

Diskrete Räume *

P. Alexandroff (Moskau)

Dem Andenken an Emmy Noether gewidmet

Einleitung

Diese Arbeit stellt sich die Aufgabe, vor allem die Homologie-Theorie der diskreten Räume¹ aufzubauen. Dabei wird ausser einer Endlichkeitsvoraussetzung (die unter dem Namen der lokalen Endlichkeit gleich formuliert wird), zum Unterschied von Tucker und Kolmogoroff², keine weitere Voraussetzung gemacht.

1. Der Begriff eines diskreten Raumes ist mit dem Begriff einer teilweise geordneten Menge identisch (vgl. § 1 dieser Arbeit). Ein diskreter Raum (eine teilweise geordnete Menge) heisst lokal-endlich, wenn die Anzahl der Elemente der teilweise geordneten Menge, die auf ein gegebenes Element folgen, sowie die Anzahl der Elemente, die einem gegebenen Element vorangehen, immer (d. h. für jedes Element) endlich ist. Sodann wird ein r -dimensionaler algebraischer Komplex des diskreten Raumes D und des Koeffizientenbereiches J definiert als eine schiefe-symmetrische Funktion $f^r(p_0, \dots, p_r)$, deren $r+1$ Argumente alle $(r+1)$ -tupel von Elementen von D durchlaufen, und deren Werte der Abelschen Gruppe J angehören. Dabei wird verlangt:

Nur wenn $p_0, \dots, p_r$ Elemente einer geordneten Teilmenge der teilweise geordneten Menge D sind, kann $f^r(p_0, \dots, p_r)$ von Null verschieden sein.

Der Rand $g_u f^r$ ist der durch die folgende Vorschrift definierte $(r-1)$ -dimensionale algebraische Komplex f^{r-1} :

$$g_u f^r \equiv f^{r-1}(p_0, \dots, p_{r-1}) = \sum_p f^r(p, p_0, \dots, p_r),$$

die Summe über alle $p \in D$ erstreckt.

* Diese Arbeit wurde am 16. März 1937 der Moskauer Mathematischen Gesellschaft vorgetragen.

¹ Die diskreten Räume wurden von mir in der Note «Sur les espaces discrets» [Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 200, (1935), 1649] als Spezialfall topologischer Räume eingeführt. Äquivalente Begriffe wurden auch viel früher unter verschiedenen Gesichtspunkten von verschiedenen Verfassern — darunter Garrett Birkhoff, Tucker u. a. — betrachtet. Algebraisch geht der Begriff noch auf Dedekind zurück [«Dualgruppen», vgl. insbesondere Ore, On the Foundation of abstract algebra, Annals of math., 33, (1935), 406—437], mengentheoretisch wohl auf Hausdorff und E. H. Moore (teilweise geordnete Mengen). In der vorliegenden Darstellung wird kein Gebrauch von der früheren Literatur gemacht.

² Tucker, Cell spaces, Annals of Math., 37, (1936), 92—100; Kolmogoroff, Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie, Rec. math. Moscou, 1 (43), (1936), 97—102. Diese Arbeit von Kolmogoroff wird im folgenden als R. M. zitiert.

Diese Definition des algebraischen Komplexes und seines Randes genügt den üblichen Voraussetzungen; Insbesondere ist der Rand des Randes eines algebraischen Komplexes stets Null.

Somit führt die obige Definition in üblicher Weise zu den Begriffen des Zyklus, der Homologie und der Bettischen Gruppen.

Neben der Definition des gewöhnlichen oder unteren Randoperators wird im Anschluss an Alexander und Kolmogoroff² auch der obere Randoperator $g_0 f'$ durch die *ohne jede Endlichkeitsvoraussetzung* (d. h. für ausnahmslos alle diskreten Räume) gültige Formel

$$g_0 f' = f'^{+1}(p_0, \dots, p_{r-1}) = \sum (-1)^i f(\cdot \hat{p}_i \cdot)$$

definiert, wobei $(\cdot \hat{p}_i \cdot)$ für $(p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_r)$ steht.

2. Diese Definitionen werden durch den Begriff der baryzentrischen Unterteilung D_0 eines beliebigen (nicht notwendig lokal-endlichen) diskreten Raumes D motiviert. Darunter versteht man die (im Sinne der gewöhnlichen Inklusionsbeziehung) teilweise geordnete Menge D_0 aller geordneten Teilmengen von D . Man überzeugt sich leicht davon, dass die baryzentrische Unterteilung eines lokal-endlichen diskreten Raumes ein gewöhnlicher simplizialer Komplex ist. Ist der gegebene diskrete Raum ein Zellenkomplex im üblichen Sinne, so stimmt die hier gegebene Definition seiner baryzentrischen Unterteilung mit der klassischen Definition überein.

Beschränkt man sich für einen Augenblick einfachheitshalber auf die Betrachtung endlicher diskreter Räume, so sieht man, dass diese Teilsystemen von Simplexen gewöhnlicher endlicher simplizialer Komplexe isomorph sind; betrachtet man den gegebenen endlichen Raum D in dieser Weise als Teilmenge eines simplizialen Komplexes K , so erhält man seine baryzentrische Unterteilung, wenn man in der baryzentrischen Unterteilung von K nur diejenigen Simplexe beibehält, deren Eckpunkte Schwerpunkte der zu D gehörenden Simplexe sind. Dadurch und durch den 1. Überführungssatz von § 5 wird der Begriff der baryzentrischen Unterteilung auch unserer Anschauung nahegebracht.

Nun zeigt eine leichte Überlegung: *die obige Definition der Bettischen Gruppen eines diskreten Raumes ist inhaltlich identisch mit der gewöhnlichen Definition der Bettischen Gruppen der baryzentrischen Unterteilung von D .*

3. Die baryzentrische Unterteilung D_0 des diskreten Raumes D ist der wichtigste unter den fünf simplizialen Komplexen, die auf eine sehr einfache Weise jedem lokal-endlichen Raume zugeordnet werden können. Die Beziehungen zwischen diesen Komplexen, die einen einfachen geometrischen Inhalt haben, werden in den §§ 2 und 3 untersucht. Dabei tritt als Hauptresultat hervor:

Für eine sehr weite Klasse — der sogenannten multiplikativen — Räume (die den multiplikativen Mengensystemen entsprechen) haben alle fünf «begleitenden Komplexe» dieselben Homologie-Eigenschaften.

Das erlaubt im § 4 festzustellen, dass man für multiplikative Räume die oben skizzierte Homologie-Theorie auch dadurch bekommen kann, dass man diese Räume als im Kleinen bikompakte Räume auffasst und auf dieselben dann die allgemeinen Kolmogoroffischen Definitionen³ anwendet.

² Kolmogoroff, Les groupes de Betti des espaces localement bicomacts, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 202, (1936), 1144. Diese Arbeit wird im folgenden als C. R. zitiert.

Im § 5 werden endliche Überdeckungen von Kompakten als diskrete Räume betrachtet, und ausser dem schon erwähnten speziellen Überführungssatz wird bewiesen, dass jedes Kompaktum mittels einer ε -Überführung in die — als Polyeder aufgefasste — baryzentrische Unterteilung einer beliebigen seiner (abgeschlossenen bzw. offenen) multiplikativen ε -Überdeckungen abgebildet werden kann.

Im § 1 werden die elementaren Eigenschaften diskreter Räume festgestellt.

Inhaltsübersicht

	Seite
§ 1. Die Identität zwischen diskreten Räumen, Mengensystemen und teilweise geordneten Mengen	503
§ 2. Die fünf begleitenden Komplexe, insbesondere die baryzentrische Unterteilung . .	506
§ 3. Die multiplikativen Räume	510
§ 4. Homologie-Theorie der diskreten lokal-endlichen Räume	514
§ 5. Überführungssätze	515

§ 1

Die Identität zwischen diskreten Räumen, Mengensystemen und teilweise geordneten Mengen

1. Ein diskreter Raum ist ein topologischer Raum D , in dem die Summe beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen, und also der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen offen ist.

Man kann somit einen diskreten Raum folgendermassen definieren:

Das ist eine Menge D von irgendwelchen Elementen, in der gewisse Teilmengen ausgezeichnet sind, und zwar so, dass

- 1) D und die leere Menge ausgezeichnet sind,
- 2) Summe und Durchschnitt beliebig vieler ausgezeichneten Mengen ausgezeichnet sind.

Offenbar genügen dann die Komplementärmengen zu den ausgezeichneten Mengen denselben Bedingungen 1) und 2). Man erhält zwei verschiedene topologische — und zwar diskrete — Räume, je nachdem man die ausgezeichneten Mengen als abgeschlossene oder als offene Mengen definiert. Diese beiden Räume heissen zueinander dual. Man erhält also zu einem diskreten Raum D den zu ihm dualen Raum D' , wenn man die abgeschlossenen Mengen von D als die offenen Mengen des Raumes D' erklärt, und umgekehrt.

