

Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung.

Von

Paul Alexandroff in Moskau.

Herrn L. E. J. Brouwer gewidmet.

Einleitung.

Die bisherige Entwicklung der Dimensionstheorie¹⁾ hat im vollen Maße den dieser Theorie zugrunde liegenden Dimensionsbegriff als *den richtigen* Dimensionsbegriff gerechtfertigt: erstens ist dieser Begriff selbst der denkbar einfachste und natürlichste, zweitens hat es sich gezeigt, daß diejenigen Räume bzw. Mengen, die a priori von der Dimension n sein sollten (z. B. der Euklidische n -dimensionale Raum R^n), auch auf Grund der allgemeinen Dimensionsdefinition die Dimension n erhalten, drittens ließ sich mit Hilfe des allgemeinen Dimensionsbegriffs unsere Erkenntnis des topologischen Aufbaus der geometrisch interessanten Räume, vor allem der Euklidischen Räume und ihrer abgeschlossenen Teilmengen, wesentlich vertiefen und vermehren.

Eine für die ganze Theorie prinzipiell wichtige Frage blieb aber bis jetzt unbeantwortet.

Den Ausgangspunkt der allgemeinen Dimensionstheorie bildeten der n -dimensionale Koordinatenraum oder, ein wenig allgemeiner, die im klassischen Sinne n -dimensionalen Gebilde (n -dimensionalen Komplexe²⁾), und

¹⁾ S. wegen der Literatur z. B. meine Arbeit „Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie“, Math. Annalen 96, S. 489, wo die grundlegenden Arbeiten von Brouwer, Urysohn und Menger zitiert sind.

²⁾ S. wegen der Definition des n -dimensionalen Komplexes z. B. H. Hopf, „Vektorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten“ (Math. Annalen 96, S. 227). Vgl. auch meine unter ¹⁾ zitierte Arbeit.

Unter einem *im R^n gelegenen Komplex K^p , $p \leq n$* , soll folgendes verstanden werden.

(Fortsetzung der Fußnote 2 auf nächster Seite).

alle diese Gebilde sind zu einem Bestandteil der viel allgemeineren Klasse der n -dimensionalen (abgeschlossenen) Mengen geworden. Nun fragt es sich, ob es möglich ist, in der Gestalt jeder n -dimensionalen abgeschlossenen Menge, so kompliziert sie auch sein mag, diese elementaren n -dimensionalen Gebilde, die ja für unsere ganze Anschauung der Dimension maßgebend sind und bleiben, irgendwie wiederzuerkennen?

Um nur ein einfaches Beispiel zu nennen, betrachten wir in der Ebene ein Brouwersches „unzerlegbares“ Kontinuum, welches die gemeinsame Grenze von drei (oder mehreren, sogar unendlichvielen) einfach zusammenhängenden Gebieten ist. Vom Standpunkte der allgemeinen Dimensionstheorie aus ist ein solches Kontinuum, trotz aller Schwierigkeiten, die es der elementaren geometrischen Vorstellung darbietet, eine Kurve. In diesem Spezialfall lautet also meine Frage: Kann man in dieser Kurve dieselben primitiv-anschaulichen geometrischen Elemente erkennen, die uns zwingen, z. B. eine aus endlichvielen geradlinigen Strecken zusammengesetzte Figur ohne weiteres als eine Linie zu betrachten?

Diese Frage, und zwar in ihrer allgemeinsten Form, mit einem Ja zu beantworten, ist Zweck der vorliegenden Arbeit: es wird sich nämlich zeigen, daß die allgemeinen n -dimensionalen abgeschlossenen Mengen geometrisch dadurch völlig charakterisiert sind, daß sie sich für jedes $\varepsilon > 0$ in einen n -dimensionalen Komplex stetig deformieren lassen, so daß während des ganzen Deformationsprozesses kein Punkt um mehr als ε von seiner ursprünglichen Lage entfernt wird.

Wir wollen jetzt dieses Resultat in einer möglichst scharfen und präzisen Form aussprechen.

Jede Menge von $q+1$, $q \leq p$ Punkten des R^n , die nicht in einem R^{q-1} liegen, heiße ein q -dimensionales Gerüst \mathcal{G}^q . Es sei weiter eine endliche Menge \mathcal{E} von in R^n liegenden höchstens p -dimensionalen Gerüsten

$$\mathcal{G}_1^{q_1}, \mathcal{G}_2^{q_2}, \dots, \mathcal{G}_s^{q_s}$$

gegeben, unter denen es wenigstens ein p -dimensionales gibt; es wird außerdem vorausgesetzt, daß keines dieser Gerüste eine Teilmenge eines anderen Gerüstes (des Systems \mathcal{E}) ist; sodann sind je zwei Gerüste $\mathcal{G}_i^{q_i}, \mathcal{G}_j^{q_j}$ entweder zueinander fremd oder ihr Durchschnitt bildet ein r -dimensionales Gerüst ($r < q_i, r < q_j$).

Jedes Gerüst \mathcal{G}^q des Systems \mathcal{E} bestimmt eindeutig ein q -dimensionales Simplex T^q , welches als seine Eckpunkte die Punkte von \mathcal{G}^q hat. Die aus diesen Simplexen und ihren sämtlichen Seiten (aller Dimensionen) gebildete Figur heiße ein p -dimensionaler Komplex. Zwei zu verschiedenen Simplexen bzw. Seiten des Komplexes gehörende Punkte gelten im Komplex stets als verschiedene Punkte des Komplexes auch dann, wenn sie im Raume R^n zusammenfallen. Bequemlichkeitshalber werden wir als Simplexe des Komplexes K^p auch sämtliche Seiten jener Simplexe betrachten; wenn nötig, sollen diejenigen Simplexe von K^p , die nicht Seiten anderer Simplexe desselben Komplexes sind, als *Hauptsimplexe* von K^p besonders gekennzeichnet werden.

Unter einer *abgeschlossenen Menge* verstehen wir in der ganzen vorliegenden Arbeit entweder eine *beschränkte abgeschlossene* Teilmenge eines Euklidischen Raumes beliebig hoher Dimension oder, noch viel allgemeiner, eine beliebige abgeschlossene Teilmenge des *Fundamentalquaders* R^∞ des Hilbertschen Raumes. Dabei ist R^∞ die (kompakte, abgeschlossene) Teilmenge des Hilbertschen Raumes, die aus allen Punkten besteht, deren Koordinaten den Ungleichungen

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ in inf.}$$

[x_n bedeutet die n -te Koordinate eines Punktes im Hilbertschen Raume] genügen³⁾.

Wir stellen weiter noch folgende Definition auf.

Es sei R der n -dimensionale Euklidische Raum R^n oder der Fundamentalquader R^∞ des Hilbertschen Raumes; es seien ferner F und Φ zwei in R gelegene abgeschlossene Mengen, und ε eine positive Zahl.

Dann sagen wir, daß F sich in Φ ε -überführen läßt, falls Φ eindeutiges und stetiges Bild von F ist,

$$(1) \quad \Phi = \varphi(F),$$

und diese Abbildung und die gegenseitige Lage von F und Φ so beschaffen sind, daß kein Punkt x von F von seinem Bildpunkt $\xi = \varphi(x)$ um mehr als ε entfernt ist⁴⁾.

Es sei hierzu bemerkt, daß sich jede stetige Abbildung (1) einer abgeschlossenen beschränkten Teilmenge des Euklidischen Raumes auf eine andere auf Grund bekannter Erweiterungssätze für stetige Funktionen⁵⁾ zu einer stetigen Abbildung des ganzen R^n auf sich selbst er-

³⁾ Es sei hierzu bemerkt, daß auf Grund eines bekannten Urysohn'schen Satzes (Math. Annalen 93, S. 302) jeder kompakte metrisierbare topologische Raum einer abgeschlossenen Teilmenge von R^∞ homöomorph ist.

