Komponenten S_ϱ^2 2-Sphären sind, und im Falle komplexer lokaler Modifikation ergeben sich die von HOPF in [23], [24] beschriebenen Sphärenbäume. – Da nun (46) im allgemeinen nicht gilt, sind zur Bestimmung des gesamten Cohomologieringes $\mathfrak{H}(V; J)$ spezielle Betrachtungen nötig. Liegt der topologische Fall vor (V, S_ϱ kompakte Mannigfaltigkeiten), so handelt es sich um die Bestimmung der Schnittzahlen in V.

c) Analog zur obigen Methode können an Stelle der σ-Bäume solche Gebilde behandelt werden, in denen die Komponenten nicht alle dieselbe Dimension haben. Ist weiter zugelassen, daß der Durchschnitt zweier verschiedener Komponenten in S ein höherdimensionaler Komplex ist, ist also (45) nicht mehr erfüllt, so kann das Pendelverfahren auch in diesem Fall benutzt werden. Für $S^m = S^{n-r} = \bigcup_{\varrho=1}^{t} S_\varrho^{m_\varrho}$, $m_\varrho = n - r_\varrho$, $r = \mathrm{Min}\,(r_\varrho)$, folgen mit Hilfe einer zu 2. in b) analogen Überlegung bei Verwendung der untenstehenden Voraussetzung $(\overline{45})$ die Beziehungen $H^k(S) = 0$ für $k \not\equiv 0 \mod r$ und $H^{m_\varrho - k}(S_\varrho) = 0$ für $k \not\equiv 0 \mod r$, $k \leq n/4$, und $r_\varrho \leq n/2$ für alle ϱ. Satz 18 ist in dem folgenden Satz enthalten.

Satz 18'. *Es seien in den Modifikationen* $(31_{r,t})$, $(32_{r,t})$ *die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$S^m = \bigcup_{\varrho=1}^{t} S_\varrho^{m_\varrho},$$

V, S_ϱ Homologiemannigfaltigkeiten, $m = n - r$, $m_\varrho = n - r_\varrho$, $r = \mathrm{Min}(r_\varrho) \geq 1$; *für* $S_{\varrho\sigma} = S_\varrho^{m_\varrho} \cap S_\sigma^{m_\sigma} = d_{\varrho\sigma}$*-dimensionaler Komplex ist* $d = \mathrm{Max}_{\varrho \neq \sigma}\,(d_{\varrho\sigma})$ *und*

$$H^k(S_\varrho) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq d\,; \tag{$\overline{45}$}$$

es ist

$$\left.\begin{aligned} &z_\varrho^s z_\sigma^{n-s} = 0 \ \text{ für } \ n - r \geq s \geq r, \\ &z_\varrho^s \in H^s(S_\varrho), \ z_\sigma^{n-s} \in H^{n-s}(S_\sigma), \ \varrho \neq \sigma\,. \end{aligned}\right\} \tag{$\overline{46}$}$$

Dann wird $n = \lambda_\varrho r_\varrho$, *und*

$$\mathfrak{H}(S_\varrho^{m_\varrho}; Z_2) = \{x^0, x_\varrho^{r_\varrho}, (x_\varrho^{r_\varrho})^2, \ldots, (x_\varrho^{r_\varrho})^{\lambda_\varrho - 1}\}\,;$$

ist S_ϱ orientierbar, $m_\varrho \geq 1$, *so folgt* $n = \lambda_\varrho r_\varrho$, $r_\varrho = 2r'_\varrho$, *und*

$$\mathfrak{H}(S_\varrho^{m_\varrho}; K) = \{x^0, x_\varrho^{r_\varrho}, (x_\varrho^{r_\varrho})^2, \ldots, (x_\varrho^{r_\varrho})^{\lambda_\varrho - 1}\}\,.$$

Zusatz: *Ist* $n = 2r_\varrho = 2r$ *für alle* ϱ, *so werden alle Komponenten* S_ϱ *Homologiesphären über* Z_2 *bzw. über* K, *auch wenn die Bedingung* $(\overline{46})$ *weggelassen wird.*

Der Beweis zu Satz 18' verläuft parallel demjenigen zu Satz 18. Es gelten die den Bemerkungen 1 und 2 in b) entsprechenden Aussagen hier ebenso.

Falls die Bedingungen $(\overline{45})$ und $(\overline{46})$ weggelassen werden, können im allgemeinen keine so weitgehenden Behauptungen über die Cohomologiestruktur von S gemacht werden. Vergleiche dazu § 16 c). Man denke zum Beispiel an das topologische Produkt $M^n = \Sigma_1^{m_1} \times \Sigma_2^{m_2} \times \ldots \times \Sigma_t^{m_t}$ der t Sphären $\Sigma_\varrho^{m_\varrho}$, welches durch lokale Modifikation aus der Sphäre Σ^n, $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_t$, erhalten wird. Dort ist [7])

$$S^m = \bigcup_{\varrho=1}^{t} \Sigma_1^{m_1} \times \Sigma_2^{m_2} \times \ldots \times \widehat{\Sigma_\varrho^{m_\varrho}} \times \ldots \times \Sigma_t^{m_t}.$$

Weitere Beispiele liefern die Produkte $M^n = V_1^{m_1} \times V_2^{m_2} \times \ldots \times V_t^{m_t}$, wo jedes $V_\varrho^{m_\varrho}$ durch lokale Modifikation aus Σ^{m_ϱ} gewonnen wird.

§ 12. Modifikation durch Ersetzen einer Mannigfaltigkeit

a) **Allgemeine Modifikation.** V^n, W^n seien in der allgemeinen Modifikation (1) kompakte Mannigfaltigkeiten, so daß die Poincaréschen Dualitätsoperatoren D_V, D_W mit Hilfe von zueinander dualen Zellteilungen erhalten werden (siehe [28], p. 188). S^m, A^q seien Teilräume in V bzw. in W (V, W sind Polyeder, S und A Teilpolyeder in V bzw. W). Es sei

$$m = \dim S, \quad q = \dim A, \quad m \geq q. \tag{48}$$

Wir treiben Cohomologietheorie über dem Koeffizientenbereich J, $J = Z_2$ oder $J = K$. Aus (29) und (48) folgt

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & H^k(V,S) & \xrightarrow{j^*} & H^k(V) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow \Phi^* & & & & \\ 0 & \rightarrow & H^k(W,A) & \xrightarrow{j^*} & H^k(W) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad k \geq m+2\,, \tag{49}$$

es gilt also

$$H^k(V) \cong H^k(W), \quad j^* H^k(V,S) \cong j^* H^k(W,A) \quad \text{für} \quad k \geq m+2, \tag{49'}$$

wo der erste Isomorphismus in (49′) durch

$$\varphi^*\colon H^k(W) \to H^k(V), \quad \varphi^* = j^* \Phi^* j^{*-1}, \tag{49''}$$

gegeben wird.

(49) liefert bei Anwendung des Dualitätssatzes für V und für W (mit Hilfe

---

[7]) Das Zeichen $\wedge$ über einem Symbol bedeutet hier das Weglassen des betreffenden Symbols.

der durch duale Zellteilungen definierten Operatoren D_V, D_W)

$$H^k(V) \cong H^k(W), \quad j^*H^k(V,S) \cong j^*H^k(W,A) \text{ für } k \leq n-(m+2). \tag{50}$$

Begründung zu (50): da $V - S$ mit $W - A$ homöomorph ist, identifizieren wir $V - S$ mit $W - A$; die Isomorphismen φ^* in (49″) induzieren dann mittels der Dualität in V und in W Isomorphismen von $H^k(W)$ auf $H^k(V)$ für $k \leq n-(m+2)$:

$$\varphi^*\colon H^k(W) \to H^k(V), \qquad k \leq n-(m+2),$$

die durch Homomorphismen $C^k(W) \to C^k(V)$ gegeben werden, welche auf $V - S = W - A$ durch die Identität dargestellt werden; daher ist auch für $k \leq n-(m+2)$ $j^*\Phi^* = \varphi^* j^*$, wie dies für $k \geq m+2$ nach (49″) der Fall ist. $C^k(M)$ ist die k-te Cokettengruppe von M. Damit gilt auch (50). Aus (50) folgt mit Hilfe von (28), (29)

$$H^k(S) \cong H^k(A) \text{ für } k \leq n-(m+3), \tag{51}$$

denn es ist wegen (29)

$$\begin{aligned} H^k(S) &\cong i^*H^k(V) + \delta H^k(S) \\ &\cong H^k(V) - j^*H^k(V,S) + H^{k+1}(V,S) - j^*H^{k+1}(V,S), \\ H^k(A) &\cong i^*H^k(W) + \delta H^k(A) \\ &\cong H^k(W) - j^*H^k(W,A) + H^{k+1}(W,A) - j^*H^{k+1}(W,A), \end{aligned}$$

und darin (50), (28) berücksichtigt, ergibt (51).

Wir haben also erhalten:

Satz 19. *Liegt die Modifikation*

$$\Phi\colon (V^n, S^m) \to (W^n, A^q) \tag{1}$$

vor, $m \geq q$, *V und W kompakte Mannigfaltigkeiten, S und A Teilräume in V bzw. in W, so gilt*

$$H^k(S^m; J) \cong H^k(A^q; J) \textit{ für } k \leq n-(m+3). \tag{51}$$

$J = K$, *falls* V, W orientierbar, $J = Z_2$ *sonst.*

Korollar 1. Ist unter den Voraussetzungen des Satzes 19 $2m+3 \leqslant n$, so folgt

$$H^k(S^m; J) \cong H^k(A^q; J) \text{ für alle } k. \tag{51'}$$

Korollar 2. Sind unter den Voraussetzungen des Satzes 19 auch S und A kompakte Mannigfaltigkeiten, und ist $2m+3 \leq n$, so ist $m = q$, und es gilt (51′). $J = K$, wenn V, W, S, A orientierbar sind, $J = Z_2$ sonst.

Korollar 3. Sind unter den Voraussetzungen des Satzes 19 S und A Homologiemannigfaltigkeiten, und ist $m = q$, $3m + 6 \leq 2n$, so gilt (51′), J wie in Korollar 2 gewählt.

b) **Beziehung zu den Sphärenfaserungen, Modifikation durch Faserung des Umgebungsrandes.** Ist A^q eine Mannigfaltigkeit und der Umgebungsrand N^{n-1} von A in W^n ebenfalls, so liefert nach Satz 4 jede Sphärenfaserung von N mit der Basis S^m eine Modifikation (1), worin S eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit wird. Nun gehen wir von einer Mannigfaltigkeit N^{n-1} aus und setzen voraus, daß N in Sphären Σ^{n-q-1} mit der Basis A^q gefasert werden kann. Wir haben in § 5 b) gesehen: es kann in diesem Fall N immer als Umgebungsrand von A in einer geschlossenen Mannigfaltigkeit W gedeutet werden, und alle Sphärenfaserungen von N erzeugen nach Satz 4 Modifikationen dieser Mannigfaltigkeit. Somit haben Satz 19 und die Korollare 2 und 3 zur Folge: ist das Sphärenbündel

$$\mathfrak{N}(A^q) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-q-1}, A^q\} \tag{7}$$

gegeben, N kompakte Mannigfaltigkeit, und läßt sich die Mannigfaltigkeit N auf eine weitere Art in Sphären fasern:

$$\mathfrak{N}(S^m) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, S^m\}\,, \quad m \geq q\,, \tag{16}$$

so gilt (51) für $J = K$, falls $\mathfrak{N}(S)$ und $\mathfrak{N}(A)$ orientierbar sind, für $J = Z_2$ sonst; ist $2m + 3 \leq n$, so ist $m = q$ und es ist (51′) erfüllt; wird $m = q$, $3m + 6 \leq 2n$ vorausgesetzt, so folgt ebenfalls (51′). Ein Bündel $\mathfrak{N}(S)$ heißt wie in § 6 b) orientierbar, wenn mit Hilfe einer Orientierung in S und einer solchen in der Faser Σ eine Orientierung in N definiert werden kann, das heißt die Basis ist orientierbar und $H(\Sigma; K)$ als Garbe über S trivial.

Nun wollen wir dieses Resultat mit Hilfe der Gysinschen exakten Sequenz direkt herleiten. Es sei

$$m = n - r, \quad q = n - s; \quad s \geq r \geq 2, \text{ so daß } m \geq q\,.$$

Dann liefern die Gysinschen exakten Sequenzen (vgl. [7], X–9; [6], IX–8) für $\mathfrak{N}(A)$ und $\mathfrak{N}(S)$ zusammen mit dem Homöomorphismus $\tilde{\varphi}\colon \bar{N}^{n-1} \to N^{n-1}$ (hier ist $\bar{N} = N$, und $\tilde{\varphi}$ ist die Identität):

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & \uparrow & & & & \\
\ldots & \to & H^k(S) & \to & H^{k+r}(S) & \to & H^{k+r}(N) & \to & H^{k+1}(S) & \to & \ldots \\
 & & & & & & \uparrow \tilde{\varphi}^* & & & & \\
\ldots & \to & H^{k+r-s}(A) & \to & H^{k+r}(A) & \to & H^{k+r}(N) & \to & H^{k+r-s+1}(A) & \to & \ldots \\
 & & & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & &
\end{array}\right\}. \tag{52}$$

Der Koeffizientenbereich ist $J = K$, wenn die beiden Bündel $\mathfrak{N}(A)$ und $\mathfrak{N}(S)$ orientierbar sind, $J = Z_2$ sonst. Für $k + r \geq q + 1$, das heißt für $k \geq q - r + 1 = m + q + 1 - n$, folgt aus (52):

$$\left.\begin{array}{l} \ldots \to H^k(S) \to H^{k+r}(S) \to H^{k+r-s+1}(A) \to H^{k+1}(S) \to \ldots \\ \text{für } k \geq m + q + 1 - n\,. \end{array}\right\} \qquad (52')$$

(52′) liefert

$$H^{k+1}(S) \cong H^{k+r-s+1}(A) \text{ für } k + r \geq m + 1\,,$$

und der Dualitätssatz für S und für A ergibt

$$H^k(S) \cong H^k(A) \text{ für } k \leq n - (m + 2)\,. \qquad (\overline{51})$$

$(\overline{51})$ entspricht dem Resultat (51), und es gilt also der folgende Satz:

Satz 20. *Sind die beiden Sphärenbündel*

$$\mathfrak{N}(A^q) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-q-1}, A^q\}\,, \qquad (7)$$

$$\mathfrak{N}(S^m) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, S^m\}\,, \quad m \geq q\,, \qquad (16)$$

gegeben, N kompakte Mannigfaltigkeit, so gilt

$$H^k(S^m; J) \cong H^k(A^q; J) \text{ für } k \leq n - (m + 2)\,. \qquad (\overline{51})$$

$J = K$, falls $\mathfrak{N}(A)$ und $\mathfrak{N}(S)$ orientierbar sind, $J = Z_2$ sonst.

Korollar. Ist unter den Voraussetzungen des Satzes 20 $2m + 2 \leqslant n$, so ist $m = q$, und es gilt

$$H^k(S^m; J) \cong H^k(A^q; J) \text{ für alle } k\,. \qquad (\overline{51}')$$

Wird $m = q$ und $3m + 4 \leq 2n$ vorausgesetzt, so folgt ebenfalls $(\overline{51}')$.

Bemerkung 1. Sind $\mathfrak{N}(A)$ und $\mathfrak{N}(S)$ über Z orientierbar, so sind Satz 20 und sein Korollar für $J = Z$ richtig (vgl. die oben zitierten Arbeiten [6] und [7]).

Bemerkung 2. Sind (7) und (16) «Homologiesphärenfaserungen», das heißt Faserungen durch Homologiesphären über den Homologiemannigfaltigkeiten A und S, so gelten Satz 20 und sein Korollar ebenso, und Bemerkung 1 bleibt richtig. Auch dies geht aus [6], [7] hervor.

Satz 20 impliziert Satz 19 für den Fall einer Modifikation mit Hilfe von Sphärenfaserungen des Umgebungsrandes, genauer: einer Modifikation, in welcher sowohl zu A wie zu S ein Sphärenbündel $\mathfrak{N}(A)$ bzw. $\mathfrak{N}(S)$ gehört (mit $s \geq r \geq 2$), so daß kraft dieser Faserungen $W - \tilde{A}$ und $V - \tilde{S}$ zu

W und zu V abgeschlossen werden. Dabei steht an Stelle von (51) die stärkere Aussage $(\overline{51})$, und dementsprechend gelten auch stärkere Korollare 2 und 3. Es ist $J = K$ und nach der Bemerkung 1 sogar $J = Z$, falls V, W, S, A orientierbare Mannigfaltigkeiten sind, $J = Z_2$ sonst. Nach Satz 1 kann Satz 20 insbesondere auf die differenzierbare Modifikation angewandt werden. Die Beweismethode zu Satz 19 ist deshalb von Interesse, weil es a priori nicht klar ist, daß man unter den Voraussetzungen des Satzes 19 das Resultat (51) erhält, ein Cohomologieresultat, das für die entsprechenden Homologiesphärenfaserungen ebenso erhalten wird.

In Satz 19 können S und A aus mehreren Komponenten bestehen. Nach (51) ist

$$H^0(S^m) \cong H^0(A^q) \text{ für } r \geq 3\,, \tag{51⁰}$$

das heißt die Anzahl der Komponenten von S ist gleich der Anzahl der Komponenten von A, falls $r = n - m \geq 3$. Handelt es sich um Modifikation durch Faserung des Umgebungsrandes, wie dies soeben beschrieben wurde, und besitzen S und A mehrere Komponenten (jede Komponente von S und von A ist eine Mannigfaltigkeit), so gilt dieselbe Aussage für $r \geq 2$.