2. Der Inhalt des Begriffes «diskreter Raum» wird vom allgemein-mengentheoretischen Standpunkt aus durch folgenden Satz klargemacht:

1. Ein diskreter T_0 -Raum D wird zu einer teilweise geordneten Menge, wenn man für je zwei Punkte p und p' von D dann und nur dann

$$p' < p \quad (1)$$

setzt, wenn

$$p' \in p \quad (2)$$

⁴ Der Begriff «topologischer Raum» wird hier wie in Alexandroff-Hopf, Topologie. I, S. 37 verstanden. Dieses Buch wird im folgenden als A.-H. zitiert.

⁵ T_0 -Räume sind Räume, in denen zwei verschiedene Punkte niemals dieselbe abgeschlossene Hülle haben. Dieselbe Bedingung kann auch folgendermassen formuliert werden: von je zwei verschiedenen Punkten besitzt mindestens einer eine Umgebung, welche den anderen Punkt nicht enthält («nulltes» oder Kolmogoroffsches Trennungsaxiom; vgl. A.-H., S. 58).

ist. Umgekehrt lässt sich jede teilweise geordnete Menge D als ein diskreter T_0 -Raum auffassen: man setzt (2), wenn entweder $p' = p$ oder (1) gilt, und definiert für jede nicht leere Teilmenge M von D die abgeschlossene Hülle als Summe der abgeschlossenen Hüllen der einzelnen Punkte von M , während für die leere Menge $\emptyset$ definitionsgemäss $\overline{\emptyset} = \emptyset$ gesetzt wird.

Der Beweis geht automatisch vor sich; insbesondere besagt das nullte Trennungsaxiom gerade, dass die Relationen $p > p'$ und $p' > p$ miteinander unverträglich sind.

Somit sind die Begriffe: diskreter T_0 -Raum und teilweise geordnete Menge äquivalent.

Fasst man einen diskreten T_0 -Raum als teilweise geordnete Menge auf, so sind seine abgeschlossenen Mengen durch die folgende Eigenschaft ausgezeichnet: die Menge enthält zu jedem ihrer Elemente p alle Elemente $p' < p$. Die offenen Mengen G sind umgekehrt dadurch ausgezeichnet, dass mit p auch jedes $p' > p$ in G enthalten ist. Aus dieser Bemerkung folgt:

II. Der Übergang zum dualen Raume bedeutet für die teilweise geordnete Menge die Umkehrung der Ordnungsbeziehung (d. h., wenn für zwei Punkte des diskreten Raumes $p > p'$ ist, so ist im dualen Raume $p' > p$).

Von dieser Nummer an betrachten wir ausschliesslich diskrete T_0 -Räume: der Ausdruck diskreter Raum soll also immer einen diskreten T_0 -Raum bedeuten.

3. Jeder diskrete Raum D ist im folgenden Sinne einem Mengensystem $\mathfrak{D}$ isomorph (oder: lässt sich durch ein Mengensystem $\mathfrak{D}$ darstellen): die Punkte p von D entsprechen den Elementen P von $\mathfrak{D}$ eineindeutig; es ist dann und nur dann $p \in \overline{p}$, wenn für die entsprechenden P, P' gilt: $P' \subset P$.

Es genügt in der Tat $P = \overline{p}$ zu setzen. Wir sehen:

Es kann angenommen werden, dass die Mengen des Systems $\mathfrak{D}$ Teilmengen von D sind.

Die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ einer Punktmenge M des diskreten Raumes D ist — wie im Falle eines beliebigen topologischen Raumes — die kleinste abgeschlossene Menge über M (der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen $\supset M$). Nun aber ist in einem diskreten Raume D jede Punktmenge M auch in einer kleinsten offenen Menge OM enthalten, und zwar ist OM der Durchschnitt aller offenen Mengen $\supset M$. Der Symmetrie der Bezeichnungen halber schreiben wir AM statt $\overline{M}$, und nennen AM die Hülle, OM den Stern von M . Besonders wichtig sind natürlich die Hüllen Ap und die Sterne Op der einzelnen Punkte p von D . Die Punkte $p \in D$ mit $Ap = p$ (die abgeschlossenen Punkte) sollen Eckpunkte, die Punkte $p \in D$ mit $p = Op$ (die offenen Punkte) sollen Grundpunkte von D heissen. Die Op -Mengen stehen zu den Punkten $p \in D$, ebenso wie die Ap -Mengen, in eineindeutiger Beziehung, und es ist $p' \in Ap$ dann und nur dann, wenn $Ap' \subset Ap$ oder $Op' \supset Op$ ist.

Für jeden Punkt $p_0 \in D$ besteht Op_0 aus denjenigen p , für welche $p_0 \in Ap$ ist.

Definition. Zwei Mengensysteme $\mathfrak{A} = \{A\}$ und $\mathfrak{B} = \{B\}$ heissen isomorph, wenn zwischen ihren Elementen eine eineindeutige, die Inklusionsbeziehung erhaltende, Zuordnung hergestellt werden kann.

Somit gilt:

III. Die beiden Mengensysteme: das System $\mathfrak{A}(D)$ der Mengen Ap und das System $\mathfrak{D}(D)$ der Mengen Op des diskreten Raumes D stehen zueinander in folgender Beziehung: das eine Mengensystem ist dem System der Komplementärmenge(n) (in bezug auf D) der Elemente des anderen Systems isomorph (d. h. wenn $Ap' \subset Ap$ ist, so ist $Op' \supset Op$ und umgekehrt).

Ferner gilt:

IV. *Irgendein System von Op-Mengen $\{Op_\alpha\}$ hat dann und nur dann einen nicht-leeren Durchschnitt, wenn die betreffenden p_α zu einem und demselben Ap gehören.*

Wir beweisen mehr, nämlich:

Der Durchschnitt der Op_α besteht aus allen denjenigen p , deren Hüllen Ap alle gegebenen p_α enthalten.

Denn enthält Ap alle p_α , so ist p in allen Op_α enthalten, und umgekehrt.

Zu der Definition eines diskreten Raumes bemerken wir noch folgendes. Ein diskreter Raum kann als eine Menge D aufgefasst werden, in der eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen $p \in D$ und gewissen Teilmengen $Ap \subset D$ erklärt ist, und zwar unter Geltung der beiden folgenden Bedingungen:

$$p \in Ap, \quad (1)$$

$$\text{aus } p' \in Ap \text{ und } p'' \in Ap' \text{ folgt } p'' \in Ap. \quad (2)$$

Sodann definiert man Op als die Menge aller Elemente q mit $p \in Aq$.

4. Definition. Ein Mengensystem $\mathfrak{D} = \{M\}$ heisst vollständig, wenn jede nichtleere Teilmenge einer Menge $M \in \mathfrak{D}$ wiederum ein Element von $\mathfrak{D}$ ist.

Offenbar lässt sich jedes Mengensystem $\mathfrak{D}$ zu einem vollständigen Mengensystem $\bar{\mathfrak{D}}$ dadurch ergänzen, dass man jede nichtleere Teilmenge einer Menge $M \in \mathfrak{D}$ als Element von $\bar{\mathfrak{D}}$ erklärt. $\bar{\mathfrak{D}}$ heisst die vollständige Hülle von $\mathfrak{D}$.

Ein diskreter Raum D heisst vollständig, wenn er einem vollständigen Mengensystem $\mathfrak{D}$ isomorph ist. Die Isomorphie ist dabei in dem zu Beginn von Nr. 3 erklärten Sinne zu verstehen: die Punkte $p \in D$ entsprechen den $P \in \mathfrak{D}$ eindeutig, und es ist $p' \in Ap$ dann und nur dann, wenn für die entsprechenden P, P' aus $\mathfrak{D}$ gilt: $P' \subset P$.

Man überlegt sich leicht:

V. *Für die Vollständigkeit eines diskreten Raumes ist die Gesamtheit der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

- 1) *jedes Ap enthält mindestens einen Eckpunkt,*
- 2) *keine zwei verschiedenen Ap -Mengen enthalten dieselben Eckpunkte (d. h.: sind Ap und Ap' verschieden, so gibt es mindestens in einer dieser Mengen einen Eckpunkt, der in der anderen nicht enthalten ist),*

3) *ist M die Menge aller in einem Ap enthaltenen Eckpunkte, so lässt sich zu jeder nichtleeren Teilmenge M' von M ein $p' \in Ap$ finden von der Eigenschaft, dass M die Menge aller in Ap' enthaltenen Eckpunkte ist.*

Die Menge aller in Ap enthaltenen Eckpunkte heisst das Gerüst von p .

Die Bedingungen 1), 2), 3) bedeuten in ihrer Gesamtheit:

V'. *Das System der Gerüste des Raumes D ist vollständig, und D ist diesem vollständigen Mengensystem isomorph.*

Deshalb ist die einfachste Vorschrift zur Konstruktion eines vollständigen diskreten Raumes die folgende:

Man gibt in D die Eckpunkte an; man gibt ferner an, welche Mengen von Eckpunkten Gerüste sind.

Diese Vorschrift werden wir gleich benutzen, um für jeden diskreten Raum einige mit ihm eng zusammenhängende vollständige Räume zu konstruieren.