⁴⁾ Der für die ganze Arbeit grundlegende Begriff der ε -Überführung stammt, seinem Inhalt nach, von Brouwer und bildet den methodologischen Kern vieler seiner Untersuchungen: man vgl. z. B. den „Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve“ (Math. Annalen 72, S. 422), durch den die vorliegende Arbeit in hohem Maße ange-regt ist.

⁵⁾ Brouwer, Math. Annalen 71, S. 309 und 79, S. 209; vgl. auch die (wohl allge-meinste) Fassung des Erweiterungssatzes für stetige Funktionen bei Urysohn, Math. Annalen 94, S. 293, wo man auch weitere Literaturangaben findet. Um von dem klassischen Erweiterungssatz für Funktionen (deren Werte reelle Zahlen sind) zum Erweiterungssatz für stetige Abbildungen einer F auf eine Φ (beide im R^n) zu ge-langen, braucht man nur (wie ich einer noch nicht publizierten Arbeit von Hopf ent-nehme) den klassischen Erweiterungssatz auf jede der Funktionen

$$\xi_i = \varphi_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(Fortsetzung der Fußnote 5 auf nächster Seite.)

gängen läßt. Diese Abbildung kann als eine stetige *Deformation* des R^n in sich betrachtet werden: es genügt ja dazu, jeden Punkt von R^n sich nach seinem Bildpunkt gleichförmig und geradlinig bewegen zu lassen.

Wir können jetzt folgendes aussagen:

Es sei F eine in R gelegene abgeschlossene λ -dimensionale Menge (R ist dabei wie früher R^n , $n \geq \lambda$, oder R^m). Es sei ferner ε eine beliebige positive Zahl.

Es gelten alsdann die beiden Sätze:

I. *Es existiert ein in R gelegener λ -dimensionaler Komplex K_ε^λ , in den F sich ε -überführen läßt. Diese Überführung läßt sich mittels einer stetigen Deformation des Raumes R erreichen, wobei während dieses Deformationsprozesses kein Raumpunkt sich um mehr als ε von seiner ursprünglichen Lage⁶⁾ entfernt.*

Es existiert aber eine positive Zahl ε_0 von der Art, daß, für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, K_ε^λ in dieser Behauptung nicht durch einen Komplex niedrigerer Dimension ersetzt werden kann.

II. *Es existieren ein in R gelegener λ -dimensionaler Komplex $\tilde{K}_\varepsilon^\lambda$, eine abgeschlossene Umgebung \bar{U}_ε von F ⁷⁾ und eine stetige Deformation Δ des ganzen Raumes R in sich, so daß*

1. *alle Punkte von \bar{U}_ε von F um weniger als ε entfernt sind;*
2. *bei dieser Deformation \bar{U}_ε in $\tilde{K}_\varepsilon^\lambda$ übergeht;*
3. *während der Deformation Δ kein Punkt von R um mehr als ε verschoben wird und (im Falle, wo R der R^n ist) die von F um mehr als ε entfernten Punkte von R^n überhaupt fest bleiben.*

Es existiert aber eine positive Zahl $\bar{\varepsilon}_0$ von der Art, daß für $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_0$, $\tilde{K}_\varepsilon^\lambda$ in dieser Behauptung nicht durch einen Komplex niedrigerer Dimension ersetzt werden kann.

Ich möchte zum Schluß noch erwähnen, daß ich manche wertvolle Anregung bei der im folgenden dargestellten Untersuchung dem Meinungsaustausche mit Herrn Heinz Hopf und seinem im Sommer 1926 in Göttingen gehaltenen topologischen Vortragszyklus entnommen habe; es sei Herrn Hopf an dieser Stelle mein herzlichster Dank ausgesprochen.

anzuwenden (wobei α ein beliebiger Punkt von F und die ξ_i die Koordinaten seines Bildpunktes sind).

Weitere Verallgemeinerungen des Erweiterungssatzes befinden sich in der bereits erwähnten Arbeit von Hopf („Zur Topologie der stetigen Abbildungen“, erscheint demnächst).

⁶⁾ Wir sagen kurz, daß eine ε -Deformation des Raumes R vorliegt.

⁷⁾ Unter einer abgeschlossenen Umgebung von F verstehe ich die abgeschlossene Hülle einer die Menge F enthaltenden offenen Menge U .

I. Das Brouwersche Invarianzprinzip.

1. Wir beweisen zuerst die zweite Hälfte der beiden Sätze I und II, d. h. daß man bei einem genügend kleinen ε eine λ -dimensionale Menge nicht in einen Komplex niedrigerer Dimensionszahl ε -überführen kann. Diese Behauptung ist in folgendem allgemeinen Satz enthalten, der den eigentlichen Kern des ersten Brouwerschen Beweises der Invarianz der Dimensionszahl bildet:

Brouwersches Invarianzprinzip. *Es sei F eine abgeschlossene λ -dimensionale Teilmenge des Euklidischen R^n oder des Fundamentalquaders R^∞ des Hilbertschen Raumes. Dann läßt sich F für ein hinreichend kleines ε in keine Menge Φ niedrigerer Dimension ε -überführen.*

Beweis. Es sei in der Tat letztere Behauptung falsch. Dann gibt es für jedes ε eine höchstens $\lambda - 1$ -dimensionale Menge Φ_ε , in die sich F ε -überführen läßt:

$$\Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(F), \quad \varrho(x, \varphi_\varepsilon(x)) < \varepsilon.$$

Um zu zeigen, daß dann auch $\dim F \leq \lambda - 1$, genügt es auf Grund des Urysohn'schen Überdeckungssatzes⁵⁾ zu beweisen, daß F für jedes ε eine (ε, λ) -Überdeckung zuläßt⁶⁾.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die abgeschlossene Menge $\Phi_\varepsilon = \Phi$ und eine (auf Grund der Ungleichung $\dim \Phi \leq \lambda - 1$ gewiß existierende) $(\frac{\varepsilon}{3}, \lambda)$ -Überdeckung

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_s$$

der Menge Φ . Es sei nun für jedes $i \leq s$ F_i die Menge aller derjenigen Punkte x von F , deren Bildpunkte $\xi = \varphi(x)$ zu Φ_i gehören. Erstens ist $F = F_1 + F_2 + \dots + F_s$ (weil die ganze Menge F auf Φ abgebildet ist); zweitens ist $\delta(F_i) < \delta(\Phi_i) + 2 \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ (weil jeder Punkt $x \in F$ von seinem Bildpunkte $\xi \in \Phi$ weniger als um $\frac{\varepsilon}{3}$ entfernt ist); drittens gibt es keinen Punkt x von F , der zu $\lambda + 1$ oder mehr Mengen F_i gehört, weil mit $x \in F_{i_1} \cdot F_{i_2} \cdot \dots \cdot F_{i_{\lambda+1}}$ auch $\varphi(x) = \xi \in \Phi_{i_1} \cdot \Phi_{i_2} \cdot \dots \cdot \Phi_{i_{\lambda+1}}$ wäre.

Die Mengen F_i bilden also eine (ε, λ) -Überdeckung der Menge F , wie wir sie haben wollten.

⁵⁾ Mém. s. l. multiplicités Cantorienes, ch. V (Fund. Math. 8, S. 301). Der Satz ist auch a. a. O.¹⁾, Math. Annalen 96, S. 499 zitiert.

⁶⁾ Eine Darstellung $F = F_1 + F_2 + \dots + F_s$ heißt eine (ε, λ) -Überdeckung der Menge F , falls alle Mengen F_i abgeschlossen sind, ihre Durchmesser sämtlich kleiner als ε sind, und es keinen Punkt gibt, der in mehr als λ unter den Mengen F_1, \dots, F_s enthalten ist.