Wir sehen: die Isomorphismen

$$\delta H^k(S^m) \cong \delta H^k(A^q) \text{ für } k \leq n - (m+3)$$

sind eine Folge von (50). Wenn wir $(\overline{51})$ hinzunehmen, erhalten wir dieselben Isomorphismen für $k \leq n - (m+2)$. Daraus folgt: sind die Polyeder S^m, A^m $(m = q)$ m-Zyklen in V bzw. in W, und ist $2m + 3 \leq n$, so sind sie entweder beide homolog null in V bzw. in W oder beide nicht homolog null. Bei Modifikation durch Faserung des Umgebungsrandes gilt diese Aussage für $2m + 2 \leq n$. Vgl. auch § 14 b).

Bemerkung zur Orientierbarkeit. Für Modifikationen durch Faserung des Umgebungsrandes in Sphären der Dimension ≥ 1 gilt: ist der Umgebungsrand N einfach zusammenhängend, so sind entweder S und A beide orientierbar oder beide nicht orientierbar; ist N einfach zusammenhängend und orientierbar, so sind S und A orientierbar. Ferner gilt für jede Modifikation: ist $n - m \geq 2$, $m \geq q$, so sind entweder V und W beide orientierbar oder beide nicht orientierbar.

c) **Zwei Spezialfälle** (1. $S = \Sigma$, 2. $A = \Sigma$). Als weitere Anwendungen von (52) auf Modifikationen durch Sphärenfaserung fassen wir die Fälle $S^m = \Sigma^m$ und $A^q = \Sigma^q$ näher ins Auge.

1. Es sei S^m die m-Homologiesphäre Σ^m für $m \geq 1$ und die Homologiezelle für $m = 0$. Dann ist wegen (52) für $r \geq 2$

$$H^{k+r-s+1}(A^q) = 0 \text{ für } k + r \geq q + 1,\ k + r \neq m,\ k + 1 \neq m,\ k \neq -1,$$

das heißt es ist

$H^k(A^q) = 0$ für $k \geq 2q + 2 - n, \quad k \neq m + q + 1 - n, \quad k \neq q, \quad k \neq 0.$

Daraus folgt: sind die beiden Homologiesphärenfaserungen

$$\mathfrak{N}(A^q) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-q-1}, A^q\},$$

$$\mathfrak{N}(\Sigma^m) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, \Sigma^m\}, \quad n - 2 \geq m \geq q,$$

$3q + 4 \leq 2n$, $2m + q + 2 < 2n$, gegeben, so wird A^q die q-Homologiesphäre über J für $q \geq 1$ bzw. die Homologiezelle über J für $q = 0$ (Anwendung des Dualitätssatzes in A):

$$H^0(A^q; J) \cong H^q(A^q; J) \cong J; \quad H^k(A^q; J) = 0 \text{ für } k \neq 0, q;$$

$J = K$, falls die beiden Bündel orientierbar sind, $J = Z_2$ sonst. Somit können wir sagen:

Satz 21. *Die berandete Mannigfaltigkeit $W - \tilde{A}$ werde durch die Sphärenfaserung $\mathfrak{N}(A)$ zur kompakten Mannigfaltigkeit W abgeschlossen, und durch die Sphärenfaserung $\mathfrak{N}(S)$ zur kompakten Mannigfaltigkeit V, so daß die Modifikation*

$$\Phi: (V^n, S^m) \to (W^n, A^q) \tag{1}$$

vorliegt. Ist nun S^m die m-Sphäre Σ^m für $m \geq 1$ oder ein Punkt für $m = 0$, und ist

$$3q + 4 \leq 2n, \quad 2m + q + 3 \leq 2n, \quad m \geq q,$$

so wird A eine q-Homologiesphäre über J für $q \geq 1$ bzw. ein Punkt für $q = 0$; $J = K$, wenn V, W, A orientierbar sind, $J = Z_2$ sonst.

Falls V, W, A orientierbar sind, kann in Satz 21 auch $J = Z$ genommen werden.

2. Es sei A^q die q-Homologiesphäre Σ^q für $q \geq 1$ und die Homologiezelle für $q = 0$. In diesem Fall ergibt (52) (es ist immer $n - 2 \geq m \geq q$)

$H^k(S^m) \cong H^{k+r}(S^m)$ für $k + r \geq q + 2$, $k + r - s \neq 0, q$, $k + r - s + 1 \neq 0, q$.

Es folgt: sind die beiden Homologiesphärenbündel

$$\mathfrak{N}(\Sigma^q) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-q-1}, \Sigma^q\},$$

$$\mathfrak{N}(S^m) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-m-1}, S^m\}, \quad n - 2 \geq m \geq q,$$

gegeben, und ist

$$3m + 1 \leq 2n, \quad m + 2q + 3 \leq 2n, \quad m + 1 \leq 2q,$$

so wird S^m die m-Homologiesphäre über J (es wird $m \geq q \geq 1$); $J = K$, falls es sich um orientierbare Bündel handelt, $J = Z_2$ sonst. Dies wird eingesehen mit Hilfe des Dualitätssatzes in S und der Beziehung $H^k(S) \cong H^{k+r}(S)$ für $m/2 \leq k \leq m - 1$. Wir erhalten analog zu Satz 21:

Satz 22. *Ist die Modifikation*

$$\Phi\colon (V^n, S^m) \to (W^n, A^q) \tag{1}$$

wie in Satz 21 *durch die Sphärenbündel* $\mathfrak{N}(A)$ *und* $\mathfrak{N}(S)$ *gegeben, ist* $A^q = \Sigma^q$ *die q-Sphäre* $(q \geq 1)$, *und ist*

$$3m + 1 \leq 2n, \quad m + 2q + 3 \leq 2n, \quad m + 1 \leq 2q, \quad m \geq q,$$

so wird S^m *die m-Homologiesphäre über* J; $J = K$, *wenn* V, W, S *orientierbar sind*, $J = Z_2$ *sonst.*

Wenn V, W, S orientierbar sind, kann in Satz 22 $J = Z$ genommen werden. Wie bei Satz 20 können die Sätze 21 und 22 wegen Satz 1 auf die differenzierbare Modifikation angewandt werden.

d) **Anhang: Verwendung der Homotopiesequenzen.** Wenn es sich um Modifikation durch Faserung des Umgebungsrandes handelt, wie wir es in b) beschrieben haben, so spielen neben den Gysinschen Sequenzen die exakten Homotopiesequenzen der beiden Faserungen (7) und (16) eine Rolle (vgl. [31], p. 90). Wir bekommen an Stelle von (52)

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & \downarrow & & & \\
\pi_1(S^m) \leftarrow & \ldots & \leftarrow \pi_{k-1}(\Sigma^{r-1}) & \leftarrow & \pi_k(S^m) & \leftarrow & & \pi_k(N^{n-1}) & \leftarrow & \pi_k(\Sigma^{r-1}) \leftarrow & \ldots \\
 & & & & & & & \downarrow \tilde{\varphi}_* & & & \\
\pi_1(A^q) \leftarrow & \ldots & \leftarrow \pi_{k-1}(\Sigma^{s-1}) & \leftarrow & \pi_k(A^q) & \leftarrow & & \pi_k(N^{n-1}) & \leftarrow & \pi_k(\Sigma^{s-1}) \leftarrow & \ldots \\
 & & & & & & & \downarrow & & & \\
 & & & & & & & 0 & & &
\end{array}\right\} .$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{array}{l}
\ldots \leftarrow \pi_{k-1}(\Sigma^{r-1}) \leftarrow \pi_k(S^m) \leftarrow \pi_k(A^q) \leftarrow \pi_k(\Sigma^{r-1}) \leftarrow \ldots \\
\text{für } 2 \leq k \leq s-2\,,
\end{array}\right\} \tag{I}$$

und weiter

$$\pi_k(S^m) \cong \pi_k(A^q) \text{ für } 2 \leq k \leq r - 2 = n - (m + 2)\,. \tag{II}$$

Ferner ist

$$\pi_1(A^q) \cong \pi_1(S^m) \quad \text{für} \quad r \geq 3 . \tag{III}$$

(II) und (III) entsprechen $(\overline{51})$. Setzt man voraus, daß A eine q-Sphäre ist, so daß

$$\pi_k(A^q) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq q-1 ,$$

so folgt aus (I)

$$\pi_k(S^m) \cong \pi_{k-1}(\Sigma^{r-1}) \quad \text{für} \quad 2 \leq k \leq \operatorname{Min}(s-2,\ q-1) .$$

Ist S eine m-Sphäre, so wird wegen (I)

$$\pi_k(A^q) \cong \pi_k(\Sigma^{r-1}) \quad \text{für} \quad 2 \leq k \leq \operatorname{Min}(s-2,\ m-2) .$$

III. Kapitel. Cohomologietheorie der Modifikation mit Abbildung

In diesem Kapitel werden allgemein solche Modifikationen untersucht, bei denen eine Modifikationsabbildung φ existiert. Da jede lokale Modifikation eine Modifikationsabbildung besitzt, sind die Hauptergebnisse über die lokale Modifikation in diesem Kapitel von neuem enthalten.

§ 13. Cohomologieeigenschaften der Modifikation mit Abbildung

a) Wir treiben Cohomologietheorie über dem Koeffizientenbereich J, $J = Z_2$ oder $J = K$. Die Modifikation (1) sei eine allgemeine Modifikation und werde durch die Abbildung φ in (3) induziert. V, W seien n-dimensionale Homologiemannigfaltigkeiten, und S^m, A^q seien Teilräume in V bzw. in W mit $n-1 \geq m \geq q$. Dann hat φ den Abbildungsgrad ± 1: $g(\varphi) = \pm 1$, und daraus folgt nach einem Satz von HOPF in [21]:

$$0 \to H^k(W) \xrightarrow{\varphi^*} H^k(V) . \tag{53}$$

Die Abbildung $\overline{\varphi}$ in (4) induziert die Homomorphismen

$$\overline{\varphi}^* \colon\ H^k(A) \to H^k(S) , \tag{54}$$

und wir erhalten wegen (53), (54), (29):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & & 0 & & \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & H^k(V,S) \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & H^k(V) \arrow[r, "i^*"] & H^k(S) \arrow[r, "\delta"] & H^{k+1}(V,S) \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & H^{k+1}(V) \arrow[r, "i^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & H^k(W,A) \arrow[u, "\Phi^*"] \arrow[r, "j^*"] & H^k(W) \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, "i^*"] & H^k(A) \arrow[u, "\overline{\varphi}^*"] \arrow[r, "\delta"] & H^{k+1}(W,A) \arrow[u, "\Phi^*"] \arrow[r, "j^*"] & H^{k+1}(W) \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, "i^*"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{55}$$

Das Diagramm (55) ist kommutativ, denn die Homomorphismen Φ^*, φ^*, $\overline{\varphi}^*$ werden durch die Abbildung φ induziert. Aus (55) folgt

$$j^* H^{k+1}(V, S) \cong j^* H^{k+1}(W, A)\,,$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} &\delta H^k(S) \cong \delta H^k(A)\,, \\ \text{das heißt}\quad &\Phi^* \delta H^k(A) \cong \delta \overline{\varphi}^* H^k(A) \cong \delta H^k(A) \cong \delta H^k(S)\ . \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Ferner ist wegen (55)

$$j^* H^k(V, S) \cong j^* H^k(W, A)\,,$$

so daß für $L = H^k(V) - \varphi^* H^k(W) \cong H^k(V) - H^k(W)$

$$i^* H^k(V) \cong i^* H^k(W) + L \cong i^* \varphi^* H^k(W) + L \cong \overline{\varphi}^* i^* H^k(W) + L\,. \qquad (57)$$

(57) besagt: $\overline{\varphi}^*$ liefert einen Isomorphismus von $i^* H^k(W)$ in $H^k(S)$. Daraus folgt zusammen mit (56): $\overline{\varphi}^*$ liefert einen Isomorphismus von $H^k(A) - i^* H^k(W)$ in $H^k(S)$, und $\overline{\varphi}^*$ ist ein Isomorphismus von $H^k(A)$ in $H^k(S)$:

Lemma 4. *Liegt die folgende Modifikation vor:*

$$\Phi\colon\ (V^n, S^m) \to (W^n, A^q)\,, \qquad (1)$$

V, W Homologiemannigfaltigkeiten, S und A Teilräume in V bzw. in W, $n - 1 \geq m \geq q$, und wird die Modifikation (1) *durch die Abbildung*

$$\varphi\colon\ V^n \to W^n \qquad (3)$$

induziert, so ist

$$0 \to H^k(W^n) \xrightarrow{\varphi^*} H^k(V^n)\,, \qquad (53)$$

$$0 \to H^k(A^q) \xrightarrow{\overline{\varphi}^*} H^k(S^m)\,. \qquad (58)$$

b) **Lemma 5.** *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 4 *gilt*

$$H^k(V^n) \cong H^k(W^n) + H^k(S^m) - H^k(A^q)\,. \qquad (59)$$

Beweis: (55) lautet bei Berücksichtigung von Lemma 4

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc}
 & 0 & & & & & & 0 & & & \\
 & \uparrow & & & & & & \uparrow & & & \\
\dots\xrightarrow{\delta} & H^k(V, S) & \xrightarrow{j^*} & H^k(V) & \xrightarrow{i^*} & H^k(S) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(V, S) & \xrightarrow{j^*} & H^{k+1}(V) & \xrightarrow{i^*}\dots \\
 & \uparrow\Phi^* & & \uparrow\varphi^* & & \uparrow\overline{\varphi}^* & & \uparrow\Phi^* & & \uparrow\varphi^* & \\
\dots\xrightarrow{\delta} & H^k(W, A) & \xrightarrow{j^*} & H^k(W) & \xrightarrow{i^*} & H^k(A) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(W, A) & \xrightarrow{j^*} & H^{k+1}(W) & \xrightarrow{i^*}\dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}\right\}. \qquad (55')$$

Aus (55') folgt

$$H^k(S) \cong i^* H^k(V) + \delta H^k(S)\,, \qquad H^k(A) \cong i^* H^k(W) + \delta H^k(A)\,,$$

und $\quad j^* H^{k+1}(V,S) \cong j^* H^{k+1}(W,A)\,, \quad H^{k+1}(V,S) \cong H^{k+1}(W,A)\,,$

so daß

$$\delta H^k(S) \cong H^{k+1}(V,S) - j^* H^{k+1}(V,S) \cong H^{k+1}(W,A) - j^* H^{k+1}(W,A) \cong \delta H^k(A),$$

und damit

$$i^* H^k(V) - i^* H^k(W) \cong H^k(S) - H^k(A)\,.$$

Daraus folgt unter erneuter Anwendung von (55')

$$\begin{aligned} H^k(V) &\cong j^* H^k(V,S) + i^* H^k(V) \cong j^* H^k(W,A) + i^* H^k(V) \\ &\cong H^k(W) - i^* H^k(W) + i^* H^k(V) \cong H^k(W) + H^k(S) - H^k(A)\,, \end{aligned}$$

womit (59) bewiesen ist.

c) **Koeffizientenbereich** $J = Z$. Es wurde in a) und in b) $J = K$ bzw. $J = Z_2$ vorausgesetzt. Sind V und W n-dimensionale Homologiemannigfaltigkeiten, die über Z orientierbar sind (das heißt es gilt der Poincarésche Dualitätssatz über Z mit Hilfe der Operatoren (44)), so bleiben unter den Voraussetzungen von Lemma 4 die Beziehungen (53) und (58) über $J = Z$ richtig:

$$\varphi^* H^k(W) \cong H^k(W)\,, \tag{53'}$$

$$\overline{\varphi}^* H^k(A) \cong H^k(A)\,. \tag{58'}$$

Wenn V, W Mannigfaltigkeiten sind, wird (58) bzw. (58') (im orientierbaren Fall über einem beliebigen Koeffizientenbereich) auch sofort so eingesehen: man nimmt offene Umgebungen $\tilde{S}$ von S in V und $\tilde{A}$ in W, verdoppelt $\tilde{S}$ zur kompakten Mannigfaltigkeit $\hat{S}$ und $\tilde{A}$ zu $\hat{A}$, φ induziert eine Modifikationsabbildung $\hat{\varphi}\colon \hat{S} \to \hat{A}$, die Homologiegruppe $H_k(S)$ liegt isomorph in $H_k(\hat{S})$ vermöge der Inklusionsabbildung $i\colon S \to \hat{S}$, ebenso $H_k(A)$ in $H_k(\hat{A})$; dies nützt man dual aus und wendet (53) auf $\hat{\varphi}$ an, woraus (58) folgt.