Bemerkung. Die obige Vorschrift zur Konstruktion vollständiger diskreter Räume lässt erkennen, dass die vollständigen Räume mit lauter endlichen Ap -Mengen mit den Eckpunktbereichen⁶ der kombinatorischen Topologie identisch sind. Wenn man ferner unter lokal-endlichen Räumen diskrete Räume mit endlichen Ap - und Op -Mengen versteht, so sieht man, dass die vollständigen lokal-endlichen Räume mit den simplizialen Komplexen⁶ der kombinatorischen Topologie zusammenfallen.

§ 2

Die fünf begleitenden Komplexe, insbesondere die baryzentrische Unterteilung

1. Wir definieren zuerst die vollständige Hülle $V(D)$ und die baryzentrische Unterteilung D_0 eines diskreten Raumes D als vollständige diskrete Räume folgendermassen:

Die Eckpunkte in $V(D)$ und in D_0 sind die gleichen: das sind die sämtlichen Punkte von D . Eine Punktmenge in D wird zu einem Gerüst von $V(D)$ ernannt, wenn sie Teilmenge einer Ap -Menge von D ist. Eine Punktmenge M in D wird zu einem Gerüst in D_0 ernannt, wenn je zwei Punkte p_1, p_2 von M inzident sind, d. h. entweder $p_1 \in Ap_2$ oder $p_2 \in Ap_1$ ist. In der Sprache der teilweise geordneten Mengen bedeutet diese Definition offenbar:

Eine Punktmenge $M \subset D$ ist ein Gerüst, wenn sie (im Sinne der in D herrschenden teilweisen Ordnung) geordnet ist.

Offenbar ist $D_0 \subset V(D)$. Neben D_0 und $V(D)$, die für jeden diskreten Raum D als nichtleere vollständige diskrete Räume definiert sind, erklären wir die Eckpunkthülle $v(D)$ ebenfalls als vollständigen Raum folgendermassen. Die Eckpunkte von $v(D)$ sind die sämtlichen Eckpunkte von D ; eine Menge von Eckpunkten ist ein Gerüst von $v(D)$, wenn sie Teilmenge einer Ap -Menge von D ist. Unter Umständen kann $v(D)$ leer sein.

Die baryzentrische Unterteilung des zu D dualen Raumes D' ist offenbar mit der baryzentrischen Unterteilung D_0 von D identisch.

An die vollständigen Räume $V(D)$, $v(D)$, D_0 treten noch die vollständigen Räume $V(D')$ und $v(D')$, die wir auch bzw. mit $V'(D)$ und $v'(D)$ bezeichnen. Diese Räume können natürlich direkt, unter alleiniger Benutzung des Raumes D , definiert werden, und zwar mit Hilfe des Begriffes Nerv eines Mengensystems.

Unter dem Nerv eines Mengensystems $\mathcal{S}$ versteht man den folgendermassen definierten vollständigen diskreten Raum $N(\mathcal{S})$. Die Eckpunkte von $N(\mathcal{S})$ sind die sämtlichen Elemente von $\mathcal{S}$; eine Menge von Elementen von $\mathcal{S}$ bildet ein Gerüst von $N(\mathcal{S})$, wenn diese Elemente einen nichtleeren Durchschnitt haben.

Man beweist leicht:

VI. $V'(D)$ ist mit dem Nerv des Systems aller Ap -Mengen des Raumes D isomorph, $v'(D)$ mit dem System derjenigen Ap -Mengen, welche Hüllen der Grundpunkte von D sind.

Aus Dualitätsgründen ist $V(D)$ mit dem Nerv des Systems aller Op -Mengen von D , und $v(D)$ mit dem Nerv des Systems der Sterne der Eckpunkte von D isomorph.

Bemerkung 1. Es ist manchmal zweckmässig, als Eckpunkte von D_0 nicht die Punkte von D selbst, sondern andere diesen Punkten eindeutig zugeordnete Gegen-

⁶ A.-H., S. 155—156.

stände, die dann gewöhnlich als die Schwerpunkte der betreffenden Punkte von D bezeichnet werden, zu betrachten. Mit anderen Worten, es ist manchmal bequem, $\overline{D_0}$ durch einen isomorphen Raum zu ersetzen bzw. überhaupt isomorphe Räume untereinander zu identifizieren. So, z. B., identifiziert man gelegentlich $V(D)$ mit dem Nerv der $\overline{Op}$ -Mengen, $V'(D)$ mit dem Nerv der Ap -Mengen usw. Schliesslich sei bemerkt: D_0 ist im Durchschnitt von $V(D)$ und $V'(D)$ enthalten, ohne jedoch im allgemeinen mit diesem Durchschnitt identisch zu sein.

Bemerkung 2. Offenbar bedeutet die Voraussetzung der lokalen Endlichkeit nichts Anderes, als dass $V(D)$ und $V'(D)$ simpliziale Komplexe sind.]

VII. Jeder vollständige diskrete Raum D ist dem Nerv eines Mengensystems isomorph.

Denn ein vollständiger Raum D ist mit seiner Eckpunkthülle $\sigma(D)$ identisch, und diese wieder mit dem Nerv des Systems der Sterne der Eckpunkte von D .]

Dagegen ist nicht jeder vollständige diskrete Raum der vollständigen Hülle eines diskreten Raumes isomorph: so ist, z. B., der Dreiecksrand keine vollständige Hülle.

Ebenso ist nicht jeder vollständige Raum der baryzentrischen Unterteilung eines diskreten Raumes isomorph. Eine notwendige Bedingung hierfür ist die folgende: gehören je zwei Elemente einer Eckpunktmenge M je einem Gerüste an, so ist M selbst ein Gerüst. Jedoch ist diese notwendige Bedingung — sogar im Falle endlicher Räume — nicht hinreichend: ein (als eindimensionaler Komplex aufgefasstes) n -Eck ist dann und nur dann die baryzentrische Unterteilung eines diskreten Raumes, wenn n gerade ist (in diesem Falle ist das n -Eck die baryzentrische Unterteilung des $\frac{n}{2}$ -Ecks).

Eine ungelöste Frage. Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein vollständiger diskreter Raum (insbesondere ein endlicher simplizialer Komplex) der baryzentrischen Unterteilung eines diskreten Raumes isomorph ist?

Eine analoge Frage kann man natürlich auch für die vollständigen Hüllen diskreter Räume stellen.

2. Die Möglichkeit, jedes Mengensystem zu einem vollständigen Mengensystem zu erweitern, ergibt, im Falle lokal-endlicher bzw. endlicher diskreter Räume:

VIII. Man erhält einen beliebigen lokal-endlichen (bzw. endlichen) diskreten Raum, wenn man in einem simplizialen Komplex (bzw. in einem endlichen simplizialen Komplex) gewisse Nebensimplexe streicht.

VIII'. Jeder endliche diskrete Raum ist einer Menge von Seiten eines Simplexes hinreichend grosser Dimensionszahl isomorph.

Die soeben bewiesenen Tatsachen sind — wenn auch fast selbstverständlich — von zweierlei Wichtigkeit. Erstens gewinnt durch ihre Vermittlung der Begriff des diskreten Raumes nicht nur logisch, sondern auch geometrisch eine volle Übersichtlichkeit. Zweitens dienen sie dazu, um die simplizialen Komplexe aus der Stellung eines bequemen, aber mehr oder weniger zufälligen Hilfsmittels topologischer Untersuchung zu einer logisch notwendigen Kategorie unseres mathematischen Denkens zu erheben. Für Komplexe stimmt unser Begriff der baryzentrischen Unterteilung mit dem klassischen Begriff überein. Nimmt man (immer im Falle eines lokal-endlichen D) die baryzentrische Unterteilung des Komplexes $V(D)$ und behält man in ihr nur diejenigen Simplexe, deren Eckpunkte sämtlich Schwerpunkte von zu D gehörenden Elementen des Komplexes $V(D)$ sind, so entsteht

die baryzentrische Unterteilung von D . Auf diese Weise bekommt der Begriff der baryzentrischen Unterteilung eines beliebigen lokal-endlichen Raumes einen klaren geometrischen Inhalt.

Zwei Beispiele: 1. D bestehe aus dem Dreieck abc , dessen Seite ab und des Eckpunktes a ; die baryzentrische Unterteilung von D ist das Dreieck $o\gamma a$, wobei o der Schwerpunkt des Dreiecks, γ der Schwerpunkt der Seite ab ist.

2. Es bestehe D aus dem Dreieck abc und seinen drei Eckpunkten a, b, c . Die baryzentrische Unterteilung von D ist der aus den drei Strecken oa, ob, oc und ihren Endpunkten o, a, b, c bestehende eindimensionale Komplex.

3. Wie für jeden topologischen Raum, gilt insbesondere für jeden diskreten Raum der Begriff einer stetigen Abbildung. Unter den stetigen Abbildungen seien insbesondere die abgeschlossenen und die offenen ausgezeichnet, die — ausser ihrer Stetigkeit — die Eigenschaft besitzen, dass sie jede abgeschlossene (bzw. offene) Menge des Urbildraumes in eine abgeschlossene (bzw. offene) Menge des Bildraumes überführen. Bei diskreten Räumen lässt sich die Abgeschlossenheit bzw. die Offenheit einer stetigen Abbildung f dadurch charakterisieren, dass die Ap - bzw. die Op -Mengen auf ebensolche Mengen abgebildet werden.