Das Brouwersche Invarianzprinzip ist hiermit bewiesen.

Um auch die erste Hälfte der beiden Sätze I und II beweisen zu können, sind manche Hilfsbetrachtungen nötig.

II. Ein Hilfssatz.

2. Wir beginnen mit einigen Hilfskonstruktionen.

Vektorzerlegungen eines Simplexes¹⁰⁾. Es sei T^n ein n -dimensionales Simplex, T^r irgendeine r -dimensionale Seite von T^n ($0 \leq r \leq n-1$). Wir definieren, was unter der Vektorzerlegung von T^n in bezug auf T^r zu verstehen ist. Es sei T^{n-r-1} die der Seite T^r gegenüberliegende Seite von T^n . Durch die Seite T^{n-r-1} und jeden Punkt x von T^r ziehen wir eine $(n-r)$ -dimensionale Ebene E_x^{n-r} ; sie schneidet T^n in einem $(n-r)$ -dimensionalen Simplexe T_x^{n-r} , das mit T^r den einzigen Punkt x gemeinsam hat. Der Punkt x ist dabei ein Eckpunkt von T_x^{n-r} . Wir zerlegen jetzt T_x^{n-r} in ∞^{n-r-1} zueinander bis auf den Punkt x fremde Vektoren (= gerichtete Strecken) $x\vec{y}$, indem wir x mit jedem Punkte y der dem Punkte x gegenüberliegenden Seite T^{n-r-1} geradlinig verbinden.

Nachdem man dieses Verfahren auf jedes Simplex T_x^{n-r} angewendet hat, zerfällt das ganze Simplex T^n in ∞^{n-1} Vektoren $x\vec{y}$, deren Anfangspunkte x zu T^r gehören, deren Endpunkte in T^{n-r-1} liegen, und die bis auf evtl. Anfangs- bzw. Endpunkte zueinander fremd sind. Die auf diese Weise definierte Zerlegung von T^n in lauter geradlinige Strecken ist durch die Wahl der Seite T^r völlig bestimmt und soll deshalb die Vektorzerlegung von T^n in bezug auf T^r heißen.

Sie besitzt folgende Eigenschaften:

1. Es sei z_0 irgendein Punkt von T^n , der weder zu T^r noch zu T^{n-r-1} gehört. Dann geht durch z_0 ein einziger Vektor $V_0 = V(z_0)$. Es sei

$$(1) \quad z_1, z_2, \dots, z_m, \dots$$

irgendeine zum Punkt z_0 konvergierende Punktfolge, von der wir annehmen dürfen, daß jeder Punkt $z_m \in T^n - (T^r + T^{n-r-1})$ ist. Dann konvergieren die

$$(2) \quad V_1, V_2, \dots, V_m, \dots, \quad V_m = V(z_m)$$

gegen V_0 .

2. Es sei ξ_0 irgendein Punkt x_0 von T , bzw. y_0 von T^{n-r-1} und (1) wie früher eine zum Punkt ξ_0 konvergierende Folge von Punkten

¹⁰⁾ Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß, meines Wissens, die erste Anwendung von dem Begriffe der Vektorzerlegung analogen Begriffen auf Untersuchungen topologischer Fragen von Brouwer herrührt (vgl. Crelle 142 [1913], S. 152).

$z_m \subset T^n - (T^r + T^{n-r-1})$. Dann läßt sich aus der Folge (2)¹¹⁾ eine Teilfolge

$$(3) \quad V_{m_1}, V_{m_2}, \dots, V_{m_i}, \dots$$

auswählen, so daß (3) zu einem, im Punkte $\xi_0 = z_0$ angebrachten bzw. im Punkte $\xi_0 = y_0$ endenden Vektor $V(\xi_0)$ konvergiert.

3. Es sei T^q irgendeine, weder in T^r noch in T^{n-r-1} enthaltene Seite von T^n (woraus insbesondere folgt, daß $1 \leq q \leq n-1$ ist). Es sei ferner $T^{r'} = T^q \cdot T^r$; dann bilden diejenigen Vektoren der Zerlegung von T^n in bezug auf T^r , die in T^q enthalten sind, die Vektorzerlegung von T^q in bezug auf $T^{r'}$.

Alle diese Eigenschaften unserer Vektorzerlegung lassen sich auf Grund elementargeometrischer Betrachtungen ohne Schwierigkeit beweisen.

Wir bezeichnen im folgenden die Zerlegung von T^n in bezug auf T^r durch $\Theta(T^n, T^r)$.

3. Die Vektorfelder $\Theta(K^{p+1}, K^q)$. Es sei K^p ein im R^n ($n \geq p$) liegender¹²⁾ p -dimensionaler Komplex. Dabei kann K^p in R^n Singularitäten aufweisen, d. h. zwei verschiedene Punkte von K^p können in R^n geometrisch zusammenfallen¹³⁾.

Es liege eine Simplicialzerlegung \mathfrak{J} von K^p und ein, aus gewissen Elementen dieser Zerlegung gebildeter q -dimensionaler Komplex K^q ($q \leq p$) vor.

Wir setzen voraus, daß jedes Element T^l von \mathfrak{J} entweder in K^q enthalten ist oder zu K^q fremd ist, oder mit K^q genau eine (r -dimensionale, $0 \leq r \leq l-1$) Seite gemeinsam hat.

Die der letztgenannten Bedingung genügenden Simplexe T^l nennen wir die *Grenzsimplexe von K^p in bezug auf K^q* , oder, falls kein Mißverständnis zu erwarten ist, einfach die *Grenzsimplexe*.

Die zu K^q gehörende Seite eines Grenzsimplexes wollen wir seine *Randseite* nennen. Die von der Zerlegung \mathfrak{J} soeben verlangte Eigenschaft lautet also:

(a) *Jedes Grenzsimplex besitzt nur eine Randseite.*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man stets voraussetzen, daß \mathfrak{J} die Eigenschaft (a) besitzt: in der Tat, falls dies nicht der Fall wäre, würde man nur jedes Simplex aus \mathfrak{J} baryzentrisch¹³⁾ unterteilen

¹¹⁾ und also aus jeder Teilfolge der Folge (2).

¹²⁾ Vgl. Fußnote 2).

¹³⁾ Baryzentrisch = regulär (Veblen, Analysis Situs (Cambridge Colloquium 1916), S. 41). Vgl. auch meine Arbeit „Zur Begründung der n -dimensionalen Topologie“, Math. Annalen 94, S. 296.

müssen (so daß keine zwei Eckpunkte der a priori gegebenen Unterteilung zu einem Simplex der neuen gehören),

Außerdem setzen wir noch voraus, daß

(b) falls zwei Grenzsimplexe, von denen keines eine Seite des andern ist, nicht zueinander fremd sind, die ihren Durchschnitt bildende Seite entweder die gemeinsame Randseite der beiden Grenzsimplexe, oder ein Grenzsimplex (niedrigerer Dimension) ist.

Auch die Bedingung (b) läßt sich (mittels evtl. Unterteilung der Simplicialzerlegung \mathfrak{J}) ohne Einschränkung der Allgemeinheit erfüllen.

Eine den beiden Voraussetzungen genügende Simplicialzerlegung des Komplexes K^p soll eine in bezug auf K^q bequeme Zerlegung heißen.

Wir setzen also unsere Zerlegung \mathfrak{J} als in bezug auf K^q bequem voraus und nehmen mit jedem Grenzsimplex T^i die Vektorzerlegung in bezug auf seine Randseite T^i vor.