Nun gilt für einen beliebigen Koeffizientenbereich J: gehört zu einer stetigen Abbildung $\varphi\colon (V,S) \to (W,A)$, V, W, S, A Polyeder, das (kommutative) Homomorphismenschema

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots \xrightarrow{\delta} & H^k(V,S) & \xrightarrow{j^*} & H^k(V) & \xrightarrow{i^*} & H^k(S) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(V,S) & \xrightarrow{j^*} & H^{k+1}(V) & \xrightarrow{i^*} \ldots \\
& \uparrow \Phi^* & & \uparrow \varphi^* & & \uparrow \overline{\varphi}^* & & \uparrow \Phi^* & & \uparrow \varphi^* & \\
\ldots \xrightarrow{\delta} & H^k(W,A) & \xrightarrow{j^*} & H^k(W) & \xrightarrow{i^*} & H^k(A) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(W,A) & \xrightarrow{j^*} & H^{k+1}(W) & \xrightarrow{i^*} \ldots \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}\right\},$$

so führt dies zur exakten Sequenz

$$\left.\begin{array}{l} \ldots \xrightarrow{\tilde{\delta}} H^k(V,S) \,/\, \Phi^* H^k(W,A) \xrightarrow{\tilde{j}^*} H^k(V) \,/\, \varphi^* H^k(W) \xrightarrow{\tilde{i}^*} H^k(S) \,/\, \overline{\varphi}^* H^k(A) \\ \xrightarrow{\tilde{\delta}} H^{k+1}(V,S) \,/\, \Phi^* H^{k+1}(W,A) \xrightarrow{\tilde{j}^*} \ldots \end{array}\right\}.$$

Im Falle einer Modifikation mit Abbildung erhalten wir daraus mit Hilfe von (28)

$$H^k(V) \,/\, \varphi^* H^k(W) \cong H^k(S) \,/\, \overline{\varphi}^* H^k(A)\,, \tag{59'}$$

wobei der Isomorphismus (59′) durch $\tilde{i}^*$ vermittelt wird, und wo zu bemerken ist, daß (59′) bei einer allgemeinen Modifikation mit Abbildung (V, W, S, A Polyeder) gilt, falls (53) und (58) (es genügt (53)) erfüllt sind. (59′) gilt insbesondere über $J = Z$, wenn V und W über Z orientierbare Homologiemannigfaltigkeiten sind. Wegen (53′), (58′), (59′) können wir schreiben:

$$H^k(V) \,/\, H^k(W) \cong H^k(S) \,/\, H^k(A)\,. \tag{59''}$$

Dabei wird $H^k(W)$ durch φ^* in $H^k(V)$ und $H^k(A)$ durch $\overline{\varphi}^*$ in $H^k(S)$ isomorph eingebettet. (59″) stimmt für $J = K$ bzw. $J = Z_2$ mit der Isomorphie (59) überein.

Duale Konstruktion. Gehört zu $\varphi: (V,S) \to (W,A)$ das (kommutative) Homomorphismenschema

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \xleftarrow{\partial} & H_k(V,S) & \xleftarrow{j_*} & H_k(V) & \xleftarrow{i_*} & H_k(S) & \xleftarrow{\partial} & H_{k+1}(V,S) & \xleftarrow{j_*} & H_{k+1}(V) & \xleftarrow{i_*} \ldots \\ & \downarrow \Phi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \overline{\varphi}_* & & \downarrow \Phi_* & & \downarrow \varphi_* & \\ \ldots \xleftarrow{\partial} & H_k(W,A) & \xleftarrow{j_*} & H_k(W) & \xleftarrow{i_*} & H_k(A) & \xleftarrow{\partial} & H_{k+1}(W,A) & \xleftarrow{j_*} & H_{k+1}(W) & \xleftarrow{i_*} \ldots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}\right\},$$

so bekommen wir die exakte Sequenz

$$\left.\begin{array}{l} \ldots \xleftarrow{\tilde{\partial}} \{H_k(V,S) \mid \Phi_*\} \xleftarrow{\tilde{j}_*} \{H_k(V) \mid \varphi_*\} \xleftarrow{\tilde{i}_*} \{H_k(S) \mid \overline{\varphi}_*\} \\ \xleftarrow{\tilde{\partial}} \{H_{k+1}(V,S) \mid \Phi_*\} \xleftarrow{\tilde{j}_*} \ldots \end{array}\right\},$$

wo für $\psi_*: L \to L'$ (L, L' Gruppen, ψ_* Homomorphismus) die Gruppe $\{L \mid \psi_*\}$ den Kern des Homomorphismus ψ_* bedeutet. Für eine Modifikation mit Abbildung bekommen wir daraus

$$\{H_k(V) \mid \varphi_*\} \cong \{H_k(S) \mid \overline{\varphi}_*\}\,, \tag{59$_*$}$$

und (59$_*$) gilt wie (59′) über $J = Z$, wenn V und W über Z orientierbare Homologiemannigfaltigkeiten sind.

§ 14. Anwendungen

a) Die Voraussetzungen zu Lemma 4 und 5 können auch so formuliert werden: φ ist eine Modifikationsabbildung der Homologiemannigfaltigkeit V auf die Homologiemannigfaltigkeit W mit der Singularitätenmenge S über A, oder: V und W sind modifikationsäquivalent durch die Abbildung φ mit der Singularitätenmenge S über A. Nun formulieren wir Lemma 5 nochmals als Satz:

Satz 23. *Sind die Homologiemannigfaltigkeiten V^n, W^n modifikationsäquivalent durch die Abbildung φ mit der Singularitätenmenge S^m über A^q, $n - 1 \geq m \geq q$ [8]), so gilt*

$$H^k(V^n) \cong H^k(W^n) + H^k(S^m) - H^k(A^q) , \tag{59}$$

die Cohomologiegruppen über dem Körper K genommen, wenn V und W orientierbar sind, über dem Körper Z_2 andernfalls.

Bemerkung. Es ist zu betonen, daß S und A keine Homologiemannigfaltigkeiten zu sein brauchen, sondern nur Teilpolyeder in V bzw. in W. Es handelt sich um allgemeine Modifikation.

Als Korollar zu Satz 23 bekommen wir:

Korollar. Unter den Voraussetzungen des Satzes 23 ist

$$H^k(V) \cong H^k(W) + H^k(S) \quad \text{für } k \geq q + 1 \ , \tag{$\overline{59}$}$$

$$H^k(V) \cong H^k(W) \qquad \text{für } k \geq m + 1 \ . \tag{$\overline{59}'$}$$

Bei (49), (49′) in § 12 wurde die Isomorphie $H^k(V) \cong H^k(W)$ für $k \geq m + 2$ festgestellt für allgemeine Modifikationen (1) (auch ohne Abbildung) mit $m \geq q$. ($\overline{59}'$) ist also eine Verschärfung von (49′) für den Fall einer Modifikation mit Abbildung.

(59) besagt für $k = 0$

$$H^0(S) \cong H^0(A) , \tag{59^0}$$

die Anzahl der Komponenten von S ist also gleich der Anzahl der Komponenten von A. (59^0) ist eine Verschärfung von (51^0).

Beispiel. Es sei $M^n = \Sigma^{n-1} \times U^1$ die n-dimensionale Kugelrinde, $n \geq 2$. M^n werde einmal durch Identifikation der Endpunkte von U^1 und das zweite Mal durch Identifikation der Antipodenpunkte auf den beiden Randsphären abgeschlossen. Dann erhalten wir die Modifikation

$$\Phi : (\Sigma^{n-1} \times \Sigma^1, \Sigma^{n-1}) \to (P_1^n, P^{n-1} \times \Sigma^0) ,$$

[8]) Vgl. die Bemerkung über die Dimensionen am Schluß von c).

in welcher $W^n = P_1^n$ den durch den reellen σ-Prozeß lokal modifizierten n-dimensionalen reell projektiven Raum darstellt. Hier besteht S aus einer Komponente und A aus zwei, so daß weder diese Modifikation Φ noch die dazu inverse Φ^{-1} durch eine Abbildung erzeugt werden kann (unabhängig von der Wahl des zu Φ gehörenden Homöomorphismus (2)). Ist $n = 2n' \geq 2$, so kann der zweite Abschluß durch Faserung in Kreislinien (Hopfsche Faserung) vorgenommen werden, wir bekommen die Modifikation

$$\Phi\colon\ (\Sigma^{n-1} \times \Sigma^1, \Sigma^{n-1}) \to (P_1^{(n')}, P^{(n'-1)} \times \Sigma^0)\,,$$

welche nicht durch Abbildung erzeugt werden kann (dasselbe gilt für Φ^{-1}), und für $n = 4n' \geq 4$ liefert der Abschluß durch Faserung in 3-Sphären in analoger Weise eine weitere Modifikation dieser Art. Wird der zweite Abschluß dadurch gewonnen, daß die Randsphären von $M^n (n \geq 2)$ je auf einen Punkt zusammengezogen werden, so erhalten wir die Modifikation

$$\Phi: (\Sigma^{n-1} \times \Sigma^1, \Sigma^{n-1}) \to (\Sigma^n, \Sigma^0)\,,$$

welche samt ihrer inversen wiederum von keiner Abbildung stammen kann.

b) **Anwendung von $(\overline{59}')$.** A^q, S^q seien q-dimensionale Polyeder $(m = q)$, A sei ein q-Zyklus in W, und S ein solcher in V. Dann gilt: soll V durch Modifikation von W durch Ersetzen von A durch S erhalten werden, so daß diese Modifikation durch eine Abbildung $\varphi\colon V \to W$ induziert wird, so sind entweder A und S beide nicht homolog null in W bzw. in V oder beide homolog null. Es ist also unmöglich, einen Rand A in W durch einen Zyklus S zu ersetzen, der in V nicht berandet, und es kann auch nicht ein Zyklus A, $A \not\sim 0$ in W, durch einen Rand in V ersetzt werden, wenn wir uns auf Modifikation mit Abbildung beschränken.

Beweis: Es sei $A^q \not\sim 0$ in W, so daß

$$H^q(W) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \to 0\,,$$

und es sei $S^q \sim 0$ in V, so daß

$$0 \to H^q(S) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(V, S)\,.$$

Daraus folgt mit (29), angewandt an der Stelle $k = q + 1$,

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ 0 \to & H^q(S) \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(V, S) & \xrightarrow{j^*} & H^{q+1}(V) & \to 0 \\ & & \uparrow \Phi^* & & & & \\ & 0 \to & H^{q+1}(W, A) & \xrightarrow{j^*} & H^{q+1}(W) & \to 0 \\ & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}\right\}\,,$$

es ist also
$$H^{q+1}(W) \cong H^{q+1}(V) + H^q(S) \cong H^{q+1}(V) + J \, ,$$
entgegen $(\overline{59}')$ für $m = q$, angewandt für $k = m + 1$, so daß die betrachtete Modifikation nicht durch eine Abbildung erzeugt werden kann. Genau gleich zeigt man im Falle $A^q \sim 0$ in W, $S^q \nsim 0$ in V, daß
$$H^{q+1}(V) \cong H^{q+1}(W) + H^q(A) \cong H^{q+1}(W) + J \, ,$$
so daß auch jetzt die Modifikation nicht durch eine Abbildung induziert werden kann.

Beispiel. Es sei die Torusfläche T^2 in der 3-Sphäre Σ^3 eingebettet, und es werde das Innere von T^2 ausgebohrt, so daß T^2 der Rand einer berandeten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 wird. Nun schließen wir M^3 auf zwei verschiedene Arten ab: einmal benutzen wir dazu die Faserung von T^2 in die Meridiankreise, und das zweite Mal diejenige in die Parallelkreise, so daß wir aus $M^3 - T^2$ durch Hinzufügen von S^1 bzw. von A^1 (beides Kreislinien) die beiden geschlossenen Mannigfaltigkeiten $V^3 = \Sigma^3$ und $W^3 = \Sigma^1 \times \Sigma^2$ erhalten. Es ergibt sich somit die Modifikation
$$\Phi\colon\ (\Sigma^3, \Sigma^1) \to (\Sigma^1 \times \Sigma^2, \Sigma^1) \, .$$

Es ist nun sofort zu erkennen, daß die beschriebene Modifikation sowie ihre inverse nicht durch eine Abbildung gegeben werden kann, denn in V^3 ist S^1 homolog null, während A^1 in W^3 nicht homolog null ist.

Bemerkung. Der hier besprochene Sachverhalt folgt auch sofort aus (56):
$$\delta H^k(S) \cong \delta H^k(A) \, ,$$
was allgemein für $k \leq n - (m + 3)$ gilt (auch ohne Abbildung, vgl. Schluß von § 12 b)). Wegen (29) folgt daraus:
$$H^k(W) \xrightarrow{i^*} H^k(A) \to 0 \tag{a}$$
ist dann und nur dann richtig, wenn
$$H^k(V) \xrightarrow{i^*} H^k(S) \to 0 \tag{b}$$
gilt. Falls (a) erfüllt ist für alle k, nennen wir die Einlagerung $A \subset W$ homologietreu (über dem Koeffizientenbereich J). Damit sind bei einer Modifikation mit Abbildung die Einlagerungen $A \subset W$ und $S \subset V$ entweder beide homologietreu oder beide nicht homologietreu.

c) **Anwendung von (59) auf Bimodifikationen.** (59) gilt auch, wenn V und W bimodifikationsäquivalent sind durch die Abbildung $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2)$. Darunter verstehen wir folgendes: in V besteht S aus den beiden zueinander punktfremden Mengen S_1 und S_2, und in W besteht A aus den punktfremden Mengen A_1 und A_2, so daß $V - S_2$ durch Modifikation aus $W - A_2$ erhalten wird mit Hilfe einer Modifikationsabbildung von $V - S_2$ auf $W - A_2$ mit der Singularitätenmenge S_1 über A_1, und daß desgleichen $W - A_1$ durch Modifikation aus $V - S_1$ erhalten wird durch eine Modifikationsabbildung von $W - A_1$ auf $V - S_1$ mit der Singularitätenmenge A_2 über S_2. Wenn wir die Abbildungen außer Betracht lassen, so ist eine Bimodifikation eine Modifikation, in welcher S und A eventuell aus mehreren Komponenten bestehen; jede Bimodifikation ist eine Modifikation. Wir beschreiben eine Bimodifikation folgendermaßen: gehen wir von $V_1 = V - S_2 + A_2$ aus, das heißt von V, modifiziert durch Ersetzen von S_2 durch A_2 (der Homöomorphismus φ' zwischen $V - S$ und $W - A$ kann als Identität angenommen werden), so wird durch eine Abbildung $\varphi_1 : V_1 \to W$ die Modifikation

$$\Phi_1 : (V_1, S_1) \to (W, A_1)$$

induziert, und mit $W_2 = W - A_1 + S_1 = V_1$ haben wir eine Abbildung $\varphi_2 : W_2 \to V$, welche die Modifikation

$$\Phi_2 : (W_2, A_2) \to (V, S_2)$$

erzeugt. Wir sagen: die Bimodifikation wird durch «die Abbildung» $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2)$ erzeugt, wobei φ aus zwei Abbildungen φ_1 und φ_2 besteht. φ ist also keine Abbildung im üblichen Sinne, vielmehr handelt es sich hier um ein Paar zweier Abbildungen von V_1 auf W und von W_2 auf V. Wenn wir von Bimodifikation sprechen, so meinen wir immer eine solche Modifikation mit den beiden Abbildungen φ_1 und φ_2.

Wenden wir nun (59) auf die beiden Modifikationen Φ_1, Φ_2 an, und berücksichtigen wir $V_1 = W_2$, so folgt

$$H^k(V_1) \cong H^k(W) + H^k(S_1) - H^k(A_1) ,$$

$$H^k(W_2) \cong H^k(V) + H^k(A_2) - H^k(S_2) ,$$

$$\left.\begin{aligned} H^k(V) &\cong H^k(W) + H^k(S_1) + H^k(S_2) - H^k(A_1) - H^k(A_2) \\ &\cong H^k(W) + H^k(S) - H^k(A) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (59_b)$$

Es gilt somit der folgende Satz:

Satz 23$_b$. *Sind die Homologiemannigfaltigkeiten V^n, W^n bimodifikationsäquivalent durch die Abbildung $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2)$ mit den kritischen Mengen $S^m = (S_1; S_2)$ und $A^q = (A_1; A_2)$, $n - 1 \geq \mathrm{Max}\,(m, q)$, so gilt*

$$\left.\begin{aligned} H^k(V) &\cong H^k(W) + H^k(S_1) + H^k(S_2) - H^k(A_1) - H^k(A_2) \\ &\cong H^k(W) + H^k(S) - H^k(A) , \end{aligned}\right\} \qquad (59_b)$$

über $J = K$, wenn V und W orientierbar sind, über $J = Z_2$ andernfalls.

Dabei ist also $S_1 = S_1^{m_1}$ die Singularitätenmenge von φ_1 über der Ausnahmemenge $A_1 = A_1^{q_1}$, und $A_2 = A_2^{q_2}$ ist die Singularitätenmenge von φ_2 über der Ausnahmemenge $S_2 = S_2^{m_2}$, und es ist

$$m_1 \geq q_1, \quad m_2 \leq q_2, \quad m = \mathrm{Max}\,(m_1, m_2), \quad q = \mathrm{Max}\,(q_1, q_2).$$

Satz 23 ist in Satz 23_b enthalten. Entsprechend dem Korollar zu Satz 23 gilt hier:

Korollar. Unter den Voraussetzungen des Satzes 23_b ist

$$H^k(V) \cong H^k(W) \text{ für } k \geq \mathrm{Max}\,(m, q) + 1 . \qquad (\overline{59}_b)$$

Aus Satz 23_b folgt: sind die beiden Homologiemannigfaltigkeiten V, W homöomorph, so gelten für die kritischen Mengen S, A bei einer Bimodifikation zwischen V und W die Isomorphismen

$$H^k(S) \cong H^k(A) \text{ für alle } k ,$$

die kritischen Mengen in V und in W haben also dieselbe additive Homologiestruktur über dem Körper K bzw. über Z_2. Sind zum Beispiel die homöomorphen Mannigfaltigkeiten V, W bimodifikationsäquivalent durch $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2)$, so daß φ_1 die Teilmenge $S_1^{m_1}$ von V mit $m_1 \geq 1$, $b_{m_1}(S_1) \geq 1$ auf einen Punkt $A_1^0 = p$ in W abbildet, so muß auch φ_2 eine Singularitätenmenge $A_2^{q_2}$ mit $q_2 \geq 1$ besitzen, denn es ist

$$H^k(S_1) + H^k(S_2) \cong H^k(p) + H^k(A_2) ,$$

so daß für die Bettischen Zahlen: $b_k(A_2) \geq b_k(S_1)$, und daher $q_2 \geq 1$. Ist außerdem $S_2 = p'$ ein Punkt in V, so erhalten wir $b_k(A_2) = b_k(S_1)$.