Es sei eine stetige Abbildung f von D_1 auf D_2 gegeben; dann geht jeder Eckpunkt von D_1 in einen Eckpunkt von D_2 über. Ist sowohl D_1 als auch D_2 vollständig, so zeichnen sich die abgeschlossenen Abbildungen von D_1 auf D_2 dadurch aus, dass das Gerüst eines jeden Punktes $p \in D$ auf das Gerüst des Bildpunktes $f(p)$ abgebildet wird: die abgeschlossenen Abbildungen stimmen also, im Falle vollständiger Räume, mit den gerüstattreuen, oder — in naheliegender Verallgemeinerung des Ausdrucks — simplizialen Abbildungen überein, und werden somit durch die entsprechenden Abbildungen der Eckpunkte allein vollständig definiert.

Eine stetige Abbildung f eines beliebigen diskreten Raumes D_1 auf einen diskreten Raum D_2 induziert dadurch eine simpliziale Abbildung f_0 der baryzentrischen Unterteilung D_{10} von D_1 in die baryzentrische Unterteilung D_{20} von D_2 , dass man dem Schwerpunkt eines beliebigen $p \in D$ den Schwerpunkt seines Bildes entsprechen lässt. Ist die Abbildung f abgeschlossen, so ist f_0 eine Abbildung von D_{10} auf D_{20} .

Eine stetige Abbildung f von D_1 auf $D_2 \subset D_1$ heisst nach Borsuk eine retrahierende Abbildung, wenn sie auf D_2 die Identität ist. Falls eine retrahierende Abbildung von D_1 auf D_2 existiert, so heisst D_2 Retrakt von D_1 . Eine Abbildung f von D_1 auf $D_2 \subset D_1$ heisst ferner quasi-identisch, wenn es zu jedem Punkt $a \in D_1$ eine Ap -Menge von D_1 gibt, welche gleichzeitig a und $f(a)$ enthält. Wir sagen schliesslich (in etwas unkonsequenter Sprechweise), dass der simpliziale Komplex K Deformationsretrakt von $K_1 \supset K_2$ ist, wenn sich die retrahierende Abbildung von K_1 auf K_2 durch eine stetige Deformation des Polyeders $\tilde{K}_1$ in sich erzeugen lässt. ($\tilde{K}$ ist dabei das aus allen Simplexen von K zusammengesetzte Polyeder.)

IX. Im Falle eines lokal-endlichen D ist $v(D)$ Retrakt von $V(D)$ und $v'(D)$ Retrakt von $V'(D)$, und zwar lässt sich als retrahierende Abbildung stets eine quasi-identische simpliziale Abbildung wählen⁷.

Beweis. Es genügt — wegen VI — die erste Behauptung zu beweisen. Dieses Ziel erreicht man dadurch, dass man jedem Punkt von D irgendeinen unter seinen Eckpunkten

⁷ Der Satz gilt unter viel allgemeineren Bedingungen: es genügt für seine Gültigkeit, dass jede Ap -Menge einen Eckpunkt enthält.

entsprechen lässt, wodurch eine simpliziale Abbildung von $V(D)$ auf $v(D)$ entsteht, die alle Eckpunkte, und folglich alle überhaupt Simplexe von $v(D)$, immobil lässt, w. z. b. w.

Bei der soeben konstruierten Abbildung geht jedes Element p von D — als Simplex von $V(D)$ aufgefasst — in ein wohldefiniertes Element von $v(D)$ über — nämlich in das durch die Eckpunkte von p bestimmte Simplex von $v(D)$. Die Gesamtheit dieser Simplexe bildet einen diskreten Raum $E(D) \subset v(D)$ — den Eckpunktextrakt von D .

Ist D von vornherein vollständig — also ein Komplex, — so wird durch die obige retrahierende Abbildung von $V(D)$ auf $v(D)$ der Raum D isomorph auf $v(D) = D = E(D)$ abgebildet.

4. Wir setzen die Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen der in Nr. 1 definierten vollständigen diskreten Räume fort.

Die baryzentrische Unterteilung A_0p von Ap nennen wir die baryzentrische Hülle, die baryzentrische Unterteilung O_0p von Op den baryzentrischen Stern von p (in bezug auf D). Wie leicht ersichtlich, bilden die baryzentrischen Hüllen ein mit D isomorphes Mengensystem, woraus aus Dualitätsgründen folgt, dass die baryzentrischen Sterne (in bezug auf D) ein mit dem dualen Räume D' isomorphes Mengensystem bilden. Insbesondere ist der Nerv des Systems der baryzentrischen Grundsterne (= der baryzentrischen Sterne der Eckpunkte) von D mit $v(D)$ identisch. Da im Falle eines vollständigen Raumes $D = v(D)$ ist, ist jeder vollständige diskrete Raum der Nerv des Systems seiner baryzentrischen Grundsterne, — das ist die natürliche Verallgemeinerung eines bekannten Satzes der Theorie der simplizialen Komplexe.

5. In dieser Nummer beschränken wir uns auf die Betrachtung lokal-endlicher und manchmal (einfachheitshalber) sogar endlicher diskreter Räume.

Es sei D ein endlicher diskreter Raum. Wir können ⁸ D als eine Teilmenge eines endlichen simplizialen Komplexes K eines hinreichend-hochdimensionalen R^n auffassen. Das Polyeder, welches als Vereinigungsmenge der Simplexe von K auftritt, bezeichnen wir mit $\tilde{K}$. Jeder Punkt p von D ist in unserer Darstellung ein Simplex von K ; dabei ist hier das Wort «Simplex» stets als «offenes Simplex» (Simplex ohne Rand) zu verstehen. Sodann besteht Ap aus dem Simplex p und aus gewissen Seiten von p . Die Vereinigungsmenge der zu D gehörenden Simplexe von K bildet eine im allgemeinen nicht abgeschlossene Teilmenge von $\tilde{K}$, welche wir mit $\tilde{D}$ bezeichnen. Die baryzentrische Hülle A_0p entsteht, wenn man den Schwerpunkt op des Euklidischen Simplexes p mit den Simplexen eines gewissen auf dem Rande von p liegenden Komplexes geradlinig verbindet. Deshalb ist das Polyeder $\tilde{A_0p}$ ein sogenanntes «Sternpolyeder» (Vereinigungsmenge von Simplexen, die einem Simplexstern im R^n entnommen sind), und D ist dem System der Polyeder $\tilde{A_0p}$ isomorph. Nun lässt sich aber sehr leicht jedes solche Polyeder $\tilde{A_0p}$, wenn es nicht von selbst elementar (d. h. topologisches Bild eines konvexen Polyeders) ist, in ein elementares Polyeder so abändern, dass das System der abgeänderten Polyeder dem ursprünglichen Polyedersystem, d. h. dem Räume D , isomorph ist. Die obige Überlegung gilt wörtlich auch für abzählbare lokal-endliche diskrete Räume. Um auch die Abzählbarkeitsbedingung zu beseitigen, müsste

⁸ Und zwar auf verschiedene Weisen.

man den R^n durch lineare Räume ohne abzählbare Basis ersetzen, worauf wir hier nicht eingehen wollen. Im Obigen ist enthalten:

X. Jeder höchstens abzählbare lokal-endliche Raum D ist einem System von Sternpolyedern eines R^n isomorph, deren Simplicialzerlegungen in ihrer Gesamtheit die baryzentrische Unterteilung von D ergeben. D ist überdies auch einem System von elementaren Polyedern des R^n isomorph.

§ 3

Die multiplikativen Räume

1. In unserer weiteren Darstellung haben wir u. a. die Homologie-Theorie der diskreten Räume im Auge; das veranlasst uns, schon an dieser Stelle zu bemerken, dass — auch im Falle eines endlichen diskreten Raumes — die Homologie-Eigenschaften von $V(D)$ bzw. von $v(D)$ mit den homologischen Eigenschaften der baryzentrischen Unterteilung D_0 nicht übereinzustimmen brauchen: es genügt den diskreten Raum D zu betrachten, welcher aus den vier Eckpunkten a, b, c, d und den zwei Dreiecken abc und bcd besteht. Wir werden aber gleich sehen, dass sich auf einem natürlichen Wege eine recht umfangreiche Klasse diskreter Räume definieren lässt, für die die Komplexe $V(D)$ und $v(D)$ dieselben homologischen Eigenschaften wie D_0 haben.