Das auf diese Weise entstandene „Vektorfeld“ soll $\Theta_3(K^p, K^q)$ oder einfach $\Theta(K^p, K^q)$ heißen. Die Vereinigungsmenge von K^q und von allen Strecken $\vec{x}\vec{y}$, die das Vektorfeld $\Theta(K^p, K^q)$ bilden, bezeichnen wir mit $\bar{U}(K^q)$; da jedes Grenzsimplex von K^p sowie K^q selbst zu $\bar{U}(K^q)$ gehört, so sind alle zu K^q hinreichend nahe liegenden Punkte von K^p in $\bar{U}(K^q)$ enthalten.

Es sei jetzt ξ irgendein Punkt von $\bar{U}(K^q)$. Dann sind nur folgende beide Fälle a priori möglich:

1. Fall. ξ gehört zu keinem zu K^q fremden Simplex der Zerlegung \mathfrak{J} .
2. Fall. ξ gehört wenigstens zu einem Simplex der Zerlegung \mathfrak{J} , das zu K^q fremd ist.

Im ersteren Falle ist ξ ein innerer Punkt der Menge $\bar{U}(K^q)$ (relativ zu K^p),

$$\xi \in U(K^q).$$

Wir bemerken sofort, daß ein innerer Punkt ξ auch Endpunkt eines Vektors aus Θ sein kann¹⁴⁾; falls aber $\xi \in U(K^q)$ weder zu K^q selbst gehört, noch Endpunkt eines Vektors aus Θ ist, so geht durch ξ jedenfalls ein einziger Vektor $V(\xi)$, und es gilt dann die Stetigkeitseigenschaft 1 des § 2. Falls dagegen ξ ein Anfangs- oder Endpunkt eines Vektors aus Θ ist¹⁵⁾, so ist er im allgemeinen Anfangs- bzw. Endpunkt unendlich vieler Vektoren aus Θ , und man hat dann die schwächere Stetigkeitseigenschaft 2 des § 2.

¹⁴⁾ Dieser Fall würde sich übrigens beseitigen lassen, indem man wie früher die Zerlegung \mathfrak{J} durch eine feinere Zerlegung ersetzt; das ist aber für unsere weiteren Überlegungen ganz bedeutungslos.

¹⁵⁾ Wir sagen in diesem Falle kurz, ξ sei ein Anfangs- bzw. Endpunkt.

(Bei der Formulierung der Bedingungen 1 bzw. 2 sind dabei unter den Punkten z_m beliebige, von Anfangs- und Endpunkten der Vektoren von Θ verschiedene innere Punkte von $U(K^q)$ zu verstehen). Endlich kann ξ als innerer Punkt von $\bar{U}(K^q)$ zu K^q gehören, ohne daß dabei in ξ ein Vektor aus Θ angebracht sei. Dies ist nur dann möglich, wenn ξ zu keinem Grenzsimplex gehört, d. h. in einer hinreichend kleinen Umgebung von ξ die beiden Komplexe K^p und K^q identisch sind. ξ ist dann ein innerer Punkt von K^q (rel. zu K^p), und in keinem der zu ξ hinreichend naheliegenden Punkten ist ein Vektor aus Θ angebracht.

Im zweiten Falle gehört zwar ξ zu wenigstens einem Grenzsimplex T^l , aber dann ist ξ notwendig in der der Randseite von T^l gegenüberliegenden Seite von T^l enthalten, d. h. ξ ist Endpunkt aller zu ξ nicht fremden Vektoren.

4. Radialisierung eines Komplexes in bezug auf einen Teilkomplex. Es haben K^p und K^q dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen. Ein Simplex T^r von K^q (welches natürlich kein Hauptsimplex²⁾ von K^q zu sein braucht) heißt ein *Randsimplex* von K^q , wenn es die Randseite wenigstens eines Grenzsimplexes von K^p (in bezug auf K^q) ist. Die sonstigen Simplexe von K^q sollen *innere Simplexe* heißen. Aus dieser Definition folgt insbesondere, daß die Dimension eines Randsimplexes von K^q höchstens gleich $p-1$ ist.

Es sei nun ω irgendein fest gedachter Punkt von K^p , der in keiner ein Randsimplex von K^q enthaltenden $(p-1)$ -dimensionalen Ebene liegt. Es folgt daraus insbesondere, daß jede Gerade, die den Punkt ω mit irgendeinem Punkt x eines Randsimplexes von K^q verbindet, dieses Simplex nur in einem Punkte trifft, so daß, falls T^l ($l \leq q$) irgendein Randsimplex des Komplexes K^q ist und man ω mit allen Punkten x von T^l geradlinig verbindet, man ein $(l+1)$ -dimensionales Simplex

$$(4) \quad T^{l+1} = \Omega(T^l, \omega)$$

erhält.

Der aus allen inneren Simplexen von K^q und allen Simplexen (4) gebildete Komplex soll $\Omega(K^q, \omega)$ heißen; dabei soll K^q die *Basis* und ω der *Pol* von $\Omega(K^q, \omega)$ heißen.

Es läßt sich der ganze Komplex K^p folgendermaßen auf $\Omega(K^q, \omega)$ eindeutig und stetig abbilden. 1°. Jeden Punkt eines inneren Simplex von K^q lassen wir sich selbst entsprechen. 2°. In jedem Punkte x eines Randsimplexes von K^q sind erstens ein einziger Vektor $W(x) = \vec{x\omega}$, zweitens im allgemeinen unendlichviele Vektoren $V(x) = \vec{x\bar{y}}$ des Feldes $\Theta(K^p, K^q)$ angebracht. Nun bilden wir jeden Vektor $V(x) = \vec{x\bar{y}}$ des Feldes Θ proportional auf den Vektor $W(x) = \vec{x\omega}$ so ab, daß dabei der Punkt x fest

bleibt (und also y in ω übergeht). Auf diese Weise wird zunächst $\bar{U}(K^q)$ auf $\Omega(K^q, \omega)$ abgebildet; man erhält jetzt eine Abbildung des ganzen Komplexes K^p auf $\Omega(K^q, \omega)$, indem man: \exists° . Jedem Punkte von K^p , der nicht zu $\bar{U}(K^q)$ gehört, einfach den Punkt ω entsprechen läßt.

Die auf diese Weise erhaltene Abbildung

$$(5) \quad \Omega(K^q, \omega) = \varphi(K^p)$$

ist stetig in jedem Punkte von K^p ; sie läßt sich nämlich mittels einer stetigen Deformation des Komplexes K^p in den Komplex $\Omega(K^q, \omega)$ erzeugen.

In der Tat braucht man nur den Endpunkt jedes Vektors des Feldes Θ und jeden zu $\bar{U}(K^q)$ fremden Punkt gleichförmig und geradlinig in den Punkt ω hineingleiten zu lassen; dadurch geht jeder Vektor $V(x)$ in den Vektor $W(x)$ über¹⁶⁾, alle Punkte der inneren Simplexe von K^q bleiben fest, und alle sonstigen Punkte von K^p werden in den Punkt ω befördert¹⁷⁾.

Die stetige Abbildung (5), die allein durch die Kenntnis von K^p, K^q und ω bestimmt ist, soll die *Radialisierung des Komplexes K^p in bezug auf die Basis K^q und den Pol ω* heißen.

Sie besitzt folgende, für weitere Schlüsse wichtige Eigenschaften:

1. jeder Punkt von $\Omega(K^q, \omega)$ ist Bildpunkt wenigstens eines Punktes von K^p ;

2. falls der Durchmesser von K^p kleiner als ε ist, entfernt sich während des ganzen Prozesses der Radialisierung jeder Punkt von K^p um weniger als ε von seiner ursprünglichen Lage;

3. jedes Simplex von K^p geht in ein Simplex von $\Omega(K^q, \omega)$ (im allgemeinen anderer, jedoch nicht höherer, Dimension) über¹⁸⁾.