Bemerkung. Wir haben in Satz 23 bzw. 23_b angenommen, daß $n - 1 \geq m \geq q$ bzw. $n - 1 \geq m_1 \geq q_1$ und $n - 1 \geq q_2 \geq m_2$. Diese Bedingung wurde nur in der Form benutzt, daß $n - 1 \geq \mathrm{Min}\,(m, q)$ bzw. $n - 1 \geq \mathrm{Max}\,(\mathrm{Min}\,(m_1, q_1), \mathrm{Min}\,(m_2, q_2))$ gilt, und daraus folgt dann nach (58), (59), daß die Ungleichungen $n - 1 \geq m \geq q$ bzw. $n - 1 \geq m_1 \geq q_1$, $n - 1 \geq q_2 \geq m_2$ für die Homologiedimensionen richtig sind.

d) **Anwendung von $(\overline{59}')$, $(\overline{59}_b)$ auf komplexe Modifikation mit Abbildung bzw. komplexe Bimodifikation.** Sind die komplexen Mannigfaltigkeiten $V^{(n)}$, $W^{(n)}$ komplex modifikationsäquivalent durch die Abbildung φ, so daß φ komplex analytisch ist mit der komplexen Singularitätenmenge $S^{(m)}$ über der komplexen Ausnahmemenge $A^{(q)}$ (S und A bestehen aus endlich vielen komplexen Mannigfaltigkeiten mit eventuellen Singularitäten, es handelt sich um allgemeine Modifikation), so muß $q \leq m \leq n - 1$ oder für die reellen Dimensionen $2q \leq 2m \leq 2n - 2$. Es folgt aus $(\overline{59'})$, daß die $(2n - 1)$-te Bettische Zahl b_{2n-1} eine Invariante bei der Abbildung φ ist, für J den Körper R genommen (oder den beliebigen Körper K):

$$b_{2n-1}(V) = b_{2n-1}(W) , \tag{60}$$

und der Dualitätssatz in V und in W impliziert

$$b_1(V) = b_1(W) . \tag{60'}$$

(60), (60′) gelten wegen $(\overline{59}_b)$ ebenso bei komplexer Bimodifikation: die erste Bettische Zahl ist eine Invariante bei komplexer Bimodifikation. Siehe auch Satz 33_b. Zur Beziehung der komplexen Bimodifikation zu den birationalen Transformationen in der algebraischen Geometrie vgl. § 19 a).

e) **Quaternionale Modifikation.** Ist die Modifikation (1) quaternional:

$$\Phi: (V^{[n]}, S^{[m]}) \to (W^{[n]}, A^{[q]}) ,$$

das heißt sind V, W quaternionale Mannigfaltigkeiten, und S, A quaternional eingelagert in V bzw. W (evtl. mit Singularitäten), so folgt aus (49′) wegen $n - 1 \geq m \geq q$ oder für die reellen Dimensionen wegen $4n - 4 \geq 4m \geq 4q$

$$H^k(V) \cong H^k(W) \quad \text{für} \quad k \geq 4n - 2 ,$$

für $J = R$. Handelt es sich um quaternionale Modifikation mit Abbildung entsprechend der in d) betrachteten komplexen Modifikation mit Abbildung, so wird wegen $(\overline{59'})$

$$H^k(V) \cong H^k(W) \quad \text{für} \quad k \geq 4n - 3 ,$$

wir erhalten also analog zu (60′) $b_k(V) = b_k(W)$ für $k = 1, 2, 3$. Dasselbe gilt bei quaternionaler Bimodifikation: die Bettischen Zahlen b_1, b_2, b_3 sind Invarianten bei quaternionaler Bimodifikation.

f) **Anwendung auf die lokale Modifikation (Ersetzen eines Punktes).** p sei ein Punkt in W. Nach § 1 c) wird jede Modifikation (1) mit $A = p$ durch eine Abbildung φ induziert, so daß aus (59) bzw. $(\overline{59})$ unter Berücksichtigung der Bemerkung in c) folgt:

Satz 24. *Liegt eine lokale Modifikation vor:*

$$\Phi: (V^n, S^m) \to (W^n, p) , \tag{61}$$

V, W Homologiemannigfaltigkeiten, S Teilraum in V, so ist S zusammenhängend, und es gilt

$$H^k(V^n) \cong H^k(W^n) + H^k(S^m) \quad \textit{für} \quad k \geq 1 , \tag{59_0}$$

über $J = K$, falls V und W orientierbar sind, über $J = Z_2$ sonst.

Satz 24 enthält Lemma 1. Er kann angewandt werden auf die Hopfschen σ-Prozesse (reeller, komplexer und quaternionaler σ-Prozeß). Daraus ist ersichtlich, daß eine Mannigfaltigkeit W und ihre durch einen σ-Prozeß in einem Punkt p modifizierte Mannigfaltigkeit V nicht homöomorph sind. Allgemeiner folgt aus (59_0): wird die Mannigfaltigkeit W durch Ersetzen des Punktes p durch eine kompakte Mannigfaltigkeit S zur Mannigfaltigkeit V modifiziert, so ist V nur dann homöomorph mit W, falls S mit dem Punkt p zusammenfällt. Dieselbe Aussage bleibt richtig, wenn S zusammengesetzt ist aus mehreren kompakten Mannigfaltigkeiten $S_\varrho^{m_\varrho}$, $\varrho = 1, 2, \ldots, t$ (vgl. § 11).

Bemerkung zur Torsion. Benutzt man Satz 23 in der Formulierung (59′), so folgt für die Modifikation (61)

$$H^k(V) \,/\, \varphi^* H^k(W) \cong H^k(S) \quad \text{für} \quad k \geq 1\,, \tag{$59'_0$}$$

und dies gilt auch über $J = Z$, falls V und W über Z orientierbar sind.

§ 15. Cohomologieeigenschaften im Falle, wo A und S Homologiemannigfaltigkeiten sind

a) Wird die Modifikation (1) durch die Abbildung (3) induziert, und sind V, W, S Homologiemannigfaltigkeiten, so können wir das folgende Lemma aussprechen:

Lemma 6. *Wird die Modifikation* (1), *in welcher* V^n, W^n, S^m *Homologiemannigfaltigkeiten sind, durch die Abbildung* (3) *induziert, und ist für* $r = n - m \geq 1$

$$n = \lambda r\,, \tag{62}$$

so gilt

$$\left.\begin{aligned} &H^{\mu r+s}(S) \cong \sum_{\nu=0}^{\mu} H^{\nu r+s}(A) - \sum_{\nu=0}^{\mu} H^{n-\nu r-s}(A) \\ &\textit{für} \quad 0 \leq s \leq r-1\,, \qquad \mu r + s \leq m/2\,, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

die Cohomologiegruppen über $J = K$ *genommen, wenn* V, W, S *orientierbar sind, über* $J = Z_2$ *andernfalls.*

Beweis: Mit Hilfe des Pendelverfahrens, in welchem an die Stelle von (33) die Isomorphie (59) tritt.

Beweisen wir zunächst (63) für $s = 0$: es gilt (59^0): $H^0(S) \cong H^0(A)$; (59), angewandt für $k = n - r$, liefert

$$\begin{aligned} H^{n-r}(V) &\cong H^{n-r}(W) + H^{n-r}(S) - H^{n-r}(A) \cong H^{n-r}(W) + H^0(S) - H^{n-r}(A) \\ &\cong H^{n-r}(W) + H^0(A) - H^{n-r}(A)\ ; \end{aligned}$$

nach dem Poincaréschen Dualitätssatz für V und für W ist

$$H^r(V) \cong H^r(W) + H^0(A) - H^{n-r}(A) \;;$$

(59), angewandt für $k = r$, liefert

$$H^r(V) \cong H^r(W) + H^r(S) - H^r(A)\,,$$

so daß die beiden letzten Isomorphien zur Folge haben:

$$H^r(S) \cong H^0(A) + H^r(A) - H^{n-r}(A) \;;$$

nach dem Poincaréschen Dualitätssatz für S ist

$$H^{n-2r}(S) \cong H^r(S) \cong H^0(A) + H^r(A) - H^{n-r}(A)\,;$$

(59), angewandt für $k = n - 2r$, liefert

$$\begin{aligned} H^{n-2r}(V) &\cong H^{n-2r}(W) + H^{n-2r}(S) - H^{n-2r}(A) \\ &\cong H^{n-2r}(W) + H^0(A) + H^r(A) - H^{n-r}(A) - H^{n-2r}(A)\,; \end{aligned}$$

nach dem Poincaréschen Dualitätssatz für V und für W wird bei Anwendung von (59) für $k = 2r$

$$\begin{aligned} H^{2r}(V) &\cong H^{2r}(W) + H^0(A) + H^r(A) - H^{n-r}(A) - H^{n-2r}(A) \\ &\cong H^{2r}(W) + H^{2r}(S) - H^{2r}(A)\,, \end{aligned}$$

so daß

$$H^{2r}(S) \cong H^0(A) + H^r(A) + H^{2r}(A) - H^{n-r}(A) - H^{n-2r}(A)\,;$$

usw.

Bei Berücksichtigung von $H^n(A) = 0$ erhalten wir in dieser Weise fortfahrend (63) für $s = 0$.

Ist $1 \leq s \leq r-1$, so liefert das obige Verfahren, beginnend mit $k = n - s$, die Isomorphien (63) für diesen Fall.

Wegen (62) schließt sich das Pendelverfahren lückenlos in der Mitte, und damit ist das Lemma bewiesen.

b) Unter den Voraussetzungen von Lemma 6 wird die additive Cohomologiestruktur von S über K oder über Z_2 mittels (63) durch diejenige von A bestimmt. Ist insbesondere A eine Homologiemannigfaltigkeit der Dimension $q = m$, so impliziert (63) wegen des Dualitätssatzes in A

$$H^k(S) \cong H^k(A) \quad \text{und} \quad H^k(V) \cong H^k(W) \quad \text{für alle } k,$$

und es ist sofort ersichtlich, daß dies auch dann gilt, wenn (62) nicht erfüllt ist. Ausführlich:

Satz 25. *Wird die Modifikation*

$$\Phi : (V^n, S^m) \to (W^n, A^m) ,$$

V, W, S, A Homologiemannigfaltigkeiten, $n - 1 \geq m$, durch eine Abbildung $\varphi : V \to W$ induziert, so ist

$$H^k(S^m; J) \cong H^k(A^m; J) \quad \textit{für alle } k ,$$
$$H^k(V^n; J) \cong H^k(W^n; J) \quad \textit{für alle } k ,$$

$J = K$, wenn V, W, S, A orientierbar, $J = Z_2$ sonst.

Folgerung: sind die beiden kompakten Mannigfaltigkeiten V^n, W^n gegeben, und sind $V^n - S^m$ und $W^n - A^m$ homöomorph, S und A kompakte Mannigfaltigkeiten mit verschiedenen additiven Cohomologiestrukturen über J, J wie in Satz 25 gewählt, $m \leq n - 1$, so läßt sich der Homöomorphismus φ' zwischen $V - S$ und $W - A$ nicht fortsetzen zu einer stetigen Abbildung von V auf W oder von W auf V. Dasselbe gilt, wenn V und W verschiedene additive Cohomologiestrukturen über J besitzen.

Ferner ist unmittelbar einzusehen: unter den Voraussetzungen des Satzes 25 induziert die Abbildung φ eine Abbildung $\overline{\varphi} : S^m \to A^m$ vom Abbildungsgrad $g(\overline{\varphi}) = \pm 1$, J wie oben gewählt.

Ist Φ eine differenzierbare Modifikation, so läßt sich Satz 25 mit Hilfe von Satz 11 verschärfen: φ muß dann unter den Voraussetzungen des Satzes 25 ein Homöomorphismus sein.

c) Mit P_r^n bezeichnen wir einen Raum der Dimension $n = \lambda r$ mit dem Poincaréschen Polynom

$$\left.\begin{array}{l} \Pi(P_r^n; \xi) = 1 + \xi^r + \xi^{2r} + \dots + \xi^{\lambda r}, \\ \text{das heißt es soll} \quad b_k(P_r^n; J) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \mu r \\ 1 & \text{für } k = \mu r \end{cases} , \quad \mu = 0, 1, \dots, \lambda, \\ J = K \text{ oder } J = Z_2. \end{array}\right\} \tag{64}$$

Unter $H(M^n; J)$ verstehen wir die direkte Summe aller Cohomologiegruppen von M über J:

$$H(M^n; J) = \sum_{k=0}^{n} H^k(M^n; J) .$$

Ist in Lemma 6 neben (62) noch $q = (\lambda - \alpha) r$ erfüllt, das heißt mit $\beta = \alpha - 1$

$$m - q = \beta r \geq 0 , \tag{65}$$

so gilt:

Lemma 6'. *Wird die Modifikation* (1), *in welcher* V^n, W^n, S^m, A^q *Homologiemannigfaltigkeiten sind, durch die Abbildung* (3) *induziert, und ist*

$$n = \lambda r\,, \tag{62}$$

$r = n - m \geq 1$, *ferner* $q = (\lambda - \alpha) r$, *so daß mit* $\beta = \alpha - 1$

$$m - q = \beta r \geq 0\,, \tag{65}$$

so gilt

$$H(S^m; J) \cong H(A^q \times P_r^{m-q}; J)\,, \tag{63'}$$

$J = K$, *wenn* V, W, S, A *orientierbar sind,* $J = Z_2$ *sonst.*

Denn mit (62), (65), (63), (64) bekommen wir bei Berücksichtigung des Dualitätssatzes in A für $H(S; J)$ die additive Cohomologiestruktur von $A^q \times P_r^{m-q}$ über J, $J = K$ oder $J = Z_2$, nach dem Satz von Künneth (vgl. [3], p. 308).

d) Nun wollen wir die Bedingung (62) fallen lassen:

Satz 26. *Die Modifikation*

$$\Phi\colon\ (V^n, S^m) \to (W^n, A^q) \tag{1}$$

werde durch die Abbildung

$$\varphi\colon\ V^n \to W^n \tag{3}$$

erzeugt. V, W, S, A *seien Homologiemannigfaltigkeiten, und es sei für* $r = n - m \geq 1$

$$n = \lambda r + t\,, \quad 0 \leq t \leq r - 1\,.$$

Ist dann

$$m - q = \beta r \geq 0\,, \tag{65}$$

so gilt

$$H(S^m; J) \cong H(A^q \times P_r^{m-q}; J)\,. \tag{63'}$$

Ist hingegen $m - q > 0$ *und*

$$m - q \not\equiv 0 \mod r\,, \tag{66}$$

so muß

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\lambda} H^{\nu r - \varepsilon}(A^q; J) \cong \sum_{\nu=0}^{\lambda} H^{\nu r + t + \varepsilon}(A^q; J) \\ &\text{für alle } \varepsilon \text{ mit } 0 \leq \varepsilon \leq \sigma - 1/2\,, \quad \sigma = (r - t)/2\,. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Es wird auch jetzt $H(S^m; J)$ *mit Hilfe von* $H(A^q; J)$ *durch* (63) *bestimmt:*

$$\left.\begin{aligned} &H^{\mu r + s}(S^m; J) \cong \sum_{\nu=0}^{\mu} H^{\nu r + s}(A^q; J) - \sum_{\nu=0}^{\mu} H^{n - \nu r - s}(A^q; J) \\ &\text{für } 0 \leq s \leq r - 1\,, \quad \mu r + s \leq m/2\,. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

$J = K$, *wenn* V, W, S, A *orientierbar sind,* $J = Z_2$ *sonst.*

Beweis: Setzen wir $\mu^* = [\lambda/2]$, so wird

$$\sigma = (r-t)/2 = \begin{Bmatrix} \mu^* r - m/2, & \text{wenn } \mu^* r - m/2 > 0 \\ (\mu^*+1)r - n/2, & \text{wenn } \mu^* r - m/2 < 0 \end{Bmatrix}. \tag{68}$$

Das Pendelverfahren liefert die Isomorphismen (63) für alle $k = \mu r + s \leq \mu^* r$, und wegen des Dualitätssatzes für S werden dadurch auch die Cohomologiegruppen $H^k(S)$ für $k \geq m - \mu^* r$ bestimmt.

Ist nun λ gerade, das heißt $\mu^* r - m/2 > 0$, so ergibt der Dualitätssatz in S

$$H^{\mu^* r - \varepsilon}(S) \cong H^{(\mu^*-1)r+t+\varepsilon}(S)\,, \qquad 0 \leq \varepsilon \leq \sigma - 1/2\,,$$

σ durch (68) gegeben. Zusammen mit (63) bekommen wir dann (67).

Ist λ ungerade oder $\mu^* r - m/2 < 0$, so ergibt der Dualitätssatz in V und in W zusammen mit (59)

$$H^{m-\mu^* r+\varepsilon}(S) - H^{m-\mu^* r+\varepsilon}(A) \cong H^{m-(\mu^*-1)r-t-\varepsilon}(S) - H^{m-(\mu^*-1)r-t-\varepsilon}(A)\,,$$

oder nach dem Dualitätssatz in S

$$H^{\mu^* r-\varepsilon}(S) - H^{m-\mu^* r+\varepsilon}(A) \cong H^{(\mu^*-1)r+t+\varepsilon}(S) - H^{m-(\mu^*-1)r-t-\varepsilon}(A)$$

für $0 \leq \varepsilon \leq \sigma - 1/2$, σ durch (68) gegeben. Daraus folgt (67) wegen (63).

Ist (67) erfüllt, so stößt das Pendelverfahren auf keinen Widerspruch, und es gilt (63) für alle $k \leq m/2$. Dadurch wird $H(S)$ durch $H(A)$ bestimmt, sowohl im Falle (65) als auch im Falle (66). Gilt (65), so wird

$$q = (\lambda - \beta - 1)r + t\,,$$

und daher ist (67) eine direkte Folge des Dualitätssatzes für A, so daß $H(S)$ durch $H(A)$ mittels (63) bestimmt wird. Es gilt dann (63′) wie bei Lemma 6′.