Definition. Ein diskreter Raum heisst ein multiplikativer Raum, wenn der Durchschnitt eines beliebigen Systems seiner Ap -Mengen entweder leer oder eine Ap -Menge ist (wenn das System seiner Ap -Mengen ein multiplikatives Mengensystem ist). Eine leichte Überlegung zeigt:

Die multiplikativen Räume und nur diese Räume sind multiplikativen Mengensystemen isomorph. Ist in einem vollständigen Raum D der Durchschnitt einer gewissen Menge von Ap -Mengen eine nichtleere Menge A_0 , so haben die Gerüste der entsprechenden Punkte p ebenfalls einen nichtleeren Durchschnitt X_0 , und für den Punkt $p_0 \in D$ mit dem Gerüst X_0 gilt: $Ap_0 = A_0$. Somit bilden die vollständigen diskreten Räume einen Spezialfall der multiplikativen. Da jeder diskrete Raum in einen vollständigen Raum eingebettet werden kann, so erst recht in einen multiplikativen. Jedoch lässt sich die letztere Einbettung auch ohne Überfluss zustandebringen: ein beliebiger diskreter Raum ist dem System $\mathfrak{D}$ seiner Ap -Mengen isomorph; wenn man $\mathfrak{D}$ zu einem multiplikativen Mengensystem $\mathfrak{D}_m$ ergänzt, so kann man dieses als einen multiplikativen Raum — die multiplikative Hülle $\mathfrak{D}_m$ von D — auffassen. Der zu Beginn dieses Paragraphen erwähnte Raum besitzt als vollständige Hülle den Komplex, der aus zwei Tetraedern mit gemeinsamer Kante besteht, während seine multiplikative Hülle (die zufällig in diesem Beispiel mit der Eckpunkthülle zusammenfällt) der Komplex zweier Dreiecke mit gemeinsamer Kante ist.

XI. Gleichzeitig mit D ist auch der duale Raum D' multiplikativ.

Zum Beweise genügt es zu zeigen:

In einem multiplikativen Raume bildet das durch die leere Menge ergänzte System aller Op -Mengen einen multiplikativen Mengenbereich.

Diese Behauptung ist wiederum in der Gesamtheit der drei folgenden enthalten: ein System $\{Op_p\}$ von Op -Mengen hat dann und nur dann einen nichtleeren Durchschnitt, wenn die betreffenden p in einer und derselben Ap -Menge enthalten sind (das ist der Satz IV); in einem multiplikativen Raum gibt es in der Menge der Ap -Mengen, die alle

die gegebenen Punkte p_a enthalten, eine kleinste (nämlich den Durchschnitt Ap_0 aller dieser Ap -Mengen), und es ist Op_0 der Durchschnitt der gegebenen Op_a .

In der Sprache der teilweise geordneten Mengen bedeutet das multiplikative Axiom folgendes:

Wenn die Punktmenge $M \subset D$ nach unten beschränkt ist (d. h. wenn mindestens ein $p_0 \in D$ mit $p \leq a$, $a \in M$ beliebig, existiert), so besitzt M eine untere Grenze, d. h. es existiert ein $a \in D$ mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) es ist $a \leq a$ bei beliebigem $a \in M$,
- 2) wenn für irgendein $a' \in D$ die Bedingung $a' \leq a$ bei jedem $a \in M$ erfüllt ist, so ist $a' \leq a$.

Der Inhalt des Satzes X besteht also im folgenden:

Wenn jede nach unten beschränkte Menge eine untere Grenze besitzt, so besitzt jede nach oben beschränkte Menge eine obere Grenze.

Die multiplikativen Räume — insbesondere die lokal-endlichen unter ihnen — sind weitaus die wichtigsten unter den diskreten Räumen. Sie bilden die natürliche Verallgemeinerung der Zellenkomplexe, sind aber auch hinreichend allgemein: es lässt sich insbesondere jedes endliche Mengensystem leicht zu einem ebenfalls endlichen multiplikativen Mengensystem erweitern.

2. Ergänzt man einen multiplikativen Raum D durch zwei «ideale Punkte» — den Nullpunkt 0 und den «Allpunkt» 1, so entsteht ein algebraisches Gebilde (D) — eine «geschlossene Struktur» in der Terminologie von Ore⁹: zu einer beliebigen nicht-leeren Menge M von Elementen von (D) lässt sich das Produkt und die Summe (aller Elemente von M) folgendermassen bestimmen. Wenn M das Element 1 (bzw. das Element 0) enthält, und die Menge M' der übrigen Elemente von M nicht leer ist, so soll das Produkt (die Summe) der Elemente von M gleich dem Produkt (der Summe) der Elemente von M' sein. Wenn M das Element 1 nicht enthält, so ist das Produkt der Elemente von M gleich 0, wenn 0 unter diesen Elementen vorkommt oder der Durchschnitt der Hüllen der Elemente von M leer ist; ist dieser Durchschnitt nicht leer, und zwar gleich Ap_0 , $p_0 \in D$, so heisst p_0 das Produkt der Elemente von M . Schliesslich wird $1 \times 1 = 1$ gesetzt. Somit spielt bei dieser Multiplikation 0 die Rolle des Null- und 1 die Rolle des Einselementes.

Die Summe wird in dualer Weise definiert. Die Summe ist zunächst immer dann 1, wenn 1 ein Summand ist, oder es keinen Punkt von D gibt, in dessen Hülle alle Summanden enthalten sind. Gibt es aber einen solchen Punkt p , so wird unter allen diesen Punkten derjenige mit kleinster Hülle gewählt und als Summe der gegebenen Punkte erklärt. Schliesslich wird $0 + 0 = 0$ gesetzt.

Die hier definierten Operationen der Addition und Multiplikation erfüllen die im § 1 der zitierten Arbeit von Ore aufgestellten Bedingungen.

Für uns ist wichtig:

XII. Es seien in D zwei nichtleere Punkt Mengen A und B , $A < B$, gegeben¹⁰. Insofern die Summe aller Elemente von B ein Punkt p von D (also nicht 1) ist, ist die Summe aller Elemente von A ein Punkt $p' \in Ap$.

Beweis. Da $A \subset D$ nicht leer ist, ist die Summe der Elemente von A vom Nullelement verschieden. Wegen $A < B$ könnte diese Summe nur dann 1 sein, wenn

⁹ Vgl. die unter ¹ zitierte Arbeit von Ore.

¹⁰ $A < B$ soll für zwei Mengen A und B bedeuten, dass A echte Teilmenge von B ist.

auch die Summe aller Elemente von A gleich 1 wäre, was nach unserer Voraussetzung nicht der Fall ist. Es ist also die Summe aller Elemente von A ein Punkt $p' \in D$. Wäre nun p' kein Punkt von Ap , also Ap' keine Teilmenge von Ap , so hätte man in $Ap' \cdot Ap = Ap''$ eine Ap -Menge, welche A enthält; da $Ap'' < Ap'$ ist, wäre p' falsch gewählt.

In einem multiplikativen Raume D entspricht jeder Teilmenge M eines Gerüsts eindeutig ein Punkt $p_M \in D$: die Summe aller Elemente von M . Die auf diese Weise gewonnene Abbildung von $\mathcal{v}(D)$ in D ist nach XII stetig. Somit gilt:

XIII. Für multiplikative D lässt sich $\mathcal{v}(D)$ stetig unter Festhaltung sämtlicher Eckpunkte in D abbilden.

Aus IX ergibt sich sodann — im Falle lokal-endlicher Räume — das gleiche Ergebnis für $V(D)$.

Bemerkung. Fasst man D und $\mathcal{v}(D)$ als Teilräume von $V(D)$ auf, so dass man insbesondere von zu D gehörenden Elementen (nicht notwendig Eckpunkten) von $\mathcal{v}(D)$ sprechen kann, so lässt sich XIII insofern verschärfen, dass man die Festhaltung nicht nur der Eckpunkte, sondern sämtlicher zu D gehörenden Elemente von $\mathcal{v}(D)$ im Wortlaute von XIII verlangen darf. Wie einfache Gegenbeispiele lehren, gilt — jedenfalls in dieser verschärfen Fassung — der Satz XIII für nicht multiplikative Räume nicht.

3. Wann lässt sich $\mathcal{v}(D)$ unter den Bedingungen des Satzes XIII auf D abbilden? Beschränkt man sich von vornherein auf multiplikative Räume, so ist hierfür die folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

Basisaxiom. Die Punkte von D entsprechen eineindeutig ihren Gerüsten, und es ist dann und nur dann $p' \in Ap$, wenn das Gerüst von p' Teilmenge des Gerüsts von p ist.

Das Basisaxiom (angewendet auf beliebige, nicht notwendig multiplikative, Räume) besagt genau das Folgende:

D ist einem Teilraum seiner Eckpunkthülle isomorph.

Bemerkung. Die im letzten Absatz von Nr. 8 gemachte Bemerkung gilt offenbar nicht nur für vollständige Räume, sondern für alle Räume mit dem Basisaxiom.

XIV. Ein multiplikativer Raum erfüllt das Basisaxiom immer dann, wenn seine Punkte ihren Gerüsten eineindeutig entsprechen.

Beweis. Es sei G_1 das Gerüst von p_1 , G_2 das Gerüst von p_2 und $G_1 \subset G_2$. Wir definieren p' durch $Ap' = Ap_1 \cdot Ap_2$; offenbar ist $Ap' \subset Ap_2$, also $p' \in Ap_2$. Andererseits ist G_1 das Gerüst von p' , also $p' = p_1$ und $p_1 \in Ap_2$, w. z. b. w.