5. Es seien jetzt im R^n zwei Komplexe K^q und $\overset{*}{K}^{q^*}$ ($q^* \leq q \leq n$) und eine stetige Deformation

$$(6) \quad \overset{*}{K}^{q^*} = f(K^q)$$

gegeben, so daß dabei

(a) jeder Punkt von $\overset{*}{K}^{q^*}$ Bildpunkt von wenigstens einem Punkte von K^q ist;

¹⁶⁾ Dabei kann während dieser Überführung ein Vektor $V(x)$ sich für einen Augenblick auf einen Punkt zusammenziehen, was aber kein Hindernis bedeutet, weil in jedem Augenblick die Bahn jedes Punktes von $V(x)$ trotzdem bestimmt bleibt.

¹⁷⁾ Man könnte sich von der Stetigkeit der Abbildung (5) auch mittels einer direkten Anwendung der „Stetigkeitseigenschaften“ 1, 2 der Vektorzerlegungen (wie sie im § 1 definiert sind) überzeugen.

¹⁸⁾ In der Tat geht bei der Radialisierung jedes innere Simplex von K^q in sich selbst, jedes Grenzsimplex T mit dem Randsimplex T^q in das Simplex $\Omega(T^q, \omega)$ und jedes sonstige Simplex in den Eckpunkt ω von $\Omega(K^q, \omega)$ über.

(β) während des ganzen Deformationsprozesses kein Punkt von K^q sich um mehr als ε von seiner ursprünglichen Lage entfernt;

(γ) jedes Simplex von K^q in ein Simplex von $\overset{*}{K}^{q^*}$ von derselben oder einer niedrigeren Dimension übergeht.

Es sei endlich ω ein Punkt, der in keiner $(n-1)$ -dimensionalen Ebene liegt, die Randsimplexe¹⁹⁾ von K^q oder $\overset{*}{K}^{q^*}$ enthält.

Dann induziert die Deformation (6) eine eindeutig bestimmte Deformation von $\Omega(K^q, \omega)$ in $\Omega(\overset{*}{K}^{q^*}, \omega)$.

In der Tat braucht man nur jeden Vektor $\overrightarrow{x\omega}$ in den Vektor $\overrightarrow{f(x)\omega}$ durch stetige Überführung des Endpunktes x in den Endpunkt $f(x)$ zu deformieren.

Dieses Resultat läßt folgende unmittelbar einleuchtende Verallgemeinerung zu.

Es sei K ein aus den (nicht notwendig zueinander fremden) Teilkomplexen

$$K^{q_1}, K^{q_2}, \dots, K^{q_s}$$

gebildeter in R^n gelegener Komplex

$$(7) \quad K = \sum_{i=1}^s K^{q_i} \quad (q_i \leq n-1),$$

der sich unter Geltung der Bedingungen (α), (β), (γ) in den Komplex

$$(7^*) \quad K^* = \sum_{i=1}^s \overset{*}{K}^{q_i^*}$$

abbilden läßt, wobei $\overset{*}{K}^{q_i^*}$ ($q_i^* \leq q_i$) das Bild von K^{q_i} ist, das zufolge der Bedingung (γ) ein Komplex ist²⁰⁾:

$$(8) \quad K^* = f(K).$$

Wenn dann $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ in keiner, Randsimplexe von K bzw. K^* tragenden Hyperebene des R^n liegen, so induziert die Deformation (8) eine eindeutig bestimmte Deformation des Komplexes $\Omega(K, [\omega]) = \sum_{i=1}^s \Omega(K^{q_i}, \omega_i)$ auf den Komplex $\Omega(K^*, [\omega]) = \sum_{i=1}^s \Omega(\overset{*}{K}^{q_i^*}, \omega_i)$, bei der die Bedingungen (α), (β), (γ) ebenfalls gelten.

¹⁹⁾ Dabei sind die Randsimplexe von K^q unter den höchstens $(n-1)$ -dimensionalen Simplexen von K^q a priori ausgezeichnet und das Bild eines Randsimplexes von K^q soll Randsimplex von $\overset{*}{K}^{q^*}$ heißen.

²⁰⁾ Diese Eigenschaft der $\overset{*}{K}^{q_i^*}$ wird uns erlauben, demnächst von Komplexen $\Omega(\overset{*}{K}^{q_i^*})$ zu sprechen.

6. Wir sind jetzt imstande, in wenigen Worten unsern Hilfssatz zu beweisen. Er lautet folgendermaßen:

Hilfssatz. *Es seien $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_s$ p -dimensionale in R^n ohne Singularitäten²¹⁾ liegende Komplexe, die ein $(\varepsilon, \lambda + 1)$ -System²²⁾ bilden.*

Dann läßt sich der Komplex $\Pi = \sum_{i=1}^s \Pi_i$ in einen λ -dimensionalen Komplex K^λ so ε -überführen, daß sich diese Überführung zu einer stetigen Deformation des ganzen Raumes R^n in sich erweitern läßt, die keinen Punkt von R^n um mehr als ε von seiner ursprünglichen Lage entfernt, und jeden von Π um mehr als ε entfernten Punkt überhaupt fest läßt.

7. Beweis. Es sei $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ die (eventuell leere) Menge $\Pi_{i_1} \cdot \Pi_{i_2} \cdot \dots \cdot \Pi_{i_k}$ ($k \leq \lambda + 1$; $i_h \neq i_{h'}$, wenn $h' < h'' \leq k$).

Da die Π_i ein $(\varepsilon, \lambda + 1)$ -System bilden, so gibt es ein ε' von der Eigenschaft, daß für jedes i

$$\delta(\Pi_i) < \varepsilon' < \varepsilon$$

ist.

Wir nehmen jetzt eine folgenden Bedingungen genügende simpliziale Zerlegung \mathfrak{Z} des ganzen Raumes R^n vor:

1. Sämtliche Simplexe der $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ($k = 1, 2, \dots, \lambda + 1$) werden durch \mathfrak{Z} in Teilsimplexe zerlegt, so daß man jedes $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ als einen aus Simplex von \mathfrak{Z} zusammengesetzten Komplex betrachten kann;

2. jedes Simplex der Zerlegung \mathfrak{Z} hat einen Durchmesser $< \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\lambda + 1}$;

3. die durch die Zerlegung \mathfrak{Z} hervorgerufene simpliziale Zerlegung jedes nicht leeren Komplexes $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ist in bezug auf die Vereinigungsmenge $K_{i_1 i_2 \dots i_k}$ aller in $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ enthaltenen $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_l i_{l+1}}$ im Sinne des § 3 bequem.

Wir betrachten jetzt alle nicht leeren unter den Mengen $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_l i_{l+1}}$; zwei verschiedene solche Mengen können unmöglich gemeinsame Punkte haben (weil es sonst Punkte geben würde, die zu mehr als $\lambda + 1$ verschiedenen Π_i gehörten). Wir wählen nun in jeder nicht leeren Menge $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_l i_{l+1}}$ einen Punkt $\omega_{i_1 i_2 \dots i_l i_{l+1}}$ und radialisieren jeden Komplex $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_l i_{l+1}}$ in bezug auf den Pol $\omega_{i_1 i_2 \dots i_l i_{l+1}}$ und die leere Menge als Basis, d. h. einfach wir ziehen im Raum R^n jede Menge $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_l i_{l+1}}$ stetig auf den Punkt $\omega_{i_1 i_2 \dots i_l i_{l+1}}$ zusammen. Dadurch wird der Komplex

²¹⁾ „Ohne Singularitäten“ — das heißt, daß zwei im Komplex als verschieden geltende Punkte auch im Raum R^n tatsächlich verschieden sind.