Bemerkung zur Bedingung (66). Im Falle einer differenzierbaren Modifikation tritt (66) nie ein, sondern es gilt (65) und damit (63′); für $r \geq 2$, $m - q > 0$ ist weiter $r = 2r'$. Denn eine differenzierbare Modifikation mit Abbildung ist nach Satz 11 eine Modifikation durch Verfeinerung der Sphärenfaserung, und (65) nebst $r = 2r'$ für $r \geq 2$, $m - q > 0$ folgen aus § 10 e).

e) **Torsion.** Sind die Homologiemannigfaltigkeiten V und W über Z orientierbar, so kann versucht werden, ein Verfahren über $J = Z$ anzuwenden, das dem in diesem Paragraphen besprochenen Pendelverfahren analog ist. Man bekommt

$$\begin{aligned} H^k(S)\,/\,\overline{\varphi}^* H^k(A) &\cong H^k(V)\,/\,\varphi^* H^k(W) \cong H_{n-k}(V)\,/\,D_V \varphi^* D_W^{-1} H_{n-k}(W) \\ &\cong \{H_{n-k}(V) \mid \varphi_*\} \qquad \cong \{H_{n-k}(S) \mid \overline{\varphi}_*\}\,, \end{aligned}$$

wo der erste Isomorphismus (59″) darstellt, der zweite durch den Poincaréschen Dualitätssatz in V und in W (nach (44)) erzeugt wird, der dritte wegen

$\varphi_* D_V \varphi^* D_W^{-1} = g(\varphi) I$ $(g(\varphi) =$ Abbildungsgrad von φ, $I =$ Identität) und $g(\varphi) = \pm 1$ gilt, und der vierte nach (59_*) richtig ist. Wir erhalten also

$$H^k(S) \,/\, \overline{\varphi}^* H^k(A) \cong \{H_{n-k}(S) \mid \overline{\varphi}_*\},$$

und ist S^m eine über Z orientierbare Homologiemannigfaltigkeit, $m = n - r$, so folgt

$$H^k(S) \,/\, \overline{\varphi}^* H^k(A) \cong \{H^{k-r}(S) \mid \overline{\varphi}_* D_S\}. \tag{63*}$$

Die Gruppe $H^k(S)$ ist also eine Gruppenerweiterung von $\overline{\varphi}^* H^k(A)$ (das heißt von $H^k(A)$) mit der Faktorgruppe $\{H^{k-r}(S) \mid \overline{\varphi}_* D_S\}$. (63*) liefert jedoch für $J = Z$ kein Verfahren zur schrittweisen Bestimmung von $H(S)$ bei bekanntem $H(A)$, wie wir dies für $J = K$ bzw. $J = Z_2$ durchführen konnten. Denn es spielt der Homomorphismus $\overline{\varphi}_*$ eine Rolle, und außerdem sind nach (63*) Gruppenerweiterungen vorzunehmen, welche für $J = Z$ nicht eindeutig bestimmt sein müssen. Man erkennt immerhin: besitzt A keine Torsion, so trifft dasselbe auf S zu, falls V, W und S über Z orientierbar sind.

f) **Zur Orientierbarkeit.** Es kann dieselbe Überlegung gemacht werden wie bei (37_r) bzw. bei (37) im Beweis zu Satz 12. Ist nämlich $m - q \geq 2r \geq 2$, und ist $i: S \to V$ die Inklusionsabbildung, so existiert nach (55′) bzw. (59′) eine Cohomologieklasse $x^m \in H^m(V)$ mit $i^* x^m = \overline{x}^m$, wo $\overline{x}^m$ die m-dimensionale Fundamentalklasse von S ist, und ebenso gilt für die durch das Pendelverfahren mit Hilfe von D_V, D_S aus x^m erhaltenen Klassen x^r, x^{2r}, x^{n-2r} $i^* x = \overline{x} \neq 0$ (x ist eine der Klassen x^r, x^{2r}, x^{n-2r}, $\overline{x}$ ist die entsprechende Klasse in S). Wir bekommen dann die Gleichung (37_r):

$$x^r x^r x^{n-2r} = x^n,$$

wo x^n die n-dimensionale Fundamentalklasse von V bezeichnet. Es folgt: ist r ungerade und $m - q \geq 2r \geq 2$, so ist mindestens eine der Homologiemannigfaltigkeiten V, W, S nicht orientierbar.

§ 16. Beispiele, Anwendungen, zusätzliche Bemerkungen

a) **Beispiel.** Wir geben ein Beispiel zweier Mannigfaltigkeiten V und W, die nicht modifikationsäquivalent durch Abbildung sind, falls die kritischen Mengen S und A als Homologiemannigfaltigkeiten vorausgesetzt werden. Σ^4 sei die 4-Sphäre und $\Sigma^2 \times \Sigma^2$ das topologische Produkt zweier 2-Sphären. Wir behaupten:

1. **Es gibt keine stetige Abbildung von Σ^4 auf $\Sigma^2 \times \Sigma^2$, welche eine Modifikation**

$$\Phi\colon (\Sigma^4, S) \to (\Sigma^2 \times \Sigma^2, A)$$

erzeugt, S und A Homologiemannigfaltigkeiten mit $\dim(S) \leq 3$ oder $\dim(A) \leq 3$;

2. es gibt keine stetige Abbildung von $\Sigma^2 \times \Sigma^2$ auf Σ^4, welche eine Modifikation
$$\Phi' : (\Sigma^2 \times \Sigma^2, S') \to (\Sigma^4, A')$$
erzeugt, S' und A' Homologiemannigfaltigkeiten mit $\dim(S') \leq 3$ oder $\dim(A') \leq 3$.

Beweis zu 1.: Für die Modifikation Φ müßte (58) gelten, das heißt
$$0 \to H^k(\Sigma^2 \times \Sigma^2) \to H^k(\Sigma^4)\,,$$
und dies ist falsch für $k = 2$.

Beweis zu 2.: Für die Modifikation Φ' impliziert (59) ($J = Z_2$)
$$b_1(A') = b_1(S')\,, \quad b_2(A') + 2 = b_2(S')\,, \quad b_3(A') = b_3(S')\,,$$
$$b_4(A') = b_4(S') = 0\,,$$
und daraus folgt: es ist $b_k(S') = 0$ für $k \geq 3$ unmöglich wegen $b_2(S') \geq 2 > 1$, und ist die Homologiedimension von S' gleich 3, so kommt man zu einem Widerspruch wegen des Dualitätssatzes für A' und für S'.

Es sind dieselben Behauptungen 1. und 2. richtig für die beiden Homologiemannigfaltigkeiten Σ^{2n} und $\Sigma^n \times \Sigma^n$, wenn Σ^k die k-Homologiesphäre über Z_2 bedeutet, $k \geq 1$.

b) Weitere Beispiele von Homologiemannigfaltigkeiten, die nicht modifikationsäquivalent durch Abbildung sind, liefern die Paare V^n, W^n, so daß weder V auf W noch W auf V mit dem Abbildungsgrad ± 1 abgebildet werden kann. Hier müssen S und A Teilpolyeder sein mit $\dim(S) \leq n - 1$ oder $\dim(A) \leq n - 1$. Nach (58) genügt es, zwei solche Homologiemannigfaltigkeiten V^n, W^n anzugeben, für welche
$$\left.\begin{aligned} b_r(V) > b_r(W) \quad &\text{für ein gewisses } r\,, \\ b_s(V) < b_s(W) \quad &\text{für ein gewisses } s\,, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$
$J = K$ oder $J = Z_2$. Wir sehen also: ist (69) erfüllt für zwei Homologiemannigfaltigkeiten V und W, so sind sie nicht modifikationsäquivalent durch Abbildung.

Beispiele. Es sei $V^4 = (\Sigma^1)^4 = \Sigma^1 \times \Sigma^1 \times \Sigma^1 \times \Sigma^1$, Σ^1 ist die Kreislinie, und $W^4 = \Sigma^4_5 = P^4_4$ sei die mittels des reellen σ-Prozesses fünfmal lokal modifizierte 4-Sphäre Σ^4 (bzw. der viermal lokal modifizierte reell projektive

Raum P^4). Wir bekommen dann die Poincaréschen Polynome

$$\Pi(V^4;\ \xi) = 1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 + \xi^4,$$
$$\Pi(W^4;\ \xi) = 1 + 5\xi + 5\xi^2 + 5\xi^3 + \xi^4,$$

über $J = Z_2$, so daß $b_1(V^4) < b_1(W^4)$, $b_2(V^4) > b_2(W^4)$.

Dieses Beispiel läßt sich auch komplex durchführen: es sei $V^8 = (\Sigma^2)^4 = \Sigma^2 \times \Sigma^2 \times \Sigma^2 \times \Sigma^2$, Σ^2 ist die 2-Sphäre, und $W^8 = P_4^{(4)}$ sei der mit Hilfe des komplexen σ-Prozesses viermal lokal modifizierte komplex projektive Raum $P^{(4)}$. Dann erhalten wir die soeben angegebenen Poincaréschen Polynome über $J = K$, wenn wir an Stelle der reellen Dimensionen die komplexen nehmen.

Es gilt also: $(\Sigma^1)^4$, $\Sigma_5^4 = P_4^4$ bzw. $(\Sigma^2)^4$, $P_4^{(4)}$ sind nicht modifikationsäquivalent durch Abbildung, und dasselbe ist richtig für die Paare $(\Sigma^1)^n, P_n^n$ bzw. $(\Sigma^2)^n, P_n^{(n)}$, $n \geq 4$.

Weitere Beispiele liefern die Paare von Sphärenprodukten: $\Sigma^r \times \Sigma^s$ und $\Sigma^u \times \Sigma^v$ sind nicht modifikationsäquivalent durch Abbildung für $r + s = u + v \geq 4$; $r, s, u, v \geq 1$; $r \neq u$, $r \neq v$. Dasselbe gilt für $\Sigma^r \times \Sigma^s$ und $P^{(n)}$ für $r + s = 2n$, $r \equiv s \equiv 1 \bmod 2$.

Bemerkung zum Begriff der Modifikationsäquivalenz durch Abbildung. Wir sagten in § 14 a): V, W sind modifikationsäquivalent durch die Abbildung $\varphi: V \to W$ mit der Singularitätenmenge S über der Ausnahmemenge A, wenn φ die Modifikation $\Phi: (V, S) \to (W, A)$ induziert. Nun wollen wir noch hervorheben, daß dabei $m = \dim(S) \leq n - 1 = \dim(V) - 1$ oder $q = \dim(A) \leq n - 1$ vorausgesetzt wird (vgl. die Bemerkung am Ende von § 14 c)). Lassen wir diese Bedingung weg, so sind zwei beliebige kompakte Mannigfaltigkeiten V^n, W^n modifikationsäquivalent durch Abbildung, da es immer eine stetige Abbildung φ von V auf W (und eine solche von W auf V) gibt, so daß V, W modifikationsäquivalent sind durch $\varphi: V \to W$ mit $S = V$ und $A = W$ (bzw. W, V modifikationsäquivalent durch $\varphi: W \to V$ mit $S = W$ und $A = V$). Wenn wir also sagen, daß die beiden Homologiemannigfaltigkeiten V und W modifikationsäquivalent durch Abbildung sind, so bedeutet dies, daß eine stetige Abbildung von V auf W oder von W auf V existiert, die eine allgemeine Modifikation erzeugt, in welcher entweder S oder A eine Dimension $\leq n - 1$ hat. Es sollen die entsprechenden Dimensionsbedingungen erfüllt sein, wenn wir von Bimodifikationsäquivalenz zwischen V und W sprechen.

c) Jede kompakte Mannigfaltigkeit M^n ist modifikationsäquivalent durch Abbildung mit der n-Sphäre Σ^n. $A = p$ ist ein Punkt in Σ^n, und S^m ist diejenige Menge in M, welche übrigbleibt bei der Ausschöpfung von M mittels einer maximal ausgedehnten Zelle in M. Es handelt sich um allgemeine Modifikation (S ist im allgemeinen keine Mannigfaltigkeit), und wegen (59_0) in Satz 24 wird $m = \dim(S) \geq \mathrm{Max}(k)$, so daß $H^k(M) \neq 0$ für $k \leq n-1$. Außerdem ist $m \leq n-1$. Daraus folgt: es gibt zu irgend zwei kompakten Mannigfaltigkeiten V^n, W^n eine allgemeine Modifikation

$$\Phi\colon\ (V^n, S^m) \to (W^n, A^q)$$

$$\text{mit } n-1 \geq m \geq \mathrm{Max}(k), \text{ so daß } H^k(V) \neq 0,\ k \leq n-1,$$
$$n-1 \geq q \geq \mathrm{Max}(k), \text{ so daß } H^k(W) \neq 0,\ k \leq n-1.$$

Diese allgemeine Modifikation ist die Zusammensetzung einer lokalen Modifikation und der Inversen einer lokalen Modifikation. Wir haben die beiden Abbildungen φ_1, φ_2 in folgender Anordnung:

$$V^n \xrightarrow{\varphi_1} \Sigma^n \xleftarrow{\varphi_2} W^n,$$

zu φ_1 gehört die Modifikation $\Phi_1\colon (V^n, S^m) \to (\Sigma^n, p)$, zu φ_2 die Modifikation $\Phi_2\colon (W^n, A^q) \to (\Sigma^n, p)$, und wenn wir die zu Φ_2 inverse Modifikation $\Psi\colon (\Sigma^n, p) \to (W^n, A^q)$ wie in § 14a) mit Φ_2^{-1} bezeichnen, so bekommen wir für die obige allgemeine Modifikation $\Phi = \Phi_2^{-1}\Phi_1$. V, W sind durch Φ modifikationsäquivalent. Wählen wir bei den Modifikationen Φ_1 und Φ_2 in Σ^n zwei verschiedene Punkte p_1 und p_2 als Ausnahmemengen, so ergibt sich sofort, daß V, W bimodifikationsäquivalent sind (durch eine allgemeine Bimodifikation).

Wenn wir uns auf solche allgemeine Modifikationen (1) beschränken, in denen S und A Homologiemannigfaltigkeiten sind, $n-1 \geq \mathrm{Max}(m, q)$, so gibt es Paare von kompakten Mannigfaltigkeiten V, W, die nicht miteinander modifikationsäquivalent sind, zu denen es keine Modifikation (1) gibt mit $n-1 \geq \mathrm{Max}(m, q)$.

Beispiel. Es sei $V = \Sigma^1 \times \Sigma^1$ die Torusfläche, und $W = \Sigma^2$ die 2-Sphäre. Liegt eine Modifikation

$$\Phi\colon\ (\Sigma^1 \times \Sigma^1, S) \to (\Sigma^2, A)$$

oder ihre inverse vor, so folgt aus (29)

$$0 \to H^1(V) \to H^1(S),$$

so daß $b_1(S) \geq 2$ wird. Wegen $\dim S \leq 1$ kann also S keine Homologiemannigfaltigkeit sein ($J = Z_2$ oder $J = K$). Daraus entnehmen wir: $\Sigma^1 \times \Sigma^1$ und Σ^2 sind nicht modifikationsäquivalent, wenn S und A Homologiemannigfaltigkeiten sein sollen und $m, q \leq 1$ (es genügen hier die Bedingungen für S). Dasselbe gilt für jedes Paar F_g^2, Σ^2, $g \geq 1$, wenn F_g^2 die kompakte orientierbare Fläche vom Geschlecht g bedeutet.

d) Satz 26 besagt: sind in der Modifikation (1) die Räume V, W, S, A Homologiemannigfaltigkeiten, und ist eine Isomorphie in (67) falsch, so kann die betreffende Modifikation (1) nicht durch eine Abbildung (3) induziert werden (für jeden zu (1) gehörigen Homöomorphismus (2)).

1. $r = 2$. Für $r = 2$, $t = 1$, $m - q \equiv 1 \bmod 2$, bedeutet (67) $\chi(A) = 0$, und für $r = 2$, $t = 0$, $m - q \equiv 1 \bmod 2$, ist q ungerade, also $\chi(A) = 0$. Mit andern Worten: ist in der Modifikation

$$\Phi\colon (V^n, S^{n-2}) \to (W^n, A^q), \quad n - q \geq 2,$$

$n - q$ ungerade, sind V, W, S, A Homologiemannigfaltigkeiten, und ist die Euler-Poincarésche Charakteristik von A verschieden von null, so kann diese Modifikation nicht durch eine Abbildung erzeugt werden.

Für topologische Modifikationen durch Faserung des Umgebungsrandes gilt allgemein:

Satz 27. *Die Modifikation*

$$\Phi\colon (V^n, S^m) \to (W^n, A^q) \tag{1}$$

werde wie in Satz 21 *durch die Sphärenbündel* $\mathfrak{N}(A)$ *und* $\mathfrak{N}(S)$ *gegeben. Ist dann* $n - m$ *gerade und* $n - q$ *ungerade, so wird* $\chi(A)$ *gleich null; ist* $n - q$ *gerade und* $n - m$ *ungerade, so wird* $\chi(S)$ *gleich null.*

Nach Satz 1 gilt Satz 27 insbesondere für die differenzierbare Modifikation.

Beweis: Die Bezeichnungen seien dieselben wie in § 12 b). Zur Einbettung $S \subset V$ gehört die Sphärenfaserung (16), und zur Einbettung $A \subset W$ die Faserung (7). Ist $n - m$ gerade, so folgt aus (18), angewandt auf das Bündel (16), $\chi(N) = 0$, und ist weiter $n - q$ ungerade, so liefert (18) für die Faserung (7) unter Berücksichtigung des letzten Resultates $\chi(A) = 0$. Analoge Überlegung im Falle $n - q$ gerade, $n - m$ ungerade.