Wir können auch sagen: die multiplikativen Räume mit Basisaxiom sind diejenigen multiplikativen Räume, in denen jedes Element Summe seiner Eckpunkte ist.

Ohne das multiplikative Axiom genügt das eineindeutige Entsprechen der Punkte und ihrer Gerüste für das Bestehen des Basisaxioms noch nicht. Als Beispiel diene der folgende diskrete Raum. Er bestehe aus fünf Punkten p_1, p_2, a, b, c , wobei a, b, c Eckpunkte, und zwar die Eckpunkte von p_1 , sind; ausser diesen Eckpunkten enthalte die Menge Ap_1 nur noch den Punkt p_1 , während Ap_2 aus p_2, a und b bestehe.

Die Resultate der vorigen Nummer bekommen für die multiplikativen Räume mit Basisaxiom die folgende schärfere Gestalt:

XV. Ein multiplikativer Raum D mit Basisaxiom ist quasi-identischer Retrakt ^{10a} seiner Eckpunkthülle und seiner vollständigen Hülle; seine baryzentrische Unter-

^{10a} Die retrahierende Abbildung braucht dabei nicht abgeschlossen zu sein (Beispiel: D bestehe aus einem Dreieck, seinen drei Eckpunkten und einer Seite).

teilung D_0 ist *simplicialer quasi-identischer Retrakt* der *baryzentrischen Unterteilungen* von $V(D)$, $v(D)$, $V'(D)$, $v'(D)$.

4. Wenn man in mengentheoretischen Untersuchungen (in denen diskrete — hauptsächlich endliche — Räume als Überdeckungen von Punktmengen auftreten) sich immer auf die Betrachtung von multiplikativen Räumen beschränken kann, bildet das Basisaxiom eine in vielen Fällen zu starke Einschränkung. Deshalb — und auch an und für sich — ist es von Wichtigkeit, im Falle eines lokal-endlichen D die Homologie-Äquivalenz aller bisher eingeführten Komplexe unter Voraussetzung des multiplikativen Axioms allein zu beweisen.

Zu diesem Zweck betrachten wir D , $E(D) \subset v(D)$ und $v(D)$ als Teilräume von $V(D)$ und definieren $S(D)$ als die Vereinigungsmenge von D und $E(D)$. Zunächst ist klar: infolge der in Nr. 2 definierten Abbildung ist $E(D)$ *simplicialer quasi-identischer Retrakt* von $S(D)$, folglich $E_0(D)$ *Deformationsretrakt* von $S_0(D)$. Man erhält aber auch eine retrahierende Abbildung von $S_0(D)$ auf D_0 , wenn man dem Schwerpunkt eines beliebigen Elementes von $S(D)$ sich selbst, bzw. den Schwerpunkt der Summe der Eckpunkte dieses Elementes entsprechen lässt, je nachdem das betreffende Element zu D gehört oder nicht. Da $E_0(D)$ und D_0 gleichzeitig *Deformationsretrakte* von $S_0(D)$ sind, haben — im Falle eines lokal-endlichen D — alle drei Komplexe dieselben homologischen Eigenschaften.

Da $E(D)$ dieselbe Eckpunkthülle $v(D)$ hat wie D , und $E(D) \subset v(D)$ ist, genügt $E(D)$ dem Basisaxiom. Ferner ist $E(\cdot)$, wie leicht ersichtlich, multiplikativ (wenn D multiplikativ ist). Folglich ist (nach XV) $E(D)$ *quasi-identischer Retrakt* von $v(D)$, also $E_0(D)$ *simplicialer Deformationsretrakt* von $v_0(D)$. Also:

XVI. *Im Falle eines beliebigen multiplikativen lokal-endlichen Raumes D sind die simplicialen Komplexe D_0 , $V(D)$, $v(D)$, $E(D)$, $V'(D)$, $v'(D)$ homologie-äquivalent untereinander.*

5. Die Homologie-Äquivalenz von D_0 und $V(D)$, folglich auch die Homologie-Äquivalenz von D_0 und $N(D)$, also — angesichts der Homologie-Äquivalenz von $V(D)$ und $v(D)$ — die Homologie-Äquivalenz von D_0 , $V(D)$, $v(D)$, $V'(D)$, $v'(D)$ kann auch ohne Zuhilfenahme des Raumes $E(D)$ für alle multiplikativen lokal-endlichen Räume dadurch bewiesen werden, dass man D_0 als Teilkomplex von $V(D)$ auffasst und sodann beweist:

XVII. *Es sei D ein lokal-endlicher multiplikativer Raum. Die baryzentrische Unterteilung $V_0(D)$ von $V(D)$ lässt sich simplicial auf D_0 so abbilden, dass dabei für jedes $x \in D_0$ die baryzentrische Hülle $A_0 x \subset D_{00}$ auf $Ax \subset D_0$ abgebildet wird.*

Beweis. Eine simpliciale Abbildung von $V_0(D)$ auf D_0 erhält man, wenn man dem Schwerpunkt eines Simplexes $(p_0 \dots p_r)$ von $V(D)$, $p_i \in D$, $i = 0, \dots, r$, den Schwerpunkt der Summe der Elemente $p_0, \dots, p_r$ entsprechen lässt. Nach Satz XI erzeugt diese Eckpunktzuordnung eine simpliciale Abbildung. Sie lässt die Eckpunkte von $V(D)$ (die ja mit den Eckpunkten von D_0 identisch sind) fest und lässt jedem Eckpunkt der baryzentrischen Unterteilung D_{00} von $D_0 \subset V(D)$ einen Eckpunkt seines Trägers in D_0 entsprechen, bildet also nach bekannten Erhaltungssätzen die baryzentrische Unterteilung eines jeden abgeschlossenen Simplexes von D_0 auf dieses Simplex ab, w. z. b. w.

§ 4

Homologie-Theorie der diskreten lokal-endlichen Räume

1. Die obigen Überlegungen lassen es natürlich erscheinen, die Bettischen Gruppen eines lokal-endlichen diskreten Raumes als die Bettischen Gruppen seiner baryzentrischen Unterteilung zu definieren. Der Inhalt der Homologie-Theorie dieser Räume wäre dadurch gegeben. Was die Form betrifft, so kann man sie verschieden wählen, um Anschluss an die verschiedenen bereits existierenden Darstellungen allgemeiner Homologie-Theorie zu gewinnen. Die nachfolgende Darstellung ist an die Kolmogoroffsche Theorie angepasst.

Unter einem diskreten Raum verstehen wir in dieser und der folgenden Nummer stets einen lokal-endlichen Raum D . Sodann nennen wir zwei Punkte p und p' von D inzident, wenn entweder $p' \in Ap$ oder $p \in Ap'$ ist, und definieren einen r -dimensionalen algebraischen Komplex in D als eine schief-symmetrische Funktion der $r+1$ Argumente $f^r(p_0, \dots, p_r)$, wobei $p_0, \dots, p_r$ beliebige Punkte von D sind, und die Werte der Funktion einer additiven Abelschen Gruppe — dem jeweiligen Koeffizientenbereich — entnommen sind. Dabei soll immer $f^r(p_0, \dots, p_r) = 0$ sein, wenn es unter den $p_0, \dots, p_r$ mindestens ein nicht-inzidentes Punktepaar gibt. Die beiden Berandungsoperatoren sind sodann:

$$g_u f^r \equiv f^{r-1}(p_0, \dots, p_{r-1}) = \sum_p f^r(p, p_0, \dots, p_{r-1}) \quad (\text{summiert über alle } p \in D),$$

$$g_o f^r \equiv f^{r+1}(p_0, \dots, p_{r+1}) = \sum_i (-1)^i f^r(\cdot \hat{p}_i \cdot),$$

wobei $(\cdot \hat{p}_i \cdot)$ die Folge $p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_{r+1}$ bedeutet¹¹. Die ganze Kolmogoroffsche Theorie gilt, denn sie wird ja in Wirklichkeit im Sinne von «R.M.» für D_o entwickelt.

Um die Darstellungsform noch näher der Kolmogoroffschen (aus C. R.) anzupassen, könnte man natürlich — im Falle der u -Theorie — f^r als additive schief-symmetrische Mengenfunktion $f^r(M_0, \dots, M_r)$ definieren, wobei die M_i endliche Punktmengen in D sind, die, im Falle wenn sie einpunktig sind, der obigen Bedingung

$$f^r(p_0, \dots, p_r) = 0, \quad (1)$$

wenn nicht je zwei p_i, p_j inzident sind, genügen; sodann würde man den g_u -Operator genau so definieren, wie bei Kolmogoroff, C. R.

2. Wir stellen uns jetzt die Frage: was für Bettische Gruppen erhält man, wenn man den lokal-endlichen Raum D als lokal-bikompakten Raum auffasst, und die Bettischen u -Gruppen dieses Raumes nach Kolmogoroff, C. R., I, bestimmt?