²²⁾ D. h. daß für jedes $s \leq \delta(\Pi_i) < \varepsilon$ ist, und daß es überdies keinen Punkt gibt, der zu mehr als $\lambda + 1$ verschiedenen Π_i gehört, wohl aber wenigstens für eine Indizeskombination $i_1, i_2, \dots, i_{\lambda+1}$ die Menge $\Pi_{i_1} \cdot \Pi_{i_2} \cdot \dots \cdot \Pi_{i_{\lambda+1}}$ nicht leer ist.

$$K_{(\lambda+1)} = \sum_{i_1, \dots, i_{\lambda+1}} \Pi_{i_1 i_2 \dots i_{\lambda} i_{\lambda+1}} = \sum_{i_1, \dots, i_{\lambda}} K_{i_1 i_2 \dots i_{\lambda}}$$

stetig unter Geltung der Bedingungen (α) , (β) , (γ) in den nulldimensionalen Komplex

$$K_*^0 = \sum_{i_1, \dots, i_{\lambda+1}} \omega_{i_1 i_2 \dots i_{\lambda} i_{\lambda+1}}$$

deformiert.

Es sei jetzt der Komplex

$$(9) \quad K_{(k+1)} = \sum_{i_1, \dots, i_k} K_{i_1 i_2 \dots i_k} = \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}} \Pi_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$$

unter Geltung der Bedingungen (α) , (β) , (γ) in den $(\lambda - k)$ -dimensionalen Komplex

$$(10) \quad K^{\lambda-k} = \sum_{i_1, \dots, i_k} K_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\lambda-k} \quad (\text{wobei } K_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\lambda-k} \text{ das Bild von } K_{i_1 i_2 \dots i_k} \text{ ist}^{23})$$

stetig deformiert.

Wir radialisieren jeden nicht leeren Komplex $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ in bezug auf $\bar{K}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ als Basis und einen in $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ außerhalb aller Randsimplexe von $K_{(k+1)}$ und $K_*^{\lambda-k}$ enthaltenden Hyperebenen liegenden Punkt $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$ als Pol^{23a)}. Da der Durchschnitt je zweier $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ in $K_{i_1 i_2 \dots i_k} \subset K_{(k+1)}$ enthalten ist, und bei unseren Radialisierungen sämtliche Punkte von $K_{(k+1)}$ fest bleiben, so schließen sich die Radialisierungen einzelner $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ stetig aneinander und ergeben eine stetige Deformation von

$$(11) \quad K_{(k)} = \sum_{i_1, \dots, i_k} \Pi_{i_1 i_2 \dots i_k} = \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} K_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$$

in

$$\Omega(K_{k+1}, [\omega]_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \Omega(K_{i_1 i_2 \dots i_k}, \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}).$$

Die vermöge unserer Voraussetzung bereits definierte Deformation von (9) auf (10) induziert alsdann (nach der Vorschrift des § 5) eine den Bedingungen (α) , (β) , (γ) genügende^{23b)} stetige Deformation von (11) auf den $(\lambda - k + 1)$ -dimensionalen Komplex

$$K^{\lambda-k+1} = \Omega(K^{\lambda-k}, [\omega]_k),$$

wodurch die Induktion weitergeführt wird.

²³⁾ Das auf Grund der Bedingung (γ) ein Teilkomplex von $K_*^{\lambda-k}$ ist.

^{23a)} Die Bedingung $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \in \Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ist natürlich unwesentlich: es würde genügen, $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$ so dicht bei $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ zu wählen, daß für jeden Punkt x von $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$, $\Omega(\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}, x) < \varepsilon'$ ist.

^{23b)} Es ist unmittelbar klar, daß die induzierte Deformation von $K_{(k)}$ in $K_*^{\lambda-k+1}$ keinen Punkt mehr als um $(k+1)\varepsilon$ verschiebt, was für das Endresultat $(\lambda+1)\varepsilon$ ergibt; auf Grund der Feinheitbedingung 2, die der Simplicialzerlegung von E^n auferlegt war, läßt sich aber behaupten, daß die Bedingung (β) im vollen Maße gilt.

Das Schlußergebnis tritt bei $k=1$ auf und lautet dann, daß $K_{(1)} = \sum_{(k)} II_k = II$ unter Geltung der Bedingungen (α) und (β) (auf die es jetzt allein ankommt) in den λ -dimensionalen Komplex $K^{* \lambda}$ mittels stetiger Deformation abgebildet wird.

Uns bleibt also nur übrig, diese stetige Deformation auf den ganzen Raum R^n zu erweitern, und das geschieht wie folgt.

Wir schließen den ganzen Komplex II in einen hinreichend große Würfel Q ein und verfeinern, wenn nötig, die unserer ganzen Untersuchung zugrunde liegende Simplicialzerlegung des R^n so, daß die dadurch hervorgerufene Zerlegung von Q in bezug auf II im Sinne des § 3 bequem ist.

Wir betrachten jetzt das Vektorfeld $\Theta(Q, II)$, und es sei $V(x) = \vec{x}y$ irgendein Vektor dieses Feldes²⁴⁾ (siehe § 3). Wir bezeichnen durch z die Mitte der Strecke $\vec{x}y$ und bilden $\vec{x}y$ auf sich selbst stetig ab, indem wir $\vec{y}z$ proportional auf $\vec{y}x$ abbilden und die ganze Strecke $\vec{z}x$ auf den Punkt $x \in II$ zusammenschieben. Auf diese Weise läßt sich die Deformation von II in $K^{* \lambda}$ zu einer ebenfalls stetigen Deformation von $\bar{U}(II)$ in sich erweitern, die alle zu II hinreichend nahe liegende Punkte des Raumes in II überführt (um sie dann mittels der Deformation von II selbst in Punkte von $K^{* \lambda}$ zu befördern) und alle Endpunkte der Vektoren V aus $\Theta(Q, II)$ fest läßt. Da diese Deformation jeden nicht inneren Punkt von $\bar{U}(II)$ fest bleiben läßt, so erweitert man sie auf den ganzen Raum einfach dadurch, daß man auch alle übrigen, d. h. nicht zu $\bar{U}(II)$ gehörenden Punkte von R^n sich selbst entsprechen läßt. Die auf diese Weise entstandene stetige Deformation des Raumes in sich genügt allen Forderungen unseres Hilfssatzes, w. z. b. w.

III. Beweis der Sätze I und II.

7. Es sei zuerst F eine im R^n gelegene abgeschlossene λ -dimensionale Menge, und ε_0 so klein, daß keine ε_0 -Überführung der Menge F in eine Menge niedrigerer Dimension möglich ist. Es sei ferner $\varepsilon < \varepsilon_0$ eine beliebig kleine positive Zahl und

$$(12) \quad F = F_1 + F_2 + \dots + F_s$$

eine $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \lambda + 1\right)$ -Überdeckung der Menge F . Wir nehmen mit R^n eine so feine Simplicialzerlegung \mathfrak{Z} vor, daß, wenn II_i ($1 \leq i \leq s$) die Vereinigungsmenge aller zu F_i nicht fremden Simplexe aus \mathfrak{Z} ist, jede Menge

²⁴⁾ Dabei ist x der zu II gehörende „Anfangspunkt“ von $\vec{x}y$.

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{i_1 i_2 \dots i_k} = \Pi_{i_1} \cdot \Pi_{i_2} \cdot \dots \cdot \Pi_{i_k} \\ \text{nur dann nicht leer ist, falls} \\ F_{i_1 i_2 \dots i_k} = F_{i_1} \cdot F_{i_2} \cdot \dots \cdot F_{i_k} \neq 0, \text{ }^{25)} \end{array} \right.$$

und daß außerdem für jedes $i \leq s$ $\delta(\Pi_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Insbesondere bilden dann die Π ein $(\frac{\varepsilon}{2}, \lambda + 1)$ -System. Das System \mathfrak{S} aller Komplexe

$$(13) \quad \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_s$$

genügt allen Voraussetzungen unseres Hilfssatzes, so daß $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_s$ sich mittels einer, allen Voraussetzungen des Satzes II genügenden, $\frac{\varepsilon}{2}$ -Deformation Δ des ganzen Raumes R^n in einen λ -dimensionalen Komplex $K = K(\mathfrak{S})$ stetig überführen läßt. Da Π eine abgeschlossene Umgebung von F bildet, so ist hiermit für die letztere Menge der Satz II bewiesen²⁶⁾.