2. $r = 4$. Zur Illustration des Satzes 26 geben wir die Bedingungen (67) an für den Fall $r = 4$. b_k sei die k-te Bettische Zahl von A ($J = Z_2$ oder $J = K$). Wir erhalten:

$t = 0 : \sigma = 2$; (67) liefert für $\varepsilon = 1$

$$\sum_\nu b_{4\nu-1} = \sum_\nu b_{4\nu+1} \quad \text{für } n \equiv m \equiv 0 \bmod 4; \tag{a}$$

$t = 1 : \sigma = \frac{3}{2}$; (67) liefert $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$

$$\left.\begin{aligned} \sum_\nu b_{4\nu} &= \sum_\nu b_{4\nu+1} \\ \sum_\nu b_{4\nu-1} &= \sum_\nu b_{4\nu+2} \end{aligned}\right\} \text{für } n \equiv m \equiv 1 \bmod 4; \tag{b}$$

$t = 2: \sigma = 1$; (67) liefert für $\varepsilon = 0$

$$\sum_\nu b_{4\nu} = \sum_\nu b_{4\nu+2} \quad \text{für } n \equiv m \equiv 2 \mod 4\,; \tag{c}$$

$t = 3: \sigma = \frac{1}{2}$; (67) liefert für $\varepsilon = 0$

$$\sum_\nu b_{4\nu} = \sum_\nu b_{4\nu+1} \quad \text{für } n \equiv m \equiv 3 \mod 4\,. \tag{d}$$

Die obigen Summen sind über alle entsprechenden von null verschiedenen Bettischen Zahlen erstreckt. Ist eine der Bedingungen (a), (b), (c), (d) nicht erfüllt, so kann die betreffende Modifikation (1) nicht durch eine Abbildung erzeugt werden.

Beispiel. M sei eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n=m_1+m_2+4$ mit $m_1 = 4m_1' + 2$, $m_2 = 4m_2'$, $m_1' \geq 1$, $m_2' \geq 1$. Σ^k ist die k-Sphäre. Wir betten in M den durch $N^{n-1} = \Sigma^3 \times \Sigma^{m_1} \times \Sigma^{m_2}$ berandeten dreifachen Volltorus ein, bohren das Innere davon aus und identifizieren auf dem Rand N auf zwei Arten: das eine Mal, indem in N die Faserung in 3-Sphären benutzt wird, das andere Mal mit Hilfe der Faserung in m_1-Sphären. Es entstehen durch die beiden Abschlüsse zwei kompakte Mannigfaltigkeiten V und W, und wir erhalten die Modifikation

$$\Phi:\ (V^n, \Sigma^{m_1} \times \Sigma^{m_2}) \to (W^n, \Sigma^3 \times \Sigma^{m_2})\,,$$

eine Modifikation durch Faserung des Umgebungsrandes N. Wir befinden uns im Falle $r = 4$, $t = 2$, und (c) impliziert, daß diese Modifikation nicht durch eine Abbildung induziert werden kann, denn für $A = \Sigma^3 \times \Sigma^{m_2}$, $m_2 = 4m_2'$, wird

$$\sum_\nu b_{4\nu}(A) = 2 \neq \sum_\nu b_{4\nu+2}(A) = 0\,.$$

Im differenzierbaren Fall kann auch die Bemerkung zur Bedingung (66) in § 15 d) herangezogen werden.

e) (1) sei eine Modifikation mit Abbildung, wie sie in § 7 a) beschrieben wurde, es handle sich also um eine Modifikation durch gleichmäßige Verfeinerung der Sphärenfaserung (7), so daß die Faserungen (24) und (25) vorhanden sind. Nach § 10 e) ist dann (65) erfüllt, und daher ist die additive Cohomologiestruktur über J des Raumes S in der Faserung (25) gemäß (63′) diejenige des topologischen Produktes der Basis A^q mit der Faser $P^{m-q} = P_r^{m-q}$. Im allgemeinen bekommen wir für die multiplikative Cohomologiestruktur von S nicht diejenige des topologischen Produktes $A^q \times P_r^{m-q}$, wie wir auch die multiplikative Struktur für P_r^{m-q} wählen. Dies wird durch die folgenden Beispiele gezeigt.

Beispiele. Es sei $A = P^{4t+1}$ der $(4t+1)$-dimensionale reell projektive Raum, und es sei N^{n-1} der Raum des Tangentenbündels von P^{4t+1}, $n = 8t+2$, so daß wir das Tangentenbündel

$$\mathfrak{T}(P^{4t+1}) = \{N^{8t+1}, \Sigma^{4t}, P^{4+1}\}$$

haben. $\mathfrak{T}(P^{4t+1})$ kann gemäß Satz 6 als Normalenbündel von P^{4t+1} in einer geschlossenen Mannigfaltigkeit W^n aufgefaßt werden. Nun modifizieren wir W mittels der Antipodenabbildung in N und bekommen nach Satz 8 die Modifikation

$$\Phi\colon (V^n, N_0^{n-1}) \to (W^n, P^{4t+1}) .$$

N_0 ist gefasert in $4t$-dimensionale reell projektive Räume (Spezialfall von (25)):

$$\mathfrak{P}(P^{4t+1}) = \{N_0^{8t+1}, P^{4t}, P^{4t+1}\} .$$

N_0 ist der Raum der Linienelemente von P^{4t+1}, so daß eine Schnittfläche in N_0 ein Linienelementfeld auf P^{4t+1} ist. Wegen $\chi(P^{4t+1}) = 0$ existieren Schnittflächen in N_0, und je zwei Schnittflächen schneiden sich: in N_0 ist der Schnitt der Basis P^{4t+1}, realisiert als Schnittfläche in N_0, mit sich selbst verschieden von null, das heißt die Homologieklasse dieses Selbstschnittzyklus in N_0 ist verschieden von null. Dies wird mit Hilfe der eindimensionalen Stiefelschen charakteristischen Homologieklasse von P^{4t+1} eingesehen. Daher ist für $J = Z_2$ die multiplikative Cohomologiestruktur von N_0 nicht diejenige von $P^{4t+1} \times P^{4t}$ im Gegensatz zur additiven Struktur.

Das obige Beispiel läßt sich auch komplex durchführen. Hier nehmen wir $J = R$. Man kommt dann zur Faserung

$$\mathfrak{P}(P^{(2t+1)}) = \{S^{(4t+1)}, P^{(2t)}, P^{(2t+1)}\} ,$$

welche aus dem Tangentenbündel $\mathfrak{T}(P^{(2t+1)})$ mittels Verfeinerung durch Kreislinien hergestellt wird. In $S^{(4t+1)}$ gibt es Schnittflächen, das heißt es gibt Felder komplexer Linienelemente auf $P^{(2t+1)}$, und je zwei Schnittflächen schneiden sich in einem Zyklus, der in $S^{(4t+1)}$ nicht homolog null ist (vgl. [27]).

Ein weiteres Beispiel liefert die Faserung des komplex ungerad dimensionalen komplex projektiven Raumes $P^{(2n+1)}$ in komplex projektive Geraden $P^{(1)}$ (das heißt in 2-Sphären) mit dem quaternional projektiven Raum $P^{[n]}$ als Basis. Diese Faserung erhalten wir aus den beiden folgenden Faserungen der Sphäre Σ^{4n+3}:

$$\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}(P^{[n]}) \quad = \mathfrak{S}(P^{[n]}) \quad = \{\Sigma^{4n+3}, \Sigma^3, P^{[n]}\} ,$$

$$\mathfrak{N}(S) = \mathfrak{N}(P^{(2n+1)}) = \mathfrak{S}(P^{(2n+1)}) = \{\Sigma^{4n+3}, \Sigma^1, P^{(2n+1)}\} ,$$

(quaternionale und komplexe Hopfsche Faserungen, Spezialfälle von (24)), welche die Bündel (7) und (16) darstellen: $\mathfrak{S}(P^{(2n+1)})$ ist eine gleichmäßige

Verfeinerung von $\mathfrak{S}(P^{[n]})$, und diese beiden Faserungen geben Anlaß zu einer Modifikation mit Abbildung (vgl. § 7 a), § 12 b))

$$\Phi:\ (V^{4n+4}, P^{(2n+1)}) \to (W^{4n+4}, P^{[n]})\ .$$

Dazu gehört die Faserung

$$\mathfrak{P}(P^{[n]}) = \{P^{(2n+1)}, P^{(1)}, P^{[n]}\}\ ,$$

welche die Faserung (25) darstellt. Es gilt wohl $H(P^{(2n+1)}) \cong H(P^{[n]} \times P^{(1)})$, die multiplikative Struktur von $P^{(2n+1)}$ ist jedoch nicht diejenige des Produktes $P^{[n]} \times P^{(1)}$, für J einen Körper K genommen.

Ganz analog kann der ungerad dimensionale reell projektive Raum P^{2n+1} in Kreislinien $\Sigma^1 = P^1$ gefasert werden, und für $J = Z_2$ gilt $H(P^{2n+1}) \cong H(P^{(n)} \times P^1)$, jedoch gilt keine solche multiplikative Isomorphie.

Es kann ferner der reell projektive Raum P^{4n+3} in 3-dimensionale reell projektive Räume P^3 gefasert werden, es gehört dazu eine Modifikation $\Phi:\ (V^{4n+4}, P^{4n+3}) \to (W^{4n+4}, P^{[n]})$ mit Abbildung, und es gilt die additive (aber nicht multiplikative) Isomorphie $H(P^{4n+3}; Z_2) \cong H(P^{[n]} \times P^3; Z_2)$.

f) Gehen wir von zwei simultanen Sphärenfaserungen (7), (16) von N aus, so gehört dazu eine Modifikation (1), wie wir dies in § 12 b) festgestellt haben. Ist N kompakt differenzierbar und $s = n - q \geq 2$, so liefert die Antipodenabbildung α (vgl. § 6 a)) eine Faserung

$$\mathfrak{N}(S^{n-1}) = \{N^{n-1}, \Sigma^0, S^{n-1}\}\ , \tag{16_1}$$

und als zugehörige Modifikation bekommen wir eine Modifikation (19_1) (Satz 8; es ist $S^{n-1} = N_0^{n-1}$), welche durch eine Abbildung erzeugt wird. Es handelt sich um eine Modifikation durch gleichmäßige Verfeinerung der Sphärenfaserung, und die Faserung (25) lautet hier

$$\mathfrak{P}(A^q) = \{S^{n-1}, P^{n-q-1}, A^q\} \tag{25_1}$$

(Beispiel 1 in § 7 a)). Faserungen durch projektive Räume heißen projektive Bündel (reell, komplex oder quaternional projektive Bündel). (25_1) ist ein reell projektives Bündel. Da im Falle der Modifikation (19_1) die Isomorphie (63') für $r = 1$, $J = Z_2$, $S = N_0^{n-1}$ gilt, folgt: es kann nicht jedes reell projektive Bündel mit Hilfe eines Sphärenbündels (7) und zugehöriger Antipodenabbildung erzeugt werden (es brauchen keine Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht zu werden).

Beispiel. Die Hopfsche Sphärenfaserung

$$\mathfrak{S}(P^{(q)}) = \{\Sigma^{2q+1}, \Sigma^1, P^{(q)}\}\ ,\quad q \geq 1\ ,$$

kann aufgefaßt werden als Faserung in reell projektive Geraden P^1:

$$\mathfrak{S}'(P^{(q)}) = \{\Sigma^{2q+1}, P^1, P^{(q)}\} .$$

Für $\mathfrak{S}(P^{(q)})$ ist (63') offensichtlich nicht erfüllt, $\mathfrak{S}'(P^{(q)})$ besitzt also kein zugehöriges Sphärenbündel, so daß die Antipodenabbildung in diesem Bündel die Faserung $\mathfrak{S}'(P^{(q)})$ induziert. Insbesondere ist $\mathfrak{S}'(P^{(1)})$ inäquivalent dem Bündel der tangentiellen Linienelemente an die 2-Sphäre Σ^2. Daß die Faserung $\mathfrak{S}'(P^{(q)})$ nicht von einer Kreislinienfaserung mit zugehöriger Antipodenabbildung stammen kann, folgt auch sofort daraus, daß Σ^{2q+1} einfach zusammenhängend ist, also nicht Basis eines zweiblättrigen Überlagerungsraumes sein kann.

Bemerkung. Da nach [6], IX–5, Théorème 5 und Théorème 6, für jedes kompakte projektive Bündel

$$\mathfrak{P}(A^q) = \{S^m, P_r^{m-q}, A^q\} ,$$

P_r^{m-q} komplex oder quaternional projektiver Raum ($r = 2$ oder $r = 4$), die Isomorphie (63') gilt, wenn für J ein Körper der Charakteristik 0 gewählt wird, sind Beispiele analog dem obigen für komplex oder quaternional projektive Bündel höchstens über einem Körper mit von null verschiedener Charakteristik möglich.

g) **Reguläre projektive Bündel.** Es liege ein reell projektives Bündel (25_1) vor, in welchem als Strukturgruppe die orthogonale Gruppe wirkt, das heißt nach Wahl eines Koordinatensystems in P^{n-q-1}, bestehend aus $n - q$ reellen homogenen Koordinaten $t_0, t_1, \ldots, t_{n-q-1}$, die Gruppe der orthogonalen Transformationen in den Variablen $t_0, \ldots, t_{n-q-1}$. Ein solches Bündel heißt reguläres reell projektives Bündel, und entsprechend werden die regulären komplex und quaternional projektiven Bündel definiert. Zu einem regulären reell projektiven Bündel gehört dann in natürlicher Weise ein Bündel mit dem Euklidischen Raum E^{n-q} als Faser, und daraus ergibt sich ein zugehöriges Sphärenbündel mit Antipodenabbildung. Es folgt also: ein reguläres reell projektives Bündel (25_1) kann immer dadurch erzeugt werden, daß in einem Sphärenbündel (7) die Antipodenpunkte in jeder Faser identifiziert werden (Identifikation vermöge der Faserung (16_1)). Dazu gehört dann eine Modifikation (19_1) mit Abbildung, und es folgt: für ein reguläres reell projektives Bündel (25_1) gilt (63') für $r = 1$, $J = Z_2$, $S = N_0^{n-1}$. Damit ergibt sich, daß zum Beispiel die oben betrachtete Faserung $\mathfrak{S}'(P^{(q)})$ kein reguläres reell projektives Bündel liefert. – Die analogen Konstruktionen im komplexen und im quaternionalen Fall ergeben: jedes reguläre komplex bzw. quaternional projektive Bündel (25_2) bzw. (25_4) läßt sich durch gleichmäßige Verfeinerung einer Sphärenfaserung (7) mittels Kreislinien bzw. 3-Sphären erzeugen. (7) ist dann eine Faserung in $(2k+1)$- bzw. in $(4k+3)$-Sphären. Weiter erhalten wir dazu eine quasikomplexe bzw. eine quasiquaternionale Modifikation (19_2) bzw. (19_4) mit Abbildung, und es gilt (63′) für $r = 2$ bzw. $r = 4$, $J = K$ oder $J = Z_2$, je nachdem die Basis A in (25_2) bzw. (25_4) orientierbar ist oder nicht. Zusammengefaßt:

Satz 28. *S^{n-r} sei eine kompakte Mannigfaltigkeit. Zu jedem regulären projektiven Bündel*

$$\mathfrak{P}(A^q) = \{S^{n-r}, P_r^{n-q-r}, A^q\}, \tag{25_r}$$

$r = 1, 2, 4$ im reellen bzw. komplexen bzw. quaternionalen Fall, $n - q - r = \beta r \geq 1$, gehört ein Sphärenbündel

$$\mathfrak{N}(A^q) = \{N^{n-1}, \Sigma^{n-q-1}, A^q\} \tag{7}$$

und eine gleichmäßige Verfeinerung von (7):

$$\mathfrak{N}(S^{n-r}) = \{N^{n-1}, \Sigma^{r-1}, S^{n-r}\}, \tag{16_r}$$

so daß aus der Faserung (7) mittels Identifikation jeder Faser Σ^{r-1} in der Faserung (16_r) zu einem Punkt das projektive Bündel (25_r) entsteht. Die Faserungen (7) und (16_r) induzieren eine Modifikation

$$\Phi\colon (V^n, S^{n-r}) \to (W^n, A^q) \tag{19_r}$$

mit Abbildung, und es gilt

$$H(S^{n-r}; J) \cong H(A^q \times P_r^{n-q-r}; J) \tag{63'}$$

über $J = K$ für $r = 2, 4$ bei orientierbarem A, über $J = Z_2$ sonst.

Bemerkung. An Stelle der Regularität des Bündels (25_r) kann in Satz 28 direkt gefordert werden, daß (25_r) in der oben beschriebenen Weise von einem Sphärenbündel (7) stammt. In (63′) ist dann $J = K$, wenn $r = 2, 4$ und N, S, A orientierbar sind, $J = Z_2$ sonst.

Zur Behauptung (63′) in Satz 28 vergleiche man [6], IX–5, Th. 5 und 6, ferner [10], Th. 2.

h) **Anwendung von (59), (63′) auf den $\sigma^{n,q}$-Prozeß.** Liegt der komplexe $\sigma^{n,q}$-Prozeß $(19_{(1)})$ vor, so ergeben (59), (63′) sofort

$$H(V^{(n)}) \cong H(W^{(n)}) + H(A^{(q)} \times P^{(n-q-1)}) - H(A^{(q)})$$

über $J = K$. Dieses Resultat ist in [11] enthalten. Entsprechende Isomorphien gelten für den reellen und für den quaternionalen $\sigma^{n,q}$-Prozeß (19_1) bzw. $(19_{[1]})$, sowie für den quasikomplexen und für den quasiquaternionalen $\sigma^{n,q}$-Prozeß (19_2) bzw. (19_4), in gewissen Fällen nur für $J = Z_2$.

i) **Modifikation mit homologietreuen Einlagerungen.** Sind in der Modifikation (1) die Einlagerungen $S \subset V$ und $A \subset W$ homologietreu (siehe die Bemerkung in § 14 b)), so heißt die Modifikation (1) eine Modifikation mit homologietreuen Einlagerungen (über dem Koeffizientenbereich J). Insbesondere müssen dann A und S zusammenhängend sein (bei zusammenhängendem V und W), wegen (a) und (b) in § 14 b) für $k = 0$. Aus (29) folgt für eine Modifikation mit homologietreuen Einlagerungen sofort (59). Dies ist richtig für allgemeine Modifikation (V, W, S, A Polyeder). Wir sehen: die Sätze 25 und 26 gelten auch dann, wenn die Voraussetzung «Modifikation mit Abbildung» ersetzt wird durch die Voraussetzung «Modifikation mit homologietreuen Einlagerungen über J», denn das Pendelverfahren kann nun ebenso angewandt werden. Die Hauptergebnisse dieses Kapitels gelten also auch im Falle der Modifikation mit homologietreuen Einlagerungen.