Es handelt sich zunächst um additive Mengenfunktionen $f^r(M_0, \dots, M_r)$, deren Argumente $M_i \subset D$ in D bikompakt, d. h. endlich sind. Folglich lassen sich diese Funktionen wiederum auf Punktfunktionen zurückführen. Der einzige Unterschied von der obigen Definition besteht also darin, dass die Bedingung (1) durch die folgende Bedingung ersetzt wird:

$$f^r(p_0, \dots, p_r) = 0, \text{ wenn der Durchschnitt von } Ap_0, \dots, Ap_r \text{ leer ist.} \quad (2)$$

¹¹ Die lokale Endlichkeit braucht bei der Definition des g_o -Operators nicht vorausgesetzt zu werden.

Das bedeutet aber, dass die Bettischen Gruppen, die man erhält, mit den Bettischen Gruppen von $N(D)$, also — für multiplikative Räume — mit den Bettischen Gruppen von D_0 identisch sind. Das Resultat lautet somit:

Die kombinatorische Homologie-Theorie der multiplikativen diskreten Räume ordnet sich ohne jeden Zusatz in die Kolmogoroffsche mengentheoretische Auffassung ein.

3¹². Die Existenz einer natürlichen teilweisen Ordnung in einem diskreten Raum erlaubt, die Definition insbesondere der oberen Bettischen Gruppen dadurch zu vereinfachen, dass man — unter Beibehaltung der obigen Definition des oberen Randoperators $g_0 f^r$ — die Komplexe f^r nicht mehr als schief-symmetrische Funktionen von $r+1$ Punkten, sondern direkt als Funktionen der aus $r+1$ Punkten bestehenden (im Sinne der in D herrschenden teilweisen Ordnung) geordneten Teilmengen von D definiert. Mit anderen Worten: *es wird jetzt $f^r(p_0, \dots, p_r)$ nur unter der Voraussetzung $p_0 < p_1 < \dots < p_r$ (im Sinne der teilweisen Ordnung in D) definiert.* Im Falle, wenn der Koeffizientenbereich J ein Ring ist, ermöglicht diese Bemerkung eine überaus einfache Konstruktion des Homologieringes (im Sinne von Alexander-Čech-Whitney für jeden (nicht notwendig lokal-endlichen) diskreten Raum: *es genügt in der Tat*

$$[f^r f^s] = f^{r+s}(p_0, \dots, p_{r+s}) = f^r(p_0, \dots, p_r) \cdot f^s(p_r, \dots, p_{r+s})$$

zu setzen. Der weitere Aufbau der Theorie geht wörtlich wie bei Alexander vor sich. Die Konstruktion von Alexander hat einen zum Teil künstlichen Charakter: anstatt der dem Raume D invariant zukommenden teilweisen Ordnung wird eine willkürliche Ordnung der Eckpunkte eines gegebenen Komplexes eingeführt und wesentlich benutzt. Nun ist die invariante Teilordnung von D mit einer Teilordnung der Menge aller Eckpunkte von D_0 identisch. Da die Teilordnung einer Menge mittels transfiniten Induktion immer zu einer Vollordnung erweitert werden kann, *ist der soeben definierte Homologiering von D mit dem Alexanderschen Homologiering von D_0 identisch.*

§ 5

Überführungssätze

1. Bereits in § 2, Nr. 5 haben wir die Punktmengen $\tilde{D} \subset R^n$ definiert. Offenbar sind diese Punktmengen mit dem diskreten Raum D nicht invariant verknüpft: verschiedenen Darstellungen von D in der Form einer Menge von Simplexen des R^n entsprechen verschiedene Punktmengen $\tilde{D}$, welche im allgemeinen nicht homöomorph sind. Es gilt aber folgender Satz:

XVIII. *Das Polyeder $\tilde{D}_0$ ist ein Retrakt von $\tilde{D}$. Die retrahierende Abbildung kann dabei so gewählt werden, dass sie mittels einer Deformation von $\tilde{D}$ in sich entsteht, und dass kein Punkt von $\tilde{D}$ während dieser Deformation sein abgeschlossenes Trägersimplex in D verlässt.*

Beweis. Es sei $\tilde{p}$ die Menge aller (inneren) Punkte des Simplexes $p \in D$. Wir definieren folgendermassen die retrahierende Abbildung f von $\tilde{p}$ in $\tilde{A}_0 p$ in jeder einzelnen Punktmenge $\tilde{p} \cdot \tilde{x}$, wobei $\tilde{x}$ ein beliebiges (offenes) Simplex der baryzentrischen

¹² Den Inhalt dieser Nummer verdanke ich einer Anregung von Kolmogoroff.

Unterteilung des, aus dem Simplex p und allen seinen Seiten, bestehenden Komplexes ist. Da angenommen werden kann, dass $\tilde{p} \cdot \tilde{x}$ nicht leer ist, so gehört unter den Eckpunkten von x mindestens einer (der Schwerpunkt von p) zu D_0 . Wir betrachten alle diejenigen Eckpunkte von x , die zu D_0 gehören; sie bestimmen eine ebenfalls zu D_0 gehörende Seite x' . Falls $x' = x$ ist, so ist $\tilde{p} \cdot \tilde{x} \subset \tilde{D}_0$, und f wird als die identische Abbildung erklärt. Sonst sei x'' die der Seite x' gegenüberliegende Seite von x ; wir zerlegen $\tilde{x}$ in geradlinige offene Strecken, deren jede den einen Endpunkt auf $\tilde{x}'$ und den anderen auf $\tilde{x}''$ hat, und lassen jeden Punkt einer jeden solchen offenen Strecke gleichförmig und geradlinig in den zu $\tilde{x}'$ gehörenden Endpunkt gleiten. Die auf diese Weise in den einzelnen $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{p}$ definierten Deformationen schliessen aneinander stetig an und ergeben die gesuchte retrahierende Deformation.

2. Überdeckungen als diskrete Räume. Es sei $\mathfrak{D}$ eine multiplikative endliche Überdeckung der Menge M ,

$$\mathfrak{D} = \{M_1, M_2, \dots, M_s\}, \quad M = M_1 + M_2 + \dots + M_s.$$

Den Mengen M_i lassen wir eineindeutig die Punkte p_i des mit $\mathfrak{D}$ isomorphen diskreten Raumes D entsprechen, so dass $p_j \in A p_i$ mit $M_j \subset M_i$ gleichbedeutend ist. Ferner definieren wir für jedes $i = 1, 2, \dots, s$

$$X_i = M_i - \sum_{M_h \subset M_i} M_h.$$

Die Mengen X_i sind disjunkt und bilden eine Überdeckung von M . Somit entsteht eine Abbildung $\sigma(x)$ der Menge M in den diskreten Raum D : es ist $\sigma(x) = p_i$, wenn $x \in X_i$ ist.

Wir definieren jetzt:

$$M'_i = \sigma^{-1}(Op_i) = \sum_{M_h \supset M_i} X_h.$$

Da die X_i eine Überdeckung von M bilden und $X_i \subset M'_i$ ist, bilden auch die M'_i eine Überdeckung von M ; diese Überdeckung heisst die zu $\mathfrak{D}$ duale Überdeckung $\mathfrak{D}'$; der Name ist einstweilen nur dadurch berechtigt, dass die Inklusionen $M_i \subset M_j$ und $M'_j \supset M'_i$ äquivalent sind. Jedoch braucht das Mengensystem $\mathfrak{D}'$ mit dem zu D dualen Raum D' nicht isomorph zu sein: es kann vorkommen, dass einige unter den Mengen M'_i , $i = 1, 2, \dots, s$, leer sind, bzw. dass gewisse M'_i zusammenfallen, so dass die Anzahl der verschiedenen nichtleeren M'_i kleiner als die Anzahl s der M_i sein kann. Zwei Beispiele machen diese Möglichkeiten klar.

1. Beispiel. M sei eine Strecke mit den Endpunkten a und b , c sei der Mittelpunkt der Strecke ab . Die Überdeckung $\mathfrak{D}$ bestehe aus $M_1 = M$, den Strecken $ac = M_2$ und $M_3 = bc$ (inklusive c) und aus $M_4 = c$.

Es ist $M'_1 = X_1 = 0$. Als

2. Beispiel wählen wir das folgende Mengensystem $\mathfrak{D}$. Es bestehe aus einem Quadrat $ABCD$, seinen vier Seiten und vier Eckpunkten, den beiden Hälften AE und BE der Seite AB , dem Punkt E und dem an $ABCD$ von aussen längs der Strecke BE anschliessenden Quadrate $BEST$. Bezeichnet man das Quadrat $ABCD$ etwa mit M_1 , seine Seite AB mit M_2 , so ist $M'_1 = M'_2$.