Durch die Deformation Δ geht die Menge F in eine abgeschlossene Teilmenge Φ von K über.

Wir setzen jetzt identisch $K_0 = K$, $\Phi_0 = \Phi$ und setzen voraus, es wäre uns gelungen, einen Teilkomplex K_m von K und eine abgeschlossene Menge $\Phi_m \subset K_m$ so zu konstruieren, daß

²⁵⁾ Es sei $F_{i_1} \cdot F_{i_2} \cdot \dots \cdot F_{i_k} = 0$. Dann bezeichnen wir durch $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$ eine so kleine positive Zahl, daß kein Punkt des Raumes gleichzeitig von allen Mengen $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_k}$ eine Entfernung $\leq \delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$ hat. Es sei δ die kleinste aller Zahlen $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Es genügt dann vorauszusetzen, daß die Simplexe von \mathfrak{T} einen Durchmesser $< \frac{\delta}{2}$ haben.

²⁶⁾ Wir wollen den kombinatorischen Aufbau des Komplexes $K(\mathfrak{S})$ näher untersuchen und bemerken zu diesem Zweck vor allem, daß $K(\mathfrak{S})$ durch Anwendung der beim Beweise des Hilfssatzes dargestellten Konstruktion auf das System \mathfrak{S} der Komplexe Π_i entstanden und nichts anderes als der Komplex K^{λ} des § 6 ist. Nun hat jeder Komplex $K^{\lambda-k+1}$ folgende kombinatorische Struktur: Es sei $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ein beliebiger, einer nicht leeren Menge $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ entsprechender Punkt, und

$$(14) \quad (i_1, i_2, \dots, i_k), (i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}), \dots, (i_1, i_2, \dots, i_{\lambda'}), \quad (\lambda' \leq \lambda + 1)$$

unter der Bedingung, daß $\Pi_{i_1 i_2 \dots i_k} \neq 0$ ist, und sonst beliebig gegeben. Dann ist

$$(15) \quad \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}, \omega_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}, \dots, \omega_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_{\lambda'}}$$

ein Simplex von $K^{\lambda-k+1}$ bestimmt (und jedes Simplex von $K^{\lambda-k+1}$ läßt sich auf diese Weise konstruieren).

Diese Behauptung ist für $k = \lambda + 1$ selbstverständlich. Vorausgesetzt, sie ist für ein gewisses k richtig, d. h. es ist jedes Simplex T von $K^{\lambda-k+1}$ durch seine Eckpunkte (15) charakterisiert. Jedes Simplex von $K^{\lambda-k+2}$ ist aber von der Form $\Omega(T, \omega_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}})$, so daß zu den Eckpunkten (15) noch der Eckpunkt $\omega_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ hinzukommt und unsere Vorschrift sich also auch für $k - 1$ als richtig erweist. Für $k = 1$ ergibt sie alsdann das kombinatorische Schema von K_{λ}^{λ} , d. h. von $K(\mathfrak{S})$.

1. jedes Simplex von einer Dimension $\geq \lambda - m + 1$ (falls es in K_m vorhanden ist) in Φ_m enthalten ist;

2. die Menge Φ sich in Φ_m stetig so deformieren läßt, daß jeder Punkt von Φ während der ganzen Deformation in demselben Simplex von K bleibt, in dem er ursprünglich enthalten war.

Wir bilden jetzt den Komplex K_{m+1} folgendermaßen: K_{m+1} besteht aus allen in K_m vorhandenen mindestens $(\lambda - m + 1)$ -dimensionalen Simplexen, aus den in Φ_m enthaltenen $(\lambda - m)$ -dimensionalen und aus allen r -dimensionalen, $r < \lambda - m$, Simplexen von K_m .

Die Menge Φ_{m+1} entsteht durch eine stetige Deformation A'_m von Φ_m , die aus folgender, auf alle nicht in Φ_m enthaltenen $\lambda - m$ -dimensionalen Simplexe von K_m angewandten, „Ausfegungsoperation“ besteht. Es sei $T^{\lambda-m}$ ein nicht in Φ_m enthaltenes Simplex von K_m . Dann läßt sich im Innern von $T^{\lambda-m}$ ein zu $T^{\lambda-m}$ homothetisches Simplex $\tau^{\lambda-m}$ finden, welches keinen Punkt von Φ_m enthält.

Nun deformieren wir $\tau^{\lambda-m}$ homothetisch in $T^{\lambda-m}$, wodurch alle Punkte des *Zwischengebietes*

$$T^{\lambda-m} - \tau^{\lambda-m},$$

insbesondere auch alle Punkte von Φ auf den Rand von $T^{\lambda-m}$ befördert werden.

Während der Deformation A_m bleibt jeder Punkt von Φ_m in demselben Simplex von K . Da aber dasselbe auch von der Φ in Φ_m überführenden Deformation A_m gilt, so ist auch für die aus A_m und A'_m resultierende, Φ in Φ_{m+1} überführende Deformation A_{m+1} die Bedingung 2 erfüllt.

Der Prozeß bricht für $m = \lambda + 1$ mit einem Komplex $K_{\lambda+1}$ ab, der mit der entsprechenden Menge $\Phi_{\lambda+1}$ identisch ist. Φ läßt sich in $K_{\lambda+1}$ so deformieren, daß jeder Punkt von $K_{\lambda+1}$ Bildpunkt ist, und während des ganzen Deformationsprozesses kein Punkt von Φ das Simplex von K , in dem er ursprünglich enthalten war, zu verlassen braucht. Da aber aus der Konstruktion des Komplexes K ²⁷⁾ hervorgeht, daß jedes Simplex von K einen Durchmesser $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ hat, so wird während der ganzen Deformation von Φ in $K_{\lambda+1}$ kein Punkt von Φ um mehr als $\frac{\varepsilon}{2}$ verschoben. Andererseits gilt dasselbe für die Deformation von F in Φ , so daß die Deformation von F in $K_{\lambda+1}$, die durch die sukzessive Ausführung der beiden soeben erwähnten Deformationen entsteht, keinen Punkt von F um mehr als $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ von seiner ursprünglichen Lage entfernt. Als

²⁷⁾ Siehe den Beweis des Hilfssatzes und insbesondere Fußnote ²⁶⁾.

Teilkomplex von K ist $K_{\lambda+1}$ höchstens λ -dimensional; aus der Wahl der Zahl ε_0 folgt aber, daß $K_{\lambda+1}$ auch mindestens λ -dimensional, also genau λ -dimensional ist.

Der Satz I ist hiermit für alle in Euklidischen Räumen gelegenen Mengen bewiesen.

Die Erweiterung der soeben gewonnenen Abbildung (von F auf $K_{\lambda+1}$) auf den ganzen Raum geschieht sodann auf Grund der in der Einleitung erwähnten allgemeinen Erweiterungssätze (wobei man mit Hilfe des in § 6 dargestellten Verfahrens überdies für eine beliebige Simplicialumgebung von F erreichen kann, daß außerhalb derselben die erweiterte Abbildung mit der identischen übereinstimmt).