IV. Kapitel. Kählersche Modifikation mit Abbildung

In Kapitel II und III wurde die Mannigfaltigkeitsvoraussetzung nach Möglichkeit abgeschwächt, es wurden allgemeine Modifikationen untersucht. Nun wollen wir wieder spezielle (sogar komplexe) Modifikationen betrachten (speziell im Sinne von § 1 a)). Es werden in diesem Kapitel hauptsächlich Cohomologieeigenschaften der Kählerschen Modifikation, wie sie unten definiert wird, behandelt.

§ 17. Exakte Sequenzen für Kählersche Mannigfaltigkeiten

a) **Kählersche Modifikation mit Abbildung.** Unter einer Kählerschen Modifikation mit Abbildung verstehen wir folgendes: es handelt sich um eine Modifikation (1) mit Abbildung (3), $V = V^{(n)}$ und $W = W^{(n)}$ sind kompakte Kählersche Mannigfaltigkeiten, das heißt kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik (vgl. Eckmann und Guggenheimer [15]), und die Abbildung φ in (3) ist komplex analytisch mit der komplexen Singularitätenmannigfaltigkeit $S^{(m)}$ über der komplexen Ausnahmemannigfaltigkeit $A^{(q)}$. S ist singularitätenfrei komplex analytisch eingelagert in V und desgleichen A in W. S und A sind dann Kählersch, und es ist $m = n - 1$, da S als Singularitätenmannigfaltigkeit der komplex analytischen Abbildung φ mit der Nullstellenmannigfaltigkeit der Funktionaldeterminante $D(\varphi)$ zusammenfällt.

b) **Harmonische Formen.** Die im folgenden auftretenden Gruppen sind C-Moduln, das heißt Vektorräume über C, wo C der Körper der komplexen Zahlen ist. Ist M eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit, so wird die Gruppe $H^k_\Delta(M)$ der harmonischen k-Formen auf M unterteilt in die Gruppen

$H_\Delta^{s,t}(M)$ der reinen harmonischen Formen vom Typus (s,t), $s+t=k$ (vgl. [15]):

$$H_\Delta^k(M) \cong \sum_{s+t=k} H_\Delta^{s,t}(M)\,, \tag{70}$$

und der de Rham-Hodgesche Satz besagt

$$H^k(M;C) \cong H_\Delta^k(M)\,. \tag{71}$$

Neben dem äußeren Differentiationsoperator d und dem verallgemeinerten Laplaceschen Operator $\Delta = d\delta + \delta d$ sind die Operatoren d' und d'' zu betrachten (vgl. [8], [20]; bei HODGE [20] mit d, $i^k\bar{d}C$ bezeichnet), und weiter der Operator $\nabla = d'd'' = -d''d'$.

Ist $F^{s,t}$ die Gruppe der reinen (s,t)-Formen auf M, das heißt die Gruppe der komplexen Cartanschen $(s+t)$-Formen vom Typus (s,t) auf M, so werden die Gruppen $Z_{d'}^{s,t}$, $Z_{d''}^{s,t}$, $Z_{d',d''}^{s,t}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} Z_{d'}^{s,t} &= \{f \mid f \in F^{s,t},\ d'f = 0\}\,,\\ Z_{d''}^{s,t} &= \{f \mid f \in F^{s,t},\ d''f = 0\}\,,\\ Z_{d',d''}^{s,t} &= \{f \mid f \in F^{s,t},\ d'f = d''f = 0\}\,. \end{aligned}$$

Dann gelten die Hodgeschen Isomorphismen ([20]):

$$\left.\begin{aligned} H_{d'}^{s,t}(M) &= Z_{d'}^{s,t}(M) \,/\, d'F^{s-1,t}(M) \cong H_\Delta^{s,t}(M)\,,\\ H_{d''}^{s,t}(M) &= Z_{d''}^{s,t}(M) \,/\, d''F^{s,t-1}(M) \cong H_\Delta^{s,t}(M)\,,\\ H_{d',d''/\nabla}^{s,t}(M) &= Z_{d',d''}^{s,t}(M) \,/\, \nabla F^{s-1,t-1}(M) \cong H_\Delta^{s,t}(M)\,. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

c) **Exakte Sequenzen.** Ist V eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit und S darin komplex analytisch singularitätenfrei eingelagert, so werden die relativen Gruppen $H_{d'}^{s,t}(V,S)$, $H_{d''}^{s,t}(V,S)$, $H_{d',d''/\nabla}^{s,t}(V,S)$ analog den absoluten definiert (vgl. [2]). Mit Hilfe von (72) erhalten wir die exakten Sequenzen

$$\left.\begin{aligned} &\ldots \xrightarrow{i^*} H_\Delta^{s-1,t}(S) \xrightarrow{d'} H_{d'}^{s,t}(V,S) \xrightarrow{j^*} H_\Delta^{s,t}(V) \xrightarrow{i^*} H_\Delta^{s,t}(S) \xrightarrow{d'} \ldots\,,\\ &\ldots \xrightarrow{i^*} H_\Delta^{s,t-1}(S) \xrightarrow{d''} H_{d''}^{s,t}(V,S) \xrightarrow{j^*} H_\Delta^{s,t}(V) \xrightarrow{i^*} H_\Delta^{s,t}(S) \xrightarrow{d''} \ldots\,,\\ &\ldots \xrightarrow{i^*} H_\Delta^{s-1,t-1}(S) \xrightarrow{\nabla} H_{d',d''/\nabla}^{s,t}(V,S) \xrightarrow{j^*} H_\Delta^{s,t}(V) \xrightarrow{i^*} H_\Delta^{s,t}(S) \xrightarrow{\nabla} \ldots\,. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Der Beweis der Exaktheit der Sequenzen (73) verläuft nach den üblichen Methoden unter Verwendung von (72) (vgl. [2]). (73) tritt nun an die Stelle der gewöhnlichen exakten Sequenzen, wie wir sie in Kapitel II und III verwendet haben. Wir werden im folgenden nur von der ersten exakten Sequenz in (73) Gebrauch machen; die beiden andern wurden der Vollständigkeit halber angeführt und könnten ebenso benutzt werden.

§ 18. Cohomologietheorie der Kählerschen Modifikation mit Abbildung

a) **Verfeinerung von Lemma 4 und 5.** Liegt die Kählersche Modifikation

$$\Phi:\ (V^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (W^{(n)}, A^{(q)})$$

mit der Abbildung φ vor, so gelten (53) und (58) in Lemma 4. Mit (70), (71) folgen dann wegen der komplexen Analytizität von φ die Beziehungen

$$0 \to H_{\Delta}^{s,t}(W) \xrightarrow{\varphi^*} H_{\Delta}^{s,t}(V)\,, \tag{$53_{s,t}$}$$

$$0 \to H_{\Delta}^{s,t}(A) \xrightarrow{\bar\varphi^*} H_{\Delta}^{s,t}(S)\,. \tag{$58_{s,t}$}$$

Für $H_{d'}^{k}(V,S) = \sum\limits_{s+t=k} H_{d'}^{s,t}(V,S)$ gilt das kommutative Diagramm

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \xrightarrow{i^*} & H_{\Delta}^{k-1}(S) & \xrightarrow{d'} & H_{d'}^{k}(V,S) & \xrightarrow{j^*} & H_{\Delta}^{k}(V) & \xrightarrow{i^*} & H_{\Delta}^{k}(S) & \xrightarrow{d'} \ldots \\
 & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\ldots \xrightarrow{i^*} & H_{\Delta}^{k-1}(S) & \xrightarrow{d} & H_{d}^{k}(V,S) & \xrightarrow{j^*} & H_{\Delta}^{k}(V) & \xrightarrow{i^*} & H_{\Delta}^{k}(S) & \xrightarrow{d} \ldots
\end{array}\right\}, \tag{74}$$

in welchem die Doppelpfeile Isomorphismen auf bedeuten. Die obere Sequenz in (74) ergibt sich durch Summation aus der ersten in (73), die untere entsteht aus der üblichen Sequenz für die de Rhamschen Gruppen. $H_{d}^{k}(V,S)$ ist die k-te de Rhamsche relative Cohomologiegruppe, und es ist

$$H_{d}^{k}(V,S) \cong H^{k}(V,S)\,, \tag{75}$$

was mit Hilfe des de Rhamschen Satzes für V und für S sowie der exakten Sequenzen des Paares (V,S) für die de Rhamschen und für die gewöhnlichen Cohomologiegruppen bewiesen wird. (74) und (75) implizieren

$$H_{d'}^{k}(V,S) \cong H_{d}^{k}(V,S) \cong H^{k}(V,S)\,. \tag{76}$$

Da der Isomorphismus Φ^* in (28) durch φ induziert wird, und da φ komplex analytisch ist, erhalten wir wegen (76) die Isomorphismen

$$0 \to H_{d'}^{s,t}(W,A) \xrightarrow{\Phi^*} H_{d'}^{s,t}(V,S) \to 0\,. \tag{$28_{s,t}$}$$

Wegen $(28_{s,t})$, $(53_{s,t})$, $(58_{s,t})$ bekommen wir mit Hilfe der ersten Sequenz in (73) ein zu (55′) analoges Diagramm:

$$\left.\begin{tikzcd}
 & & 0 & & & \\
\cdots \arrow[r, "i^*"] & H_\Delta^{s-1,t}(S) \arrow[r, "d'"] & H_{d'}^{s,t}(V, S) \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & H_\Delta^{s,t}(V) \arrow[r, "i^*"] & H_\Delta^{s,t}(S) \arrow[r, "d'"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "i^*"] & H_\Delta^{s-1,t}(A) \arrow[u, "\overline{\varphi}^*"'] \arrow[r, "d'"] & H_{d'}^{s,t}(W, A) \arrow[u, "\Phi^*"'] \arrow[r, "j^*"] & H_\Delta^{s,t}(W) \arrow[u, "\varphi^*"'] \arrow[r, "i^*"] & H_\Delta^{s,t}(A) \arrow[u, "\overline{\varphi}^*"'] \arrow[r, "d'"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}\right\} .$$

Daraus folgt wie bei (55′) analog zu (59)

$$H_\Delta^{s,t}(V) \cong H_\Delta^{s,t}(W) + H_\Delta^{s,t}(S) - H_\Delta^{s,t}(A) . \tag{$59_{s,t}$}$$

Es gilt also der folgende Satz:

Satz 29. *Sind die beiden kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeiten* $V^{(n)}$, $W^{(n)}$ *modifikationsäquivalent durch die komplex analytische Abbildung* φ *mit der Singularitätenmannigfaltigkeit* $S^{(n-1)}$ *über der Ausnahmemannigfaltigkeit* $A^{(q)}$ *(die Einlagerungen* $S \subset V$ *und* $A \subset W$ *sind komplex analytisch singularitätenfrei), so gilt*

$$0 \to H_\Delta^{s,t}(W) \xrightarrow{\varphi^*} H_\Delta^{s,t}(V) \ , \tag{$53_{s,t}$}$$

$$0 \to H_\Delta^{s,t}(A) \xrightarrow{\overline{\varphi}^*} H_\Delta^{s,t}(S) \ , \tag{$58_{s,t}$}$$

$$H_\Delta^{s,t}(V) \cong H_\Delta^{s,t}(W) + H_\Delta^{s,t}(S) - H_\Delta^{s,t}(A) . \tag{$59_{s,t}$}$$

b) **Verfeinerung von Lemma 6′. Invarianz des Geschlechtes g_s.** Sind die Voraussetzungen des Satzes 29 erfüllt, so befinden wir uns im Falle von Lemma 6′ mit $r = 2$, $J = C$. Für P_2^{2n} nehmen wir den komplex projektiven Raum $P^{(n)}$. (63′) gilt dann verfeinert für die einzelnen Gruppen der reinen harmonischen Formen, wenn

$$\left.\begin{aligned} H_\Delta^{s,t}(P^{(n)}) &\cong C \quad \text{für } 0 \leq s = t \leq n \, , \\ H_\Delta^{s,t}(P^{(n)}) &= 0 \quad \text{sonst} \, , \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

berücksichtigt wird:

Satz 30. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 29 *gilt*

$$H_\Delta^{s,t}(S^{(n-1)}) \cong H_\Delta^{s,t}(A^{(q)} \times P^{(n-q-1)}) . \tag{$63'_{s,t}$}$$

Zum Beweis von $(63'_{s,t})$ benutzt man das Pendelverfahren mit Berücksichtigung der Typen der Differentialformen (Verfeinerung des Pendelverfahrens von § 15). Dabei werden $(59_{s,t})$, $H_\Delta^{n,t}(S) = (H_\Delta^{n,t}(A) = 0$, und der Poincarésche Dualitätssatz in der Form

$$H_\Delta^{s,t}(M) \cong H_\Delta^{n-t,n-s}(M)\,,$$

wie er durch den de Rham-Hodgeschen Operator $*$ induziert wird, angewandt (M ist eine komplex n-dimensionale kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit). Aus $(59_{s,t})$, $(63'_{s,t})$, (77) folgt

$$H_\Delta^{s,0}(V) \cong H_\Delta^{s,0}(W)\,, \quad H_\Delta^{0,t}(V) \cong H_\Delta^{0,t}(W)\,, \tag{78}$$

die Bettischen Zahlen $b_{s,0}$, $b_{0,t}$ sind also invariant bei Kählerscher Modifikation mit Abbildung. Es bedeutet $b_{s,t} = b_{s,t}(M)$ den Rang der Gruppe $H_\Delta^{s,t}(M)$, und die Zahl $b_{s,0} = b_{0,s} = g_s$ heißt das «Geschlecht» der Dimension s von M. Damit haben wir den folgenden Satz:

Satz 31. *Ist wie in Satz* 29 *eine Kählersche Modifikation mit Abbildung gegeben, so gilt*

$$g_s(V) = g_s(W)\,, \tag{78'}$$

das heißt das Geschlecht g_s ist invariant bei Kählerscher Modifikation mit Abbildung.

c) **Kählersche Bimodifikation.** Eine Kählersche Bimodifikation ist eine Bimodifikation (vgl. § 14 c)), in welcher V und W kompakte Kählersche Mannigfaltigkeiten sind, die Abbildungen φ_1 und φ_2 komplex analytisch sind, und die kritischen Mengen S_1, S_2, A_1, A_2 sich zusammensetzen aus endlich vielen Komponenten, bestehend aus in V bzw. in W komplex analytisch singularitätenfrei eingelagerten Mannigfaltigkeiten. Es ist sofort ersichtlich: $(59_{s,t})$, (78) bzw. (78′) sind auch im Falle Kählerscher Bimodifikation richtig, wobei in $(59_{s,t})$ $S = S_1 \cup S_2$, $A = A_1 \cup A_2$ zu setzen ist (wie in (59_b)). Wir bekommen also:

Satz 29_b. *Bei Kählerscher Bimodifikation gilt*

$$\begin{aligned} H_\Delta^{s,t}(V) &\cong H_\Delta^{s,t}(W) + H_\Delta^{s,t}(S_1) + H_\Delta^{s,t}(S_2) - H_\Delta^{s,t}(A_1) - H_\Delta^{s,t}(A_2) \\ &\cong H_\Delta^{s,t}(W) + H_\Delta^{s,t}(S) - H_\Delta^{s,t}(A)\,. \end{aligned}$$

Satz 31_b. *Das Geschlecht g_s ist invariant bei Kählerscher Bimodifikation.*

d) **Weitere Untersuchung des Geschlechtes g_s.** $g_s = g_s(M)$ ist der Rang des Moduls der holomorphen s-Formen auf M, und diese Definition bleibt bestehen für eine beliebige kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. M sei also eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. $g_s(M)$ ist dann endlich (vgl. [9]). Eine allgemeine komplexe Modifikation ist eine Modifikation (1), in welcher V, W kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten sind, S und A «komplexe Mengen», das heißt aufgebaut aus endlich vielen in V bzw. in W komplex analytisch eingebetteten Mannigfaltigkeiten mit eventuellen Singularitäten, und in welcher der Homöomorphismus φ' in (2) komplex analytisch ist. Für solche Modifikationen gilt der folgende Satz:

Satz 32. *Liegt die allgemeine komplexe Modifikation*

$$\Phi: (V^{(n)}, S^{(m)}) \to (W^{(n)}, A^{(q)}) \tag{1}$$

vor, und ist $n - 2 \geq q$, *so gilt*

$$g_s(V) \leq g_s(W); \tag{79_1}$$

ist $n - 2 \geq m$, *so gilt*

$$g_s(V) \geq g_s(W); \tag{79_2}$$

ist $n - 2 \geq \mathrm{Max}(m, q)$, *so gilt*

$$g_s(V) = g_s(W). \tag{78'}$$

Beweis: Jede holomorphe Form in V läßt sich mittels des komplexen Homöomorphismus φ' von $V - S$ auf $W - A$ übertragen. Ist $n - 2 \geq q$, so läßt sie sich mit Hilfe des Kontinuitätssatzes (vgl. [5], pp. 49–51) in ganz W eindeutig analytisch fortsetzen. Nimmt man noch das Prinzip der Permanenz der Funktionalgleichung hinzu, so folgt: linear unabhängige Formen in V induzieren linear unabhängige Formen in W, und damit ergibt sich die Ungleichung (79_1). Ist $n - 2 \geq m$, so kommt man analog zur Ungleichung (79_2), ausgehend von den holomorphen Formen in W. Ist $n - 2 \geq \mathrm{Max}(m, q)$, so folgt (78′) aus ($79_1$) und ($79_2$).