Wir setzen jetzt voraus, dass keine unter den Mengen M'_i , $1 \leq i \leq s$, leer ist, und dass keine zwei unter ihnen zusammenfallen. Dann ist das Mengensystem $\mathfrak{D}'$ dem

zu D dualen Raum D' isomorph. Des weiteren sind dann die Relationen $M'_i < M'_j$ und $M_i < M_j$ gleichbedeutend, woraus sich mühelos ergibt:

$$X'_i = M'_i - \sum_{M'_h < M'_i} M'_h = \sum_{M_h \supseteq M_i} X_h - \sum_{M_j > M_i} \sum_{M_h \supseteq M_j} X_h = \sum_{M_h \supseteq M_i} X_h - \sum_{M_h \supseteq M_i} X_h = X_i,$$

so dass die beiden zueinander dualen Überdeckungen zu denselben X_i -Mengen führen. Der Ausdruck «zueinander dual» ist durchaus berechtigt: konstruiert man nach der obigen Vorschrift die zu $\mathfrak{D}'$ duale Überdeckung, so kommt man auf die ursprünglich gegebene Überdeckung $\mathfrak{D}$ zurück.

3. Wir betrachten jetzt zwei wichtige Spezialfälle, in denen die M'_i den M_i eineindeutig entsprechen, und folglich $\mathfrak{D}'$ mit D' isomorph ist.

Der erste Spezialfall ist durch

$$X_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

gegeben. In diesem Fall ist σ eine Abbildung von M auf D ; daraus und aus der Definition der Mengen M'_i folgt, dass diese Mengen den Mengen M_i eineindeutig entsprechen.

Die Bedingung $X_i \neq 0$ ist jedoch von ziemlich einschränkender Art: es kann vorkommen, dass eine multiplikative Überdeckung einer Menge M keine multiplikative Teilüberdeckung derselben Menge enthält, welche dieser Bedingung genügt. Um ein Beispiel zu haben, ergänze man die Figur von Nr. 2, 2. Beispiel, durch zwei weitere Quadrate: ein Quadrat $ABPQ$, welches bis auf die mit $ABCD$ gemeinsame Seite AB ausserhalb der Ebene des letzten Quadrates liegt, und das Quadrat $EARS$, welches durch seine beiden Seiten EA und ES vollständig bestimmt ist. Bezeichnet man nach wie vor AB mit M_2 , so sieht man, dass $X_2 = 0$ ist. Andererseits enthält unser Mengensystem kein Teilsystem, welches eine multiplikative Überdeckung des aus allen unsern Quadraten gebildeten Polyeders bildet.

Deshalb ist der zweite Spezialfall von Wichtigkeit, nämlich der Fall einer irreduziblen multiplikativen Überdeckung. Darunter versteht man eine solche endliche multiplikative Überdeckung $\mathfrak{D}$ einer Menge M , die keine multiplikative echte Teilüberdeckung derselben Menge enthält. Wie leicht ersichtlich, ist für die Irreduzibilität einer multiplikativen Überdeckung die Gesamtheit der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

- 1) ist M_i ein Grundelement von $\mathfrak{D}$, so ist $X_i \neq 0$,
- 2) jedes Element von $\mathfrak{D}$, welches nicht Grundelement ist, ist Durchschnitt von Grundelementen.

Es seien M_i und M_j zwei Elemente von $\mathfrak{D}$

$$M_i = M_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot M_{\alpha_r}, \quad M_j = M_{\beta_1} \cdot \dots \cdot M_{\beta_s},$$

wobei M_{α_k} und M_{β_h} Grundelemente sind. Wir beweisen, dass $M'_i \neq M'_j$ ist. In der Tat, tritt mindestens ein Faktor der Produktzerlegung des einen der beiden Elemente M_i und M_j nicht in der Produktzerlegung des anderen auf. Wir nehmen an, dass etwa M_{α_1} nicht unter den Faktoren von M_j vorkommt. Dann ist $X_{\alpha_1} \subset M'_i$ und gleichzeitig $X_{\alpha_1} \cdot M'_j = 0$, also sind M'_i und M'_j voneinander verschieden.

4. Es sei jetzt M ein Kompaktum, $\mathfrak{D}$ eine irreduzible multiplikative endliche abgeschlossene (offene) Überdeckung von M ; dann ist die duale Überdeckung $\mathfrak{D}'$ offen

(abgeschlossen). Ist $\mathfrak{D}$ eine ε -Überdeckung, so ist $\mathfrak{D}'$ jedenfalls eine 2ε -Überdeckung. Da M in den (als Polyeder aufgefassten) Nerven $\tilde{n}(D) = \tilde{v}(D')$ und ebenso in $\tilde{n}(D') = \tilde{v}(D)$ mittels einer 2ε -Überführung stetig abgebildet werden kann, und da jede multiplikative Überdeckung von M eine irreduzible multiplikative Überdeckung von M enthält, gilt:

XIX. Jedes Kompaktum lässt sich mittels einer 2ε -Überführung in die — als Polyeder aufgefasste — Eckpunkthülle jeder seiner endlichen abgeschlossenen bzw. offenen multiplikativen ε -Überdeckungen stetig abbilden.

Aus XIII und XVIII folgt sodann:

XX. Jedes Kompaktum lässt sich mittels einer 2ε -Überführung in die — als Polyeder aufgefasste — baryzentrische Unterteilung jeder seiner endlichen abgeschlossenen bzw. offenen multiplikativen ε -Überdeckungen stetig abbilden.

Hierin ist übrigens ein von Kolmogoroff und mir früher bewiesene¹⁸ Satz enthalten:

Bei hinreichend kleinem ε ist die Länge jeder abgeschlossenen und jeder offenen multiplikativen endlichen ε -Überdeckung eines n -dimensionalen Kompaktums $\geq n$.

Bolschewo — Komarovka bei
Moskau, am 31. März 1937.

(Поступило в редакцию 4/IV 1937 г.)

Дискретные пространства

П. С. Александров (Москва)

(Резюме)

Работа ставит себе в основном задачу построить гомологическую теорию дискретных пространств.

Исходя из тождества между дискретными пространствами и частично упорядоченными множествами (см. § 1), мы называем дискретное пространство D локально конечным, если каждому элементу D предшествует и за ним следует лишь конечное число элементов D .

Алгебраический комплекс r измерений в D определяется как кососимметрическая функция $f^r(p_0, \dots, p_r)$, $r+1$ аргументов которой пробегает все возможные точки D , а значения принадлежат к заданному полю коэффициентов J . При этом ставится следующее требование: лишь если $p_0, \dots, p_r$ суть точки некоторого упорядоченного подмножества частично упорядоченного множества D , значение функции $f^r(p_0, \dots, p_r)$ может быть отлично от нуля. Граница алгебраического комплекса f^r определяется как $(r-1)$ -мерный алгебраический комплекс

$$g_{\alpha} f^r \equiv f^{r-1}(p_0, \dots, p_{r-1}) = \sum_{p \in D} f^r(p, p_0, \dots, p_{r-1}).$$

¹⁸ Fund. math., 26, (1936), 267. Die Länge eines Mengensystems $\mathfrak{M}$ ist — wenn sie endlich ist — die grösste natürliche Zahl r von der Eigenschaft, dass es eine Folge von r abnehmenden nichtleeren Mengen $A_1 > A_2 > \dots > A_r$ dieses Systems gibt. Offenbar ist die Länge von $\mathfrak{M}$ um 1 grösser als die Dimensionszahl der baryzentrischen Unterteilung von $\mathfrak{M}$.

Аналогично определяется и «верхняя граница» в смысле Александера-Колмогорова

$$g_0 f' \equiv f'^{r+1}(p_0, \dots, p_{r+1}) = \sum_i (-1)^i f(\cdot \hat{p}_i \cdot),$$

где $(\cdot \hat{p}_i \cdot)$ означает $(p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_r)$. Оператор взятия верхней границы не предполагает локальной конечности пространства.

Эти определения мотивируются понятием барицентрического подразделения дискретного пространства D . Барицентрическое подразделение D_0 частично упорядоченного множества D есть частично упорядоченное (в смысле обыкновенного включения) множество всех упорядоченных подмножеств частично упорядоченного множества D . Барицентрическое подразделение локально конечного пространства есть всегда симплициальный комплекс.

Барицентрическое подразделение пространства D есть наиболее важный из пяти «сопровождающих симплициальных комплексов», которые очень естественно строятся для каждого локально конечного дискретного пространства. Они связаны между собою простыми геометрическими соотношениями, которые изучаются в §§ 2 и 3 и приводят к тому, что для весьма обширного класса дискретных пространств, а именно для всех так называемых мультипликативных пространств, все сопровождающие комплексы имеют одни и те же гомологические свойства.

В § 2 исследуется, между прочим, элементарногеометрическая структура конечных дискретных пространств, которые оказываются подмножествами обыкновенных конечных симплициальных комплексов. Это приводит к наглядной геометрической интерпретации, в частности, и барицентрического подразделения.

В § 1 устанавливаются элементарные теоретико-множественные свойства дискретных пространств, а в § 5 изучается связь между компактами и их конечными покрытиями, рассматриваемыми как дискретные пространства. Содержание работы, таким образом, охватывается следующим ее оглавлением:

§ 1. Эквивалентность понятий: дискретное пространство, система множеств, частично упорядоченное множество.

§ 2. Пять сопровождающих комплексов.

§ 3. Мультипликативные пространства.

§ 4. Гомологическая теория локально конечных пространств.

§ 5. ϵ -сдвиги.