8. Es sei jetzt F eine λ -dimensionale abgeschlossene Teilmenge des R^ω , ε eine beliebig kleine positive Zahl und F_1, F_2, \dots, F_s eine $(\varepsilon, \lambda+1)$ -Überdeckung der Menge F . Es gibt dann ²⁵⁾ ein so kleines $\delta > 0$, daß die Mengen $\bar{S}(F_i, \delta)$ ^{27a)}, $i = 1, 2, \dots, s$, ein $(\varepsilon, \lambda+1)$ -System bilden, woraus insbesondere folgt, daß eine beliebige δ -Deformation der Menge F in eine Menge Φ die F_i in solche Φ_i überführt, daß letztere Mengen eine $(\varepsilon, \lambda+1)$ -Überdeckung von Φ bilden. Es genügt jetzt ein n so zu wählen, daß $\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \delta$ ist, und den ganzen Quader R^ω , der ja durch die Ungleichungen

$$0 \leq x_m \leq \frac{1}{m} \quad (m = 1, 2, \dots \text{ in inf.})$$

definiert ist, auf das gewöhnliche rechtwinklige Parallelepipedon $Q^{n-1} \subset R^\omega$,

$$0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_{n-1} \leq \frac{1}{n-1}, \quad x_n = x_{n+1} = \dots = 0,$$

zu projizieren, indem man jedem Punkt

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots)$$

von R^ω den Punkt

$$x^* = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, \dots)$$

von Q^{n-1} entsprechen läßt. Dadurch wird kein Punkt von R^ω um mehr als $\delta < \varepsilon$ verschoben und die Menge $F \subset R^\omega$ in eine Menge $\Phi \subset Q^{n-1}$ übergeführt, womit alles auf den Euklidischen Fall zurückgeführt ist.

Aus der letzteren Überlegung folgt noch, daß die beiden Sätze I und II auch für unendlichhochdimensionale Mengen gelten, nur wächst die Dimensionszahl der entsprechenden Komplexe mit $\frac{1}{\varepsilon}$ notwendig ins Unendliche.

^{27a)} $\bar{S}(F_i, \delta)$ bedeutet die Gesamtheit aller Punkte von R^ω , deren Entfernung von F_i höchstens gleich δ ist.

IV. Schluß.

9. Es sei \mathfrak{E} irgendein endliches Mengensystem

$$M_1, M_2, \dots, M_s.$$

Wir bezeichnen als *Nerv* dieses Mengensystems den folgendermaßen konstruierten Komplex $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$. Jeder Menge M_i , $i_1 \leq s$, lassen wir einen Eckpunkt ω_{i_1} des Komplexes entsprechen; jedes System von $k+1$ Eckpunkten $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}, \omega_{i_{k+1}}$ bestimmt dann und nur dann ein k -dimensionales Simplex von $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$, wenn

$$M_{i_1} \cdot M_{i_2} \cdot \dots \cdot M_{i_k} \cdot M_{i_{k+1}} \neq 0$$

ist.

Wir wollen durch $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{E})$ denjenigen Komplex bezeichnen, der durch baryzentrische Zerlegung¹³⁾ jedes Simplexes von $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ entsteht. Nun besteht die baryzentrische Zerlegung des Simplexes

$$(16) \quad T^k = [\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}, \omega_{i_{k+1}}]$$

von $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ darin, daß man jeder r -dimensionalen Seite

$$T^r = [\omega_{i_{p_1}}, \omega_{i_{p_2}}, \dots, \omega_{i_{p_{r+1}}}], \quad 0 < r \leq k-1$$

von T^k bzw. dem Simplexe T^k selbst einen „Schwerpunkt“ $\omega_{i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_{r+1}}}$ bzw. $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}}$ zuordnet und T^k durch die Gesamtheit aller $(k+1)!$ Simplexe

$$[\omega_{i_{p_1}, i_{p_2}, i_{p_3}}, \dots, \omega_{i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_k}}, \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}}]$$

ersetzt. Das heißt mit anderen Worten: man schreibt alle Eckpunkte von T^k in einer bestimmten Reihenfolge, z. B. in der Reihenfolge

$$(17) \quad \omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}, \omega_{i_{k+1}}$$

auf und erhält dann, als ein Simplex der baryzentrischen Zerlegung, das Simplex

$$(18) \quad [\omega_{i_1}, \omega_{i_1, i_2}, \dots, \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}, \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}}].$$

Indem man auf alle $(k+1)!$ möglichen Weisen die Reihenfolge (17) wählt, erhält man alle $(k+1)!$ Simplexe der baryzentrischen Zerlegung von T^k .

Wenn man das soeben Gesagte mit dem Ergebnisse der Fußnote²⁶⁾ vergleicht, so sieht man, daß der in dieser Fußnote erwähnte Komplex $K(\mathfrak{E})$ (der ja der im Satze II vorkommende Komplex ist) vom kombinatorischen Standpunkt aus nichts anderes als der Komplex $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{E})$ ist (wo \mathfrak{E} das im § 7 betrachtete System von Komplexen ist). Wenn man aber bemerkt, daß auf Grund der Bedingung (A) (des § 7) das System $\mathfrak{E} = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_s\}$ denselben Nerv hat wie das Mengensystem $\mathfrak{F}_s^{1+1} = \{F_1, F_2, \dots, F_s\}$,

welches eine $(\varepsilon, \lambda + 1)$ -Überdeckung der Menge F darstellt, gelangt man zu folgendem Resultate:

Der Komplex $\tilde{K}_\varepsilon^{\lambda+1}$ des Satzes II, in den sich die Menge F samt einer gewissen Umgebung \bar{U}_ε stetig deformieren läßt, kann vom kombinatorischen Standpunkt aus als der durch baryzentrische Zerlegung des Nerves einer gewissen $(\varepsilon, \lambda + 1)$ -Überdeckung $\mathfrak{P}_\varepsilon^{\lambda+1}$ von F entstandene Komplex betrachtet werden.

Der Komplex $K_\varepsilon^{\lambda+1}$, in den auf Grund des Satzes I die Menge F selbst ε -übergeführt werden kann, entsteht alsdann dadurch, daß man gewisse Simplexe von $\tilde{K}_\varepsilon^{\lambda+1}$ durch die Gesamtheit ihrer Randsimplexe („Ausfegung“) ersetzt.

Nun habe ich in meiner unter ¹⁾ zitierten Arbeit gezeigt, daß die Komplexe, die ein die Menge F (im Sinne der soeben erwähnten Arbeit) approximierendes Spektrum bilden, nichts anderes sind, als die Nerven einer Folge von $(\varepsilon_k, \lambda + 1)$ -Überdeckungen

$$\mathfrak{P}_{\varepsilon_1}^{\lambda+1}, \mathfrak{P}_{\varepsilon_2}^{\lambda+1}, \dots, \mathfrak{P}_{\varepsilon_k}^{\lambda+1}, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0,$$

die gegen Null konvergierenden Werten von ε entsprechen, wodurch ein enger Zusammenhang zwischen der abstrakten „Spektralapproximation“ und dem auf den Begriffen der ε -Überführung beruhenden, in der vorliegenden Arbeit auseinandergesetzten geometrischen Approximationsverfahren festgestellt wird.

Le Batz (Loire-Inférieure), August 1926.

(Eingegangen am 10. 10. 1926.)

Nachträgliche Bemerkung*.

Es ist leicht, dem Hauptergebnis dieser Arbeit eine Form zu geben, die von der Einbettung der Menge F in einen (Euklidischen oder Hilbertschen) Raum unabhängig ist. Es gilt in der Tat der Satz:

F sei ein beliebiger endlich- und zwar λ -dimensionaler kompakter metrischer Raum; dann gibt es zu jedem noch so kleinen ε einen λ -dimensionalen Komplex K_ε^λ und eine eindeutige stetige Abbildung des ganzen Raumes F auf den ganzen Komplex K_ε^λ von der Eigenschaft, daß die Menge

* Gemacht bei der Korrektur (am 5. 7. 1927).