Bemerkung. Die Ungleichung (79_1) ist schon richtig für eine Modifikation (1), in welcher V und W kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten sind, S und A Teilmengen in V bzw. in W mit $\dim(A) \leq 2n - 3$. Der Beweis ist derselbe wie oben. Entsprechend gilt (79_2), wenn $\dim(S) \leq 2n - 3$, und für $2n - 3 \geq \mathrm{Max}(\dim(S), \dim(A))$ bekommt man (78′).

Handelt es sich um eine allgemeine komplexe Modifikation mit Abbildung, das heißt wird die allgemeine komplexe Modifikation (1) durch eine komplex analytische Abbildung φ induziert, so ist $m = n - 1$, da S mit der Nullstellenmenge der Funktionaldeterminante $D(\varphi)$ zusammenfällt, und es ist $n - 2 \geq q$, denn ist für eine Komponente von A die komplexe Dimension gleich $n - 1$, so kann der komplex $(n - 1)$-dimensionale Teil dieser Komponente als Teil der Ausnahmemenge weggelassen werden (vgl. [26]). Somit gilt nach Satz 32 die Ungleichung (79_1). Da die komplexe Modifikation (1) durch die komplex analytische Abbildung φ induziert werden soll, ist auch (79_2) richtig, denn φ gibt Anlaß zu einem Isomorphismus φ^* von $F^s_h(W)$ in $F^s_h(V)$ ($F^s_h(M)$ bezeichnet den Modul der holomorphen s-Formen auf der komplexen Mannigfaltigkeit M): zu φ: $V \to W$ gehört der Homomorphismus $\varphi^{\#}: F^k(W) \to F^k(V)$ ($F^k(M)$ ist der Modul der k-Formen auf M), $\varphi^{\#}$ transformiert holomorphe Formen in holomorphe (allgemeiner: $\varphi^{\#}$ erhält den Typus einer reinen Form), und $\varphi^{\#}$ ist auf $F^s_h(W)$ ein Isomorphismus in $F^s_h(V)$ wegen dem Prinzip der Permanenz der Funktionalgleichung (linear unabhängige holomorphe Formen werden durch $\varphi^{\#}$ in linear unabhängige abgebildet). Wir bekommen also:

Satz 33. *Wird die allgemeine komplexe Modifikation*

$$\Phi: \ (V^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (W^{(n)}, A^{(q)}) \tag{1}$$

durch die komplex analytische Abbildung φ: $V \to W$ *induziert, so ist*

$$g_s(V) = g_s(W) \,. \tag{78'}$$

Mit andern Worten: das Geschlecht g_s ist invariant bei einer fast überall schlichten komplex analytischen Abbildung (zum Begriff «fast überall schlicht» siehe Einleitung a)). Man erkennt sofort: versteht man unter einer allgemeinen komplexen Bimodifikation eine Bimodifikation, in welcher V und W kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten sind, die Abbildungen φ_1 und φ_2 komplex analytisch, und die kritischen Mengen S und A komplexe Mengen, so gilt:

Satz 33$_b$. *Das Geschlecht g_s ist invariant bei allgemeiner komplexer Bimodifikation.*

Bemerkung. Der Beweis zu Satz 33 bzw. 33$_b$ läßt sich übertragen auf die Moduln $F^s_m(V)$ und $F^s_m(W)$ der meromorphen s-Formen auf V und W, so daß bei einer allgemeinen komplexen Modifikation mit Abbildung bzw. Bimodifikation die Isomorphie $F^s_m(V) \cong F^s_m(W)$ gilt. Insbesondere ist $F^0_m(V) \cong F^0_m(W)$, das heißt der Körper der meromorphen Funktionen auf V ist isomorph demjenigen auf W (additiv und multiplikativ; vgl. auch [17]).

Die Sätze 33 und 33$_b$ gelten insbesondere für allgemeine Kählersche Modifikation mit Abbildung und für allgemeine Kählersche Bimodifikation, das heißt für allgemeine komplexe Modifikation mit Abbildung bzw. Bimodifikation mit Kählerschem V und W. Dabei folgt die Ungleichung (79$_3$) im Kählerschen Falle auch direkt aus (53$_{s,0}$).

§ 19. Zusätzliche Bemerkungen über die komplexe Modifikation

a) Beziehung zu den birationalen Transformationen. Nachdem in der Bemerkung zu Satz 33$_b$ festgestellt wurde, daß bei allgemeiner komplexer Bimodifikation der Körper $F^0_m(V)$ der meromorphen Funktionen erhalten bleibt, ist damit auch gesagt, daß im Falle algebraischer Mannigfaltigkeiten V, W eine allgemeine komplexe Bimodifikation zwischen V und W eine birationale Transformation darstellt. Umgekehrt ist zu vermuten: jede birationale Transformation zwischen singularitätenfreien algebraischen Mannigfaltigkeiten V, W läßt sich durch Zusammensetzen endlich vieler Kählerscher Bimodifikationen (im Sinne von § 18 c)) erzeugen. Vgl. dazu [32]. Daraus würde die birationale Invarianz des Geschlechtes g_s für singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeiten folgen [9]).

Definieren wir analog zu § 18 c) die komplexe Bimodifikation: V, W kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, φ_1 und φ_2 komplex analytische Abbildungen, S_1, S_2, A_1, A_2 wie in § 18 c), so kann die folgende Frage gestellt werden: läßt sich jede allgemeine komplexe Bimodifikation durch Zusammensetzen endlich vieler komplexer Bimodifikationen erzeugen? Wir können noch weiter gehen. Betrachten wir solche allgemeine komplexe Modifikationen Φ, bei welchen $S = S_1 \cup S_2$, $A = A_1 \cup A_2$, und φ' eine komplex analytische Abbildung $\hat{\varphi}_1$ von $V - S_2$ auf $(W - A_2) \cup A_1$ und eine solche $\hat{\varphi}_2$ von $W - A_1$ auf $(V - S_1) \cup S_2$ induziert. S_1, S_2, A_1, A_2 sind komplexe Mengen; im allgemeinen ist $S_1 \cap S_2 \neq 0$, $A_1 \cap A_2 \neq 0$. Läßt sich nun jede solche komplexe Modifikation durch Zusammensetzen endlich vieler komplexer Bimodifikationen erzeugen? Man kommt unter anderem zur Aufgabe, S_1 von S_2 und A_1 von A_2 durch Zusammensetzen komplexer Bimodifikationen zu trennen. Die hier gestellten Fragen sind verwandt mit der Frage nach der Auflösbarkeit der Singularitäten einer algebraischen Vielfältigkeit durch birationale (oder durch monoidale) Transformationen.

b) Kählersche Modifikation mit stark regulären Einlagerungen. Wir betrachten nun eine komplexe Modifikation (1) mit kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeiten V, W, S, A, die nicht durch eine Abbildung erzeugt sei. Um verfeinerte Cohomologieaussagen über diese Kählersche Modifikation zu machen, wird man versuchen, die Isomorphie $(28_{s,t})$ zu beweisen. Ob dies ohne weitere Voraussetzungen geht, ist fraglich. Es ist jedoch einzusehen, daß $(28_{s,t})$ richtig ist, falls die Einlagerungen $S \subset V$ und $A \subset W$ «stark regulär» sind, das heißt falls es sich um Kählersche Modifikation mit stark regulären Einlagerungen handelt (vgl. [2]). Dabei heißt die Einlagerung $S \subset V$ stark regulär, wenn eine Umgebung $U(S) = \tilde{S}$ existiert, die in Zellen $U^{(n-m)}$ mit der komplex linearen Gruppe als Strukturgruppe komplex gefasert wird:

$$\mathfrak{E} = \{\tilde{S}^{(n)}, U^{(n-m)}, S^{(m)}\} ,$$

[9]) Wegen Satz 33_b. Die birationale Invarianz von g_s läßt sich jedoch ohne diese Vermutung über die Zerlegbarkeit einer birationalen Transformation ähnlich wie Satz 33_b mit Hilfe des Kontinuitätssatzes direkt herleiten. Vgl. auch [36].

so daß S eine komplex analytische Schnittfläche in $\mathfrak{C}$ wird. Es gibt dann eine komplex analytische Projektionsabbildung $\pi : \tilde{S} \to S$, so daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$H^{s,t}_{d'}(\tilde{S}) \underset{\pi^*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} H^{s,t}_{\Delta}(S) \rightleftarrows 0 \,, \quad H^{s,t}_{d',d''/\nabla}(\tilde{S}) \underset{\pi^*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} H^{s,t}_{\Delta}(S) \rightleftarrows 0 \,.$$

Dann kann auch die Betrachtung von § 12 a) mit Hilfe der exakten Sequenzen (73) und des Poincaréschen Dualitätssatzes mit Berücksichtigung der Typen der Differentialformen durchgeführt werden. Ist also

$$\Phi:\ (V^{(n)}, S^{(m)}) \to (W^{(n)}, A^{(q)})$$

eine Kählersche Modifikation mit stark regulären Einlagerungen, $n - 1 \geq m \geq q$, so gilt

$$H^{s,t}_{\Delta}(S) \cong H^{s,t}_{\Delta}(A) \quad \text{für} \quad s + t \leq 2n - (2m + 3) \,. \tag{$51_{s,t}$}$$

Handelt es sich weiter um eine Kählersche Modifikation mit homologietreuen Einlagerungen (über $J = C$), so gelten die Beziehungen (a) und (b) in der Bemerkung in § 14 b) für die Gruppen der harmonischen Formen nach den verschiedenen Typen aufgeteilt. Daher läßt sich eine zu § 16 i) analoge Aussage machen: es gilt ($59_{s,t}$) für Kählersche Modifikation mit homologietreuen stark regulären Einlagerungen (bei homologietreuen Einlagerungen wird kein Gebrauch gemacht von der Eigenschaft, daß die Strukturgruppe von $\mathfrak{C}$ die komplex lineare Gruppe sein soll, vgl. [2]). Die in Satz 26 gemachten Aussagen lassen sich ebenfalls übertragen, insbesondere gilt für $m - q = \beta r$, $r = n - m \geq 1$,

$$H^{s,t}_{\Delta}(S^{(m)}) \cong H^{s,t}_{\Delta}(A^{(q)} \times P^{(m-q)}_{(r)}) \,, \tag{$63''_{s,t}$}$$

wenn wir symbolisch setzen:

$$H^{s,t}_{\Delta}(P^{(n)}_{(r)}) \cong C \quad \text{für} \quad 0 \leq s = t = \mu r \leq n \,, \qquad n = \lambda r \,,$$

$$H^{s,t}_{\Delta}(P^{(n)}_{(r)}) = 0 \quad \text{sonst} \,.$$

Es bleibt auch Satz 31 richtig, wenn wir an Stelle Kählerscher Modifikation mit Abbildung Kählersche Modifikation mit homologietreuen stark regulären Einlagerungen betrachten. – Es ist mir allerdings nicht bekannt, ob außer naheliegenden ganz trivialen Fällen derartige Modifikationen existieren.

c) **Komplexe Modifikation mit Abbildung.** Die komplexe Modifikation mit Abbildung wird wie die Kählersche in § 17 a) definiert, nur daß es sich nicht um Kählersche, sondern nur um komplexe Mannigfaltigkeiten handelt. Beispiele komplexer Modifikationen mit Abbildung werden gegeben durch den in § 7 c) beschriebenen $\sigma^{n,q}$-Prozeß ($19_{(1)}$). Im Kählerschen Fall können dann auf ($19_{(1)}$) die verfeinerten Cohomologiebeziehungen ($59_{s,t}$), ($63'_{s,t}$) angewandt werden, es gilt eine zu § 16 h) analoge verfeinerte Bemerkung. Nun gilt ein Satz, der das Ergebnis (63') in Satz 26 im Falle komplexer Modifikation mit Abbildung wesentlich verschärft, welcher besagt, daß es außer den $\sigma^{n,q}$-Prozessen keine anderen nicht trivialen [10]) komplexen Modifikationen mit Abbildung gibt: jede nicht triviale komplexe Modifikation mit Abbildung ist äquivalent einem $\sigma^{n,q}$-Prozeß (Einzigkeitssatz für komplexe Modifikation mit Abbildung). Daraus folgt (63') von neuem unter Benutzung der Spektralfolge für die zum $\sigma^{n,q}$-Prozeß $(19_{(1)})$ gehörige komplex projektive Faserung $(25_{(1)})$, und im Kählerschen Fall gelangt man in ähnlicher Weise zu $(63'_{s,t})$ unter Berücksichtigung der komplexen Analytizität der Faserung $(25_{(1)})$ und der Typeneinteilung der Differentialformen. Ferner können die Cohomologiebeziehungen in den Sätzen 29 und 30 unter allgemeineren Voraussetzungen für die Dolbeaultschen Gruppen (vgl. [12]) bewiesen werden, wieder unter Benutzung des obigen Einzigkeitssatzes. Über diese hier angedeuteten Ergebnisse ist eine Arbeit in Vorbereitung.

Literaturverzeichnis

[1] J. ADEM. Relations on iterated reduced powers. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *39* (1953), 636–638.

[2] A. AEPPLI. Über exakte Sequenzen in der Cohomologietheorie Kählerscher Mannigfaltigkeiten. In Vorbereitung.

[3] P. ALEXANDROFF und H. HOPF. Topologie. Springer, 1935.

[4] H. BEHNKE und K. STEIN. Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. *124* (1951), 1–16.

[5] H. BEHNKE und P. THULLEN. Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Springer, 1934.

[6] A. BOREL. Cohomologie des espaces localement compacts, d'après J. LERAY. Vervielfältigte Vorträge, ETH Zürich, 1951.

[7] H. CARTAN. Séminaire de Topologie algébrique 1950–1951. Vervielfältigte Vorträge, Paris, 1951.

[8] H. CARTAN. Séminaire 1951–1952. Exposé I. Vervielfältigter Vortrag, Paris, 1952.

[9] H. CARTAN et J. P. SERRE. Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compacts. C. R. Acad. Sci. Paris *237* (1953), 128–130.

[10] S. S. CHERN. On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties. Amer. J. of Math. *75* (1953), 565–597.

[11] H. F. DENNISTON. On the topology of certain birational transformations. Ann. of Math. *63* (1956), 10–14.

[12] P. DOLBEAULT. Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes. C. R. Acad. Sci. Paris *236* (1953), 175–177.

[13] B. ECKMANN. Zur Homotopietheorie gefaserter Räume. Comment. Math. Helv. *14* (1941), 141–192.

[14] B. ECKMANN. Coverings and Betti Numbers. Bull. Amer. Math. Soc. *55* (1949), 95–101.

[10]) «Nicht trivial» bedeutet: φ ist kein Homöomorphismus. Vgl. die Bemerkung nach Satz 4, § 4.

[15] B. Eckmann et H. Guggenheimer. Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion. C. R. Acad. Sci. Paris *229* (1949), 464–466, 489–491.

[16] S. Eilenberg and N. Steenrod. Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press, 1952.

[17] H. Grauert und R. Remmert. Zur Theorie der Modifikationen. I. Math. Ann. *129* (1955), 274–296.

[18] W. Gysin. Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. *14* (1941), 61–122.

[19] G. Hirsch. La géométrie projective et la topologie des espaces fibrés. Colloque sur la top. alg., Paris 1947. CNRS, 1949, 35–42.

[20] W. V. D. Hodge. Differential Forms on a Kähler Manifold. Proc. Cambridge Phil. Soc. *47* (1951), 504–517.

[21] H. Hopf. Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. J. Reine Angew. Math. *163* (1930), 71–88.

[22] H. Hopf. Über Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. Fund. Math. *25* (1935), 427–440.

[23] H. Hopf. Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. e Appl., Serie V, *10*, Fasc. 1–2 (1951).

[24] H. Hopf. Schlichte Abbildungen und lokale Modifikation 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. *29* (1955), 132–156.

[25] K. Kodaira. Kähler Varieties of Restricted Type. Ann. of Math. *60* (1954), 28–48.

[26] E. Kreyszig. Stetige Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. *128* (1955), 479–492.

[27] E. Kundert. Über Schnittflächen in speziellen Faserungen und Felder reeller und komplexer Linienelemente. Ann. of Math. *54* (1951), 215–246.

[28] S. Lefschetz. Introduction to Topology. Princeton University Press, 1949.

[29] S. D. Liao. On the Theory of Obstructions of Fibre Bundles. Ann. of Math. *60* (1954), 146–191.

[30] L. Pontrjagin. Characteristic Cycles on Differentiable Manifolds. Amer. Math. Soc. Transl. Number 32, 1950. Math. Sbornik *21* (63), (1947), 233–284.

[31] N. Steenrod. The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press, 1951.

[32] W. Stoll. Über meromorphe Modifikationen. Math. Z. *61* (1954), 206–234.

[33] R. Thom. Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. *69* (1952), 109–182.

[34] R. Thom. Variétés différentiables cobordantes. Colloque sur la géométrie différentielle, Strasbourg 1953, CNRS, 1953, 143–149.

[35] R. Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helv. *28* (1954), 17–86.

[36] B. L. van der Waerden. Birational Invariants of Algebraic Manifolds. Acta Salmant. Ser. Ci. (N.S.) *2* (1947), 1–56.

[37] Wu Wen-Tsun. Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci. Paris *230* (1950), 508–511.

(Eingegangen den 1. Juni 1956)

(Einleitung umgearbeitet im Oktober 1956)